命题逻辑的局限性

例：凡偶数都能被2整除. 6是偶数. 所以, 6能被2整除.

命题符号化：

前提：p:偶数都能被2整除

q: 6是偶数

结论：r: 6能被2整除

推理的形式结构符号化为：$(p \wedge q) \rightarrow r$

蕴含式不是重言式，不能判断推理的正确性。

命题逻辑具有一定局限性，甚至无法判断一些常见的推理。

命题逻辑局限性的原因

命题逻辑中命题是基本单位，对简单命题不再分析。

“凡偶数都能被2整除. 6是偶数. 所以, 6能被2整除.”

6是偶数中的一个，偶数具有的性质，6也应该有。但在命题逻辑中命题是原子单位，不能再分解了，无法描述命题的内在结构和逻辑关系。因此对简单命题进一步分析，分析出其中的个体词、谓词。

一阶逻辑也称作一阶谓词逻辑或谓词逻辑。

第四章 一阶逻辑基本概念

主要内容

- 一阶逻辑命题符号化
  - 个体词、谓词、量词
  - 一阶逻辑命题符号化
- 一阶逻辑公式及其解释
  - 一阶语言
  - 合式公式
  - 合式公式的解释
  - 永真式、矛盾式、可满足式

4.1 一阶逻辑命题符号化

个体词——所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体，常用小写字母a、b、c等表示。

个体常项：具体或特定的客体的个体词，用a, b, c表示

个体变项：抽象或泛指的个体词，用x, y, z表示

个体域（论域）——个体变项的取值范围

有限个体域，如 $\{a, b, c\}$, $\{1, 2\}$

无限个体域，如 N, Z, R, …

全总个体域——由宇宙间一切事物组成

谓词

谓词——表示个体词性质或相互之间关系的词，

常用大写字母F、G、H等表示。

谓词常项：表示具体性质或关系的谓词

如 $F(a)$：a是人

谓词变项：表示抽象的或泛指的性质或关系的谓词

如 $F(x)$：x具有性质F

n（$n\geq 1$）元谓词：含n个个体变项的谓词

一元谓词(n=1)——表示性质

多元谓词($n\geq 2$)——表示事物之间的关系

如 $L(x,y)$：x与 y 有关系 L，$L(x,y)$：$x\geq y$，…

实例

例 在一阶逻辑中将下列命题符号化：

(1) 合肥位于安徽

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$ 是有理数

(3) 如果2>3，则3<4

(1) $F(a)$，其中，a：合肥，$F(x)$：x位于安徽.

(2) $F(\sqrt{2})\rightarrow G(\sqrt{3})$,

其中，$F(x)$：x是无理数，$G(x)$：x是有理数

(3) $F(2, 3)\rightarrow G(3, 4)$，其中，$F(x, y)$：$x>y$，$G(x, y)$：$x<y$

量词的引入

例：（1）这个班的所有学生都选修离散数学。

（2）这个班有些学生选修离散数学。

这两句都是命题，除了有个体词、谓词外，还有“所有”、“有些”这个表示数量的词。

仅通过个体词、谓词来描述无法描述表达含义的不同，因此将这两个命题符号化时要使用表示**数量**的词。

量词

量词——表示个体常项或个体变项之间数量关系的词，有两种：

全称量词$\forall$: 表示所有的，每一个，任意的，凡，都.

$\forall x$: 对个体域中所有的x

如, $\forall xF(x)$表示个体域中所有的x具有性质F

$\forall x\forall yG(x,y)$表示个体域中所有的x和y有关系G

存在量词$\exists$: 表示存在, 有一个，有的，至少有一个.

$\exists x$: 个体域中有一个x

如, $\exists xF(x)$表示个体域中有一个x具有性质F

$\exists x\exists yG(x,y)$表示个体域中存在x和y有关系G

$\forall x\exists yG(x,y)$表示对个体域中每一个x都存在一个y使得x和y有关系G

$\exists x\forall yG(x,y)$表示个体域中存在一个x使得对每一个y, x和y有关系G

实例

例　在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 人都爱美

(2) 有人用左手写字

个体域分别为

(a) D为人类集合

(b) D为全总个体域

解 (a)　(1) $\forall xG(x)$，$G(x)$：x爱美

(2) $\exists xG(x)$，$G(x)$：x用左手写字

(b) $F(x)$：x为人，$G(x)$：x爱美

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$　　　$\forall x(F(x)\wedge G(x))$

(2) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$　　　$\exists x(F(x)\rightarrow G(x))$

1. 引入特性谓词$F(x)$　2. (1),(2)是一阶逻辑中两个“基本”公式

在不同个体域内，同一命题的符号化形式可能不同，也可能相同。

实例

例 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 正数都大于负数

(2) 有的无理数大于有的有理数

(3)不存在跑得一样快的两只兔子

解： **注意：题目中没给个体域，一律默认是全总个体域**

(1) 令$F(x)$：x为正数，$G(y)$：y为负数， $L(x,y)$：$x>y$

$$\forall x \forall y(F(x) \land G(y) \rightarrow L(x,y))$$

(2) 令$F(x)$：x是无理数，$G(y)$：y是有理数，$L(x,y)$：$x>y$

$$\exists x \exists y(F(x) \land G(y) \land L(x,y))$$

(3) 令F(x)：x是兔子，G(y)：y是乌龟，

L(x,y)：x比y跑得同样快，N(x,y)：$x \neq y$

$$\neg \exists x \exists y(F(x) \land G(y) \land N(x,y) \land L(x,y))$$

实例

例 设个体域为实数域, 将下面命题符号化

(1) 对每一个数x都存在一个数y使得$x<y$

(2) 存在一个数x使得对每一个数y都有$x<y$

解 $L(x,y): x<y$

(1) $\forall x \exists y L(x,y)$

(2) $\exists x \forall y L(x,y)$

注意: ∀与∃不能随意交换

显然(1)是真命题，(2)是假命题

4.2 一阶逻辑公式及解释

定义4.1 设L是一个非逻辑符集合, 由L生成的一阶语言$\mathscr{L}$的字母表包括下述符号:

非逻辑符号

(1) 个体常项符号: $a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$

(2) 函数符号: $f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$

(3) 谓词符号: $F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$

逻辑符号

(4) 个体变项符号: $x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$

(5) 量词符号: $\forall, \exists$

(6) 联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(7) 括号与逗号: (,), ,

一阶语言$\mathscr{L}$的项与原子公式

定义4.2 $\mathscr{L}$的**项**的定义如下：

(1) 个体常项和个体变项是项.

(2) 若$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的$n$元函数，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是任意的$n$个项，则$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项.

(3) 所有的项都是有限次使用(1)，(2)得到的

如：$a, x, x+y, f(x), g(x, y)$等都是项

定义4.3 设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是$\mathscr{L}$的任意n元谓词，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是$\mathscr{L}$的任意n个项，则称$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是$\mathscr{L}$的**原子公式**.

如：$F(x, y), F(f(x_1, x_2), g(x_3, x_4))$等均为原子公式

一阶语言$\mathscr{L}$的公式

定义4.4 $\mathscr{L}$的合式公式定义如下：

(1) 原子公式是合式公式

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式

(4) 若A是合式公式，则$\forall xA$, $\exists xA$也是合式公式

(5) 只有有限次地应用(1)-(4)形成的符号串是合式公式

合式公式简称公式.

如：$F(x)$, $F(x)\vee\neg G(x, y)$, $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\exists x\forall y(F(x)\rightarrow G(y)\wedge L(x, y))$等都是合式公式

封闭的公式

定义4.5 在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，称x为**指导变元**，A为相应量词的**辖域**. 在$\forall x$和 $\exists x$的辖域中，x的所有出现都称为**约束出现**，A中不是约束出现的其他变项均称为是**自由出现**的.

例如：$\forall x(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$

$\forall x$中的x为指导变元，$(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$为$\forall x$ 的辖域，x的两次出现均为约束出现，y与 z 均为自由出现.

又如：$\exists x(F(x,y,z)\rightarrow \forall y(G(x,y)\wedge H(x,y,z)))$

$\exists x$中的x是指导变元, 辖域为$(F(x,y,z)\rightarrow \forall y(G(x,y)\wedge H(x,y,z)))$.
 $\forall y$中的y是指导变元, 辖域为$(G(x,y)\wedge H(x,y,z))$. x的3次出现都是约束出现, y的第一次出现是自由出现, 后2次是约束出现, z的2次出现都是自由出现.

封闭的公式

定义4.6 若公式A中不含自由出现的个体变项，则称A为**封闭的公式**，简称**闭式**.

例如，$\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x,y))$ 为闭式

而 $\exists x(F(x) \wedge G(x,y))$ 不是闭式

公式的解释

合式公式是按照规则生成的符号串，没有实际的含义。只有将其中的变项（个体变项、谓词变项等）用指定的常项代替后，所得公式才具有特定的实际含义。

例： $\exists x\, F(f(x), a)$

下面指定个体域和个体常项符号a，函数符号f及谓词符号F的含义。

（a）个体域为实数集R，$a=0$, $f(x)=2x+1$, $F(x, y)$: $x=y$.

公式的含义：存在实数x，使得$2x+1=0$. 这是真命题。

（b）a, f(x), F(x, y)的含义同上，个体域改为自然数集N.

公式的含义：存在自然数x，使得$2x+1=0$. 这是假命题。

上面对公式中个体域及个体常项符号、函数符号、谓词符号的指定称作**解释**，指定自由出现的个体变项的值称作**赋值**，定义如下：

公式的解释

定义4.7 设$\mathscr{L}$是L生成的一阶语言, $\mathscr{L}$的**解释I**由4部分组成:

(a) 非空个体域 D_I.

(b) 对每一个个体常项符号$a\in L$, 有一个 $\overline{a}\in D_I$, 称 $\overline{a}$ 为a在I中的解释.

(c) 对每一个n元函数符号$f\in L$, 有一个D_I上的n元函数 $\overline{f}: D_I^n \to D_I$, 称 $\overline{f}$ 为f在I中的解释.

(d) 对每一个n元谓词符号$F\in L$, 有一个D_I上的n元谓词常项$\overline{F}$, 称 $\overline{F}$ 为F在I中的解释.

(e) I下的赋值σ: 对每个自由出现的个体变项符号x指定D_I中的一个$\sigma(x)$.

设公式A, 取个体域D_I, 把A中的个体常项符号a、函数符号f、谓词符号F、自由出现的个体变项符号x分别替换成它们在I中的解释 $\overline{a}$、$\overline{f}$、$\overline{F}$、$\sigma(x)$, 称所得到的公式A'为A在I下的**解释**, 或A在I下**被解释成**A'.

实例

例 给定解释 I 如下:

(a) 个体域 D=R

(b) $\bar{a}=0$

(c) $\bar{f}(x,y)=x+y$, $\bar{g}(x,y)=x\cdot y$

(d) $\bar{F}(x,y): x=y$

写出下列公式在I下的解释, 并指出它的真值.

(1) $\exists x F(f(x,a),g(x,a))$

$\exists x(x+0=x\cdot 0)$ 真

(2) $\forall x F(g(x,y),a)$

$\forall x(x\cdot y=0)$ 真值不定, 不是命题

y=0/1

练习3

3. 给定解释 *I* 如下:

(a) 个体域D=N

(b) $\bar{a}=2$

(c) $\bar{f}(x,y)=x+y,\quad \bar{g}(x,y)=x\cdot y$

(d) $\bar{F}(x,y): x=y$

说明下列公式在 *I* 下的涵义,并讨论真值

(1) $\forall xF(g(x,a),x)$

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,a),y)\rightarrow F(f(y,a),x))$

(3) $\forall x\forall y\exists zF(f(x,y),z)$

(4) $\exists x\forall y\forall zF(f(y,z),x)$ **(5) $\exists xF(f(x,x),g(x,x))$**

练习3

3. 给定解释 I 如下:

(a) 个体域D=N

(b) $\bar{a}=2$

(c) $\bar{f}(x,y)=x+y,\quad \bar{g}(x,y)=x\cdot y$

(d) $\bar{F}(x,y): x=y$

说明下列公式在 I 下的涵义,并讨论真值

(1) $\forall x F(g(x,a),x)$

$\forall x(2x=x)$ 假

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,a),y)\rightarrow F(f(y,a),x))$

$\forall x\forall y(x+2=y\rightarrow y+2=x)$ 假

练习3

(3) $\forall x\forall y\exists zF(f(x,y),z)$

$\forall x\forall y\exists z(x+y=z)$　　　真

(4) $\exists x\forall y\forall zF(f(y,z),x)$

$\exists x\forall y\forall z(y+z=x)$　　　假

(3),(4)说明∀与∃不能随意交换

(5) $\exists xF(f(x,x),g(x,x))$

$\exists x(x+x=x\cdot x)$　　　真

代换实例

定义4.8 若公式A在任何解释下均为真, 则称A为永真式(逻辑有效式). 若A在任何解释下均为假, 则称A为矛盾式(永假式). 若至少有一个解释使A为真, 则称A为可满足式.

注意：一阶逻辑公式中的谓词和函数可有各种不同解释，即不存在一个算法能够在有限步内判断任意给定公式的类型。

定义4.9 设A_0是含命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个谓词公式，用$A_i\ (1 \le i \le n)$ 处处代替A_0中的p_i，所得公式A称为A_0的代换实例.

例如， $F(x) \to G(x)$, $\forall x F(x) \to \exists y G(y)$等都是$p \to q$的代换实例.

定理4.1 重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是矛盾式.

实例

例 判断下列公式中，哪些是永真式，哪些是矛盾式?

(1) $\forall xF(x)\rightarrow(\exists x\exists yG(x,y)\rightarrow\forall xF(x))$

重言式 $p\rightarrow(q\rightarrow p)$ 的代换实例，故为永真式.

(2) $\neg(\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$

矛盾式 $\neg(p\rightarrow q)\wedge q$ 的代换实例，故为永假式.

(3) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

解释I_1: 个体域N, $F(x)$: $x>5$, $G(x)$: $x>4$, 公式为真

解释I_2: 个体域N, $F(x)$: $x<5$, $G(x)$: $x<4$, 公式为假

结论: 非永真式的可满足式

第四章 习题课

主要内容

- 个体词、谓词、量词
- 一阶逻辑命题符号化
- 一阶语言$\mathscr{L}$

  项、原子公式、合式公式
- 公式的解释

  量词的辖域、指导变元、个体变项的自由出现与约束出现、闭式、解释
- 公式的类型

  永真式(逻辑有效式)、矛盾式(永假式)、可满足式

基本要求

- 准确地将给定命题符号化
- 理解一阶语言的概念
- 深刻理解一阶语言的解释
- 熟练地给出公式的解释
- 记住闭式的性质并能应用它
- 深刻理解永真式、矛盾式、可满足式的概念, 会判断简单公式的类型

练习1

1. 在分别取个体域为

(a) D_1=N N表示自然数集，它包括所有正整数，即从1开始的整数集合

(b) D_2=R (实数)

(c) D_3为全总个体域

的条件下, 将下面命题符号化，并讨论真值

(1) 对于任意的数x，均有 $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

解 设$G(x)$: $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

(a) $\forall xG(x)$ 假

(b) $\forall xG(x)$ 真

(c) 又设$F(x)$:x是实数

$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 真

反证法

练习1(续)

(2) 存在数x，使得 $x+7=5$

解 设$H(x)$：$x+7=5$

(a) $\exists xH(x)$ 假

(b) $\exists xH(x)$ 真

(c) 又设$F(x)$：x为实数

$\exists x(F(x)\wedge H(x))$ 真

本例说明：不同个体域内，命题符号化形式可能不同（也可能相同），真值可能不同（也可能相同）.

练习2

2. 在一阶逻辑中将下列命题符号化

(1) 大熊猫都可爱

(2) 有人爱发脾气

(3) 说所有人都爱吃面包是不对的

2. 在一阶逻辑中将下列命题符号化

(1) 大熊猫都可爱

设$F(x)$: x为大熊猫，$G(x)$: x可爱

$$\forall x(F(x)\to G(x))$$

(2) 有人爱发脾气

设$F(x)$: x是人，$G(x)$: x爱发脾气

$$\exists x(F(x)\land G(x))$$

(3) 说所有人都爱吃面包是不对的

设$F(x)$: x是人，$G(x)$: x爱吃面包

$\neg\forall x(F(x)\to G(x))$ 或 $\exists x(F(x)\land\neg G(x))$

练习2

(4) 没有不爱吃糖的人

设$F(x)$: x是人，$G(x)$: x爱吃糖

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ 或 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(5) 任何两个不同的人都不一样高

设$F(x)$:x是人, $H(x,y)$, x与y相同, $L(x,y)$: x与y一样高

$\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(F(y)\wedge\neg H(x,y)\rightarrow\neg L(x,y)))$

或 $\forall x\forall y(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg H(x,y)\rightarrow\neg L(x,y))$

(6) 不是所有的汽车都比所有的火车快

设$F(x)$:x是汽车, $G(y)$:y是火车, $H(x,y)$:x比y快

$\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

或 $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$

练习4

4. 证明下面公式既不是永真式，也不是矛盾式:

(1) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$

解释1: D_1=N, $F(x)$:x是偶数, $G(x)$: x是素数, 真

解释2: D_2=N, $F(x)$:x是偶数, $G(x)$: x是奇数, 假

(2) $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

解释1: D_1=Z, $F(x)$:x是正数, $G(x)$: x是负数, $H(x,y)$:$x>y$
真

解释2: D_2=Z, $F(x)$:x是偶数, $G(x)$: x是奇数, $H(x,y)$:$x>y$
假

练习5

5. 证明下列公式为永真式:

(1) $(\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\wedge\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y)$

(2) $\forall x(F(x)\rightarrow(F(x)\vee G(x)))$

$(A \to B) \wedge A \to B$的代换实例

设I是任意的一个解释, 对每一个$x \in D_I$,

$F(x) \to (F(x) \vee G(x))$恒为真