第三章 命题逻辑的推理理论

主要内容

推理的形式结构

- 推理的正确与错误
- 推理的形式结构
- 判断推理正确的方法
- 推理定律

自然推理系统*P*

- 形式系统的定义与分类
- 自然推理系统*P*
- 在*P*中构造证明:直接证明法、附加前提证明法、归谬法

数理逻辑的主要任务是用数学的方法研究推理。

前提：已知的命题公式集合；

推理：从前提出发推出结论的思维过程；

结论：从前提出发应用推理规则推出的命题公式。

3.1 推理的形式结构

定义3.1 设$A_1, A_2, \ldots, A_k, B$为命题公式. 若对于每组赋值, $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为假，或当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时，$B$也为真，则称由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出结论$B$的推理是有效的或正确的, 并称$B$是有效结论.

注意：

1.只要不出现$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为1，B为0的情况，推理就是正确的。

2.推理正确不能保证结论一定正确，因为前提可能就不成立。

3.由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推结论B的推理是否正确与前提的排列次序无关；设前提集合为Γ，将由Γ推B的推理记为$\Gamma \vdash B$，称为推理的形式结构。若推理是正确的，则记为$\Gamma \vDash B$，否则记为$\Gamma \nvDash B$。

注意：有效结论≠结论正确

Γ（Gamma）

定理3.1 由命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推B的推理正确当且仅当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B$为重言式。

推理的形式结构

$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vdash B$等同于蕴涵式$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B$

推理正确$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vDash B$等同于$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$ 表示蕴涵式为重言式。

推理的形式结构写成：

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

推理正确问题转化为判断$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B$是否为重言式。

判断推理是否正确的方法：

真值表法、等值演算法、主范式法

推理实例

例 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号，则明天是5号. 今天是1号. 所以, 明天是5号.

(2) 若今天是1号，则明天是5号. 明天是5号. 所以, 今天是1号.

解 设 p：今天是1号，q：明天是5号.

(1) 推理的形式结构：$(p\rightarrow q)\wedge p\rightarrow q$

用等值演算法

$$(p\rightarrow q)\wedge p\rightarrow q$$
$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q$$
$$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee q \Leftrightarrow 1$$

由定理3.1可知推理正确

推理实例

(2) 推理的形式结构: $(p\to q)\wedge q\to \underline{p}$

用主析取范式法

$$(p\to q)\wedge q\to p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge q\to p$$

$$\Leftrightarrow \neg\ ((\neg p\vee q)\wedge q)\vee p$$

$$\Leftrightarrow \neg q\vee p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(\underline{p\wedge\neg q})\vee (p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_3$$

结果不含m_1, 故01是成假赋值，所以推理不正确

推理定律——重言蕴涵式

推理定律（一些重要的重言蕴涵式）

1. $A \Rightarrow (A \vee B)$ 附加律
2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$ 化简律
3. $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ 假言推理
4. $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ 拒取式
5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ 析取三段论
6. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$ 假言三段论
7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ 等价三段论
8. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ 构造性二难

   $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$ 构造性二难(特殊形式)
9. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$ 破坏性二难

把具体的命题公式带入某推理定律后就得到这一定律的一个带入实例。

推理定律的每个代入实例都是重言式，可使用这些推理定律证明推理正确。

另：每个等值式可产生两个推理定律

如, 由$A \Leftrightarrow \neg\neg A$可产生 $A \Rightarrow \neg\neg A$ 和 $\neg\neg A \Rightarrow A$

3.2 自然推理系统P

证明是一个描述推理过程的命题公式序列，其中的每个公式或是已知前提，或是由前面的公式应用推理规则得到的结论。

定义3.2 一个形式系统 I 由下面四个部分组成：

(1) 非空的字母表，记作 $A(I)$.

(2) $A(I)$ 中符号构造的合式公式集，记作 $E(I)$.

(3) $E(I)$ 中一些特殊的公式组成的公理集，记作 $A_X(I)$.

(4) 推理规则集，记作 $R(I)$.

记$I=<A(I),E(I),A_X(I),R(I)>$, 其中$<A(I),E(I)>$是 I 的形式语言系统, $<A_X(I),R(I)>$ 是 I 的形式演算系统.

形式系统分两类：

自然推理系统: 从任意前提出发，应用推理规则进行推理演算，得到的命题公式是推理的结论。无公理，即$A_X(I)=\varnothing$。

公理推理系统: 只能从若干条给定的公理出发，应用推理规则进行演算，得到的结论是系统中的重言式，称作定理。

自然推理系统P

定义3.3 自然推理系统 P 定义如下:

1. 字母表

 (1) 命题变项符号：$p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots$

 (2) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

 (3) 括号与逗号：(,), ,

2. 合式公式（同定义1.6）

3. 推理规则

 (1) 前提引入规则：在证明的任何步骤都可引入前提。

 (2) 结论引入规则：在证明的任何步骤所得到的结论都可作为后继证明的前提。

 (3) 置换规则：在证明的任何步骤，命题公式中的子公式都可用等值的公式置换，得到公式序列中的又一公式。

推理规则

由9条推理定律和结论引入规则可导出以下各条推理规则：

(4) 假言推理规则

$$\frac{A\to B \qquad A}{\therefore B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A\vee B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A\wedge B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{A\to B \qquad \neg B}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{A\to B \qquad B\to C}{\therefore A\to C}$$

(9) 析取三段论规则

$$\frac{A\vee B \qquad \neg B}{\therefore A}$$

推理规则

(10) 构造性二难推理规则

$$\begin{array}{c} A\rightarrow B \\ C\rightarrow D \\ A\vee C \\ \hline \therefore B\vee D \end{array}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\begin{array}{c} A\rightarrow B \\ C\rightarrow D \\ \neg B\vee\neg D \\ \hline \therefore \neg A\vee\neg C \end{array}$$

(12) 合取引入规则

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline \therefore A\wedge B \end{array}$$

在自然推理系统P中构造证明

设前提$A_1, A_2,\ldots, A_k$,结论B及公式序列$C_1, C_2,\ldots, C_l$. 如果每一个$C_i(1\le i\le l)$是某个A_j, 或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到, 并且$C_l=B$, 则称这个公式序列是由$A_1, A_2,\ldots, A_k$推出B的证明。

例 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我明天就有课. 若我明天有课，今天必备课. 我今天没备课. 所以，明天不是星期一、也不是星期三.

直接证明法

解：

(1) 设命题并符号化

设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我明天有课，s：我今天备课

(2) 写出证明的形式结构

前提：$(p \vee q) \to r$，$r \to s$，$\neg s$

结论：$\neg p \wedge \neg q$

(3) 证明

① $r \to s$ 前提引入

② $\neg s$ 前提引入

③ $\neg r$ ①②拒取式

④ $(p \vee q) \to r$ 前提引入

⑤ $\neg(p \vee q)$ ③④拒取式

⑥ $\neg p \wedge \neg q$ ⑤置换

构造证明方法-附加前提证明法

附加前提证明法　适用于结论为蕴涵式

欲证

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：$C \to B$

等价地证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

结论：B

理由：

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to (C \to B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \to B$$

附加前提证明法实例

例 构造下面推理的证明

2是素数或合数. 若2是素数，则 $\sqrt{2}$ 是无理数. 若$\sqrt{2}$是无理数，则4不是素数. 所以，如果4是素数，则2是合数.

解 用附加前提证明法构造证明

(1) 设 p：2是素数， q：2是合数，

r:$\sqrt{2}$是无理数，s：4是素数

附加前提证明法实例

(2) 推理的形式结构

前提：$p\vee q$，$p\rightarrow r$，$r\rightarrow\neg s$

结论：$s\rightarrow q$

(3) 证明

① s	附加前提引入
② $p\rightarrow r$	前提引入
③ $r\rightarrow\neg s$	前提引入
④ $p\rightarrow\neg s$	②③假言三段论
⑤ $\neg p$	①④拒取式
⑥ $p\vee q$	前提引入
⑦ q	⑤⑥析取三段论

构造证明方法-归谬法（反证法）

归谬法（反证法）

欲证

前提：$A_1, A_2, \dots, A_k$

结论：B

做法

在前提中加入$\neg B$，推出矛盾.

理由

$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee B$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B)$

若$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B)$为矛盾式，则蕴含式是重言式，

即$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \Rightarrow B$

归谬法实例

例 前提：$\neg(p\wedge q)\vee r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

证明 用归缪法

① q	结论否定引入
② $r\rightarrow s$	前提引入
③ $\neg s$	前提引入
④ $\neg r$	②③拒取式
⑤ $\neg(p\wedge q)\vee r$	前提引入
⑥ $\neg(p\wedge q)$	④⑤析取三段论
⑦ $\neg p\vee\neg q$	⑥置换
⑧ $\neg p$	①⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p\wedge p$	⑧⑨合取

第三章 习题课

主要内容

- 推理的形式结构
- 判断推理是否正确的方法
    - 真值表法
    - 等值演算法
    - 主析取范式法
- 推理定律
- 自然推理系统*P*
- 构造推理证明的方法
    - 直接证明法
    - 附加前提证明法
    - 归谬法(反证法)

基本要求

- 理解并记住推理形式结构的两种形式：

  1. $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B$

  2. 前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

  结论：B

- 熟练掌握判断推理是否正确的不同方法（如真值表法、等值演算法、主析取范式法等）
- 牢记 自然推理系统P中各条推理规则
- 熟练掌握构造证明的直接证明法、附加前提证明法和归谬法
- 会解决实际中的简单推理问题

练习1：判断推理是否正确

1. 判断下面推理是否正确:

(1) 前提：$\neg p \to q$，$\neg q$

结论：$\neg p$

解　推理的形式结构: $(\neg p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$

方法一：等值演算法

$$
\begin{aligned}
& (\neg p \to q) \wedge \neg q \to \neg p \\
\Leftrightarrow\ & \neg((p \vee q) \wedge \neg q) \vee \neg p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \wedge \neg q) \vee q \vee \neg p \\
\Leftrightarrow\ & ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee \neg p \\
\Leftrightarrow\ & \neg p \vee q
\end{aligned}
$$

易知10是成假赋值，不是重言式，所以推理不正确.

练习1解答

方法二：主析取范式法，

$$
\begin{aligned}
&(\neg p\to q)\wedge\neg q\to\neg p\\
\Leftrightarrow&\neg((p\vee q)\wedge\neg q)\vee\neg p\\
\Leftrightarrow&\neg p\vee q\\
\Leftrightarrow&M_2\\
\Leftrightarrow&m_0\vee m_1\vee m_3
\end{aligned}
$$

未含m_2, 不是重言式, 推理不正确.

练习1解答

方法三　真值表法

p	q	$\neg p\to q$	$(\neg p\to q)\wedge\neg q$	$(\neg p\to q)\wedge\neg q\to\neg p$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	0	1

不是重言式, 推理不正确

方法四　直接观察出10是成假赋值

练习1解答

(2) 前提：$q \to r$， $p \to \neg r$

结论：$q \to \neg p$

解 推理的形式结构： $(q \to r) \land (p \to \neg r) \to (q \to \neg p)$

用等值演算法

$$(q \to r) \land (p \to \neg r) \to (q \to \neg p)$$

$$\Leftrightarrow (\neg q \lor r) \land (\neg p \lor \neg r) \to (\neg q \lor \neg p)$$

$$\Leftrightarrow \neg((q \land \neg r) \lor (p \land r)) \to (\neg q \lor \neg p)$$

$$\Leftrightarrow \neg((q \lor p) \land (q \lor r) \land (\neg r \lor p)) \to (\neg q \lor \neg p)$$

$$\Leftrightarrow ((q \lor p) \land (q \lor r) \land (\neg r \lor p)) \lor (\neg q \lor \neg p)$$

$$\Leftrightarrow 1$$

推理正确

练习2：构造证明

2. 在系统*P*中构造下面推理的证明：

如果今天是周六，我们就到颐和园或圆明园玩. 如果颐和园游人太多，就不去颐和园. 今天是周六. 颐和园游人太多. 所以, 我们去圆明园或动物园玩.

练习2解答

(2) 前提：$p \to (q \vee r)$，$s \to \neg q$，p，s

结论：$r \vee t$

(3) 证明：

① $p \to (q \vee r)$	前提引入
② p	前提引入
③ $q \vee r$	①②假言推理
④ $s \to \neg q$	前提引入
⑤ s	前提引入
⑥ $\neg q$	④⑤假言推理
⑦ r	③⑥析取三段论
⑧ $r \vee t$	⑦附加