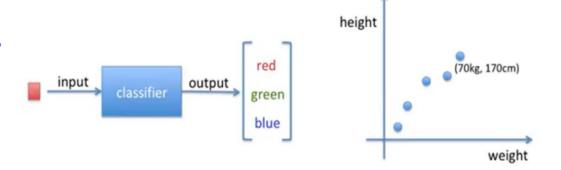
## 회귀와 분류 (regression and classification)

## 회귀(regression)와 분류(classification)

- 회귀 모델
  - 연속적인 값을 예측
    - 캘리포니아의 주택 가격이 얼마인가요?
    - 사용자가 이 광고를 클릭할 확률이 얼마인가요?
- 분류 모델
  - 불연속적인 값을 예측
    - 주어진 이메일 메시지가 스팸인가요, 스팸이 아닌가요?
    - 이 이미지가 강아지, 고양이 또는 햄스터의 이미지인가요?

#### Classification VS Regression



classify input into categorical output

how tall is he if his weight is 80kg?

#### 회귀의 어원

- 회귀 분석(regression analysis)
  - 관찰된 연속형 변수들에 대해 두 변수 사이의 모형을 구한 뒤 적합도를 측정해 내는 분석 방법
  - 회귀분석은 시간에 따라 변화하는 데이터나 어떤 영향, 가설적 실험, 인과 관계의 모델링 등의 통계적 예측에 이용
- 회귀(영어: regress 리그레스[\*])의 원래 의미
  - 옛날 상태로 돌아가는 것을 의미
  - 영국의 유전학자 프랜시스 골턴은 "평균으로의 회귀(regression to the mean)"
    - 부모의 키와 아이들의 키 사이의 연관 관계를 연구하면서 부모와 자녀의 키 사이에는 선형적인 관계가 있고 키가 커지거나 작아지는 것보다는 전체 키 평균으로 돌아가려 는 경향이 있다는 가설을 세웠으며 이를 분석하는 방법을 "회귀분석"이라고 함
    - 이러한 경험적 연구 이후, 칼 피어슨은 아버지와 아들의 키를 조사한 결과를 바탕으로 함수 관계를 도출하여 회귀분석 이론을 수학적으로 정립

## 선형 회귀 (linear regression)

#### 선형 회귀와 로지스틱 회귀

- 단순 선형 회귀 분석(Simple Linear Regression Analysis)
  - 입력: 특징이 하나
  - 출력: 하나의 값

$$H(x) = Wx + b$$

- 키로 몸무게 추정
- 다중 선형 회귀 분석(Multiple Linear Regression Analysis)
  - 입력: 특징이 여러 개, 출력: 하나의 값
    - 역세권, 아파트 평수, 주소로 아파트값을 추정

$$y = W_1 x_1 + W_2 x_2 + \dots W_n x_n + b$$

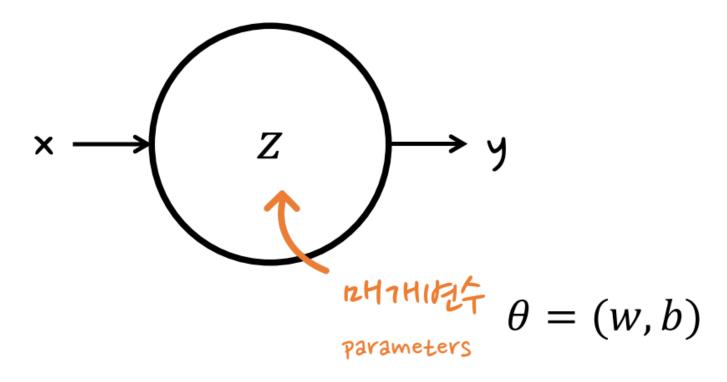
- 로지스틱 회귀(Logistic Regression)
  - 이진 분류(Binary Classification)
  - 입력: 하나 또는 여러 개, 출력: 0 아니면 1
    - 타이타닉의 승객 정보로 죽음을 추정

score(x)	result(y)		
45	불합격		
50	불합격		
55	불합격		
60	합격		
65	합격		
70	합격		

#### 인공지능이란? W와 b 구하기

- 다음 식에서 가중치 W와 편향 b를 구하기
  - W와 b를 매개변수 함

$$H(x) = Wx + b$$

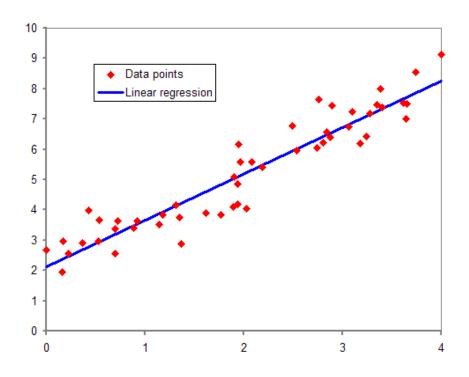


#### 주요 용어 정리

- 가설(Hypothesis)
  - 가중치(weight)와 편향(bias)
  - 기울기와 절편
- 손실 함수(Loss Function)
  - MSE(Mean Square Error 평균제곱오차)
  - Categorical crossentropy
  - Sparse Categorical crossentropy
- 경사 하강법(Gradient Descent)
  - 내리막 경사 따라 가기
- 학습률(learning rate)
  - 대표적인 하이퍼패러미터

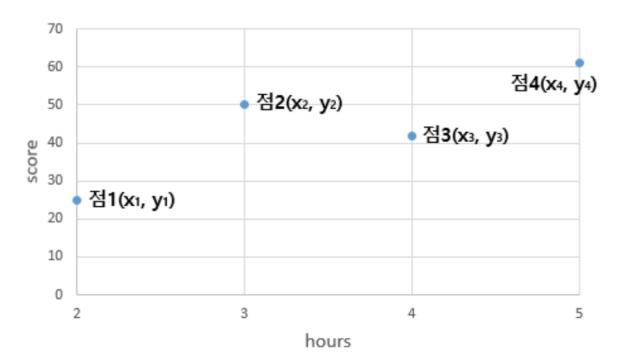
#### 선형 회귀

- Linear regression
  - 데이터의 경향성을 가장 잘 설명하는 하나의 직선을 예측하는 방법
    - Y = aX + b
      - \_ 기울기 a와 절편인 b를 구하는 것
  - \_ 사례
    - 국어와 수학 성적
    - 키와 몸무게
    - 치킨과 맥주의 판매량
    - 기저귀와 맥주의 판매량
- 딥러닝 분야에서
  - 선형 회귀
    - Y = wX + b
      - 가중치 w와 편향인 b를 구하는 것



### 선형 회귀 문제 사례

#### • 공부 시간이 x라면, 점수는 y



hours(x)	score(y)		
2	25		
3	50		
4	42		
5	61		

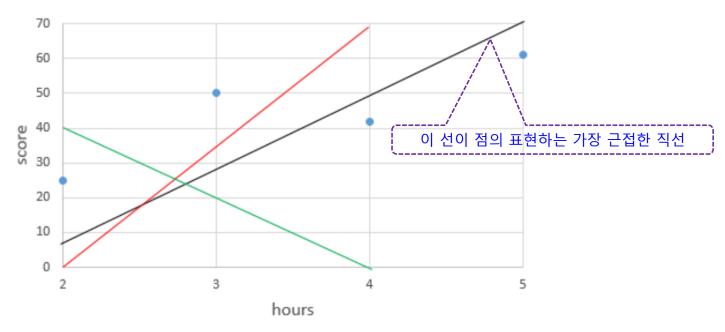
#### • 알려준 데이터로부터 x와 y의 관계를 유추

- 학생이 6시간을 공부하였을 때의 성적
- 그리고 7시간, 8시간을 공부하였을 때의 성적을 예측

#### 가설

- 머신 러닝: y와 x간의 관계를 유추한 식을 가설(Hypothesis)
  - H(x)에서 H는 Hypothesis를 의미

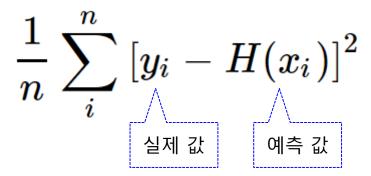
$$H(x)=Wx+b$$
 W:기울기, 가중치 b: 절편, 편향



- 선형 회귀에서 해야할 일은 결국 적절한 W와 b를 찾아내는 일
  - 딥러닝 알고리즘이 하는 것이 바로 적절한 W와 b를 찾아내는 일

## 손실 함수(Loss function)

- 머신 러닝은 W와 b를 찾기 위해서
  - 손실 함수를 정의
    - 실제 값과 가설로부터 얻은 예측 값의 오차를 계산하는 식
  - 손실 함수 값을 최소화하는 최적의 W와 b를 찾아내려고 노력
- 손실 함수(Loss function)
  - 목적 함수(Objective function), 비용 함수(Cost function)라고도 부름
  - 실제 값과 예측 값에 대한 오차에 대한 식
    - 예측 값의 오차를 줄이는 일에 최적화 된 식
  - 평균 제곱 오차(Mean Squared Error, MSE) 등을 사용

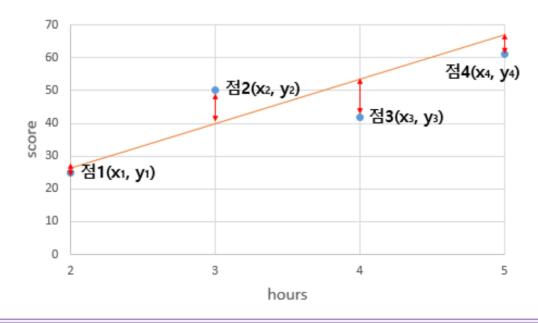


#### 손실 함수: MSE

- W 와 b의 값을 찾아내기 위해 오차의 크기를 측정할 방법이 필요
  - W: 13 b: 1로 예측한다면 y=13x+1 직선이 예측한 함수로 예측 값을 추정

hours(x)	2	3	4	5
실제값	25	50	42	61
예측값	27	40	53	66
오차	-2	10	-7	-5

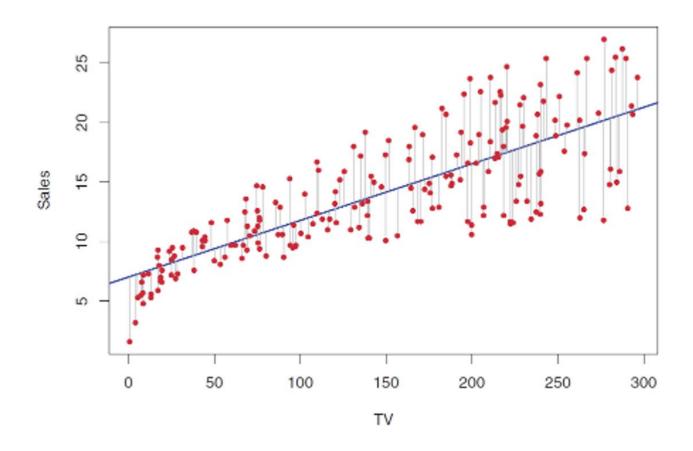
$$\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\left[y_{i}-H(x_{i})\right]^{2}$$



## 손실 함수 MSE 이해

#### MSE

- 오차는 실제 데이터(빨간 점)와 예측 선(파란 선)의 차이의 제곱의 합



#### 손실 함수를 W와 b의 함수로

• 평균 제곱 오차를 W와 b에 의한 비용 함수(Cost function)로 재정의

$$cost(W,b) = rac{1}{n} \sum_{i}^{n} \left[ y_i - H(x_i) 
ight]^2$$

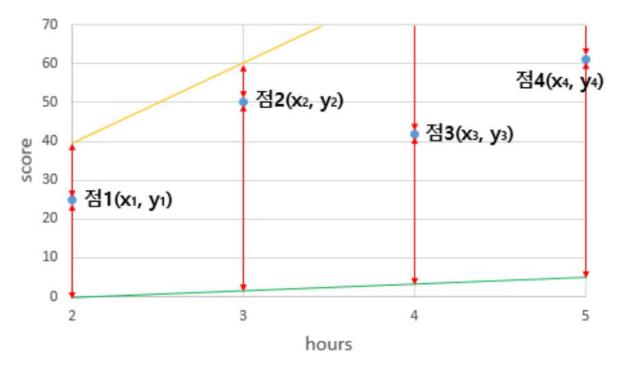
- 모든 점 들과의 오차가 클수록 평균 제곱 오차는 커지며,
  - 오차가 작아질수록 평균 제곱 오차는 작아짐
- 평균 제곱 오차
  - cost(W, b)를 최소가 되게 만드는 W와 b를 구하면
    - 결과적으로 y와 x의 관계를 가장 잘 나타내는 직선을 그릴 수 있게 됨

$$W,b \rightarrow minimize\ cost(W,b)$$

# 최적화 과정

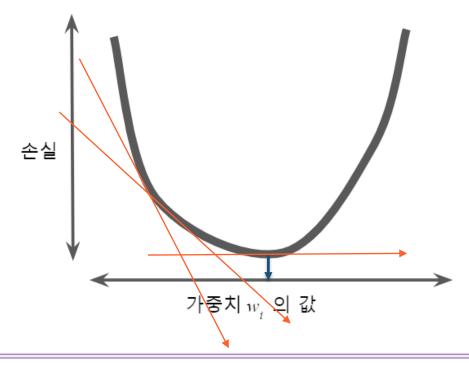
## 옵티마이저(Optimizer): 최적화 과정

- 머신 러닝에서 학습(training)
  - 최적화 알고리즘(Optimizer algorithms)
  - 적절한 W와 b를 찾아내는 과정
    - Gradient Descent(경사 하강법)
      - 비용 함수(Cost Function)의 값을 최소로 하는 W와 b를 찾는 방법
      - 경사 따라 내려 오기



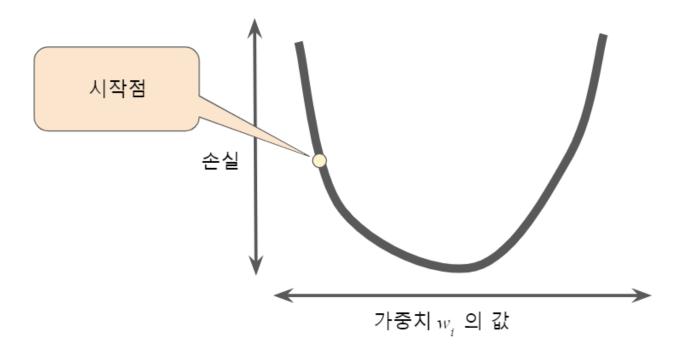
#### 손실과 가중치

- 손실과 가중치 w<sub>i</sub>을 대응한 그림
  - 항상 볼록 함수 모양을 함
    - 도표가 다음과 같이 항상 그릇 모양으로 나타남
- 볼록 문제에는 기울기가 정확하게 0인 지점인 최소값이 하나만 존재
  - 이 최소값에서 손실 함수가 수렴
    - 결국 기울기를 구해야 함



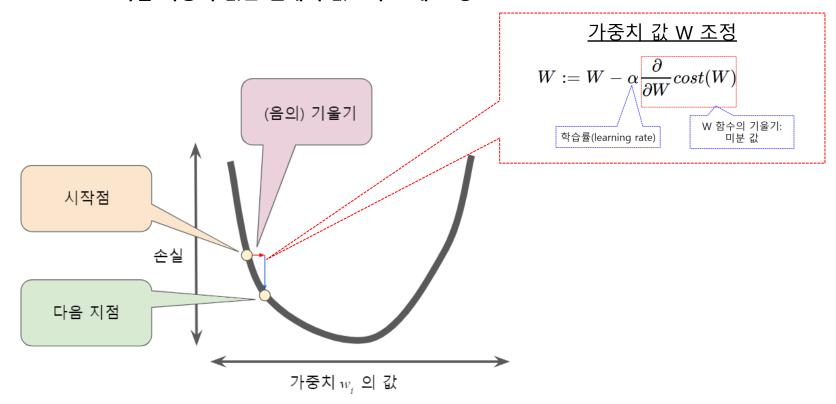
### 경사하강법

- 경사하강법의 첫 번째 단계
  - 시작 값(시작점)을 선택
    - 시작점은 별로 중요하지 않음
    - 따라서 많은 알고리즘에서는 0으로 설정하거나 임의의 값을 선택
  - 시작점에서 손실 곡선의 기울기를 계산
    - 단일 가중치에 대한 손실의 기울기는 미분 값과 같음



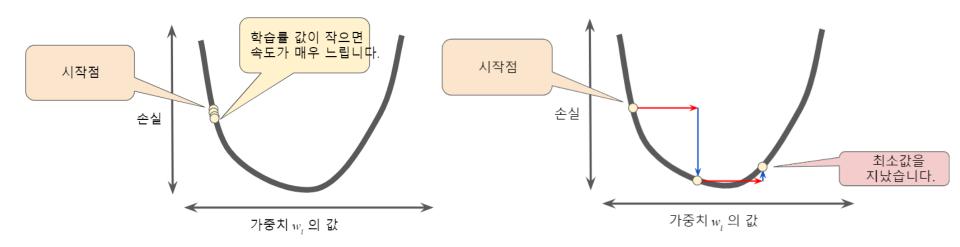
### 가중치의 조정

- 기울기가 0인 지점을 찾기 위해
  - 기울기의 반대 방향으로 이동
    - 현재의 기울기가 음수이면
      - 다음 가중치 값은 현재의 값보다 크게 조정



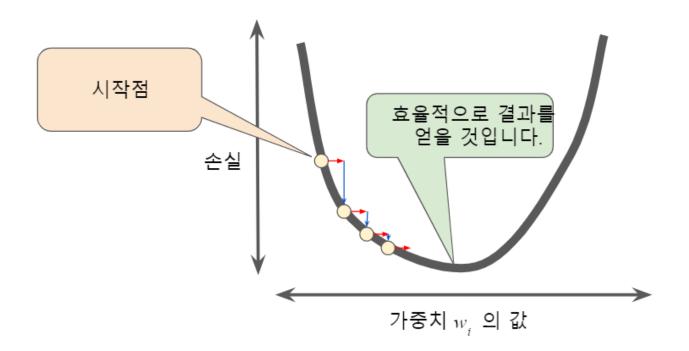
#### 학습률

- 다음 가중치 값 결정 방법
  - 기울기에 학습률(또는 보폭이라 불리는 스칼라)를 곱하여 다음 지점을 결정
    - 예를 들어 기울기가 -2.5이고 학습률이 0.01이면
      - $w = w (-2.5 \times 0.01) = w + 0.025$
      - 경사하강법 알고리즘은 이전 지점으로부터 0.025 떨어진 지점을 다음 지점으로 결정
- 학습률의 값
  - 너무 작게 설정하면 학습 시간이 매우 오래 걸림
    - 반대로 학습률을 너무 크게 설정하면
      - 다음 지점이 곡선의 최저점을 무질서하게 이탈할 우려가 있음



### 적절한 학습률 설정

- 손실 함수의 기울기가 작다면 더 큰 학습률을 시도해 볼 수 있음
  - 작은 기울기를 보완하고 더 큰 보폭을 만들어 냄



#### 초매개변수와 학습률

- 초매개변수(hyperparameter)
  - 딥러닝에서 우리가 설정하는 값
    - 모델 학습을 연속적으로 실행하는 중에 개발자 본인에 의해 조작되는 '손잡이'
  - 예를 들어 학습률은 초매개변수 중 하나
    - 매개변수와 대비되는 개념

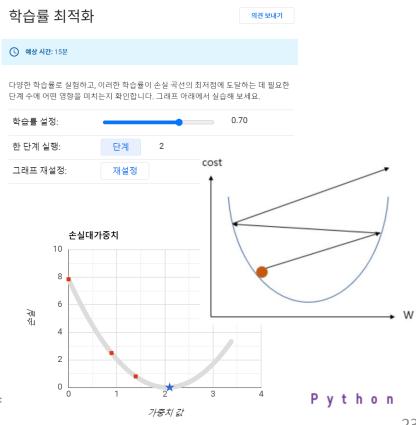
#### 학습률 실험

#### • 다양한 학습률로 실험

- 이러한 학습률이 손실 곡선의 최저점에 도달하는 데 필요한 단계 수에 어떤 영향을 미치는지 확인
- https://developers.google.com/machine-learning/crash-course/fitter/graph?hl=ko
- 머신러닝 단기집중과정 메뉴
  - 손실 줄이기 | 학습률 최적화

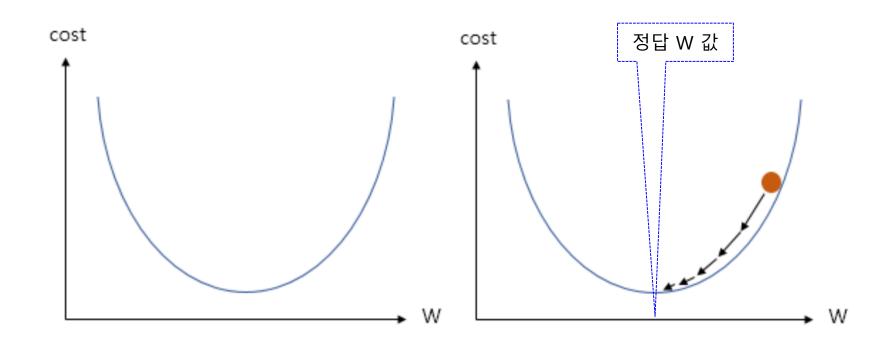
#### 학습률 α

- W의 값을 변경할 때
  - 얼마나 크게 변경할지를 결정
- 얼마나 큰 폭으로 이동할 지를 결정
  - 학습률 α의 값을 무작정 크게 하면
    - W의 값이 발산하는 상황
  - 학습률 α가 지나치게 낮은 값을 가지면
    - 학습 속도가 느려지므로 적당한α의 값을 찾아내는 것도 중요
- 0.001에서 0.1 정도 사용



### cost가 가장 최소값을 가지게 하는 W를 찾는 일

- y = Wx라는 가설 H(x)
  - 비용 함수의 값 cost(W)
    - 설명의 편의를 위해 편향 b가 없이 단순히 가중치 W만을 사용

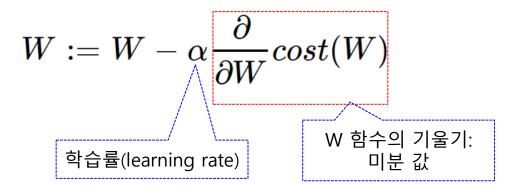


#### 비용 함수와 최적의 W 구하기

비용 함수(Cost function)

$$cost(W) = rac{1}{n} \sum_{i}^{n} \left[ y_i - H(x_i) 
ight]^2$$

- Cost를 최소화하는 W를 구하기 위한 식
  - 해당 식은 접선의 기울기가 0이 될 때까지 반복



- 현재 W에서의 접선의 기울기와 α와 곱한 값을 현재 W에서 빼서 새로운 W의 값으로 다음 손실을 계산
- 학습률(알파): 기울기가 최소인 다음 w로 가기 위한 비율

#### 계산 과정의 의미

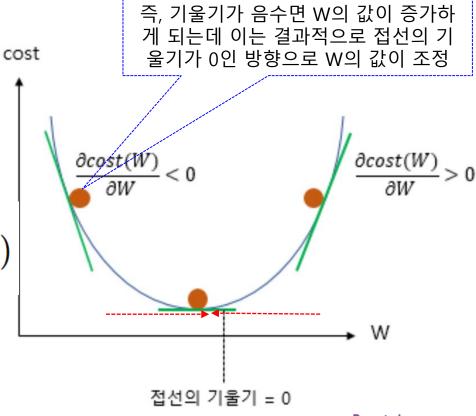
- 현재 W에서 현재 W에서의 접선의 기울기를 빼는 행위의 의미
  - 접선의 기울기가 음수일 때

$$W:=W-lpha(음수)=W+lpha(양수)$$

- 접선의 기울기가 양수일 때

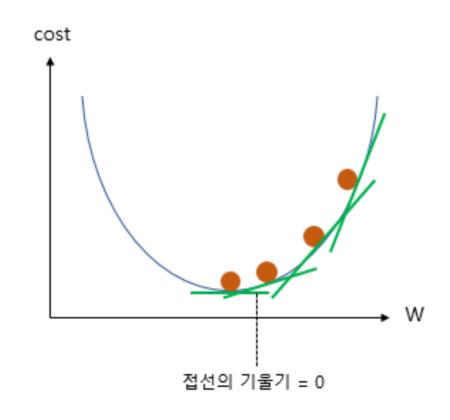
$$W:=W-lpha($$
양수 $)$ 

$$W:=W-lpharac{\partial}{\partial W}cost(W)$$

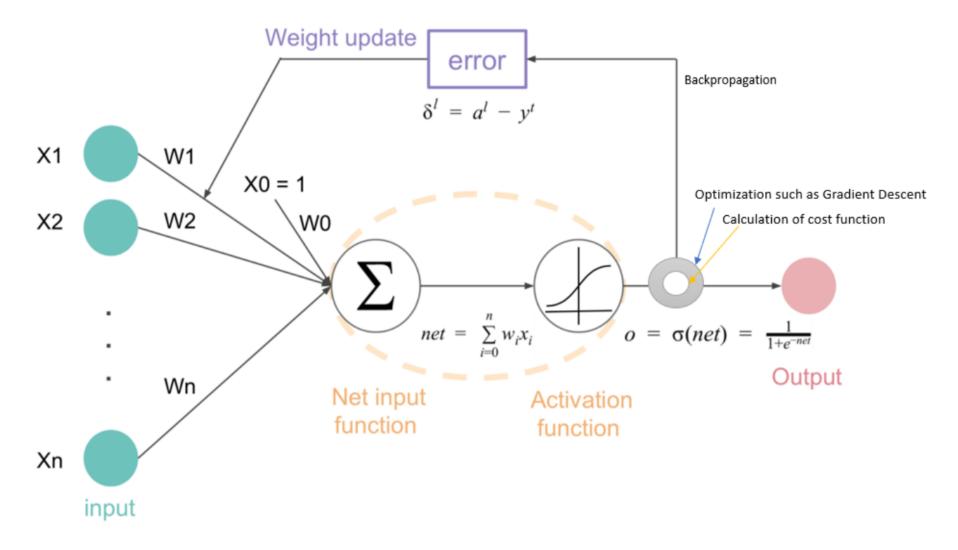


#### 경사 하강법 정리

- 경사 하강법(Gradient Descent)
  - 내리막 경사 따라 가기
  - 접선의 기울기
    - 맨 아래의 볼록한 부분에서는 결국 접선의 기울기가 0
  - cost가 최소화가 되는 지점은 접선의 기울기가 0이 되는 지점
    - 또한 미분값이 0이 되는 지점
  - 경사 하강법의 아이디어
    - 비용 함수(Cost function)를 미분 하여 현재 W에서의 접선의 기울기 를 구하고
    - 접선의 기울기가 낮은 방향으로 W 의 값을 변경하고 다시 미분하고
    - 이 과정을 접선의 기울기가 0인 곳을 향해 W의 값을 변경하는 작업을 반복하는 것



### 손실 함수를 최소로 하는 W와 b 구하는 과정



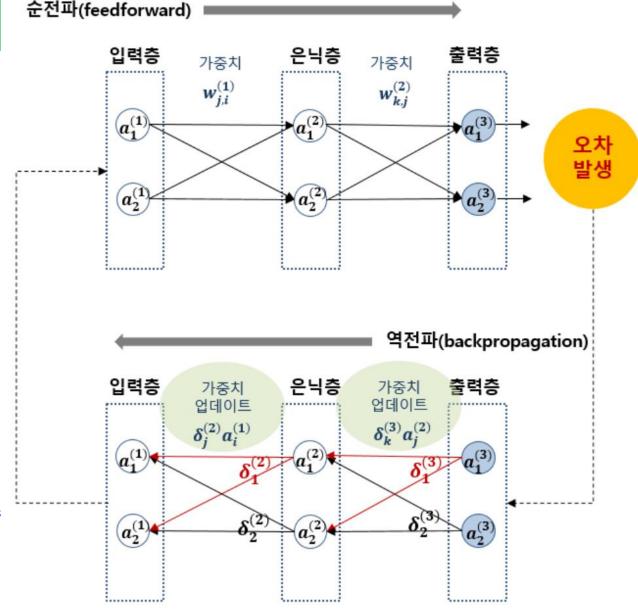
#### 오차역전파

#### • 순전파

입력층에서 출력 층으로 계산해 최 종 오차를 계산하 는 방법

#### 역전파

- 오차 결과 값을 통해서 다시 역으로 input 방향으로 오차가 적어지도록다시 보내며 가중치를 다시 수정하는 방법
- 1986년 제프리 힌 튼이 적용
  - 엄청난 처리 속 도의 증가



선형 회귀 y = 2x 예측

## 소스 파일

07-reg-basic.ipynb

#### 선형 회귀 문제

- y = 2x 에 해당하는 값을 예측
  - 훈련(학습) 데이터
    - x\_train = [1, 2, 3, 4]y\_train = [2, 4, 6, 8]
  - 테스트 데이터
    - x\_test = [1.2, 2.3, 3.4, 4.5]
       y\_test = [2.4, 4.6, 6.8, 9.0]
  - 예측, 다음 x에 대해 예측되는 y를 출력
    - [3.5, 5, 5.5, 6]

## 선형 회귀 케라스 구현(1)

- 하나의 Dense 층
  - 입력은 1차원, 출력도 1차원
- 활성화 함수 linear
  - 디폴트 값, 입력 뉴런과 가중치로 계산된 결과값이 그대로 출력으로

```
import tensorflow as tf

# ① 문제와 정답 데이터 지정

x_train = [1, 2, 3, 4]

y_train = [2, 4, 6, 8]

# ② 모델 구성(생성)

model = tf.keras.models.Sequential([
# 출력, 입력=여러 개 원소의 일차원 배열, 그대로 출력

tf.keras.layers.Dense(1, input_shape=(1, ), activation='linear')

#Dense(1, input_dim=1)

])
```

## 선형 회귀 케라스 구현(2)

- 확률적 경사하강법(Stochastic Gradient Descent)
  - optimizer='SGD'
    - 경사하강법의 계산량을 줄이기 위해 확률적 방법으로 경사하강법을 사용
      - 전체를 계산하지 않고 확률적으로 일부 샘플로 계산

#### mae

- 평균 절대 오차(MAE)
  - 모든 예측과 정답과의 오차 합의 평균
  - n = 오차의 갯수
  - 5 = 합을 나타내는 기호

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |y_j - \hat{y}_j|$$

#### mse

- 오차 평균 제곱합(Mean Squared Error, MSE)
  - 모든 예측과 정답과의 오차 제곱 합의 평균

$$ext{MSE} = rac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{Y_i} - Y_i)^2$$

## 선형 회귀 모델 정보

# 모델을 표시(시각화)
model.summary()

Layer (type) Output Shape Param #

dense\_2 (Dense) (None, 1) 2

Total params: 2
Trainable params: 2
Non-trainable params: 0

## 선형 회귀 모델 학습(훈련)

#### • 히스토리 객체

- 매 에포크 마다의 훈련 손실값 (loss)
- 매 에포크 마다의 훈련 정확도 (accuracy)
- 매 에포크 마다의 검증 손실값 (val loss)
- 매 에포크 마다의 검증 정확도 (val\_acc)

```
# ④ 생성된 모델로 훈련 데이터 학습
# 훈련과정 정보를 history 객체에 저장
history = model.fit(x_train, y_train, epochs=500)
```

#### 선형 회귀 모델 성능 평가 및 예측

#### • 성능 평가

#### 예측

```
# x = [3.5, 5, 5.5, 6]의 예측
print(model.predict([3.5, 5, 5.5, 6]))

pred = model.predict([3.5, 5, 5.5, 6])
# 예측 값만 1차원으로
print(pred.flatten())
print(pred.squeeze())

[[6.9934297]
[9.975829]
[10.969961]
[11.964094]]
[6.9934297 9.975829 10.969961 11.964094]
```

### 손실과 mae 시각화

```
import matplotlib.pylab as plt
# 그래프 그리기
fig = plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(history.history['loss'], label='loss')
plt.plot(history.history['mae'], label='mae')
#plt.plot(history.history['mse'], label='mse')
                              2.00
plt.legend(loc='best')
                                                                        loss
plt.xlabel('epoch')
                             1.75
plt.ylabel('loss')
                             1.50
                             1.25
                            S 1.00
                              0.75
                              0.50
                              0.25
                              0.00
                                         100
                                                 200
                                                         300
                                                                400
                                                                        500
                                                    epoch
```

#### 예측 값 시각화

```
label
                                             prediction
                                        10
import matplotlib.pylab as plt
x \text{ test} = [1.2, 2.3, 3.4, 4.5, 6.0]
y \text{ test} = [2.4, 4.6, 6.8, 9.0, 12.0]
# 그래프 그리기
fig = plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.scatter(x test, y test, label='label')
plt.plot(x test, y test, 'y--')
x = [2.9, 3.5, 4.2, 5, 5.5, 6]
pred = model.predict(x)
plt.scatter(x, pred.flatten(), label='prediction')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
                                                                            Python
```

from tensorflow.keras.models import Sequential from tensorflow.keras.layers import Dense

#### • 입출력 층만 존재

```
# ① 문제와 정답 데이터 지정
x_{train} = [1, 2, 3, 4]
y_{train} = [2, 4, 6, 8]
# ② 모델 구성(생성)
model = Sequential([
   Dense(1, input_shape=(1, ), activation='linear')
   #Dense(1, input_dim=1)
1)
# ③ 학습에 필요한 최적화 방법과 손실 함수 등 지정
# 훈련에 사용할 옵티마이저(optimizer)와 손실 함수, 출력정보를 선택
# Mean Absolute Error, Mean Squared Error
model.compile(optimizer='SGD', loss='mse',
             metrics=['mae', 'mse'])
# 모델을 표시(시각화)
model.summary()
# ④ 생성된 모델로 훈련 데이터 학습
model.fit(x_train, y_train, epochs=1000)
# ⑤ 테스트 데이터로 성능 평가
x_{test} = [1.2, 2.3, 3.4, 4.5]
y_{test} = [2.4, 4.6, 6.8, 9.0]
print('정확도:', model.evaluate(x_test, y_test))
print(model.predict([3.5, 5, 5.5, 6]))
```

# 선형 회귀 y = 2x + 1 예측

## 다음을 예측해 보세요

- x = [0, 1, 2, 3, 4]
- y = [1, 3, 5, ?, ?]

#### 케라스로 예측

- 케라스와 numpy 사용
- 학습에 3개 데이터

```
x = [0, 1, 2, 3, 4]
x[:3]
y = [1, 3, 5, ?, ?]
y[:3]
```

#### 예측

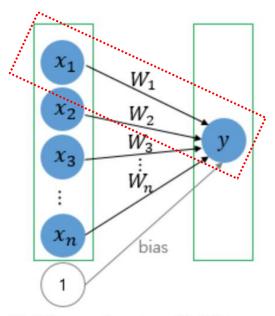
- 뒤 2개 데이터 사용
- x = [0, 1, 2, 3, 4]• x[3:]
- y = [1, 3, 5, ?, ?]
  - y[3:]

```
import tensorflow as tf
import numpy as np
#훈련과 테스트 데이터
x = np.array([0, 1, 2, 3, 4])
y = np.array([1, 3, 5, 7, 9]) #y = x * 2 + 1
#인공신경망 모델 사용
model = tf.keras.models.Sequential()
#은닉계층 하나 추가
model.add(tf.keras.layers.Dense(1, input shape=(1,)))
#모델의 패라미터를 지정하고 모델 구조를 생성
#최적화 알고리즘: 확률적 경사 하강법(SGD: Stochastic Gradient Descent)
#손실 함수(loss function): 평균제곱오차(MSE: Mean Square Error)
model.compile('SGD', 'mse')
#생성된 모델로 훈련 자료로 입력(x[:2])과 출력(y[:2])을 사용하여 학습
#키워드 매개변수 epoch (에퐄): 훈련반복횟수
#키워드 매개변수 verbose: 학습진행사항 표시
model.fit(x[:3], y[:3], epochs=1000, verbose=0)
#테스트 자료의 결과를 출력
print('Targets(정답):', y[3:])
#학습된 모델로 테스트 자료로 결과를 예측(model.predict)하여 출력
print('Predictions(예측):', model.predict(x[3:]).flatten())
```

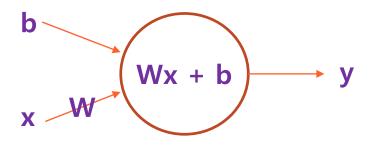
#### 가장 간단히 입력층과 출력층 구성

- y[3:]의 2개 값을 맞추는 인공신경망
  - 먼저 모델에서 W와 b를 구함
  - 완전연결계층
    - fully connected or dense layer
      - 입력 벡터에 가증치 벡터를 내적하고 편향값을 빼주는 연산

```
import tensorflow as tf
import numpy as np
#훈련과 테스트 데이터
x = np.array([0, 1, 2, 3, 4])
y = np.array([1, 3, 5, 7, 9]) #y = x * 2 + 1
#인공신경망 모델 사용
model = tf.keras.models.Sequential()
#은닉계층 하나 추가
model.add(tf.keras.layers.Dense(1, input shape=(1,)))
#모델의 패라미터를 지정한 후 학습
Model.compile('SGD', 'mse')
Model.fit(x[:3], y[:3], epochs=1000, verbose=0)
print('Targets(정답):', y[3:])
print('Predictions(예측):', model.predict(x[3:]).flatten())
```



입력층(input layer) 출력층(output layer)



Python

### 케라스로 예측 순서

- ① 케라스 패키지 임포트
  - import tensorflow as tf
  - import numpy as np
- ② 데이터 지정
  - x = numpy.array([0, 1, 2, 3, 4])
  - y = numpy.array([1, 3, 5, 7, 9]) #y = x \* 2 + 1
- ③ 인공신경망 모델 구성
  - model = tf.keras.models.Sequential()
  - model.add(tf.keras.layers.Dense(출력수, input\_shape=(입력수,)))
- ④ 최적화 방법과 손실 함수 지정해 인공신경망 모델 생성
  - model.compile('SGD', 'mse')
- ⑤ 생성된 모델로 훈련 데이터 학습
  - model.fit(...)
- ⑥ 성능 평가
  - model.evaluate(...)
- ⑦ 테스트 데이터로 결과 예측
  - model.predict(...)

#### 전 소스

```
import tensorflow as tf
import numpy as np
#훈련과 테스트 데이터
x = np.array([0, 1, 2, 3, 4])
y = np.array([1, 3, 5, 7, 9]) #y = x * 2 + 1
#인공신경망 모델 사용
model = tf.keras.models.Sequential()
#은닉계층 하나 추가
model.add(tf.keras.layers.Dense(1, input shape=(1,)))
#모델의 패라미터를 지정하고 모델 구조를 생성
#최적화 알고리즘: 확률적 경사 하강법(SGD: Stochastic Gradient Descent)
#손실 함수(loss function): 평균제곱오차(MSE: Mean Square Error)
model.compile('SGD', 'mse')
#생성된 모델로 훈련 자료로 입력(x[:2])과 출력(y[:2])을 사용하여 학습
#키워드 매개변수 epoch (에퐄): 훈련반복횟수
#키워드 매개변수 verbose: 학습진행사항 표시
model.fit(x[:3], y[:3], epochs=1000, verbose=0)
#테스트 자료의 결과를 출력
print('Targets(정답):', y[3:])
#학습된 모델로 테스트 자료로 결과를 예측(model.predict)하여 출력
print('Predictions(예측):', model.predict(x[3:]).flatten())
```