

Ein Iterationsverfahren zur konformen Abbildung

Rudolf Wegmann

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik,
Föhringer Ring 6, D-8000 München 40, Germany (Fed. Rep.)

An Iterative Method in Conformal Mapping

Summary. In this paper we discuss an iterative method for the calculation of the boundary values of the conformal mapping of a simply connected region G onto a region H with smooth boundary. The method is based on a certain Riemann-Hilbert-problem. It turns out that this problem is the linearised version of a singular integral equation of the second kind. Hence the method is a Newton-method. Whenever the boundaries of G and H are sufficiently smooth, convergence is locally quadratic.

In case G is the unit circle, the solution of the linearised problem can explicitly be represented in terms of integral-transformations. From this one derives a quadratically convergent Newton-like numerical method which avoids the numerical solution of systems of linear equations and therefore is in comparison with other methods, which are based on integral equations, rather economical in terms of computer time and storage requirements.

Subject Classifications. AMS (MOS): 30A28; CR: 5.18.

1. Einleitung

Das Theodorsen-Verfahren (s. [1]) zur Berechnung der konformen Abbildung des Einheitskreises auf ein sternförmiges Gebiet H basiert auf einer nichtlinearen, singulären Integralgleichung 2. Art. Diese wird i.a. durch sukzessive Approximation gelöst. Die Konvergenz dieses Verfahrens der „sukzessiven Konjugiertenbildung“ ist nur unter einschränkenden Voraussetzungen an die Gestalt von H bewiesen. Das Verfahren konvergiert linear. Wenn die Integrale an n Stützstellen diskretisiert werden, benötigt das Verfahren in der elektronischen Rechenmaschine Speicherplätze in der Größenordnung $O(n)$. Die Rechenzeit pro Iterationsschritt ist von der Ordnung $O(n^2)$, was nach [2] durch Anwendung von fast-Fourier-transform reduziert werden kann auf $O(n \log n)$.

Wenn man die Integralgleichung mit dem Newton-Verfahren zu lösen versucht, hat man zwar lokal quadratische Konvergenz. Da aber bei jedem Schritt ein lineares Gleichungssystem der Ordnung n zu lösen ist, müssen mindestens n^2 Zahlen gespeichert werden. Die Rechenzeit ist von der Ordnung $O(n^3)$. Daraus resultieren auch bei großen Maschinen empfindliche Einschränkungen für n .

Bei den anderen Abbildungsverfahren, die auf Integralgleichungen beruhen, wie z.B. den Verfahren von Lichtenstein [1] oder Symm [4], ergeben sich im wesentlichen dieselben Schwierigkeiten hinsichtlich des Rechenaufwandes.

In dieser Arbeit soll ein Verfahren zur Berechnung der konformen Abbildung eines Gebietes G auf ein anderes Gebiet H diskutiert werden, das im Grunde ebenfalls auf einer nichtlinearen Integralgleichung 2. Art beruht. Dabei wird von den einfach zusammenhängenden Gebieten G und H nur vorausgesetzt, daß sie von genügend glatten Jordan-Kurven berandet werden. Die Integralgleichung wird durch ein Newton-Verfahren iterativ gelöst.

Es zeigt sich, daß das Verfahren immer durchführbar ist, d.h. die linearisierte Gleichung ist eindeutig lösbar. Für hinreichend gute Ausgangsnäherung konvergiert das Verfahren. Die Konvergenz ist schließlich quadratisch.

Wenn speziell das Urbildgebiet G der Einheitskreis ist, kann die Lösung der linearisierten Gleichung explizit durch Integraltransformationen dargestellt werden. Damit erhält man ein Verfahren zur Berechnung der konformen Abbildung des Einheitskreises auf ein Gebiet H , das lokal quadratisch konvergiert, das aber in seiner numerischen Durchführung ähnlich ökonomisch ist wie die sukzessive Approximation, denn die Anforderungen an Speicherplatz bzw. Rechenzeit pro Iteration sind von den Größenordnungen $O(n)$ bzw. $O(n^2)$. Durch Anwendung von fast-Fourier-transform-Methoden kann der Rechenzeitbedarf ähnlich wie bei der Methode der sukzessiven Konjugiertenbildung bis in die Größenordnung $O(n \log n)$ gebracht werden.

Bekanntlich kann man viele Probleme der Potentialtheorie in zwei Dimensionen durch konforme Abbildung beträchtlich vereinfachen. So kann man z.B. das Dirichletproblem für ein Gebiet G auf das entsprechende Problem für den Kreis zurückführen und durch die Poisson-Formel geschlossen lösen. Sobald allerdings die konforme Abbildung numerisch berechnet werden muß, bietet das kaum Vorteile, weil die klassischen Integralgleichungsmethoden der konformen Abbildung anscheinend numerisch gleich aufwendig sind wie die Integralgleichungsmethoden der Potentialtheorie. Durch das in dieser Arbeit geschilderte Verfahren, das zumindest im Rechenaufwand sparsamer ist als die üblichen Integralgleichungsmethoden, dürfte die konforme Abbildung auch für die Numerik der Potentialtheorie attraktiver werden.

2. Das Iterationsverfahren

Seien G und H zwei beschränkte einfach zusammenhängende Gebiete, die von Jordan-Kurven Γ bzw. Δ berandet werden. Dann existiert eine konforme Abbildung $\hat{f}: G \rightarrow H$. Jede solche konforme Abbildung \hat{f} kann fortgesetzt werden auf die abgeschlossene Hülle \bar{G} von G und induziert einen Homöomorphismus $\hat{f}: \Gamma \rightarrow \Delta$ der Randkurven. Bekanntlich ist \hat{f} eindeutig festgelegt durch die Werte $\hat{f}(z_v) = c_v$ in einem inneren Punkt $z_1 \in G$ und einem Randpunkt $z_0 \in \Gamma$.

Da die konforme Abbildung durch die Werte auf dem Rand völlig bestimmt ist, kann man sich bei der Berechnung einer konformen Abbildung auf die Berechnung der Randabbildung $\hat{f}: \Gamma \rightarrow \Delta$ beschränken, oder, wenn eine Parameterdarstellung $\eta(s)$ für die Kurve Δ gegeben ist, auf die Angabe einer reellen Funktion $S(\zeta)$ derart, daß

$$\hat{f}(\zeta) = \eta(S(\zeta)) \quad (2.1)$$

gilt. Es kann o.B.d.A. angenommen werden, $\eta(s)$ sei eine 2π -periodische Funktion, welche die Kurve Δ einmal im positiven Sinne durchläuft, wenn s von 0 bis 2π geht. Dann ist S eine stetige mehrdeutige Funktion, die sich bei einem Umlauf auf Γ um 2π ändert. Diese Nebenbedingung, die wir symbolisch so schreiben

$$[S(\zeta)]_{\Gamma} = 2\pi, \quad (2.2)$$

sorgt gerade dafür, daß die analytische Funktion \hat{f} , die (2.1) erfüllt, jeden Wert von H genau einmal annimmt.

Die Problemstellung läßt sich in natürlicher Weise auf den Fall verallgemeinern, wo Δ eine nicht notwendig einfach geschlossene Kurve ist. Sei η stetig differenzierbar mit $\dot{\eta}(s) \neq 0$, und sei κ die Windungszahl von η bezüglich 0. Jede in G analytische, auf \bar{G} stetige Funktion \hat{f} mit (2.1) und (2.2) überlagert durch $w = \hat{f}(z)$ der w -Ebene eine Riemannsche Fläche mit κ Blättern und $\kappa - 1$ Verzweigungspunkten. Es ist dann notwendig $\kappa \geq 1$. Da die Lage der Verzweigungspunkte durch die Kurve selbst nicht festgelegt ist, hat man $\kappa - 1$ zusätzliche Parameter, die man durch weitere Interpolationsbedingungen festlegen kann. Zur Festlegung von \hat{f} hat man also die Nebenbedingungen

$$\hat{f}(z_v) = c_v, \quad v = 0, 1, \dots, \kappa \text{ mit } z_0 \in \Gamma, z_1, \dots, z_{\kappa} \in G, c_0 \in \Delta. \quad (2.3)$$

Wir diskutieren hier eine Methode zur iterativen Bestimmung der Randabbildung $\hat{f}: \Gamma \rightarrow \Delta$ für glatte Bildkurven Δ . Sei η differenzierbar und $\dot{\eta}(s) \neq 0$ für alle s . Die Näherung für die Randabbildung nach der k -ten Iteration sei gegeben durch $f_k(\zeta) = \eta(S_k(\zeta))$. Sie wird zunächst verbessert durch Verschieben der Funktionswerte längs der jeweiligen Tangente an die Bildkurve, d.h. es wird eine reelle Funktion $U_k(\zeta)$ derart bestimmt, daß gilt:

$$\eta(S_k(\zeta)) + U_k(\zeta) \dot{\eta}(S_k(\zeta)) = h_{k+1}(\zeta) \quad (2.4)$$

mit einer in G analytischen, auf \bar{G} stetigen Funktion h_{k+1} mit $h_{k+1}(z_v) = c_v$, $v = 1, \dots, \kappa$.

Für den Randpunkt z_0 liegt der vorgeschriebene Funktionswert c_0 auf Δ , hat also die Gestalt $c_0 = \eta(s_0)$. Da aber $h_{k+1}(z_0)$ auf der Tangente durch den Punkt $\eta(S_k(z_0))$ liegt, ist die Bedingung $h_{k+1}(z_0) = c_0$ im allgemeinen nicht erfüllbar. Sie wird deshalb ersetzt durch

$$U_k(z_0) = s_0 - S_k(z_0). \quad (2.4a)$$

Die analytische Funktion h_{k+1} ist eine Näherung für die gesuchte Abbildungsfunktion \hat{f} , die allerdings auf Γ i.a. nicht Werte aus Δ annimmt. Man erhält

daraus eine neue Näherung für die Parameterabbildung $S(\cdot)$ durch

$$S_{k+1}(\zeta) = S_k(\zeta) + U_k(\zeta). \quad (2.5)$$

Wenn man von einer beliebigen Funktion $S_1(\zeta)$ ausgeht, ist wegen (2.4a) für $k \geq 2$ stets $S_k(z_0) = s_0$, $U_k(z_0) = 0$, und damit auch $h_{k+1}(z_0) = c_0$ erfüllt.

3. Durchführbarkeit

Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (2.4) und (2.4a) entscheidet der folgende Satz. Die Glattheitsvoraussetzungen für die Kurve Γ lassen sich am bequemsten mit einer Parameterdarstellung $\zeta = \zeta(t)$ formulieren.

1. Satz. Seien ζ und η hölderstetig differenzierbar mit $\dot{\zeta}(t) \neq 0$ und $\dot{\eta}(s) \neq 0$ für alle s und t . Sei $S(\zeta)$ eine hölderstetige Funktion mit (2.2). Die Windungszahl κ von η sei positiv. Außerdem seien Punkte $z_1, \dots, z_\kappa \in G$, ein Randpunkt $z_0 \in \Gamma$, komplexe Zahlen c_1, \dots, c_κ und eine reelle Zahl u_0 gegeben. Dann gibt es genau eine auf Γ definierte hölderstetige reelle Funktion $U(\zeta)$ und eine in G analytische, auf \bar{G} stetige Funktion h mit

$$\eta(S(\zeta)) + U(\zeta) \dot{\eta}(S(\zeta)) = h(\zeta), \quad (3.1)$$

die den Interpolationsbedingungen

$$h(z_v) = c_v, \quad v = 1, \dots, \kappa \quad (3.2)$$

und

$$U(z_0) = u_0 \quad (3.3)$$

genügt. Wenn Γ der Einheitskreis ist, kann die Lösung explizit durch Integraltransformationen dargestellt werden.

Beweis. Auf Grund der Voraussetzungen sind die Funktionen $f(\zeta) = \eta(S(\zeta))$ und $g(\zeta) = \dot{\eta}(S(\zeta))$ hölderstetig. Da U reell sein muß, erhält man aus (3.1) folgende Bedingung

$$\operatorname{Re} \frac{h(\zeta)}{i g(\zeta)} = \operatorname{Im} \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)} \quad \text{für } \zeta \in \Gamma. \quad (3.4)$$

Damit ist die Funktion U eliminiert. Man berechnet sie aus einer Lösung von (3.4) gemäß

$$U(\zeta) = (h(\zeta) - f(\zeta))/g(\zeta).$$

Die Gleichung (3.4) ist in der Terminologie von Muskhelishvili ein Riemann-Hilbert-Problem für h . Zur Lösung stützen wir uns auf [3, S. 100–109].

Die Bedingung (2.2) sorgt dafür, daß bei einem Umlauf auf Γ die Kurve Δ genau einmal im positiven Sinne durchlaufen wird. Der Index des Problems ist

also gleich

$$\frac{1}{2\pi} [\arg g(\zeta)/\overline{g(\zeta)}]_r = 2\kappa.$$

Es sei nun zunächst Γ der Einheitskreis. Wenn man einen bestimmten Zweig der Argumentfunktion wählt, ist

$$\Theta(\zeta) = \arg(\zeta^{-2\kappa} g(\zeta)/\overline{g(\zeta)})$$

eine auf Γ hölderstetige Funktion. Damit bildet man

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\Theta(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{für } |z| \neq 1. \quad (3.5)$$

Im folgenden seien für Funktionen F , die außerhalb Γ analytisch sind, mit $F^+(\zeta)$ und $F^-(\zeta)$ die Grenzwerte auf der Kurve bezeichnet bei Annäherung von G bzw. vom Komplement von \bar{G} aus. Wir definieren weiter

$$X(z) = \begin{cases} \exp(Y(z) - \frac{1}{2} Y(0)) & \text{für } |z| < 1 \\ z^{-2\kappa} \exp(Y(z) - \frac{1}{2} Y(0)) & \text{für } |z| > 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{\pi} \int \frac{g(\zeta) \operatorname{Im}(f(\zeta)/g(\zeta)) d\zeta}{X^+(\zeta)(\zeta - z)} \quad \text{für } |z| \neq 1 \quad (3.7)$$

$$h_0(\zeta) = (\Phi^+(\zeta) + \overline{\Phi^-(\zeta)})/2. \quad (3.8)$$

Damit sind die Randwerte einer partikulären Lösung h_0 von (3.4) bestimmt. Die allgemeine Lösung von (3.4) hat dann nach [3, S. 104] die Gestalt

$$h(z) = h_0(z) + P(z) \cdot X(z). \quad (3.9)$$

Dabei ist P ein Polynom vom Grad 2κ , das der Symmetriebedingung

$$P(z) = z^{2\kappa} \overline{P(1/\bar{z})} \quad (3.10)$$

genügt. Es wird nun gezeigt, daß genau ein P existiert, so daß durch die Lösung (3.9) auch die Interpolationsbedingungen (3.2) und (3.3) erfüllt werden. Wir verwenden folgende Abkürzungen

$$\begin{aligned} d_v &= (c_v - h_0(z_v))/X(z_v), \quad v = 1, \dots, \kappa \\ d_0 &= (f(z_0) + u_0 \cdot g(z_0) - h_0(z_0))/X^+(z_0). \end{aligned}$$

Dann erfüllt h genau dann (3.2) und (3.3), wenn gilt

$$P(z_v) = d_v \quad \text{für } v = 0, 1, \dots, \kappa. \quad (3.11)$$

Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden: Wenn alle $z_v \neq 0$ sind, dann muß wegen (3.10) auch

$$P(1/\bar{z}_v) = \bar{d}_v / \bar{z}_v^{2\kappa} \quad \text{für } v = 0, 1, \dots, \kappa \quad (3.12)$$

gelten. Es gilt $z_0 = 1/\bar{z}_0$ und, wie man unter Verwendung der Eigenschaften von h_0 und X nachrechnet, $d_0 = \bar{d}_0/\bar{z}_0^{2\kappa}$. Damit ist P das durch (3.11) und (3.12) eindeutig bestimmte Interpolationspolynom.

Wenn ein z_v im Nullpunkt liegt, etwa $z_\kappa = 0$, dann macht man den Ansatz

$$P(z) = d_\kappa + \bar{d}_\kappa z^{2\kappa} + z P_1(z) \quad (3.13)$$

und bestimmt das Polynom P_1 vom Grad $2(\kappa-1)$ so, daß (3.11) und (3.12) für $v=0, 1, \dots, \kappa-1$ erfüllt sind. Damit ist P auch in diesem Falle eindeutig bestimmt. Wenn man $P_2(z) = z^{2\kappa} \overline{P(1/\bar{z})}$ setzt, sieht man, daß P_2 ebenfalls die Interpolationsbedingungen (3.11) und (3.12) erfüllt und im 2. Fall die Gestalt (3.13) hat. Daraus folgt $P_2 = P$, d.h. P erfüllt (3.10).

Damit hat man im Falle des Einheitskreises die Lösung h durch Quadraturen dargestellt. Da durch die Integraltransformation mit Cauchyschem Kern die Hölderstetigkeit der Funktionen nicht verloren geht, sind die Randwerte von h und damit auch die Funktion U wieder hölderstetig. Man beachte, daß man von allen vorkommenden Funktionen nur die Randwerte F^+ und F^- benötigt. Die zur Bestimmung von P nötigen Werte von h_0 und X in den Punkten z_1, \dots, z_κ kann man daraus bequem mit der Cauchyschen Integralformel berechnen.

Den Fall einer allgemeinen Kurve Γ kann man folgendermaßen auf den Kreis zurückführen. Es sei ψ eine konforme Abbildung des Einheitskreises auf G . Da ζ hölderstetig differenzierbar ist, ist ψ auf der Kreislinie stetig differenzierbar. Deshalb wird jede Hölderbedingung von der Kreislinie durch ψ auf Γ übertragen und umgekehrt. Wenn h eine Lösung von (3.1) bis (3.3) ist, dann ist $h(\psi(w))$ analytisch im Kreis und erfüllt (3.1) bis (3.3) entsprechend modifiziert. Damit folgt die Behauptung.

4. Konvergenz

Wenn man (2.4) mit $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ multipliziert und über Γ integriert, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(\eta(S_k(\zeta)) + U_k(\zeta) \cdot \dot{\eta}(S_k(\zeta))) d\zeta}{\zeta - z} \\ = \begin{cases} 0 & \text{für } z \notin \bar{G}, \\ \frac{1}{2}(\eta(S_k(z) + U_k(z) \cdot \dot{\eta}(S_k(z))) & \text{für } z \in \Gamma, \\ c_v & \text{für } z = z_v, v = 1, \dots, \kappa. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Das ist eine linearisierte Version der Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\eta(S(\zeta)) d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 0 & \text{für } z \notin \bar{G}, \\ \frac{1}{2} \eta(S(z)) & \text{für } z \in \Gamma, \\ c_v & \text{für } z = z_v, v = 1, \dots, \kappa, \end{cases} \quad (4.2)$$

welche die zur konformen Abbildung gehörende Parameterfunktion S charakterisiert. Wichtig ist vor allem die zweite Zeile, die eine nichtlineare singuläre

Integralgleichung 2. Art für S darstellt. Das hier beschriebene Verfahren beruht also im Grunde auf einer Linearisierung dieser Gleichung. Es ist deshalb ein Newton-Verfahren. Man darf deswegen erwarten, daß es lokal quadratisch konvergiert. Das wird im folgenden präzisiert werden.

Für den Rest dieses Abschnittes seien die Kurven Γ und Δ sowie der Hölderexponent μ mit $0 < \mu < 1$ fest. Die Abhängigkeit der auftretenden Konstanten von Γ , Δ und μ erwähnen wir nicht mehr ausdrücklich. Für auf Γ definierte hölderstetige Funktionen definieren wir folgende Norm: Es sei $\|\rho\|_H$ die kleinste Zahl A , für die

- 1) $\|\rho\| \leq A$ in der Maximum-Norm und
- 2) $|\rho(\zeta_1) - \rho(\zeta_2)| \leq A \cdot |\zeta_1 - \zeta_2|^\mu$ gilt.

Wie am Ende des Beweises von Satz 1 kann das Problem (2.4) mit Hilfe einer konformen Abbildung ψ auf den Fall zurückgeführt werden, wo Γ der Einheitskreis ist. Da bei dieser Transformation in den Hölderbedingungen der Exponent μ erhalten und der Koeffizient A mit einem (nur von Γ und μ abhängigen) Faktor versehen wird, können wir uns im folgenden o.B.d.A. auf den Fall des Einheitskreises Γ beschränken. Dafür kann die explizite Darstellung der Lösung verwendet werden.

Aus dem Beweis in [3], S.46, entnimmt man folgende Aussage: Es gibt eine Konstante C_1 derart, daß für die Randwerte Φ^+ und Φ^- des Cauchy-Integrals

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\rho(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

gilt

$$\|\Phi^\pm\|_H \leq C_1 \cdot \|\rho\|_H.$$

Man kann mit dieser Aussage im Beweis von Satz 1 genau verfolgen, wie sich die Abschätzungen für f , g , u_0 und die c_v auf die Hilfsfunktionen Y , X , Φ und h_0 und die Lösung h auswirken und erhält:

2. Satz. Es gibt eine Zerlegung $h = h_f + h_c$ der Lösung h von (2.4), wobei h_f nur von g und f , und h_c nur von g und $c_1, \dots, c_\kappa, u_0$ abhängt. Die Abhängigkeit von f , $c_1, \dots, c_\kappa, u_0$ ist reell linear. Wenn eine Abschätzung $\|g\|_H \leq A_1$ besteht, gibt es Konstanten $C_2(A_1)$ und $C_3(A_1)$, die nur von A_1 abhängen, so daß gilt

$$\|h_f\|_H \leq C_2(A_1) \cdot \|f\|_H,$$

$$\|h_c\|_H \leq C_3(A_1) \cdot \max(|u_0|, |c_1|, \dots, |c_\kappa|).$$

Es gibt die entsprechende Zerlegung $U = U_f + U_c$ mit

$$\|U_f\|_H \leq C_4(A_1) \cdot \|f\|_H,$$

$$\|U_c\|_H \leq C_5(A_1) \cdot \max(|u_0|, |c_1|, \dots, |c_\kappa|).$$

Folgerung. Sei F eine in G analytische auf \bar{G} stetige Funktion. Dann gilt für die Lösung von (2.4) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|h - F\|_H &\leq C_2(A_1) \|f - F\|_H \\ &\quad + C_3(A_1) \cdot \max(|u_0|, |c_1 - F(z_1)|, \dots, |c_k - F(z_k)|), \\ \|U\|_H &\leq C_4(A_1) \cdot \|f - F\|_H + C_5(A_1) \max(|u_0|, |c_1 - F(z_1)|, \dots, |c_k - F(z_k)|).\end{aligned}$$

Beweis. Diese Ungleichung folgt sofort aus dem vorigen Satz, wenn man die Gleichung (2.4) mit der analogen Beziehung

$$F(\zeta) + 0 \cdot g(\zeta) = F(\zeta)$$

vergleicht. \square

Die Zweige der mehrdeutigen Funktion S unterscheiden sich um Vielfache von 2π . Die Norm muß entsprechend modifiziert werden. Das kann so geschehen: Es sei $\|S\|_K \leq A$ genau dann, wenn gilt $|S(\zeta_0)| \leq A$ und $|S(\zeta_1) - S(\zeta_2)| \leq A \cdot |\zeta_1 - \zeta_2|^\mu$ für alle $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ aus Γ bei geeigneter Wahl der Funktionszweige.

3. Satz. Sei η zweimal differenzierbar und $\tilde{\eta}$ erfülle eine Lipschitzbedingung. Wenn $\|S\|_K \leq A_3$ und $\|U\|_H \leq A_4$ gilt, dann gibt es eine Konstante $C_6(A_3, A_4)$, die nur von A_3 und A_4 abhängt, derart daß sich die Differenz

$$D(\zeta) := \eta(S(\zeta) + U(\zeta)) - \eta(S(\zeta)) - U(\zeta) \cdot \dot{\eta}(S(\zeta))$$

abschätzen läßt durch

$$\|D\|_H \leq C_6(A_3, A_4) \cdot \|U\|_H^2.$$

Beweis. Die Differenz $D(\zeta)$ ist das Restglied der Taylorformel für die Funktion

$$\psi(\sigma) := \eta(S(\zeta) + \sigma U(\zeta)).$$

Sie läßt sich deshalb als Integral darstellen

$$D(\zeta) = \int_0^1 (1 - \sigma) \tilde{\eta}(S(\zeta) + \sigma U(\zeta)) U^2(\zeta) d\sigma.$$

Da η zweimal lipschitzstetig differenzierbar ist, gibt es ein L derart, daß

$$|\tilde{\eta}(s)| \leq L \quad \text{für alle } s$$

und

$$|\tilde{\eta}(s_1) - \tilde{\eta}(s_2)| \leq L|s_1 - s_2| \quad \text{für alle } s_1, s_2$$

gilt. Für den Integranden $I_\sigma(\zeta)$ erhält man damit die Ungleichung

$$\begin{aligned}\|I_\sigma\|_H &\leq L(2 + \|S\|_K + \|U\|_H) \cdot \|U\|_H^2 \\ &\leq L(2 + A_3 + A_4) \cdot \|U\|_H^2.\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus

$$\|D\|_H = \left\| \int_0^1 I_\sigma d\sigma \right\|_H \leq \int_0^1 \|I_\sigma\|_H d\sigma. \quad \square$$

Aus den vorstehenden Aussagen kann ein lokaler Konvergenzbeweis für das Iterationsverfahren zusammengestellt werden. Die Iteration läuft folgendermaßen ab.

$$f_k(\zeta) := \eta(S_k(\zeta)), \quad g_k(\zeta) := \dot{\eta}(S_k(\zeta)) \quad \text{für } k \geq 1.$$

Man löst das Problem

$$f_k(\zeta) + U_k(\zeta) \cdot g_k(\zeta) = h_{k+1}(\zeta)$$

mit einer analytischen Funktion h_{k+1} mit $h_{k+1}(z_v) = c_v$, $v = 1, \dots, \kappa$, und $U_k(z_0) = s_0 - S_k(z_0)$ und gewinnt damit das neue S_{k+1} durch

$$S_{k+1}(\zeta) = S_k(\zeta) + U_k(\zeta).$$

Sei $A_3 \geq \|S_1\|_K + 1$, $A_4 := 1$, $A_1 := L \cdot (1 + A_3)$, wobei hier und im folgenden L eine Konstante ist, für die gilt:

$$|\dot{\eta}(s_1) - \dot{\eta}(s_2)| \leq L|s_1 - s_2| \quad \text{und} \quad |\dot{\eta}(s)| \leq L.$$

Solange gilt:

$$\|S_k\|_K \leq A_3, \quad \|U_k\|_H \leq A_4 \quad \text{und} \quad \|g_k\|_H \leq A_1, \quad (4.3)$$

ist nach Satz 3 für $k \geq 2$

$$\|f_k - h_k\|_H \leq C_6(A_3, A_4) \cdot \|U_{k-1}\|_H^2$$

und nach der Folgerung zu Satz 2

$$\begin{aligned} \|U_k\|_H &\leq C_4(A_1) \|f_k - h_k\|_H \\ &\leq q \cdot \|U_{k-1}\|_H^2 \quad \text{mit} \quad q := C_6(A_3, A_4) \cdot C_4(A_1). \end{aligned}$$

Für

$$\|U_1\|_H \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \|U_1\|_H \leq 1/2q \quad (4.4)$$

ist also

$$\|U_k\|_H \leq \frac{1}{2} \cdot \|U_{k-1}\|_H \leq \frac{1}{2^k} \leq A_4$$

und wegen $S_k = S_1 + U_1 + \dots + U_{k-1}$.

$$\begin{aligned} \|S_k\|_K &\leq \|S_1\|_K + \|U_1\|_H + \dots + \|U_{k-1}\|_H \\ &\leq \|S_1\|_K + 1 \leq A_3 \end{aligned}$$

und

$$\|g_k\|_H \leq L(1 + \|S_k\|_K) \leq A_1.$$

Die Bedingungen (4.3) bleiben also erhalten. Das Verfahren konvergiert also immer dann, wenn (4.4) erfüllt ist zusammen mit

$$A_3 \geq \|S_1\|_K + 1, \quad A_4 = 1, \quad A_1 = L(1 + A_3) \quad (4.5)$$

und

$$q := C_6(A_3, A_4) \cdot C_4(A_1).$$

Das ist eine Bedingung an S_1 , die man mit Hilfe der Folgerung zu Satz 2 in eine bequemere Form bringen kann.

4. Satz. Sei η zweimal lipschitzstetig differenzierbar und sei $\hat{f}(\zeta) = \eta(S(\zeta))$ eine Lösung des Abbildungsproblems. Dann gibt es eine Zahl $C_7 > 0$ derart, daß für alle Startwerte S_1 mit $\|S_1 - S\|_H \leq C_7$ das Iterationsverfahren konvergiert. Die Konvergenz ist quadratisch.

Beweis. Sei $V := S_1 - S$ und $D_1(\zeta) := \eta(S_1(\zeta)) - \eta(S(\zeta))$. Dann ist $D_1(\zeta) = \int_0^1 \dot{\eta}(S(\zeta) + \sigma V(\zeta)) V(\zeta) d\sigma$.

Für den Integranden gilt die Abschätzung

$$\|I_\sigma\|_H \leq L(1 + \|S\|_K + \|V\|_H) \cdot \|V\|_H,$$

woraus für $\|V\|_H \leq 1$ folgt

$$\|D_1\|_H \leq L(2 + \|S\|_K) \cdot \|V\|_H.$$

Sei $A_3 := \|S\|_K + 2$, $A_4 := 1$, $A_1 := L(1 + A_3)$.

Dann ist $\|S_1\|_K \leq \|S\|_K + \|V\|_H \leq A_3 - 1$, so daß also (4.5) erfüllt ist. Nach der Folgerung zu Satz 2 gilt

$$\begin{aligned} \|U_1\|_H &\leq C_4(A_1) \cdot \|D_1\|_H + C_5(A_1) \cdot |V(z_0)| \\ &\leq (C_4(A_1) \cdot L(2 + \|S\|_K) + C_5(A_1)) \cdot \|V\|_H. \end{aligned}$$

Es gibt also ein C_7 mit $0 < C_7 \leq 1$ derart, daß für alle V mit $\|V\|_H \leq C_7$ die Bedingung (4.4) erfüllt ist. Daraus folgt die Konvergenz. \square

Der Satz 4 setzt voraus, daß der Startwert S_1 dicht bei der richtigen Lösung liegt. Das ist nicht nachzuprüfen, solange man die Lösung nicht kennt. Praktisch bedeutsamer ist deshalb der folgende Satz, der es gestattet, die Lösung des gegebenen Problems ausgehend von einem Problem mit bekannter Lösung über eine Kette von jeweils zueinander benachbarten Problemen zu erreichen.

Sei $\eta_\theta(s)$ eine Kurvenschar, zweimal stetig differenzierbar nach s , die gleichmäßig in θ folgenden Abschätzungen genügt:

$$|\eta_\theta^{(r)}(s)| \leq L, \quad |\eta_\theta^{(r)}(s_1) - \eta_\theta^{(r)}(s_2)| \leq L|s_1 - s_2| \quad \text{für } r = 0, 1, 2$$

und

$$|\dot{\eta}_\theta(s)| \geq L_1 > 0.$$

5. Satz. Sei $\eta_\theta(s)$ für $0 \leq \theta \leq \theta_0$ eine Kurvenschar wie oben beschrieben und seien $f_0(\zeta) = \eta_0(\hat{S}_0(\zeta))$ die Randwerte einer konformen Abbildung auf das von η_0

berandete Gebiet. Danach gibt es eine Konstante $C_8 > 0$ derart, daß das Verfahren zur Bestimmung einer Abbildungsfunktion f_θ mit $f_\theta(\zeta) = \eta_\theta(\hat{S}_\theta(\zeta))$, $f_\theta(z_v) = c_{v\theta}$ und $\hat{S}_\theta(z_0) = s_{0\theta}$ ausgehend vom Startwert $S_1 = \hat{S}_0$ sicher dann konvergiert, wenn gilt

$$\|\eta_\theta(\hat{S}_0(\cdot)) - f_0\|_H \leq C_8$$

$$|c_{v\theta} - f_0(z_v)| \leq C_8 \quad \text{für } v = 1, \dots, \kappa$$

und

$$|s_{0\theta} - \hat{S}_0(z_0)| \leq C_8.$$

Beweis. Um (4.5) zu erfüllen setzt man $A_3 := \|\hat{S}_0\|_K + 1$, $A_4 = 1$, $A_1 := L(1 + A_3)$.

Man überzeugt sich leicht, daß in alle Abschätzungen von der Kurve η nur die Konstanten L und L_1 eingehen. Man kann also alle Konstanten wählen, daß sie unabhängig vom Scharparameter θ sind. Wenn man ein θ gewählt hat, das den Ungleichungen des Satzes genügt, dann liefert die Folgerung zu Satz 2

$$\|U_1\|_H \leq (C_4(A_1) + C_5(A_1)) \cdot C_8.$$

Es gibt also ein $C_8 > 0$ derart, daß daraus (4.4) und damit die Konvergenz folgt.

5. Numerische Durchführung

Zur numerischen Anwendung des Iterationsverfahrens hat man prinzipiell zwei Möglichkeiten.

a) Man kann die Integralgleichung (4.1) diskretisieren und sich daraus die Änderungen U berechnen. Das kann so gemacht werden, daß die diskretisierte Gleichung (4.1) die Linearisierung der entsprechend diskretisierten nichtlinearen Gleichung (4.2) ist. Man erhält so also wieder ein Newton-Verfahren und kann daraus auf die Konvergenz schließen. Wir verfolgen das hier nicht weiter.

b) Wenn Γ der Einheitskreis ist, kann man die explizite Darstellung der Lösung durch Integrale verwenden.

Alle Funktionen werden an $n = 2N$ äquidistanten Punkten $\zeta_\sigma = \exp(i\theta_\sigma)$, $\theta_\sigma = \theta_0 + \frac{\sigma \cdot \pi}{N}$, $\sigma = 1, \dots, n$ diskretisiert. Die Integrale werden folgendermaßen ausgewertet: Durch trigonometrische Interpolation stellt man in

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

die Belegungsfunktion ρ durch ein Polynom in ζ und ζ^{-1} dar

$$\rho(\zeta_\sigma) = \sum_{v=-N}^{+N} a_v \zeta_\sigma^v$$

und kann dann für die singulären Integrale folgende Ausdrücke verwenden:

$$F^+(\zeta_\sigma) = \sum_{v=0}^N a_v \zeta_\sigma^v, \quad F^-(\zeta_\sigma) = - \sum_{v=-N}^{-1} a_v \zeta_\sigma^v.$$

Die Integrale werden also durch Fouriertransformation ausgewertet. Wenn man dafür die fast-Fourier-transform-Methode verwendet, kann die Integraltransformation, die ρ in F^\pm überführt, mit $O(n \log n)$ Rechenoperationen bewerkstelligt werden.

Die Iteration geht folgendermaßen vor sich. Es wird vorausgesetzt, daß die Funktionen $\eta(s)$, $\dot{\eta}(s)$ und $\Theta_0(s) := \arg \dot{\eta}(s)$ formelmäßig gegeben sind, und daß Anfangswerte $S_1(\zeta_\sigma)$ vorliegen. Wenn dann S_k für ein $k \geq 1$ berechnet ist, läuft der nächste Iterationsschritt so ab. Man bestimmt

$$f_k(\zeta_\sigma) = \eta(S_k(\zeta_\sigma)),$$

$$g_k(\zeta_\sigma) = \dot{\eta}(S_k(\zeta_\sigma)),$$

$$\Theta(\zeta_\sigma) = 2\Theta_0(S_k(\zeta_\sigma)) - 2\kappa\theta_\sigma.$$

Daraus werden Y und X nach den Formeln (3.5) und (3.6) berechnet. Zur Fortsetzung kann man sich auf verschiedene Varianten der Formelsätze des 3. Paragraphen stützen, die im kontinuierlichen Fall zum gleichen Resultat führen, in der Diskretisierung aber numerische Verfahren mit wesentlich verschiedenen Eigenschaften liefern.

Das erste Verfahren geht von dem Formelapparat aus, wie er im 3. Paragraphen steht. Man bestimmt Φ und h_0 entsprechend den Formeln (3.7) und (3.8), setzt dann

$$h_{k+1}(z) = h_0(z) + P(z)X(z)$$

und wählt das Polynom P so, daß gilt

$$P(z_0)X^+(z_0) = (s_0 - S_k(z_0)) \cdot g_k(z_0) + f_k(z_0) - h_0(z_0),$$

$$P(z_v)X(z_v) = c_v - h_0(z_v) \quad \text{für } v=1, \dots, \kappa.$$

Man wird natürlich so diskretisieren, daß z_0 unter den ζ_σ vorkommt. Zur Berechnung von $h_0(z_v)$ bzw. $Y(z_v)$ für $v \geq 1$ verwendet man die Cauchyformel bzw. die Darstellung (3.5), die man mit der Rechteckformel diskretisieren kann. Dann wird $X(z_v) = \exp(Y(z_v) - \frac{1}{2}Y(0)) \neq 0$, und man kann P als Interpolationspolynom ermitteln. Man setzt dann schließlich

$$S_{k+1}(\zeta_\sigma) = S_k(\zeta_\sigma) + \operatorname{Re}((h_{k+1}(\zeta_\sigma) - f_k(\zeta_\sigma))/g_k(\zeta_\sigma)).$$

Das zweite Verfahren führt den ersten Iterationsschritt genauso aus, wie das erste, berechnet aber für $k \geq 2$ das Φ nach der Formel

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{\pi} \int \frac{g_k(\zeta) \operatorname{Im}((f_k(\zeta) - h_k(\zeta))/g_k(\zeta)) d\zeta}{X^+(\zeta)(\zeta - z)}.$$

Daraus wird h_0 nach (3.8) bestimmt. Damit setzt man

$$h_{k+1}(z) = h_k(z) + h_0(z) + P(z)X(z)$$

und ermittelt das Polynom P so, daß gilt

$$P(z_v) = -h_0(z_v)/X(z_v) \quad \text{für } v=0, 1, \dots, \kappa.$$

Beide Verfahren müssen solange der Konvergenz des kontinuierlichen Verfahrens folgen, bis sich der Diskretisierungsfehler bemerkbar macht. Während die erste Variante dann den Charakter einer sukzessiven Approximation annimmt, deren Konvergenz unsicher zu sein scheint, zeigt die zweite Variante lokal quadratische Konvergenz, die auch theoretisch beweisbar ist. Nach den bisherigen Erfahrungen scheint aber die erste Variante genauere Ergebnisse zu liefern als die zweite. Die Beispiele des nächsten Paragraphen zeigen dieses Verhalten sehr deutlich.

6. Beispiele

Wir haben mit den am Ende der vorigen Nummer unter b) beschriebenen Verfahren die Abbildung des Einheitskreises $\zeta(t) = e^{it}$ auf einige der Gebiete mit bekannter Abbildungsfunktion (s. [1], S. 264) gerechnet. Um einen Eindruck von dem Verhalten bezüglich Konvergenz und Genauigkeit zu geben, zeigen wir hier einige Ergebnisse für Abbildungen auf gespiegelte Ellipsen. Für diese ist $\eta(s) = \rho(s) \cdot e^{is}$ mit

$$\rho(s) = \sqrt{1 - (1 - p^2) \cos^2 s}, \quad 0 < p < 1.$$

Wenn $s(0) = 0$ und $\hat{f}(0) = 0$ ist, ist die theoretische Randabbildung gegeben durch $\operatorname{tg} s = p \operatorname{tg} t$.

In den Tabellen 1 und 2 notieren wir für die Rechnungen mit Parameterwerten $p = 0,8, 0,6, 0,4$ und $n = 40$ und 80 die maximalen Änderungen $\|U_k\|$ in der k -

Tabelle 1. Maximale Änderung $\|U_k\|$ in der k -ten Iteration und Fehler nach der 10. Iteration für die Abbildung auf gespiegelte Ellipsen, gerechnet mit dem 1. Verfahren

k	$n=40$			$n=80$	
	p				
	0.8	0.6	0.4	0.6	0.4
1	0.11	0.25	0.42	0.25	0.41
2	0.39E-2	0.26E-1	0.10	0.26E-1	0.10
3	0.52E-5	0.27E-3	0.89E-2	0.28E-3	0.53E-2
4	0.12E-9	0.57E-5	0.19E-2	0.34E-7	0.30E-4
5	0.58E-11	0.90E-6	0.42E-3	0.56E-9	0.25E-5
6	0.27E-12	0.14E-6	0.41E-4	0.89E-10	0.13E-6
7	0.13E-13	0.23E-7	0.28E-5	0.14E-10	0.71E-8
8	0.19E-14	0.36E-8	0.18E-6	0.22E-11	0.39E-9
9	0.21E-14	0.57E-9	0.11E-7	0.36E-12	0.50E-10
10	0.26E-14	0.90E-10	0.70E-9	0.58E-13	0.10E-9
$\ S_{11}-S\ $	0.10E-9	0.57E-6	0.18E-3	0.56E-12	0.40E-7

Tabelle 2. Wie Tabelle 1, aber mit dem 2. Verfahren gerechnet

k	$n=40$			$n=80$	
	p				
	0.8	0.6	0.4	0.6	0.4
1	0.11	0.25	0.42	0.25	0.41
2	$0.39E-2$	$0.26E-1$	$0.97E-1$	$0.26E-1$	0.10
3	$0.52E-5$	$0.28E-3$	$0.46E-2$	$0.28E-3$	$0.54E-2$
4	$0.91E-11$	$0.29E-7$	$0.94E-5$	$0.33E-7$	$0.14E-4$
5	$0.26E-15$	$0.50E-15$	$0.50E-10$	$0.61E-15$	$0.11E-9$
6	$0.34E-15$	$0.31E-15$	$0.28E-15$	$0.27E-15$	$0.37E-15$
$\ S_{11}-S\ $	$0.57E-7$	$0.21E-3$	$0.18E-1$	$0.13E-6$	$0.87E-3$

ten Iteration und den Fehler $\|S_{11}-S\|$ nach der 10. Iteration. Als Anfangsnäherung wurde immer $S_1(t) \equiv t$ genommen.

Beim ersten Verfahren zeigt die Konvergenz in der Anfangsphase einen quadratischen Verlauf, später einen linearen. Der Übergang findet dann statt, wenn die Änderung $\|U_k\|$ von der Größenordnung des Diskretisierungsfehlers (letzte Zeile) wird. Im Beispiel der letzten Spalte deutet sich schon das unsichere Konvergenzverhalten an.

Im Gegensatz dazu wird die Rechnung beim 2. Verfahren bei durchweg quadratischer Konvergenz schon ab dem sechsten Iterationsschritt im Rahmen der Maschinengenauigkeit stationär. Die erzielten Ergebnisse sind allerdings wesentlich ungenauer als beim 1. Verfahren.

Literatur

1. Gaier, D.: Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1964
2. Henrici, P.: Einige Anwendungen der schnellen Fouriertransformation. In: Moderne Methoden der numerischen Mathematik (L. Collatz, Hrsg.), S. 111–124. Basel-Stuttgart: Birkhäuser 1976
3. Muskhelishvili, N.I.: Singular integral equations. Groningen: Noordhoff 1953
4. Symm, G.T.: An integral equation method in conformal mapping. Numer. Math. 9, 250–258 (1966)

Eingegangen am 14. November 1977