第二部分　集合论

第六章 集合代数

主要内容

- 集合的基本概念

  属于、包含

  幂集、空集

  文氏图等

- 集合的基本运算

  并、交、补、差等

- 集合恒等式

  集合运算的算律、恒等式的证明方法

6.1 集合的基本概念

1. 集合定义

由离散个体构成的整体称为集合，

称这些个体为集合的元素。

常见的数集：**N, Z, Q, R, C** 等分别表示自然数、整数、有理数、实数、复数集合

2. 集合表示法

枚举法----通过列出全体元素来表示集合

谓词表示法----通过谓词描述集合元素的性质

实例：

枚举法 自然数集合 $N=\{0,1,2,3,\ldots\}$

谓词法 $S=\{x \mid x$是实数，$x^2-1=0\}$

元素与集合

1. 集合的元素具有的性质

无序性：元素列出的顺序无关

相异性：集合的每个元素只计数一次

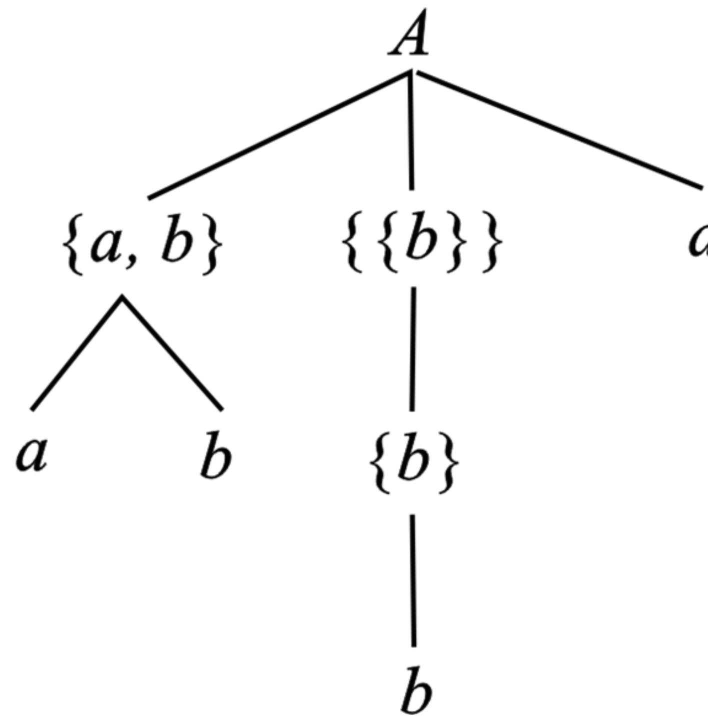
确定性：对任何元素和集合都能确定这个元素是否为该集合的元素

任意性：集合的元素也可以是集合

2. 元素与集合的关系

隶属关系：∈或者∉

3. 集合的树型层次结构



$d \in A$, $a \notin A$

集合与集合

集合与集合之间的关系：$\subseteq$、$\nsubseteq$、$\neq$、$\subset$、$\not\subset$

定义6.1 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$

定义6.2 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

定义6.3 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$

注意$\in$和$\subseteq$是不同层次的问题

空集、全集和幂集

1. 定义6.4 空集 $\varnothing$：不含有任何元素的集合

   实例： $\{ x \mid x \in R \wedge x^2+1=0 \}$

   定理6.1 空集是任何集合的子集。

   证： 对于任意集合A，

   $$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\, (x \in \varnothing \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T \text{ (恒真命题)}$$

   推论 $\varnothing$是唯一的

2. 定义6.5 幂集：$P(A)=\{ x \mid x \subseteq A \}$

   实例：$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$， $P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

   计数：如果 $|A|=n$，则 $|P(A)|=2^n$.

3. 定义6.6 全集 E：包含了所有与问题相关的元素的集合

   全集具有相对性：与问题有关，不存在绝对的全集。

6.2 集合的运算

集合的基本运算有

定义6.7 并 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

交 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

相对补 $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

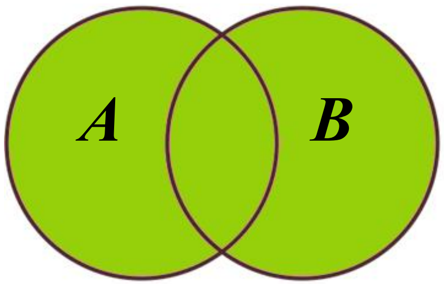
定义6.8 对称差 $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$

定义6.9 绝对补 $\sim A = E - A$

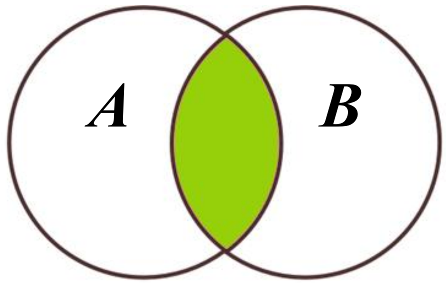
绝对补运算~优先级最高，$\cup$, $\cap$, $-$, $\oplus$，运算顺序由括号确定。

有穷集的计数

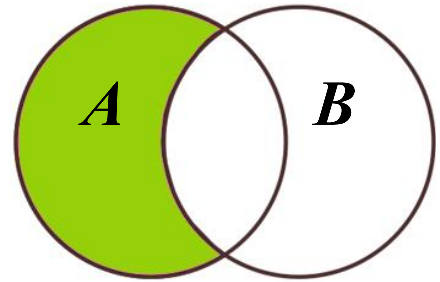
文氏图： 用大矩形表示全集E，在矩形内画一些圆，用圆的内部表示集合，不同的圆表示不同的集合。



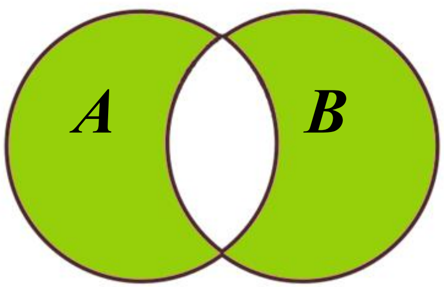
$A \cup B$



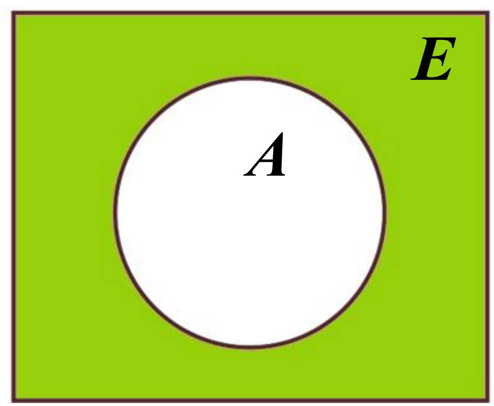
$A \cap B$



$A - B$



$A \oplus B$



$\sim A$

包含排斥原理

定理6.2 设集合S上定义了n条性质，其中具有第 i 条性质的元素构成子集A_i, 那么集合中不具有任何性质的元素数为

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}|=|S|-\sum_{1\le i\le n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$$
$$-\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

推论 S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$$
$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{m-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

实例

例 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被5和6整除，也不能被8整除的数有多少个?

方法一：包含排斥原理

$$|S| = 1000$$

$$|A|=\lfloor 1000/5\rfloor=200,\ |B|=\lfloor 1000/6\rfloor=166,\ |C|=\lfloor 1000/8\rfloor=125$$

$$|A\cap B| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6)\rfloor = \lfloor 1000/30\rfloor = 33$$

$$|A\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,8)\rfloor = \lfloor 1000/40\rfloor = 25$$

$$|B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(6,8)\rfloor = \lfloor 1000/24\rfloor = 41$$

$$|A\cap B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6,8)\rfloor = \lfloor 1000/120\rfloor = 8$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|$$

$$= 1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8 = 600$$

方法二：文氏图

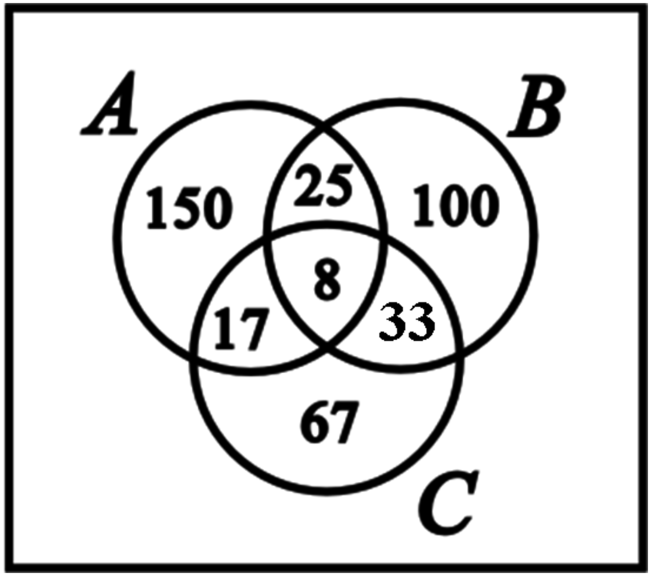
定义以下集合：

$S=\{ x \mid x \in Z \land 1 \le x \le 1000\}$

$A=\{ x \mid x \in S \land x$可被5整除$\}$

$B=\{ x \mid x \in S \land x$可被6整除$\}$

$C=\{ x \mid x \in S \land x$可被8整除$\}$



画出文氏图，然后填入相应的数字，

解得 N =1000 - (200+100+33+67) = 600

6.3 集合恒等式

下列恒等式给出了集合运算满足的主要算律，A，B，C代表任意的集合。

幂等律	$A \cup A = A$
	$A \cap A = A$
结合律	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
交换律	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
分配律	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
同一律	$A \cup \varnothing = A$
	$A \cap E = A$
零律	$A \cap \varnothing = \varnothing$
	$A \cup E = E$

运算算律

下列恒等式给出了集合运算满足的主要算律，A，B，C代表任意的集合。

排中律	$A \cup \sim A = E$
矛盾律	$A \cap \sim A = \varnothing$
吸收律	$A \cup (A \cap B) = A$
	$A \cap (A \cup B) = A$
德摩根律	$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
	$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
	$\sim (B \cup C) = \sim B \cap \sim C$
	$\sim (B \cap C) = \sim B \cup \sim C$
	$\sim \varnothing = E$
	$\sim E = \varnothing$
双重否定律	$\sim\sim A = A$

德 · 摩根律：$(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$；

$(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$

分析

定理1.2 设A、B是任意两个集合，则

$A\subseteq B,\ B\subseteq A \Leftrightarrow A=B$

（1） $(A\cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$；

（2） $A^c \cap B^c \subseteq (A\cup B)^c$。

证明（a）：

① $\forall x \in (A \cup B)^c$

$\Rightarrow x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A^c$ 且 $x \in B^c$

$\Rightarrow x \in A^c \cap B^c$

$\Rightarrow (A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$

② $\forall x \in A^c \cap B^c$

$\Rightarrow x \in A^c$ 且 $x \in B^c$

$\Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B$

$\Rightarrow x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \in (A \cup B)^c$

$\Rightarrow A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$

由①、②知，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

集合证明题

证明方法：等式置换法、命题演算法

方法一：等式置换证明法

例　假设交换律、分配律、同一律、零律已经成立，证明吸收律.

证:

$$
\begin{aligned}
& A \cup (A \cap B) & \\
&= (A \cap E) \cup (A \cap B) & \text{（同一律）} \\
&= A \cap (E \cup B) & \text{（分配律）} \\
&= A \cap (B \cup E) & \text{（交换律）} \\
&= A \cap E & \text{（零律）} \\
&= A & \text{（同一律）}
\end{aligned}
$$

集合证明题

证明方法：等式置换法、命题演算法

命题演算证明法的书写规范（以下的X和Y代表集合公式）

(1) 证$X\subseteq Y$

任取x， $x\in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x\in Y$

(2) 证$X=Y$

方法一： 分别证明 $X\subseteq Y$ 和 $Y\subseteq X$

方法二： 任取x，$x\in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x\in Y$

注意：使用方法二时，必须保证每步推理都是充分必要的

集合等式的证明

方法二：命题演算法

例 证明$A \cup (A \cap B) = A$ （吸收律）

证：任取x, $\quad x \in A \cup (A \cap B)$

$\Leftrightarrow x \in A \lor x \in A \cap B$

$\Leftrightarrow x \in A \lor (x \in A \land x \in B)$

$\Leftrightarrow x \in A$，因此得 $A \cup (A \cap B) = A$.

例 证明 $A - B = A \cap \sim B$

证：任取x, $\quad x \in A - B$

$\Leftrightarrow x \in A \land x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A \land x \in \sim B$

$\Leftrightarrow x \in A \cap \sim B$

因此得 $A - B = A \cap \sim B$

包含等价条件的证明

例　证明$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

　　　　　　　①　　　　　②　　　　　　③　　　　　　④

证明思路:

- 确定问题中含有的命题：本题含有命题 ①, ②, ③, ④
- 确定命题间的关系（哪些命题是已知条件、哪些命题是要证明的结论）：本题中每个命题都可以作为已知条件，每个命题都是要证明的结论
- 确定证明顺序：①⇒②，②⇒③，③⇒④，④⇒①
- 按照顺序依次完成每个证明（证明集合相等或者包含）

证明

证明$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

①　②　③　④

证：①⇒②

显然$B\subseteq A\cup B$，下面证明$A\cup B\subseteq B$.

任取x，

$$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A\vee x\in B \Rightarrow x\in B\vee x\in B \Leftrightarrow x\in B$$

因此有$A\cup B\subseteq B$. 综合上述②得证.

②⇒③

$A=A\cap(A\cup B) \Rightarrow A=A\cap B$ (由②知$A\cup B=B$，将$A\cup B$用B代入)

证明

③⇒④

假设$A-B\neq\varnothing$, 即$\exists x\in A-B$，那么知道$x\in A$且$x\notin B$. 而

$$x\notin B \Rightarrow x\notin A\cap B$$

从而与$A\cap B=A$矛盾.

④⇒①

假设$A\subseteq B$不成立，那么

$$\exists x(x\in A\wedge x\notin B) \Rightarrow x\in A-B \Rightarrow A-B\neq\varnothing$$

与条件④矛盾.

1.4.1 集合的计算机中表示

假设全集U含有n个元素，且任意给定这n个元素在U中的顺序，不妨设U={$a_1,a_2,\ldots,a_n$}，A是U的一个子集且对应长度为n的比特串B=$b_1b_2\ldots b_n$，其中，

$$b_i = \begin{cases} 1 & a_i \in A \\ 0 & a_i \notin A \end{cases}$$

于是，一个n元集就与一个n位的比特串建立了一一对应关系。

例1.8

例1.8 令U={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}，定义U为递增的序列，即$a_i=i$。试完成下面的问题：

(1) 试表示集合A_1={1, 3, 5, 7, 9}, A_2={2, 4, 6, 8, 10}, A_3={1, 2, 3, 4, 5}对应的比特串。

(2) 计算$A_1 \cup A_2$，$A_1 \cap A_3$.

解: (1)B_1=1010101010, B_2=0101010101, B_3=1111100000.

(2) 因为$B_1 \vee B_2 = 1010101010 \vee 0101010101 = 1111111111$

$B_1 \wedge B_3 = 1010101010 \wedge 1111100000 = 1010100000$

从而, 得$A_1 \cup A_2$={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}=U，$A_1 \cap A_3$={1, 3, 5}。

例1.9 令U={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}，A、B、C对应的比特串为1111001111、0101111000、1000000001

计算集合

$A \cup B \cap C$

$A \cap (B^c \cup C)$

第六章 习题课

主要内容

- 集合的两种表示法
- 集合与元素之间的隶属关系、集合之间的包含关系的区别与联系
- 特殊集合：空集、全集、幂集
- 文氏图及有穷集合的计数
- 集合的$\cup$, $\cap$, $-$, $\sim$, $\oplus$等运算
- 集合运算的算律及其应用

基本要求

- 熟练掌握集合的两种表示法
- 能够判别元素是否属于给定的集合
- 能够判别两个集合之间是否存在包含、相等、真包含等关系
- 熟练掌握集合的基本运算
- 掌握证明集合等式或者包含关系的基本方法

练习1

1．判断下列命题是否为真

(1) $\varnothing \subseteq \varnothing$

(2) $\varnothing \in \varnothing$

(3) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

(4) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

(5) $\{ a, b \} \subseteq \{ a, b, c, \{a, b, c\}\}$

(6) $\{ a, b \} \in \{ a, b, c, \{a, b\}\}$

(7) $\{ a, b\} \subseteq \{ a, b, \{\{a, b\}\}\}$

(8) $\{ a, b\} \in \{ a, b, \{\{a,b\}\}\}$

解 (1)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7)为真，其余为假.

方法分析

(1) 判断元素a与集合A的隶属关系是否成立基本方法：

把 a 作为整体检查它在A中是否出现，注意这里的 a 可能是集合表达式.

(2) 判断$A\subseteq B$的四种方法

- 若A,B是用枚举方式定义的，依次检查A的每个元素是否在B中出现.
- 若A,B是谓词法定义的，且A, B中元素性质分别为P和Q，那么"若P则Q"意味 $A\subseteq B$，"P当且仅当Q"意味 $A=B$.
- 通过集合运算判断$A\subseteq B$，即$A\cup B = B$, $A\cap B = A$, $A-B = \varnothing$三个等式中有一个为真.
- 通过文氏图判断集合的包含（注意这里是判断，而不是证明

练习

- ⑩ **30人中，10人喜欢音乐，8人喜欢美术，6人都喜欢。**
- ⑩ **问：不喜欢音乐和美术的有多少人？**

练习

- **60人中，25人喜欢音乐，26人喜欢美术,26人喜欢数学，9人喜欢音乐和美术，11人喜欢音乐和数学，8人喜欢美术和数学，还有3人都喜欢。**
- 问：不喜欢音乐和美术、数学的有多少人?
- 只喜欢其中一个的有几个？音乐/美术/数学/

练习

- **60人中，25人喜欢音乐，26人喜欢美术,26人喜欢数学，9人喜欢音乐和美术，11人喜欢音乐和数学，8人喜欢美术和数学，还有3人都喜欢。**
- 问：不喜欢音乐和美术、数学的有多少人？
- 只喜欢其中一个的有几个？音乐/美术/数学/

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|$$

- $=|E|-(|A|+|B|+|C|)+(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|)$
- $60-(25+26+26)+9+11+8-3$
- $=8$

练习2

2．设

$S_1=\{1, 2, \ldots, 8, 9\}$，　　$S_2=\{2, 4, 6, 8\}$

$S_3=\{1, 3, 5, 7, 9\}$　　$S_4=\{3, 4, 5\}$

$S_5=\{3, 5\}$

确定在以下条件下X是否与$S_1,\ldots,S_5$中某个集合相等？如果是，又与哪个集合相等？

（1）若 $X\cap S_5=\varnothing$

（2）若 $X\subseteq S_4$但 $X\cap S_2=\varnothing$

（3）若 $X\subseteq S_1$且 $X\nsubseteq S_3$

（4）若 $X-S_3=\varnothing$

（5）若 $X\subseteq S_3$ 且 $X\nsubseteq S_1$

解答

解

(1) 和S_5不交的子集不含有3和5，因此 $X=S_2$.

(2) S_4的子集只能是S_4和S_5. 由于与S_2不交，不能含有偶数，因此 $X=S_5$.

(3) S_1, S_2, S_3, S_4和S_5都是S_1的子集，不包含在S_3的子集含有偶数，因此 $X=S_1, S_2$或S_4.

(4) $X-S_3=\varnothing$意味着 X是S_3的子集，因此 $X=S_3$或 S_5.

(5) 由于S_3是S_1的子集，因此这样的X不存在.

练习

全集U={1,2,3,4,5,6}, A={1,4,6}, B={1,2,5}, C={1,3}, 画文氏图

① $A \cap \sim B$

② $(A \cap B) \cup \sim C$

③ $\sim(A \cup B)$

④ $\sim(B \oplus C)$

⑤ $\sim A \cup \sim B$

⑥ $P(A) \cap P(C)$

练习

答案

全集U={1,2,3,4,5,6}, A={1,4,6}, B={1,2,5}, C={1,3}

① $A \cap \sim B$

② $(A \cap B) \cup \sim C$

③ $\sim(A \cup B)$

④ $\sim(B \oplus C)$

⑤ $\sim A \cup \sim B$

⑥ $P(A) \cap P(C) = \{\varnothing, \{1\}\}$

练习

A={{∅}, {{∅}}}

- **P(A)**

练习3

3. 判断以下命题的真假，并说明理由.

（1）$A-B=A \Leftrightarrow B=\varnothing$

（2）$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

（3）$A\oplus A=A$

（4）如果$A\cap B=B$，则$A=E$.

（5）$A=\{x\}\cup x$，则 $x\in A$且$x\subseteq A$.

解题思路

- 先将等式化简或恒等变形.
- 查找集合运算的相关的算律，如果与算律相符，结果为真.
- 注意以下两个重要的充要条件

  $A-B = A \Leftrightarrow A\cap B = \varnothing$

  $A-B = \varnothing \Leftrightarrow A\subseteq B \Leftrightarrow \mathrm{A}\cup\mathrm{B} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A}\cap\mathrm{B} = \mathrm{A}$

  如果与条件相符，则命题为真.
- 如果不符合算律，也不符合上述条件，可以用文氏图表示集合，看看命题是否成立.如果成立，再给出证明.
- 试着举出反例，证明命题为假.

解答

解:

(1) $B=\varnothing$是$A-B=A$的充分条件，但不是必要条件. 当B不空但是与A不交时也有$A-B=A$.

(2) 这是DM律，命题为真.

(3) 不符合算律，反例如下：

$A=\{1\}$，$A\oplus A=\varnothing$，但是$A\neq\varnothing$.

(4) 命题不为真. $A\cap B=B$的充分必要条件是 $B\subseteq A$，不是$A=E$.

(5) 命题为真，因为 x 既是 A 的元素，也是 A 的子集

练习4

4．证明 $A \cup B = A \cup C \wedge A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$

解题思路

- 分析命题：含有3个命题：

$$\underset{①}{A \cup B = A \cup C}, \quad \underset{②}{A \cap B = A \cap C}, \quad \underset{③}{B = C}$$

- 证明要求

  前提：命题①和②

  结论：命题③

- 证明方法：

  恒等式代入

  反证法

  利用已知等式通过运算得到新的等式

解答

方法一：恒等变形法

$$\begin{aligned} B &= B\cap(B\cup A) = B\cap(A\cup B) \\ &= B\cap(A\cup C) = (B\cap A)\cup(B\cap C) \\ &= (A\cap C)\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap C \\ &= (A\cup C)\cap C = C \end{aligned}$$

方法二：反证法.

假设 $B \neq C$，则存在 x ($x\in B$且$x\notin C$), 或存在 x ($x\in C$且$x\notin B$).

不妨设为前者.

若x属于A，则x属于$A\cap B$ 但x不属于$A\cap C$，与已知矛盾；

若x不属于A，则x属于$A\cup B$但x不属于$A\cup C$，也与已知矛盾.

解答

方法三：利用已知等式通过运算得到新的等式.

由已知等式①和②可以得到

$$(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup C)-(A\cap C)$$

即

$$A\oplus B=A\oplus C$$

从而有

$$A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)$$

根据结合律得

$$(A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C$$

由于$A\oplus A=\varnothing$, 化简上式得$B=C$.

练习5

5．设A,B为集合，试确定下列各式成立的充分必要条件：

(1) $A-B=B$

(2) $A-B=B-A$

(3) $A\cap B=A\cup B$

(4) $A\oplus B=A$

分析

解题思路:

求解集合等式成立的充分必要条件可能用到集合的算律、不同集合之间的包含关系、以及文氏图等. 具体求解过程说明如下:

(1) 化简给定的集合等式

(2) 求解方法如下:

- 利用已知的算律或者充分必要条件进行判断
- 先求必要条件，然后验证充分性
- 利用文氏图的直观性找出相关的条件，再利用集合论的证明方法加以验证

解答

解

(1) $A-B=B \Leftrightarrow A=B=\varnothing$. 求解过程如下：

由$A-B=B$得

$$(A\cap{\sim}B)\cap B = B\cap B$$

化简得$B=\varnothing$. 再将这个结果代入原来的等式得$A=\varnothing$. 从而得到必要条件$A=B=\varnothing$.

再验证充分性. 如果$A=B=\varnothing$成立，则$A-B=\varnothing=B$也成立.

(2) $A-B=B-A \Leftrightarrow A=B$. 求解过程如下：

充分性是显然的，下面验证必要性. 由$A-B=B-A$得

$$(A-B)\cup A=(B-A)\cup A$$

从而有$A=A\cup B$, 即$A\subseteq B$. 同理可证$B\subseteq A$.

解答

(3) $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$. 求解过程如下：

充分性是显然的，下面验证必要性. 由$A \cap B = A \cup B$得

$$A \cup (A \cap B) = A \cup (A \cup B)$$

化简得$A = A \cup B$，从而有$A \subseteq B$. 类似可以证明$B \subseteq A$.

(4) $A \oplus B = A \Leftrightarrow B = \varnothing$. 求解过程如下：

充分性是显然的，下面验证必要性. 由$A \oplus B = A$得

$$A \oplus (A \oplus B) = A \oplus A$$

根据结合律有

$$(A \oplus A) \oplus B = A \oplus A$$

即 $\varnothing \oplus B = \varnothing$, 就是$B = \varnothing$.