第二章 命题逻辑等值演算

主要内容

- 等值式与基本的等值式
- 等值演算与置换规则
- 析取范式与合取范式，主析取范式与主合取范式

2.1 等值式

定义2.1设 A、B是两个命题公式，若等价式$A\leftrightarrow B$是重言式，则称A与B**等值**，记作$A\Leftrightarrow B$.

如果两个命题公式A、B有相同的真值表，则说明在所有2^n个赋值下，A与B的真值都相同，因而等价式$A\leftrightarrow B$为重言式。

- 用真值表可检查两个公式是否等值

请验证：

（1）$p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$

（2）$p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$不等值

等值式例题

例 判断下列各组公式是否等值:

(1) $p \to (q \to r)$ 与 $(p \wedge q) \to r$

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

结论: $p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$

等值式例题

(2) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\rightarrow q)\rightarrow r$

p q r	$q\rightarrow r$	$p\rightarrow(q\rightarrow r)$	$p\rightarrow q$	$(p\rightarrow q)\rightarrow r$
0 0 0	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	0	1	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	1	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

结论：$p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\rightarrow q)\rightarrow r$ 不等值

基本等值式

用真值表可以判断任何两个命题公式是否等值，但当命题变项较多时，工作量过大。另一个方法是利用已知等值式做等值演算。

16组重要的等值式模式，以它们为基础进行演算证明公式等值：

双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A$

$A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

基本等值式

吸收律	$A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$
	$A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$
零律	$A\vee 1\Leftrightarrow 1$
	$A\wedge 0\Leftrightarrow 0$
同一律	$A\vee 0\Leftrightarrow A$
	$A\wedge 1\Leftrightarrow A$
排中律	$A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$
矛盾律	$A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$
蕴涵等值式	$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$
等价等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$
假言易位	$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$
等价否定等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$
归谬论	$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)\Leftrightarrow\neg A$

特别提示：必须牢记这16组等值式，这是继续学习的基础。

等值演算与置换规则

1. 等值演算：由已知的等值式推演出新的等值式的过程。

2. 置换规则

设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式，$\Phi(B)$ 是用公式 B 置换 $\Phi(A)$ 中所有的 A 后得到的命题公式。

若 $B \Leftrightarrow A$，则 $\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$

3. 等值演算的基础：

(1) 基本的等值式

(2) 置换规则

等值演算的应用举例

等值演算应用1：证明两个公式等值

例 证明 $p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$

证 $p \to (q \to r)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r)$ （蕴涵等值式，置换规则）

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$ （结合律，置换规则）

$\Leftrightarrow \neg (p \wedge q) \vee r$ （德摩根律，置换规则）

$\Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$ （蕴涵等值式，置换规则）

注：今后在注明置换规则均不必写出。

等值演算的应用举例

等值演算应用2：证明两个公式不等值

例 证明 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\rightarrow q)\rightarrow r$ 不等值

证 先用等值演算化简公式，然后再观察

$$p\rightarrow(q\rightarrow r) \Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee r$$

$$(p\rightarrow q)\rightarrow r \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee r \Leftrightarrow p\wedge\neg q\vee r$$

容易看出赋值000为：左边的成真赋值
右边的成假赋值

Question：赋值？为真

等值演算的应用举例

等值演算应用3：判断公式类型

A为矛盾式当且仅当$A \Leftrightarrow 0$

A为重言式当且仅当$A \Leftrightarrow 1$

例 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

(2) $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

解 (1) $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

$\Leftrightarrow q\wedge\neg(\neg p\vee q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow \underline{q}\wedge(p\wedge\underline{\neg q})$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge\neg q)$ （交换律，结合律）

$\Leftrightarrow p\wedge 0$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0$ （零律）

矛盾式

等值演算的应用举例

(2) $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(q\vee\neg p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ （交换律）

$\Leftrightarrow 1$

重言式

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$ （分配律）

$\Leftrightarrow p\wedge 1\wedge r$ （排中律）

$\Leftrightarrow p\wedge r$ （同一律）

可满足式，101和111是成真赋值，000和010等是成假赋值.

等值演算的应用举例

等值演算应用4：解决实际问题

例 在某次研讨会的中间休息时间，3名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人判断如下：

甲：王教授不是苏州人，是上海人。

乙：王教授不是上海人，是苏州人。

丙：王教授既不是上海人，也不是杭州人。

听完这3人的判断后，王教授笑这说，你们3人中有一人说得全对，有一人说对了一半，另一人说得全不对。试用逻辑演算分析王教授到底是哪里人。

等值演算的应用举例

解：设命题　p：王教授是苏州人。

q：王教授是上海人。

r：王教授是杭州人。

甲的判断为 $\neg p \wedge q$

乙的判断为 $p \wedge \neg q$

丙的判断为 $\neg q \wedge \neg r$

甲的判断全对为 $B_1 = \neg p \wedge q$

甲的判断对一半为$B_2 = (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) = \neg q \wedge p$

甲的判断全错为$B_3 = p \wedge \neg q$

等值演算的应用举例

乙的判断全对为 $C_1 = p \wedge \neg q$

乙的判断对一半为$C_2 = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) = q \wedge p$

乙的判断全错为$C_3 = \neg p \wedge q$

丙的判断全对为 $D_1 = \neg q \wedge \neg r$

丙的判断对一半为$D_2 = (= \neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r) \quad = \underline{r \wedge \neg q}$

丙的判断全错为$D_3 = q \wedge r$

由王教授所说

$$E = (B_1 \wedge C_2 \wedge D_3) \vee (B_1 \wedge C_3 \wedge D_2) \vee (B_2 \wedge C_1 \wedge D_3)$$

$(B_2 \wedge C_3 \wedge D_1) \vee (B_3 \wedge C_1 \wedge D_2) \vee (B_3 \wedge C_2 \wedge D_1)$ 为真命题

经过等值演算得到$E \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

但王教授不能既是苏州人，又是杭州人，因而p, r必有一个是假命题，因此$E \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$为真，王教授是上海人。

甲说的全对，乙全说错了，丙说对了一半。

$B1\wedge C2\wedge D3=(\neg p \wedge q)\wedge\underline{((p \wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q))}\wedge(q \wedge r)$ $\qquad (\underline{\neg p} \wedge q)\wedge(\underline{q\wedge p})\wedge(q \wedge r)$

$=(\neg p \wedge q)\wedge((p \wedge q \wedge q \wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q \wedge q \wedge r))$

$=(\neg p \wedge q)\wedge((p \wedge q \wedge r)\vee 0)$

$=(\neg p \wedge q)\wedge(p \wedge q \wedge r)$

$=0$

$B1\wedge C3\wedge D2=(\neg p \wedge q)\wedge(\neg p \wedge q)\wedge((\neg q \wedge r)\vee(q\wedge\neg r))$

$= (\neg p \wedge q \wedge\neg q \wedge r)\vee(\neg p \wedge q \wedge q \wedge \neg r)$

$=\neg p \wedge q\wedge\neg r$

$B1\wedge C3=0$

$B2\wedge C1\wedge D3=((\neg p \wedge\neg q)\vee(p \wedge q))\wedge(p \wedge \neg q)\wedge(q \wedge r)$

$=((\neg p \wedge\neg q)\vee(p \wedge q))\wedge(p\wedge\neg q \wedge q \wedge r)$

$= ((\neg p \wedge\neg q)\vee(p \wedge q))\wedge 0$

$=0$

$B2\wedge C3\wedge D1 =((\neg p \wedge\neg q)\vee(p \wedge q))\wedge(\neg p \wedge \underline{q})\wedge(\underline{\neg q}\wedge\neg r) \quad =0$

$B3\wedge C1\wedge D2=(p\wedge\neg q\underline{)\wedge(}p\wedge\neg q)\underline{\wedge(}(\neg q\wedge r) \vee(q\wedge\neg r)) \;=p\wedge\neg q \wedge r \wedge\neg q = p\wedge\neg q \wedge r$

$B3\wedge C2\wedge D1 = (p\wedge\underline{\neg q})\wedge(\underline{q}\wedge p)\wedge(\underline{\neg q}\wedge\neg r) \;= 0$

coding

https://blog.csdn.net/m0_63794226/article/details/123441023

练习4：应用题

4. 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习. 选派必须满足以下条件:

(1) 若赵去，钱也去.

(2) 李、周两人中至少有一人去

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人.

(4) 孙、李两人同去或同不去.

(5) 若周去，则赵、钱也去.

用等值演算法分析该公司如何选派他们出国？

练习4解答

解此类问题的步骤：

1.设简单命题并符号化

2. 用复合命题描述各条件

3. 写出由复合命题组成的合取式

4. 将合取式成析取式（最好是主析取范式）

5. 求成真赋值, 并做出解释和结论

练习4解答

解

1. 设简单命题并符号化

设 p: 派赵去，q: 派钱去，r: 派孙去，s: 派李去，u: 派周去

练习4解答

解

1. 设简单命题并符号化

设 p: 派赵去，q: 派钱去，r: 派孙去，s: 派李去，u: 派周去

2. 写出复合命题

(1) 若赵去，钱也去 $p \to q$

(2) 李、周两人中至少有一人去 $s \vee u$

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人 $(q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)$

(4) 孙、李两人同去或同不去 $(r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)$

(5) 若周去，则赵、钱也去 $u \to (p \wedge q)$

练习4解答

3. 设(1)—(5)构成的合取式为*A*

$$A = (p\to q)\wedge(s\vee u)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))\wedge$$
$$((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))\wedge(u\to(p\wedge q))$$

4. 化成析取式

$$A \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s\wedge u)$$

结论：由上述析取式可知，*A*的成真赋值为00110与11001，

派孙、李去（赵、钱、周不去）

派赵、钱、周去（孙、李不去）

练习4解答

$A \Leftrightarrow \underline{(\neg p\vee q)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))}\wedge$

$\quad\underline{(s\vee u)\wedge(\neg u\vee(p\wedge q))}\wedge$

$\quad\underline{((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))}$

$B_1=(\neg p\vee q)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))$

$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(q\wedge\neg r))$ （分配律）

$B_2=(s\vee u)\wedge(\neg u\vee(p\wedge q))$

$\Leftrightarrow ((s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge s)\vee(p\wedge q\wedge u))$ （分配律）

$B_1\wedge B_2 \Leftrightarrow (\neg p\wedge q\wedge\neg r\wedge s\wedge\neg u)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg u)$

$\quad\vee(q\wedge\neg r\wedge s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge s)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge u)$

再令 $((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))=B_3$，则

$B_1\wedge B_2\wedge B_3 \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s\wedge u)$

2.2 析取范式与合取范式

公式的两种规范表示：能表达真值表所能提供的一切信息。

基本概念

(1) 文字——命题变项及其否定的总称

(2) 简单析取式——有限个文字构成的析取式

$p, \neg q, p\vee\neg q, p\vee q\vee r, \ldots$

(3) 简单合取式——有限个文字构成的合取式

$p, \neg q, p\wedge\neg q, p\wedge q\wedge r, \ldots$

(4) 析取范式——由有限个简单合取式组成的析取式

$p, \neg p\wedge q, p\vee\neg q, (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(q\wedge r)$

(5) 合取范式——由有限个简单析取式组成的合取式

$p, p\vee\neg q, \neg p\wedge q, (p\vee q\vee\neg p)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$

(6) 范式——析取范式与合取范式的总称

范式的性质

定理2.1

(1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式. $p\vee\neg p$

(2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式. $p\wedge\neg p$

定理2.2

(1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它每个简单合取式都是矛盾式.

(2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式.

命题公式的范式

定理2.3（范式存在定理）

任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式.

求公式A的范式的步骤：

(1) 消去A中的$\rightarrow$, $\leftrightarrow$（若存在）

$$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$$

$$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$$

(2) 否定联结词$\neg$的内移或消去

$$\neg\neg A\Leftrightarrow A$$

$$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$$

$$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$$

(3) 使用分配律

$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ 求合取范式

$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ 求析取范式

求公式的范式

例 求下列公式的析取范式与合取范式

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\to r$ （消去第一个→）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （消去第二个→）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （否定号内移——德摩根律) 析取范式

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （∨对∧分配律） 合取范式

$\Leftrightarrow ((p\vee r)\vee(q\wedge\neg q))\wedge(q\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(q\vee r)$ （范式不唯一）

为了使命题公式的范式唯一，
进一步将简单合取式、简单析取式规范化。

极小项与极大项

定义2.4 在含有n个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变项均以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第i个文字出现在左起第i位上（$1\le i\le n$），称这样的简单合取式（简单析取式）为极小项（极大项）．

几点说明：

- n个命题变项有2^n个极小项和2^n个极大项
- 2^n个极小项（极大项）均互不等值
- 用m_i表示第i个极小项，其中i是该极小项成真赋值的十进制表示. 用M_i表示第i个极大项，其中i是该极大项成假赋值的十进制表示. m_i（M_i）称为极小项（极大项）的名称.

实例

由两个命题变项 p, q 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

实例

由三个命题变项 p, q, r 形成的极小项与极大项.

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

主析取范式与主合取范式

主析取范式——由极小项构成的析取范式

主合取范式——由极大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变项为 p, q, r 时，

$$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$$ ——主析取范式

$$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1\wedge M_7$$——主合取范式

定理2.5 (主范式的存在唯一定理)

任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式, 并且是唯一的。

求公式主范式的步骤

求公式主析取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的析取范式$A' \Leftrightarrow B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_s$, 其中$B_j$是简单合取式 j=1,2, … ,s

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j \wedge (p_i \vee \neg p_i) \Leftrightarrow (B_j \wedge p_i) \vee (B_j \wedge \neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为n的极小项为止

(3) 消去重复出现的极小项, 即用m_i代替$m_i \vee m_i$

(4) 将极小项按下标从小到大排列

求公式主范式的步骤

求公式的主合取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的合取范式$A' \Leftrightarrow B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_s$, 其中$B_j$是简单析取式 $j=1,2,\ldots,s$

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j \vee (p_i \wedge \neg p_i) \Leftrightarrow (B_j \vee p_i) \wedge (B_j \vee \neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为n的极大项为止

(3) 消去重复出现的极大项, 即用M_i代替$M_i \wedge M_i$

(4) 将极大项按下标从小到大排列

再证明唯一性：

假设命题公式A等值于两个不同的主析取范式B和C，

那么必有B $\Leftrightarrow$ C.

B，C是不同的主析取范式，不妨设极小项m_i只出现在B中而不出现在C中.

则i的二进制表示为B的成真赋值，而为C的成假赋值，这与B $\Leftrightarrow$ C矛盾.

因此假设错误，主析取范式是唯一的.

同理可证主合取范式也是唯一的.

实例

例 求公式 $A=(p\to\neg q)\to r$的主析取范式和主合取范式

解 $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （析取范式） ①

$(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_6\vee m_7$ ②

r

$\Leftrightarrow (\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$ （主析取范式）

实例

$(p \to \neg q) \to r$

$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ （合取范式） ④

$p \vee r$

$\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg q) \vee r$

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2$ ⑤

$q \vee r$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee q \vee r$

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_4$ ⑥

⑤, ⑥代入④ 并排序，得

$(p \to \neg q) \to r \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$ （主合取范式）

主范式的应用

1. 求公式的成真、成假赋值

设公式A含n个命题变项, A的主析取范式有s个极小项, 则A有s个成真赋值, 它们是极小项下标的二进制表示, 其余2^n-s个赋值都是成假赋值.

例　$(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

成真赋值为 001, 011, 101, 110, 111,

成假赋值为 000, 010, 100.

类似地，由主合取范式也可以立即求出成假赋值和成真赋值.

主范式的应用

2. 判断公式的类型

设A含n个命题变项.

A为重言式 $\Leftrightarrow$ A的主析取范式含全部2^n个极小项.

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式不含任何极大项, 记为1.

A为矛盾式 $\Leftrightarrow$ A的主合析取范式含全部2^n个极大项.

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式不含任何极小项, 记为0.

A为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式中至少含一个、但不是全部极小项.

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式中至少含一个、但不是全部极大项.

主范式的应用

例 用主析取范式判断公式的类型:

(1) $A \Leftrightarrow \neg(p \to q) \wedge q$ (2) $B \Leftrightarrow p \to (p \vee q)$ (3) $C \Leftrightarrow (p \vee q) \to r$

解

(1) $A \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge q \Leftrightarrow 0$ 矛盾式

(2) $B \Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$ 重言式

(3) $C \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7$ 非重言式的可满足式

主范式的应用

3. 判断两个公式是否等值

例 用主析取范式判以下每一组公式是否等值

(1) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\wedge q)\rightarrow r$

(2) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\rightarrow q)\rightarrow r$

解 $p\rightarrow(q\rightarrow r) = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\rightarrow r = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\rightarrow q)\rightarrow r = m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

显见，(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.

主范式的应用

4. 解实际问题

例 某单位要从A,B,C三人中选派若干人出国考察,需满足下述条件:

(1) 若A去, 则C必须去;

(2) 若B去, 则C不能去;

(3) A和B必须去一人且只能去一人.

问有几种可能的选派方案?

解 记 p:派A去, q:派B去, r:派C去

(1) $p\to r$, (2) $q\to\neg r$, (3) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

满足三个条件，即求$A=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$ 的成真赋值

主范式的应用

求A的主析取范式

$$A=(p\to r)\land(q\to\neg r)\land((p\land\neg q)\lor(\neg p\land q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\lor r)\land(\neg q\lor\neg r)\land((p\land\neg q)\lor(\neg p\land q))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p\land\neg q)\lor(\neg p\land\neg r)\lor(r\land\neg q)\lor(r\land\neg r))$$
$$\land((p\land\neg q)\lor(\neg p\land q))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p\land\neg q)\land(p\land\neg q))\lor((\neg p\land\neg r)\land(p\land\neg q))$$
$$\lor((r\land\neg q)\land(p\land\neg q))\lor((\neg p\land\neg q)\land(\neg p\land q))$$
$$\lor((\neg p\land\neg r)\land(\neg p\land q))\lor((r\land\neg q)\land(\neg p\land q))$$

$$\Leftrightarrow (p\land\neg q\land r)\lor(\neg p\land q\land\neg r)$$

成真赋值:101,010

结论: 方案1 派A与C去；方案2 派B去

用成真赋值和成假赋值确定主范式

由主析取范式确定主合取范式

$A=m_{i1}\vee m_{i2}\vee\ldots\vee m_{is}$

没有出现的极小项为$m_{j1}, m_{j2},\ldots m_{j2^n-s}$

$\neg A=m_{j1}\vee m_{j2}\vee\ldots\vee m_{j2^n-s}$

$A \Leftrightarrow\neg\neg A$

$\Leftrightarrow\neg(m_{j1}\vee m_{j2}\vee\ldots\vee m_{j2^n-s})$

$\Leftrightarrow\neg m_{j1}\wedge\neg m_{j2}\wedge\ldots\wedge\neg m_{j2^n-s})$

$\Leftrightarrow M_{j1}\wedge M_{j2}\wedge\ldots\wedge M_{j2^n-s}$

m_i与M_i的关系：$\neg m_i\Leftrightarrow M_i$, $\neg M_i\Leftrightarrow m_i$

例 设A有3个命题变项, 且已知$A= m_1\vee m_3\vee m_7$, 求A的主合取范式.

解 A的成真赋值是1,3,7的二进制表示, 成假赋值是在主析取范式中没有出现的极小项的下角标0,2,4,5,6的二进制表示, 它们恰好是A的主合取范式的极大项的下角标, 故

$$A\Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6$$

第二章 习题课

主要内容

- 等值式与等值演算
- 基本等值式（16组，24个公式）
- 主析取范式与主合取范式

基本要求

- 深刻理解等值式的概念
- 牢记基本等值式的名称及它们的内容
- 熟练地应用基本等值式及置换规则进行等值演算
- 理解文字、简单析取式、简单合取式、析取范式、合取范式的概念
- 深刻理解极小项、极大项的概念、名称及下角标与成真、成假赋值的关系，并理解简单合取式与极小项的关系
- 熟练掌握求主范式的方法 （等值演算等）
- 会用主范式求公式的成真赋值、成假赋值、判断公式的类型、判断两个公式是否等值
- 会用命题逻辑的概念及运算解决简单的应用问题
- 会将公式等值地化成指定联结词完备集中的公式
- 掌握消解规则及其性质
- 会用消解算法判断公式的可满足性

练习1:概念

1. 设A与B为含n个命题变项的公式，判断下列命题是否为真？

(1) $A \Leftrightarrow B$当且仅当A与B有相同的主析取范式　　真

(2) 若A为重言式，则A的主合取范式为0　　假

(3) 若A为矛盾式，则A的主析取范式为1　　假

(4) 任何公式都能等值地化成$\{\wedge, \vee\}$中的公式　　假

(5) 任何公式都能等值地化成$\{\neg, \rightarrow, \wedge\}$中的公式　　真

说明:

(2) 重言式的主合取范式不含任何极大项，为1.

(3) 矛盾式的主合析范式不含任何极小项, 为0.

(4) $\{\wedge, \vee\}$不是完备集，如矛盾式不能写成$\{\wedge, \vee\}$中的公式.

(5) $\{\neg, \rightarrow\}$是完备集.

练习2: 判断公式类型

2. 判断下列公式的类型:

(1) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

解 用等值演算法求主范式

$$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (q \vee \neg p)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \vee \neg p)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow m_2 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_0$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$$ 主析取范式

$$\Leftrightarrow 1$$ 主合取范式

重言式

练习题2(续)

(2) $\neg(p\rightarrow q)\wedge q$

解 用等值演算法求公式的主范式

$\neg(p\rightarrow q)\wedge q$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\wedge q$

$\Leftrightarrow p\wedge\neg q\wedge q$

$\Leftrightarrow 0$ 主析取范式

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_1\wedge M_2\wedge M_3$ 主合取范式

矛盾式

练习2(续)

(3) $(p\to q)\wedge\neg p$

解 用等值演算法求公式的主范式

$$
\begin{aligned}
& (p\to q)\wedge\neg p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p\vee q)\wedge\neg p \\
\Leftrightarrow\ & \neg p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q) \\
\Leftrightarrow\ & m_0 \vee m_1 && \text{主析取范式} \\
\Leftrightarrow\ & M_2 \wedge M_3 && \text{主合取范式}
\end{aligned}
$$

非重言式的可满足式

练习3：求公式的主范式

3．已知命题公式A中含3个命题变项p, q, r，并知道它的成真赋值为001, 010, 111, 求A的主析取范式和主合取范式，及A对应的真值函数.

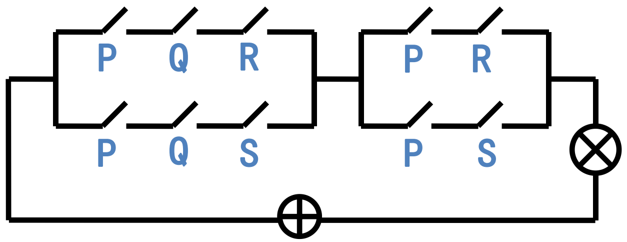
解

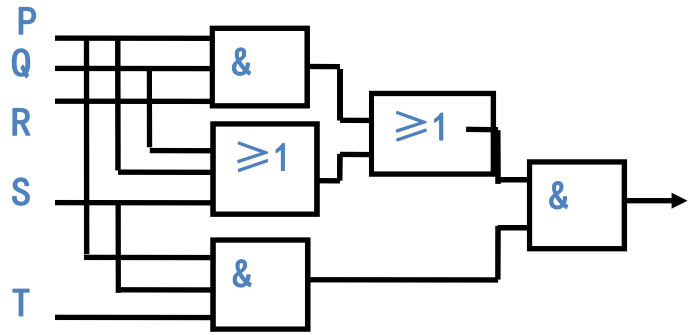
A的主析取范式为$m_1 \vee m_2 \vee m_7$

A的主合取范式为$M_0 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$

$p\ q\ r$	F	$p\ q\ r$	F
0 0 0	0	1 0 0	0
0 0 1	1	1 0 1	0
0 1 0	1	1 1 0	0
0 1 1	0	1 1 1	1

例2.39 利用命题公式基本等价定律，化简下列电路图。





解 上述电路图可描述为：

(1) ((P∧Q∧R)∨(P∧Q∧S))∧((P∧R)∨(P∧S))

(2) ((P∧Q∧R)∨(P∨Q∨S))∧(P∧S∧T)

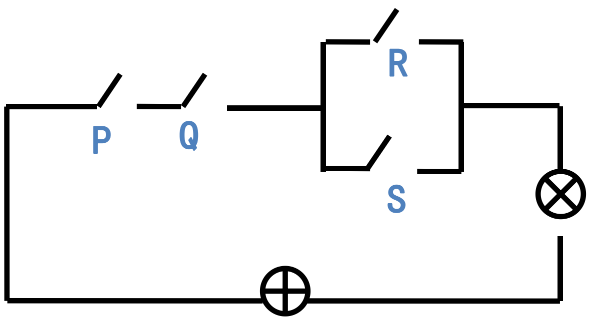
（1）$((P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge S))\wedge((P\wedge R)\vee(P\wedge S))$

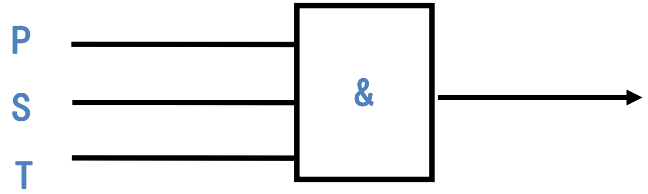
$= ((P\wedge Q\wedge(R\vee S))\wedge(P\wedge(R\vee S))$

$= P\wedge Q\wedge(R\vee S)$；

（2）$((P\wedge Q\wedge R)\vee(P\vee Q\vee S))\wedge(P\wedge S\wedge T)$

$= (P\vee Q\vee S)\wedge(P\wedge S\wedge T) = P\wedge S\wedge T$。





例2.42 一家航空公司，为了保证安全，用计算机复核飞行计划。每台计算机能给出飞行计划正确或有误的回答。由于计算机也有可能发生故障，因此采用三台计算机同时复核。由所给答案，再根据“少数服从多数”的原则作出判断，试将结果用命题公式表示，并加以简化，画出电路图。

解 设C_1，C_2，C_3分别表示三台计算机的答案，S表示可飞行。则根据题意可得：

$$S=(\neg C_1\wedge C_2\wedge C_3)\vee(C_1\wedge \neg C_2\wedge C_3)\vee(C_1\wedge C_2\wedge\neg C_3)\vee(C_1\wedge C_2\wedge C_3)$$

化简S如下：

$$S=((C_1\vee\neg C_1)\wedge C_2\wedge C_3)\vee(C_1\wedge(C_2\vee\neg C_2)\wedge C_3)$$

$$\vee(C_1\wedge C_2\wedge(C_3\vee\neg C_3))$$

$$=(C_2\wedge C_3)\vee(C_1\wedge C_3)\vee(C_1\wedge C_2)$$

从而S的电路图为：