Tema 3

Shanti ZMUSCHI și Andrei IANĂU

10/01/2020

Profesor: Olariu E. Florentin

Problema 1

Presupun ca exista un e-flux fezabil, asta inseamna ca exista $x : E \to \mathbb{R}$ astfel incat

$$0 \le x_{ij} \le c_{ij}, \forall ij \in E$$

$$\sum_j x_{ij} = \sum_j x_{ji} \forall i \in V - (X \cup Y)$$

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} \le \sigma_i \forall i \in X \Rightarrow \sum_j x_{ij} \le \sum_j x_{ji} + \sigma_i \forall i \in X (1)$$

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} \le \theta_i \forall i \in Y \Rightarrow \sum_j x_{ij} \le \sum_j x_{ji} + \theta_i \forall i \in Y (2)$$

Consideram doua multimi aleatoriu alese: S si T astfel incat $S \cup T = V \wedge S \cap T = \emptyset$

$$(1) \wedge (3) \Rightarrow \sum_{ji \in E; i \in X \cap T} x_{ji} \ge \sum_{ij \in E; i \in X \cap T} x_{ij} - \sum_{i \in X \cap T} \sigma_i$$

$$(2) \wedge (3) \Rightarrow \sum_{ji \in E; i \in Y \cap S} x_{ji} \ge \sum_{ij \in E; i \in Y \cap S} x_{ij} - \sum_{i \in Y \cap S} \theta_i$$

Din cele doua anterioare rezulta:

$$\sum_{ji \in E; j \in Y \cap S; i \in X \cap T} x_{ji} \ge \sum_{i \in Y \cap S} \theta_i - \sum_{i \in X \cap T} \sigma_i + \sum_{ij \in E; j \in Y \cap S; i \in X \cap T} x_{ij}$$

Inseamna ca

$$x_{ij} \ge 0, \forall ij \in E \Rightarrow 2 \sum_{ij \in E; j \in Y \cap S; i \in X \cap T} x_{ij} \ge 0$$

$$\Rightarrow \sum_{ij \in E; j \in Y \cap S; i \in X \cap T} x_{ij} \ge \sum_{i \in Y \cap S} \theta_i - \sum_{i \in X \cap T} \sigma_i$$

$$ji \in E \Rightarrow \sum_{ji \in E} x_j i \leq \sum ji \in E c_j i$$

Din cele doua anterioare rezulta:

$$\sum_{ji \in E; j \in Y \cap S; i \in X \cap T} c_{ji} \geq \sum_{i \in Y \cap S} \theta_i - \sum_{i \in X \cap T} \sigma_i + \sum_{ij \in E; j \in Y \cap S; i \in X \cap T} x_{ij}$$

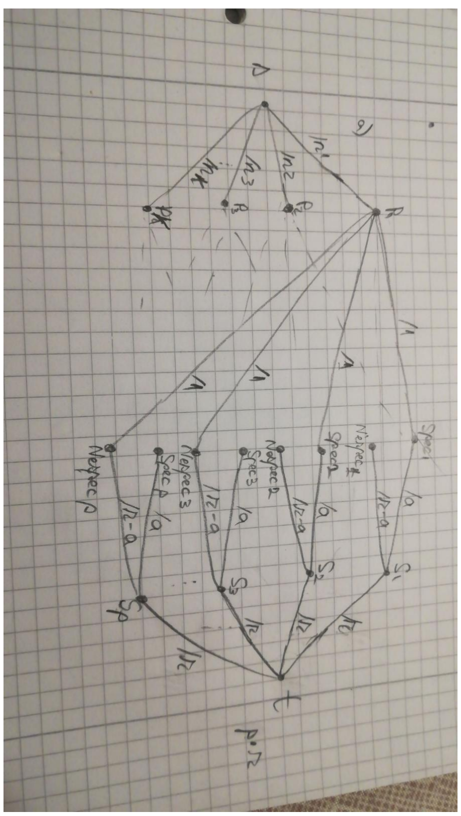
$$c_{ij} \geq 0, \forall ij \in E \Rightarrow \sum_{ji \in E; j \in S; i \in T} c_{ji} \geq \sum_{ji \in E; j \in Y \cap S; i \in X \cap T} c_{ji}$$

Din cele doua anterioare rezulta:

$$\sum_{ji \in E; j \in S; i \in T} c_{ji} \geq \sum_{i \in Y \cap S} \theta_i - \sum_{i \in X \cap T} \sigma_i$$

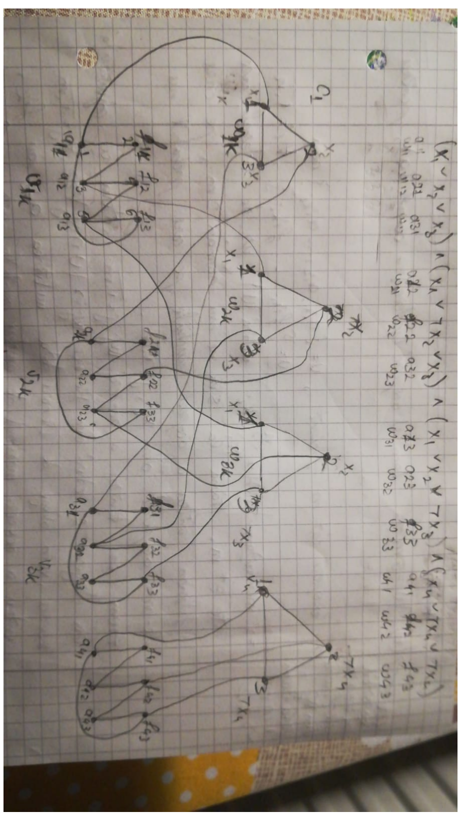
Problema 2

(a)(b)



Modelam reteaua astfel (ca in poza). O unitate de flux inseamna ca un profesor va judeca o lucrare de licenta (muchie $s \to P_i$). Toate muchiile $s \to P_i$ au capacitatea maxima n_i (adica poate participa maxim la n_i prezentari). Apoi, din acesta vor iesi muchii catre $Spec_i$, $Nespec_i$ daca acesta este specializat sa judece licenta studentului i, respectiv nu este specializat. Aceste muchii vor avea capacitatea 1 (adica va fi sau nu prezent la prezentare). Fiecare nod $Spec_i$, $Nespec_i$ va avea muchie catre un S_i cu o capacitate de a (adica cei specializati vor fi in numar de a), respectiv $r - a$ (adica cei specializati vor fi in numar de $r - a$). Astfel fiecare student S_i va avea muchie cu t de capacitate r, ceea ce inseamna ca daca in total, fluxul maxim in t este pr, unde p este numarul de studenti, inseamna ca prezentarea licentelor poate avea loc. (c) Folosind algoritmul Edmonds-Karp vom avea o complexitate de $O(VE^2)$

Problema 3



Datorita definitiei lui $G_i, \forall v \in V(G_i), v_j = \begin{cases} a_{ij}, & \text{daca } j\%2 = 0, \\ f_{ij}, & \text{altfel.} \end{cases}$ j fiind index a lui v, numerotand de la a_{i1}. Astfel pentru a putea acoperi toate muchiile cu o multime de cardinal minim tb sa alegem nodurile de pe pozitii pare sau impare, astfel formandu-se chiar multimile $a_{i1}, ...a_{ik_i}$ sau $f_{i1}, ...f_{ik_i}$

(b1) Este imposibil sa acoperim cele 3 muchii din $W_j, \forall j = 1...m$ daca luam un singur nod. Astfel pentru a acoperi toate muchiile trebuie sa luam minim 2 noduri. qed.

(b2) Cum multimea U acopera (din ipoteza), inseamna ca conform (a), pentru a acoperi cat mai eficient, $\bigcup_{i=1}^{n} \{a_{i,l} | l = 1...k_i\}$, astfel vom avea $|U| = \sum_{i=1}^{n} k_i$. Adica cardinal de U este numarul de literali, care este de fapt $3m$. Cum acesta este cel mai bun caz (adica minimul), putem luat oricate noduri din V_i astfel incat $|U \cap (\bigcup_{i=1}^{n} V_i)| \geq 3m$

(b3) Din punctele precedente: pt a acoperi muchiile lui $V_i \forall i = 1...n$, vom alege sau $\{a_{i1}, ...a_{ik_i}\}$ sau $\{f_{i1}, ...f_{ik_i}\}$. Avem $|U| = \sum_{i=1}^{n} k_i = 3m$ momentan. Pentru a acoperi si restul muchiilor neacoperite, vom alege din nodurile fiecarui W_j si vom alege cate doua dintre nodurile care au 3 muchii care au 3 muchii neacoperite. Atfel vom avea $|U| = \sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{i=1}^{m} 2 = 3m + 2m = 5m$.

(b4) $\Rightarrow$Din definitiile multimilor A si F vom avea ca daca toate aparitiile lui x_i sunt ne-negate (astfel avand evaluate clauzele in care se regasesc la adevarat), vom avea faptul ca vom alege multimea $a_{i1}, ...a_{ik_i}$ pentru a putea acoperi G cu U, $|U| = 5m$ (conform punctelor anterioare). $\Leftarrow$ Deoarece am ales $U \cap V_i = a_{i1}, ...a_{ik_i}$, inseamna ca toate aparitiile literlului x_i sunt pozitive, ceea ce face ca asignarea $t(x_i) = true$ sa faca clauza in care apare x_i sa fie evaluata la adevarat

Problema 4

(a) Conform spuselor din curs, daca aplicam algoritmul de colorare greedy, vom avea clase de de clolorare optimale $\{S_i | i = 1...\chi(G)\}$ astfel incat cel putin una dintre S_i este o multime stabila maximala. (curs agr11.pdf)

(b) $\chi(G) \leq \chi(G + xy)$. De asemenea, daca luam ın considerare o colorare de $G|xy$ cu $\chi(G|xy)$ culori, atunci putem colora graful G prin colorarea x si y aceeasi culoare ca (x, y) contractat si coloram totul la fel. Deci $\chi(G) \leq \chi(G|xy)$. Acum daca $\chi(G) < \chi(G + xy)$, stim ca fiecare colorare de G folosind $\chi(G)$ culori trebuie sa aiba x si y colorate la fel. In caz contrar, am putea folosi aceeasi colorare pentru $G + xy$. Alegem o colorare de G cu culori $\chi(G)$. Atunci pentru graficul $G|xy$, trebuie sa luam ın considerare exact aceeasi colorare, unde fiecare $v \neq x, y$ este colorat la fel ca ın G, iar nodul contractat (x, y) are aceeasi culoare ca x si y(deoarece x si y au aceeasi culoare). Asta inseamna ca daca $\chi(G) < \chi(G + xy)$, atunci $\chi(G) = \chi(G|xy)$.