第五章 一阶逻辑等值演算与推理

主要内容

- 一阶逻辑等值式与基本的等值式
- 置换规则、换名规则
- 前束范式
- 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$及其推理规则

一阶逻辑等值式实例

在一阶逻辑中，有些命题可以有不同的符号化形式。

例如："没有不犯错误的人。"，

取全总个体域时有下面两种不同的符号化形式：

F(x)：x是人，**G(x)：x**犯错误**.**

（**1**）$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

（**2**）$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

与命题逻辑一样，称（1）与（2）是等值的。

5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

定义5.1 设A, B是两个谓词公式, 如果$A\leftrightarrow B$是永真式, 则称A与B**等值**, 记作$A\Leftrightarrow B$, 并称$A\Leftrightarrow B$是**等值式**。

基本等值式

第一组 命题逻辑中16组基本等值式的代换实例

例如，$\neg\neg\forall xF(x)\Leftrightarrow\forall xF(x)$,

$\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y) \Leftrightarrow \neg\forall xF(x)\vee\exists yG(y)$

第二组

(1) 消去量词等值式

设个体域为有限集$D=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$，则有

① $\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\dots\wedge A(a_n)$

② $\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\dots\vee A(a_n)$

基本等值式

(2) 量词否定等值式

① $\neg\forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$

② $\neg\exists xA(x) \Leftrightarrow \forall x\neg A(x)$

(3) 量词辖域收缩与扩张等值式.

$A(x)$ 是含 x 自由出现的公式，B 中不含 x 的自由出现

关于全称量词的：

① $\forall x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\vee B$

② $\forall x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge B$

③ $\forall x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\rightarrow B$

④ $\forall x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$

基本等值式

关于存在量词的：

① $\exists x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee B$

② $\exists x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\wedge B$

③ $\exists x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\rightarrow B$

④ $\exists x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$

(4) 量词分配等值式

① $\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

② $\exists x(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

注意：$\forall$对$\vee$，$\exists$对$\wedge$无分配律

置换规则、换名规则

1. 置换规则

设$\Phi(A)$是含A的公式，那么若$A \Leftrightarrow B$，则$\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$.

2. 换名规则

设A为一公式，将A中某量词辖域中个体变项的所有约束出现及相应的指导变元换成该量词辖域中未曾出现过的个体变项符号，其余部分不变，设所得公式为A'，则$A' \Leftrightarrow A$.

例： $\exists x F(x) \wedge G(x,y)$

$\Leftrightarrow \exists t F(t) \wedge G(x,y)$

实例

例1 将下面命题用两种形式符号化，并证明两者等值：

(1) 没有不犯错误的人

解：令$F(x)$：x是人，$G(x)$：x犯错误.

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ 或 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

$\Leftrightarrow \forall x\neg(F(x)\wedge\neg G(x))$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \forall x(\neg F(x)\vee G(x))$ 置换

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 置换

实例

(2) 不是所有的人都爱看电影

解： 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：爱看电影.

$$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) \quad \text{或} \quad \exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

$$\begin{aligned}
&\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) && \\
\Leftrightarrow\ &\exists x\neg(F(x)\rightarrow G(x)) && \text{量词否定等值式} \\
\Leftrightarrow\ &\exists x\neg(\neg F(x)\vee G(x)) && \text{置换} \\
\Leftrightarrow\ &\exists x(F(x)\wedge\neg G(x)) && \text{置换}
\end{aligned}$$

实例

例2 将公式化成等值的不含既有约束出现、又有自由出现的个体变项：$\forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

解：$\forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists tG(x,t,z))$　　换名规则

$\Leftrightarrow \forall x\exists t(F(x,y,z)\rightarrow G(x,t,z))$　　辖域扩张等值式

实例

例3 设个体域$D=\{a,b,c\}$, 消去下述公式中的量词:

(1) $\forall x\exists y(F(x)\to G(y))$

解法一

$$\forall x\exists y(F(x)\to G(y))$$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\to \exists yG(y))$　　量词辖域收缩等值式

$$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\to G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

$$\Leftrightarrow (F(a)\to G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

$$\wedge(F(b)\to G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

$$\wedge(F(c)\to G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

实例

解法二

$$\forall x \exists y(F(x) \to G(y))$$

$$\Leftrightarrow (\exists y(F(a) \to G(y))) \wedge (\exists y(F(b) \to G(y))) \wedge (\exists y(F(c) \to G(y)))$$

$$\Leftrightarrow ((F(a) \to G(a)) \vee (F(a) \to G(b)) \vee (F(a) \to G(c)))$$

$$\wedge ((F(b) \to G(a)) \vee (F(b) \to G(b)) \vee (F(b) \to G(c)))$$

$$\wedge ((F(c) \to G(a)) \vee (F(c) \to G(b)) \vee (F(c) \to G(c)))$$

实例

(2) $\exists x\forall yF(x,y)$

$$\exists x\forall yF(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(F(x,a)\wedge F(x,b)\wedge F(x,c))$$

$$\Leftrightarrow (F(a,a)\wedge F(a,b)\wedge F(a,c))$$

$$\vee(F(b,a)\wedge F(b,b)\wedge F(b,c))$$

$$\vee(F(c,a)\wedge F(c,b)\wedge F(c,c))$$

5.2 一阶逻辑前束范式

定义5.2 设A为一个一阶逻辑公式，若A具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$$

则称A为**前束范式**，

其中Q_i $(1\le i \le k)$为$\forall$或$\exists$，B为不含量词的公式.

例如： $\forall x\neg(F(x)\wedge G(x))$

$\forall x\exists y(F(x)\to(G(y)\wedge H(x,y)))$ 是前束范式

而 $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$

$\forall x(F(x)\to\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$ 不是前束范式

前束范式存在定理

定理5.1（前束范式存在定理）

一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式

例4 求下列公式的前束范式

(1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

解 $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x)\vee\neg F(x))$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow \forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$

后两步结果都是前束范式，说明公式的前束范式不唯一.

求前束范式的实例

(2) $\forall x F(x) \land \neg \exists x G(x)$

解 $\forall x F(x) \land \neg \exists x G(x)$

$\Leftrightarrow \forall x F(x) \land \forall x \neg G(x)$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \land \neg G(x))$ （量词分配等值式）

或

$\forall x F(x) \land \neg \exists x G(x)$

$\Leftrightarrow \forall x F(x) \land \forall x \neg G(x)$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \forall x F(x) \land \forall y \neg G(y)$ 换名规则

$\Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \land \neg G(y))$ 量词辖域扩张等值式

求前束范式的实例

(3) $\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$

解 $\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$

$\Leftrightarrow \forall zF(z)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$ 换名规则

$\Leftrightarrow \exists z\exists y(F(z)\rightarrow(G(x,y)\wedge\neg H(y)))$ 辖域收缩扩张规则

5.3 一阶逻辑的推论理论

推理的形式结构

1. $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$

   若此式是永真式, 则称推理正确, 记作$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$

2. 前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$

   结论: B

推理定理: 永真的蕴涵式

推理定律(一阶逻辑中的永真蕴涵式)

第一组 命题逻辑推理定律的代换实例

如, $\forall xF(x)\wedge\exists yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)$

第二组 基本等值式生成的推理定律

如, $\forall xF(x) \Rightarrow \neg\neg\forall xF(x)$, $\neg\neg\forall xF(x) \Rightarrow \forall xF(x)$

$\neg\forall xF(x) \Rightarrow \exists x\neg F(x)$, $\exists x\neg F(x) \Rightarrow \neg\forall xF(x)$

第三组 其他常用推理定律

(1) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$

(2) $\exists x(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

(3) $\forall x(A(x)\to B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\to\forall xB(x)$

(4) $\exists x(A(x)\to B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\to\exists xB(x)$

（书本第80页红色字体处书上印刷错误，请修正！）

证明：$\forall x(A(x)\to B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\to\forall xB(x)$

证：证明上述是永真蕴涵式即可.

设$G=\forall x(A(x)\to B(x))$，$H=\forall xA(x)\to\forall xB(x)$

设I是满足G的任意一个解释，

（1）若$T_I(\forall x(A(x))=0$，则$T_I(\forall x(A(x)\to B(x))=1$；

（2）若$T_I(\forall x(A(x))=1$，则在I下对任意$x\in D$，有$T_I(A(x))=1$，

又由$T_I(\forall x(A(x)\to B(x))=1$，

则任意$x\in D$，$T_I(A(x)\to B(x))=1$，因此$T_I(B(x))=1$，

即$T_I(\forall x(B(x))=1$

因此有$T_I(\forall xA(x)\to\forall xB(x))=1$

证明：$\exists x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$

证： $\exists x(A(x) \to B(x))$

$\Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B(x))$

$\Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \vee \exists x B(x)$

$\Leftrightarrow \neg \forall x A(x) \vee \exists x B(x)$

$\Leftrightarrow \forall x A(x) \to \exists x B(x)$

$\Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$

自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$

定义5.3 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$定义如下:

1. 字母表. 同一阶语言$\mathscr{L}$的字母表

2. 合式公式. 同一阶语言$\mathscr{L}$的合式公式

3. 推理规则:

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

(4) 假言推理规则

(5) 附加规则

(6) 化简规则

(7) 拒取式规则

自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$

(8) 假言三段论规则

(9) 析取三段论规则

(10) 构造性二难推理规则

(11) 合取引入规则

(12) ∀-规则

(13) ∀+规则

(14) ∃-规则

(15) ∃+规则

构造推理证明的实例

例5 在自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$中构造下面推理的证明, 取个体域R: 任何自然数都是整数. 存在自然数. 所以, 存在整数.

解 设$F(x)$:x是自然数, $G(x)$:x是整数.

前提: $\forall x(F(x)\to G(x))$, $\exists xF(x)$

结论: $\exists xG(x)$

证明:

① $\forall x(F(x)\to G(x))$	前提引入
② $F(x)\to G(x)$	①$\forall$-
③ $F(x)\to \exists xG(x)$	②$\exists$+
④ $\exists xF(x)$	③前提引入
⑤ $\exists xG(x)$	③④$\exists$-

构造推理证明的实例

例6 在自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$中构造下面推理的证明，取个体域R:
不存在能表示成分数的无理数. 有理数都能表示成分数.
所以, 有理数都不是无理数.

解 设$F(x)$:x是无理数, $G(x)$:x是有理数, $H(x)$:x能表示成分数.

前提: $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$, $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论: $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

证明:

① $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$ 前提引入

② $\forall x(\neg F(x)\vee\neg H(x))$ ①置换

③ $\forall x(F(x)\rightarrow\neg H(x))$ ②置换

④ $F(x)\rightarrow\neg H(x)$ ③$\forall$-

构造推理证明的实例

⑤ $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$	前提引入
⑥ $G(x)\rightarrow H(x)$	⑤$\forall$-
⑦ $H(x)\rightarrow\neg F(x)$	④置换
⑧ $G(x)\rightarrow\neg F(x)$	⑥⑦假言三段论
⑨ $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$	⑧$\forall$+

构造推理证明的实例

例 凡偶数都能被2整除. 6是偶数. 所以, 6能被2整除.

解 设$F(x)$:x是偶数, $G(x)$:x是能被2整除.

前提: $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$, $F(6)$

结论: $F(6)\rightarrow G(6)$

证明:

① $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
② $F(x)\rightarrow G(x)$	①$\forall$-
③ $F(6)$	前提引入
④ $F(6)\rightarrow G(6)$	②③

重要提示

要特别注意使用∀-、∀+、∃-、∃+规则的条件.

反例1. 对$A=\forall x\exists yF(x, y)$使用∀-规则, 推得$B=\exists yF(y, y)$.

取解释I: 个体域为R, $\overline{F}(x, y): x > y$

在I下A被解释为$\forall x\exists y(x>y)$, 真; 而B被解释为$\exists y(y>y)$, 假

原因: 在A中x自由出现在$\exists y$的辖域$F(x, y)$内

反例2. 前提: $P(x)\to Q(x)$, $P(x)$

结论: $\forall xQ(x)$

取解释I: 个体域为Z, $\overline{P}(x): x$是偶数, $\overline{Q}(x): x$被2整除

在I下前提为真, 结论为假, 从而推理不正确

反例2(续)

"证明"：

① $P(x)\to Q(x)$ 前提引入

② $P(x)$ 前提引入

③ $Q(x)$ ①②假言推理

④ $\forall xQ(x)$ ③$\forall$+

错误原因: 在④使用$\forall$+规则, 而x在前提的公式中自由出现.

第五章 习题课

主要内容

- 一阶逻辑等值式

  基本等值式，置换规则、换名规则、代替规则

- 前束范式
- 推理的形式结构
- 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$

  推理定律、推理规则

基本要求

- 深刻理解并牢记一阶逻辑中的重要等值式, 并能准确而熟练地应用它们.
- 熟练正确地使用置换规则、换名规则、代替规则.
- 熟练地求出给定公式的前束范式.
- 深刻理解自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$的定义，牢记$N_{\mathscr{L}}$中的各条推理规则，特别是注意使用∀−、∀+、∃+、∃− 4条推理规则的条件.
- 能正确地给出有效推理的证明.

练习1

1. 给定解释I如下:

(1) 个体域D={2,3}

(2) $\bar{a}=2$

(3) $\bar{f}(x): \bar{f}(2)=3, \quad \bar{f}(3)=2$

(4) $\bar{F}(x): \bar{F}(2)=0, \quad \bar{F}(3)=1$

$\bar{G}(x,y): \bar{G}(2,2)=\bar{G}(2,3)=\bar{G}(3,2)=1, \quad \bar{G}(3,3)=0$

求下述在I下的解释及其真值:

$\forall x \exists y(F(f(x)) \wedge G(y,f(a)))$

解 $\Leftrightarrow \forall x F(f(x)) \wedge \exists y G(y,f(a))$

$\Leftrightarrow F(f(2)) \wedge F(f(3)) \wedge (G(2,f(2)) \vee G(3,f(2)))$

$\Leftrightarrow 1 \wedge 0 \wedge (1 \vee 0) \Leftrightarrow 0$

练习2

2.求下述公式的前束范式:

$$\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))$$

解　使用换名规则,

$$\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))$$

$$\Leftrightarrow \forall zF(z)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))$$

$$\Leftrightarrow \exists z(F(z)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))$$

$$\Leftrightarrow \exists z\exists y(F(z)\rightarrow(G(x,y)\wedge H(x,y)))$$

使用代替规则

$$\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))$$

$$\Leftrightarrow \forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(z,y)\wedge H(z,y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x(F(x)\rightarrow\exists y(G(z,y)\wedge H(z,y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\rightarrow(G(z,y)\wedge H(z,y)))$$

练习3

3.构造下面推理的证明:

(1) 前提：$\forall x(F(x)\to G(x)), \forall xF(x)$

结论：$\forall xG(x)$

证明：

① $\forall x(F(x)\to G(x))$	前提引入
② $F(y)\to G(y)$	①∀−
③ $\forall xF(x)$	前提引入
④ $F(y)$	③∀−
⑤ $G(y)$	②④假言推理
⑥ $\forall yG(y)$	⑤∀+
⑦ $\forall xG(x)$	⑥置换

练习3(续)

(2) 前提：$\forall x(F(x)\vee G(x))$, $\neg\exists xG(x)$

结论：$\exists xF(x)$

证明：用归谬法

① $\neg\exists xF(x)$	结论否定引入
② $\forall x\neg F(x)$	①置换
③ $\neg\exists xG(x)$	前提引入
④ $\forall x\neg G(x)$	③置换
⑤ $\forall x(F(x)\vee G(x))$,	前提引入
⑥ $\neg F(c)$	②$\forall-$
⑦ $\neg G(c)$	④$\forall-$
⑧ $F(c)\vee G(c)$	⑤$\forall-$
⑨ $G(c)$	⑥⑧析取三段论
⑩ $\neg G(c)\wedge G(c)$	⑦⑨合取引入

练习3(续)

(3)前提：$\forall x(F(x)\to G(x)), \forall x(G(x)\to H(x))$

结论：$\forall xF(x)\to\forall xH(x)$

证明: 用附加前提法

① $\forall xF(x)$	附加前提引入
② $F(x)$	①$\forall-$
③ $\forall x(F(x)\to G(x))$	前提引入
④ $F(x)\to G(x)$	③$\forall-$
⑤ $\forall x(G(x)\to H(x))$	前提引入
⑥ $G(x)\to H(x)$	⑤$\forall-$
⑦ $F(x)\to H(x)$	④⑥假言三段论
⑧ $H(x)$	②⑦假言推理
⑨ $\forall xH(x)$	⑧$\forall+$

练习4

4. 在自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$中，构造推理的证明.

人都喜欢吃蔬菜. 但不是所有的人都喜欢吃鱼.

所以, 存在喜欢吃蔬菜而不喜欢吃鱼的人.

解 令$F(x)$: x为人，$G(x)$: x喜欢吃蔬菜，$H(x)$: x喜欢吃鱼.

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$, $\neg\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$

结论：$\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$

证明：用归谬法

(1) $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$　　结论否定引入

(2) $\forall x\neg(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$　　(1)置换

(3) $\neg(\underline{F(y)\wedge G(y)\wedge\neg H(y)})$　　(2)$\forall-$

(4) $G(y)\rightarrow\neg F(y)\vee H(y)$　　(3)置换

(5) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$　　前提引入

练习4(续)

(6) $F(y)\rightarrow G(y)$	(5)∀−
(7) $F(y) \rightarrow \neg F(y)\vee H(y)$	(4)(6)假言三段论
(8) $F(y) \rightarrow H(y)$	(7)置换
(9) $\forall y(F(y) \rightarrow H(y))$	(8)∀+
(10) $\forall x(F(x) \rightarrow H(x))$	(9)置换
(11) $\neg\forall x(F(x) \rightarrow H(x))$	前提引入
(12) 0	(10)(11)合取