二元关系

关系理论历史悠久，与集合论、数理逻辑、组合学、图论和布尔代数都有密切联系。

关系是日常生活以及数学中的一个基本概念。例如：

- 父子关系、兄妹关系、师生关系、商品与用户的关系等
- 相等关系、图形的相似全等关系、集合的包含关系等

关系理论被广泛地应用于计算机科学与技术

- ◆ 计算机程序的输入、输出关系
- ◆ 以关系为核心的关系数据库
- ◆ 用于分析编程语言的句法
- ◆ 表示信息之间的联系以实现信息检索
- ◆ 关系理念也是数据结构、情报检索、数据库、算法分析、计算机理论等计算机学科的数学工具

在某种意义下，**关系可以理解为有联系的一些对象相互之间的比较行为。**而根据比较结果来执行不同任务的能力是计算机最重要的属性之一。

二元关系及其表示

- 上，下
- 左，右
- $3<4$
- 中国的首都是北京
- 平面上一个点的横、纵坐标等

序偶

特征：成对出现且具有一定的顺序

- **定义4.1** 由两个元素x，y按照一定的次序组成的二元组被称为**有序偶对**，简称**序偶**(Ordered Couple)，**记作<x,y>**，其中，称x为<x,y>的第一元素，y为<x,y>的第二元素。

例如：中国的首都是北京 的序偶表示为： <中国，北京>

李玲是李华的女儿 的序偶表示为： <李玲，李华>

注意： （1）序偶可以看作是具有两个元素的集合。

（2）序偶中的两个元素具有**确定的次序**

即<a,b>≠<b,a>，**但**{a,b}={b,a}。

定义4.2 给定序偶$<a,b>$和$<c,d>$,

$$<a,b>=<c,d> \Leftrightarrow a=c \text{且} b=d。$$

例4.1 x，y取何值时，序偶$<x+y,4>$与$<5,2x-y>$相等?

解 根据定义4.2，有

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

解此二元一次方程组得x=3，y=2。

即当x=3，y=2时，序偶$<x+y，4>$与$<5，2x-y>$相等。

定义4.3 设A，B是两个集合，称集合：

$$A\times B=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\} \qquad (4\text{-}1)$$

为集合A与B的**笛卡尔积**(Cartesian Product)。

注意—笛卡尔积的计算及性质

（1）A与B的笛卡尔积是以序偶为元素的集合.

（2）序偶的第一元素遍历A中的元素，第二元素遍历B中的元素.

（3）当集合A，B都是有限集时，$|A\times B|=|B\times A|=|A|\times|B|$.

（4）两个集合的笛卡尔积不满足交换律.

（5）$A\times B=\Phi\Leftrightarrow A=\Phi$或者$B=\Phi$。

例4.2 设A＝{a}，B＝P(A)，C=Φ，D={0,1,4}，请分别写出下列笛卡儿积中的元素。

(1) A×B，B×A。

(2) A×C，C×A。

(3) A×(B×D)，(A×B)×D。

解 B=P(A)={Φ，{a}}，根据式（4-1），有

(1) $A\times B=\{\langle a, \Phi\rangle, \langle a, \{a\}\rangle\}$

$B\times A=\{\langle \Phi, a\rangle, \langle \{a\}, a\rangle\}$

交换律不成立

(2) A×C=Φ，C×A=Φ

（3）因为

$B\times D=\{<\Phi, 0>, <\Phi, 1>, <\Phi, 4>, <\{a\}, 0>, <\{a\}, 1>, <\{a\}, 4>\}$

所以

结合律不成立

$A\times(B\times D)=\{<a, <\Phi, 0>>, <a, <\Phi, 1>>, <a, <\Phi, 4>>,$

$<a, <\{a\}, 0>>, <a, <\{a\}, 1>>, <a, <\{a\}, 4>>\}$

同理

$(A\times B)\times D=\{<<a, \Phi>, 0>, <<a, \Phi>, 1>, <<a, \Phi>, 4>,$

$<<a, \{a\}>, 0>, <<a, \{a\}>, 1>, <<a, \{a\}>, 4>\}$

定理4.1 设A,B,C是任意三个集合，则

(1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

(2) $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

(3) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

(4) $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

分析 待证等式两端都是集合

于是利用集合与集合关系的判定与证明方法，直接证明即可。

等式成立⇔两个集合相等

集合相等⇔两个集合互相包含

$B\subseteq A \Leftrightarrow$ 对 $\forall x$，如果 $x\in B$，则 $x\in A$。

证明（1） $\forall <x,y>$

$<x,y> \in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$　　笛卡儿积的定义

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$　　并运算定义

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$　　分配律

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B\vee <x,y>\in A\times C$　　笛卡儿积的定义

$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$，　　并运算定义

于是有 $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$。

（2）、（3）和（4）的证明 略。

定理4.2 设A,B,C,D是任意四个非空集合，则

$$A\times B\subseteq C\times D \Leftrightarrow A\subseteq C，B\subseteq D。$$

证明 **充分性($\Leftarrow$)：**

$<x,y>$

$<x,y>\in A\times B \Rightarrow x\in A\wedge y\in B$

$A\subseteq C，B\subseteq D \Rightarrow x\in C\wedge y\in D$

$\Rightarrow <x,y>\in C\times D$

$\Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$

必要性($\Rightarrow$)：

$\forall x，\forall y$

$x\in A，y\in B \Rightarrow <x,y>\in A\times B$

$A\times B\subseteq C\times D \Rightarrow <x,y>\in C\times D$

$\Rightarrow x\in C\wedge y\in D$

$\Rightarrow A\subseteq C，B\subseteq D$

综上所述，定理成立。

定义4.4 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是n个集合，称

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{<a_1,a_2,\cdots,a_n>|(a_i\in A_i)\wedge i\in\{1,2,3,\cdots,n\}\} \qquad (4\text{-}2)$$

为集合$A_1,A_2,\cdots,A_n$的**笛卡儿积**(Descartes Product)

当$A_1=A_2=\cdots=A_n=A$时，有$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=A^n$。

注意： 当集合$A_1,A_2,\cdots,A_n$都是有限集时，$|A_1\times A_2\times\cdots\times A_n|=|A_1|\times|A_2|\times\cdots\times|A_n|$。

问题： 设A = {1，4}，B = {a，b}，R = {<1，a>，<1，b>，<4，b>}，

则R与A×B具有怎样的关系呢?

因为A×B={<1，a>，<4，a>，<1，b>，<4，b>}

所以R ⊆ A×B

新名称：R是A到B的一个二元关系

R是A×B的子集

定义4.5 设A,B为两个非空集合，称A×B的任何子集R为**从A到B的二元关系**，简称关系(Relation)，记作R：A→B；

如A＝B，则称R为**A上的二元关系**，记作R：A→A。

若<x,y>∈R，则记为xRy，读作“x对y有关系R”；

若<x,y>∉R，则记为$x\not{R}y$，读作“x对y没有关系R”。

解题小贴士—给定集合是否为从A到B的一个关系的判断方法

（1）计算A×B;

（2）判断给定集合是否为A×B的子集。

例4.3 假设$A=\{1，4\}$，$B=\{a，b\}$，试判断下列集合是否为A到B的一个关系。

（1）$S_1=\{<3，b>\}$。

（2）$S_2=\{<1，a>，<4，a>，<1，b>，<4，b>\}$。

解 因为 $A\times B=\{<1，a>，<4，a>，<1，b>，<4，b>\}$。

所以

（1）S_1不是$A\times B$的子集，从而S_1不是A到B的一个关系。

（2）S_2是$A\times B$的子集，从而S_2是A到B的一个二元关系。

例4.4 设A = {1,2}，试判断下列集合是否为A上的关系。

(1) $T_1 = \Phi$ 。 是，空关系

(2) $T_2 = A \times A$。 是，全关系

(3) $T_3 = \{<1，1>，<2，2>\}$。 $I_A = \{<x，x>|x \in A\}$ 是，恒等关系

(4) $T_4 = \{<1，1>，<1，2>\}$。 是

(5) $T_5 = \{<1，1>，<2，2>，<2，1>，<<1，1>，1>\}$。 不是

解 因为 $A \times A = \underline{\{<1，1>，<2，2>，<2，1>，<1，2>\}}$。

例4.5 设A = {b}，B = {c，d}，试写出从A到B的所有关系。

解 因为A×B = { <b, c>， <b, d>},

所以从A到B的所有关系为 Φ ，{<b，c>}，{<b，d>}，{<b，c>，<b，d>}共4个。

注意 当集合A, B都是有限集时，A×B共有$2^{|A|\cdot|B|}$个不同的子集，即从A到B的不同关系共有$2^{|A|\cdot|B|}$个。

定义4.6 设A_1，A_2，…，A_n为n个非空集合，则称$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$的子集R为以$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$为基的**n元关系**(n-ary Relation)。

姓名	性别	学号	专业
张扬	男	4019091601	数字媒体
刘丽	女	4019091604	计算机科学
李强	男	4019091603	计算机科学
王琳	女	4019091604	软件工程

集合表示法 列举法

例4.4 设A = {1,2}，试判断下列集合是否为A上的关系。

(1) $T_1 = \Phi$ 。

(2) $T_2 = A \times A$。

(3) $T_3 = \{<1, 1>, <2, 2>\}$。

(4) $T_4 = \{<1, 1>, <1, 2>\}$。

$I_A = \{<x, x> | x \in A\}$

集合表示法 描述法

从A到B的关系R的**关系图**(Relation Graph)是$G_R=<V,E>$，其中V是顶点集，E是边集。任意$a_i \in A$，$b_j \in B$，如果$<a_i, b_j> \in R$，则在R的关系图中就有一条从a_i到b_j的有向边。

(1) A≠B

设$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$，R是从A到B的一个二元关系，则规定R的关系图如下：

① 设$a_1,a_2,\ldots,a_n$和$b_1,b_2,\ldots,b_m$分别为图中的顶点，用“。”表示；

② 如$<a_i,b_j>\in R$，则a_i和b_j可用一条a_i 。→。 b_j的有向边相连。

(2) A=B

设A = B= <$a_1,a_2,\ldots,a_n$>， R是A上的一个关系，则R的关系图画法规定如下:

① 设$a_1,a_2,\ldots,a_n$为图中顶点，用“。”表示。

② 如果<a_i,a_j>$\in$R，则从a_i到a_j可用一条a_i。$\longrightarrow$。a_j的有向边相连。

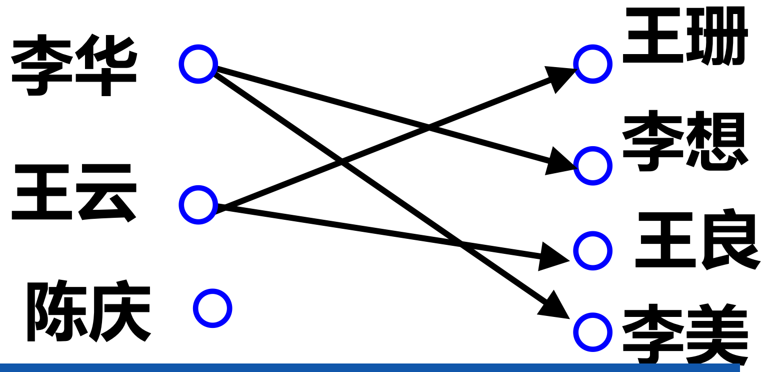
③ 如果<a_i,a_i>$\in$R，则a_i到a_i用一个带箭头的小圆圈表示，即：a_i。

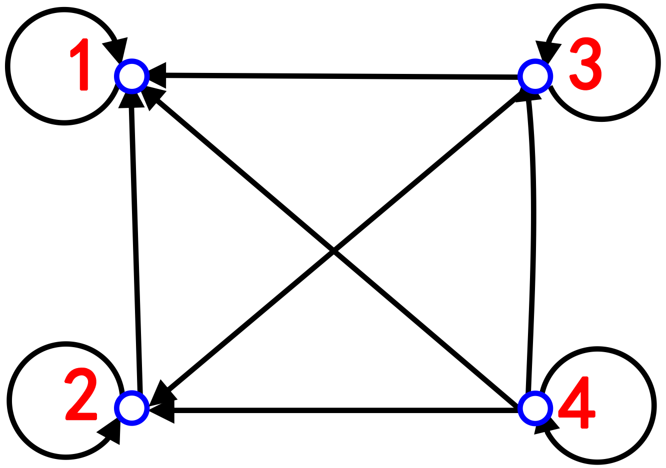
例4.6 试用关系图表示下列关系。

（1）设A＝{李华,王云,陈庆}，B＝{李美,李想,王良,王珊}，其中李华的两个儿子是李美、李想，王云的两个儿子是王良、王珊，即父子关系R={<李华，李美>，<李华，李想>，<王云，王良>，<王云，王珊>}。

（2）设A＝{1，2，3，4}，A上的大于等于关系S＝{<1，1>,<2，2>,<3，3>,<4，4>,<2，1>,<3，1>,<4，1>,<3，2>,<4，2>,<4，3>}。

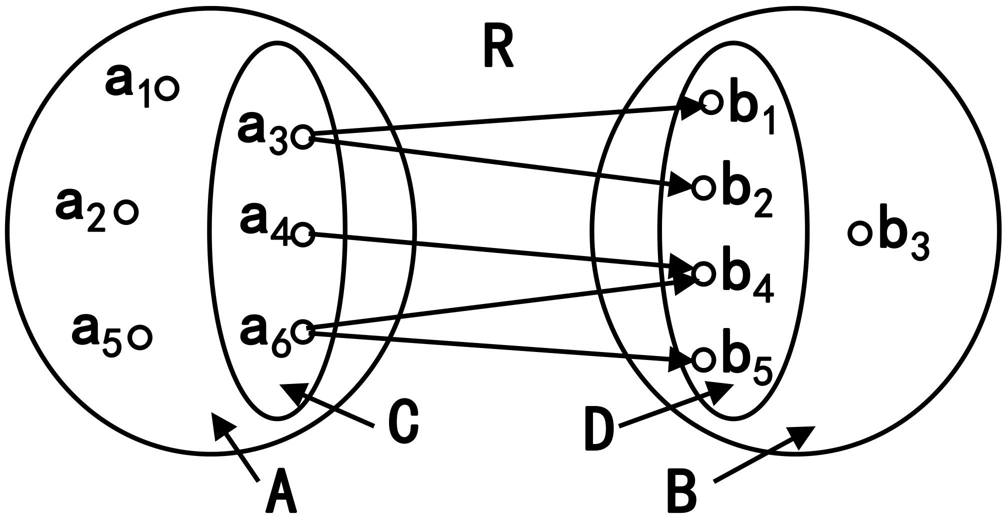
解 关系R和S的关系图如右图所示。





注意 （1）对于无边相连的节点，不能从关系图中删掉。
（2）给定关系的集合表示法中的序偶与关系图表示中的有向边是一一对应的。

例4.7 试用集合表示法表示右图中用关系图表示的关系R，并指出R的基。



解 根据右图，$R=\{<a_3, b_1>, <a_3, b_2>, <a_4, b_4>, <a_6, b_4>, <a_6, b_5>\}$，

$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$，

$B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$，

$C=\{a_3, a_4, a_6\}$，$D=\{b_1, b_2, b_4, b_5\}$。

显然有$R\subseteq C\times D\subseteq A\times B$，

因此，R是以$C\times D$为基的二元关系，也是以$A\times B$为基的二元关系。

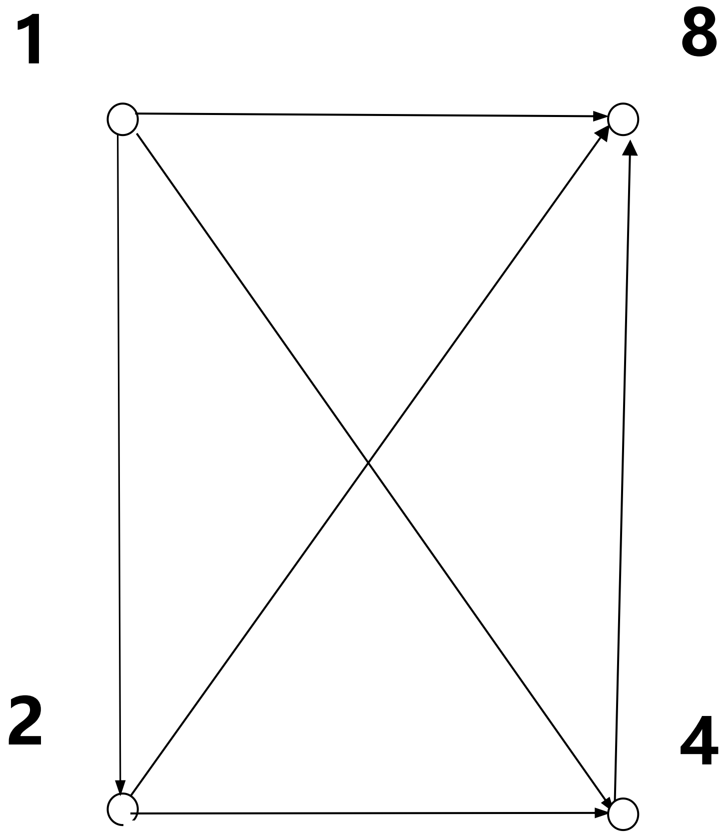
显然，$C=\{x|<x, y>\in R\}\subseteq A$，$D=\{y|<x, y>\in R\}\subseteq B$，此时，A称为关系R的前域，B称为关系R的后域，C称为R的定义域(Domain)，记作$C=\mathrm{dom}R$，D称为R的值域(Range)，记作$D=\mathrm{ran}R$，$\mathrm{fld}R=\mathrm{dom}R\cup\mathrm{ran}R$称为R的域(Field)

例4.8 设A={1，2，4，8}，R是A上的小于关系。试写出R的元素，画出R的关系图，并求出R的定义域、值域和域。

解 由题意可得，

$R=\{<1,2>,<1,4>,<1,8>,<2,4>,<2,8>,<4,8>\}$，

关系图如右图所示。



$\mathrm{dom}R=\{x \mid <x，y>\in R\}=\{1，2，4\}$，

$\mathrm{ran}R=\{y \mid <x，y>\in R\}=\{2，4，8\}$，

$\mathrm{fld}R=\mathrm{dom}R\cup \mathrm{ran}R=\{1，2，4，8\}$。

例4.9 设$H=\{f,m,s,d\}$表示一个家庭中父、母、子和女四个人的集合，确定H上的一个长幼关系R_H，指出该关系的定义域、值域和域。

解 $R_H=\{<f,s>,<f,d>,<m,s>,<m,d>\}$

$domR_H=\{f,m\},ranR_H=\{s,d\}$

$fldR_H=\{f,m,s,d\}$

设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，R是从A到B的一个二元关系，称矩阵$M_R=(m_{ij})_{n\times m}$为关系R的**关系矩阵**(Relation Matrix)，其中

布尔矩阵

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \langle a_i,b_j\rangle\in R\\ 0 & \langle a_i,b_j\rangle\notin R\end{cases}\quad (i=1,2,...,n,\ j=1,2,...,m)$$

M_R又被称为R的**邻接矩阵**(Adjacency Matrix)。

注意

1. 必须先对集合A,B中的元素排序。
2. A中元素序号对应矩阵元素的行下标。
3. B中元素序号对应矩阵元素的列下标。
4. 关系矩阵是0-1矩阵，称为布尔矩阵。

例4.10 试用关系矩阵表示例4.6的关系。

解 设R，S的关系矩阵分别为M_R，M_S，则有

$$M_R \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}\text{李美} & \text{李想} & \text{王良} & \text{王珊}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{李华}\\ \text{王云}\\ \text{陈庆}\end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$

$$M_S = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\end{array}$$

注意 关系矩阵中1的数量与对应关系中的序偶数量是相等的。

父子关系R={<李华，李美>，<李华，李想>，<王云，王良>，<王云，王珊>}。A上的大于等于关系S={<1，1>,<2，2>,<3，3>,<4，4>,<2，1>,<3，1>,<4，1>,<3，2>,<4，2>,<4，3>}。

例4.11 设A＝{1，2}，考虑P(A)上的包含关系R和真包含关系S。

（1）试写出R和S中的所有元素。

（2）试写出R和S的关系矩阵。

解 （1）因为P(A)＝{Φ，{1}，{2}，{1，2}}，所以

R＝{< Φ，Φ>，<Φ，{1}>，<Φ，{2}>，<Φ，{1，2}>，<{1}，{1}>，<{1}，{1，2}>,<{2}，{2}>，<{2}，{1，2}>,<{1，2}，{1，2}>}

S＝{<Φ，{1}>，<Φ，{2}>，<Φ，{1，2}>，<{1}，{1，2}>，<{2}，{1，2}>}

（2）设R和S的关系矩阵分别为M_R和M_S，则有

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义4.7 （1）如果$A=(a_{ij})$和$B=(b_{ij})$是两个$m\times n$阶布尔矩阵，则**A和B的布尔并(Boolean Join)**也是$m\times n$阶矩阵，记作$A\vee B$。若$A\vee B=C=(c_{ij})$，则：

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & \text{其他} \\ 0, & a_{ij}=0,\ b_{ij}=0\end{cases}\qquad (1\le i\le m,\ 1\le j\le n)\qquad (4\text{-}4)$$

即$c_{ij}=a_{ij}\vee b_{ij}$

（2）如果$A=(a_{ij})$和$B=(b_{ij})$是两个$m\times n$阶矩阵，则**A和B的布尔交(Boolean Meet)**也是$m\times n$阶矩阵，记作$A\wedge B$。如果$A\wedge B=D=(d_{ij})$，其中：

$$d_{ij}=\begin{cases}1 & a_{ij}=1,\ b_{ij}=1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad (1\le i\le m,\ 1\le j\le n)\qquad (4\text{-}5)$$

即$d_{ij}=a_{ij}\wedge b_{ij}$

（3）如果矩阵A=(a_{ij})是m×p阶布尔矩阵，B=(b_{ij})是p×n阶布尔矩阵，则**A和B的布尔积**(Boolean Product)是m×n阶布尔矩阵，记作A⊙B，若A⊙B =E=(e_{ij})，则：

$$e_{ij} = \bigvee_{k=1}^{p}\left(a_{ik} \wedge b_{kj}\right)\left(1 \le i \le m,\quad 1 \le j \le n\right) \qquad (4\text{-}6)$$

注意：（1）两个布尔矩阵的行数和列数分别相同时才能进行布尔并和布尔交。

（2）当第一个布尔矩阵的列数等于第二个布尔矩阵的行数时，它们才能进行布尔积。

（3）式(4-6)中的“∧”，“∨”分别对应“×”，“+”时，即得普通矩阵乘法计算公式。

例4.12 令 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$、$B=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}$ 和 $C=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$。

计算

(1) $A \vee B$;

(2) $A \wedge B$;

(3) $A \odot C$。

解 **(1) 根据式(4-4)，有**

$$A \vee B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\vee 0 & 1\vee 1 & 0\vee 1 & 1\vee 0 \\ 0\vee 0 & 1\vee 0 & 0\vee 1 & 1\vee 1 \\ 1\vee 0 & 0\vee 1 & 0\vee 0 & 0\vee 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 根据式(4-5)，有

$$A \wedge B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\wedge 0 & 1\wedge 1 & 0\wedge 1 & 1\wedge 0 \\ 0\wedge 0 & 1\wedge 0 & 0\wedge 1 & 1\wedge 1 \\ 1\wedge 0 & 0\wedge 1 & 0\wedge 0 & 0\wedge 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) 根据式(4-6)，有

$$A \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

定理4.3 **假设A、B和C是n×n阶布尔矩阵，则**

(1) $A \vee B = B \vee A$ (交换律)

$A \wedge B = B \wedge A$

(2) $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ (结合律)

$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$

$(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$

(3) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (分配律)

$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

关系是一种特殊的集合，

（1）关系可以进行集合交、并、差和补等基本运算吗？

（2）关系有自己特有的运算吗？

关系是以序偶为元素的特殊集合，因此所有集合的基本运算均适用于关系。

设R，S都是从集合A到B的两个关系，则：

$R \cup S = \{<x,y> \mid <x,y> \in R \vee <x,y> \in S\}$

$R \cap S = \{<x,y> \mid <x,y> \in R \wedge <x,y> \in S\}$

$R - S = \{<x,y> \mid <x,y> \in R \wedge <x,y> \notin S\}$

$R^c = \{<x,y> \mid <x,y> \in A \times B \wedge <x,y> \notin R\}$

注意：因为A×B是相对于R的全集，所以

- $R^c = A \times B - R$
- $R \cup R^c = A \times B$ $\qquad R \cap R^c = \Phi$
- $((R)^c)^c = R$
- $S \subseteq R \Leftrightarrow R^c \subseteq S^c$

例4.13 设A={a,b}，B={1,2}，R={$\underline{<a,1>}$,<a,2>}，S={$\underline{<a,1>}$, <b,1>,<b,2>}都是A到B上的关系。试计算R∪S，R∩S，R-S，S-R，R^c，S^c。

解 $R\cup S=\{<x,y>|<x,y>\in R\vee<x,y>\in S\}=\{<a,1>,<a,2>,<b,1>,<b,2>\}$

$R\cap S=\{<x,y>|<x,y>\in R\wedge<x,y>\in S\}=\{<a,1>\}$

$R-S=\{<x,y>|<x,y>\in R\wedge\underline{<x,y>\notin S}\}=\{<a,2>\}$

$S-R=\{<x,y>|<x,y>\in S\wedge\underline{<x,y>\notin R}\}=\{<b,1>,<b,2>\}$

$R^c = A\times B-R =\{\underline{<a,1>,<a,2>,<b,1>,<b,2>}\}-\{<a,1>,<a,2>\}$

$=\{<b,1>,<b,2>\}$

$S^c =A\times B-S=\{<a,1>,<a,2>,<b,1>,<b,2>\}-\{<a,1>,<b,1>,<b,2>\}$

补运算

$=\{<a,2>\}$

设关系R表示城市之间的直达航线关系，S表示城市之间的直达公路路线关系。

如果<a，b>∈R，<b，c>∈S，那么a和c之间存在怎样的关系？又如何表示这样的关系?

定义4.8 设A,B,C是三个集合，R：A→B，S：B→C，则R与S的**复合关系**(合成关系)(Composite Ralation)是从A到C的关系，记为R∘S，其中

$$R\circ S=\{<x,z>|x\in A\wedge z\in C\wedge\exists y(y\in B\wedge<x,y>\in R\wedge<y,z>\in S)\}$$

运算“∘”称为**复合运算**(Composite Operation)。

例4.14 设关系R表示城市之间的直达航线关系，S表示城市之间的直达公路路线关系。试描述R∘S的意义。

解题小贴士—R∘S的计算方法

对任意$<x,y>\in R$，在S中查找所有以y为第一元素的序偶$<y,z>$，然后将x和z形成新的序偶$<x,z>$，$<x,z>$即为R∘S的元素。

注意 $\Phi\circ R=R\circ\Phi=\Phi$。

例4.15 设A = {1,2,3,4}，R = {<1,2>,<3,4>}，S = {<2,4>,<3,4>,<4,2>}，T = {<1,4>,<2,1>,<4,2>}是A上的三个关系。计算

（1）RoS和SoR；

（2）(RoS)oT和Ro(SoT)。

复合运算不满足交换律

解 （1）$RoS = \{<\underline{1},2>,<\underline{3},4>\}\ \{<2,\underline{4}>,<3,4>,<4,\underline{2}>\} = \{<1,4>,<3,2>\}$

$SoR = \{<2,4>,<3,4>,<4,2>\}o\{<1,2>,<3,4>\} = \Phi$

例4.15 设$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,4\rangle\}$，$S=\{\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$，$T=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$是A上的三个关系。计算

（1）$R\circ S$和$S\circ R$；

（2）$(R\circ S)\circ T$和$R\circ(S\circ T)$。

复合运算满足结合律

解 （2）

$$(R\circ S)\circ T=(\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,4\rangle\}\circ\{\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,2\rangle\})\circ\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$$

$$=\{\langle 1,4\rangle,\langle 3,2\rangle\}\circ\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

$$R\circ(S\circ T)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,4\rangle\}\circ(\{\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}\circ\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 4,2\rangle\})$$

$$=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,4\rangle\}\circ\{\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

定理4.4 设A、B、C和D是任意四个集合，R:A→B，S:B→C，T:C→D，则

（1）(RoS)oT=Ro(SoT)；

（2）I_AoR=RoI_B=R，其中I_A和I_B分别称为A和B上的恒等关系。

分析 待证等式两端都是集合

于是利用**集合与集合关系的判定与证明方法**，直接证明即可。

等式成立⇔两个集合相等

集合相等⇔两个集合互相包含

B $\subseteq$A ⇔对∀x，如果x∈B，则x∈A 。

$\Leftrightarrow$

▶▶▶

定理4.4 设A、B、C和D是任意四个集合，$R:A\to B$，$S:B\to C$，$T:C\to D$，则

（2）$I_A o R=R o I_B=R$，其中I_A和I_B分别称为A和B上的恒等关系。

证明（2）$\forall <a,b>$

$\Leftrightarrow <a,b>\in I_A\ o R$

$\Leftrightarrow\ a\in A\wedge <a,a>\in I_A\wedge <a,b>\in R$

$\Leftrightarrow <a,b>\in R$

即 $I_A o R=R$

同理可证 $R o I_B=R$

于是 $I_A o R=R o I_B=R$ 得证

例4.16 设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2\}$，$C=\{2,3\}$，$D=\{4\}$，R：$A\rightarrow B$，S_1：$B\rightarrow C$，S_2：$B\rightarrow C$，T：$C\rightarrow D$，且$R=\{<2,2>,<2,1>\}$，$S_1=\{<1,2>,<2,3>\}$，$S_2=\{<1,3>\}$，$T=\{<2,4>,<3,4>\}$。试计算：

（1）$R\circ(S_1\cup S_2)$和$(R\circ S_1)\cup(R\circ S_2)$。

（2）$R\circ(S_1\cap S_2)$和$(R\circ S_1)\cap(R\circ S_2)$。

（3）$(S_1\cup S_2)\circ T$和$(S_1\circ T)\cup(S_2\circ T)$。

（4）$(S_1\cap S_2)\circ T$和$(S_1\circ T)\cap(S_2\circ T)$。

设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2\}$，$C=\{2,3\}$，$D=\{4\}$，$R: A\to B$，$S_1: B\to C$，

$S_2: B\to C$，$T: C\to D$，且$R=\{<2,2>,<2,1>\}$，$S_1=\{<1,2>,<2,3>\}$，

$S_2=\{<1,3>\}$，$T=\{<2,4>,<3,4>\}$。试计算

解 (1) $R\circ(S_1\cup S_2)=\{<2,\underline{2}>,<2,1>\}\circ(\{<1,2>,<2,3>\}\cup\{<1,3>\})$

$\boxed{=\{<2,3>,<2,2>\}}$

$(R\circ S_1)\cup(R\circ S_2)\ \boxed{=\{<2,3>,<2,2>\}}$

“o”对“∪”满足分配律

(2) $(S_1\cup S_2)\circ T=(\{<1,2>,<2,3>\}\cup\{<1,3>\})\circ\{<2,4>,<3,4>\}$

$\boxed{=\{<1,4>,<2,4>\}}$

$(S_1\circ T)\cup(S_2\circ T)\ \boxed{=\{<1,4>,<2,4>\}}$

设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2\}$，$C=\{2,3\}$，$D=\{4\}$，R：$A\to B$，S_1：$B\to C$，

S_2：$B\to C$，T：$C\to D$，且$R=\{<2,2>,<2,1>\}$， $S_1=\{<1,2>,<2,3>\}$，

$S_2=\{<1,3>\}$，$T=\{<2,4>,<3,4>\}$。试计算

"o" 对 "∩" 不满足分配律

(3) $Ro(S_1\cap S_2)=\{<2,2>,<2,1>\}o(\{<1,2>,<2,3>\}\cap\{<1,3>\})\boxed{=\Phi}$

$(Ro\,S_1)\cap(RoS_2)=\{<2,2>,<2,3>\}\cap\{<2,3>\}\boxed{=\{<2,3>\}}$

(4) $(S_1\cap S_2)oT=(\{<1,2>,<2,3>\}\cap\{<1,3>\})\ \{<2,4>,<3,4>\}\boxed{=\Phi}$

$(S_1\,oT)\cap(S_2\,oT)=\{<1,4>,<2,4>\}\cap\{<1,4>\}\boxed{=\{<1,4>\}}$

定理4.5 设A、B、C和D是任意四个集合，R：A→B，S_1：B→C，S_2：B→C，T：C→D，则：

（1）$R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$；

（2）$(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$；

（3）$R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$；

（4）$(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$。

问题 假设A={1, 2, 3}，A上的关系

R = {<1，2>，<2，3>}

S = {<2，1>，<3，2>}

则R和S具有怎样的关系?

称R和S互为逆关系

$<a,b>\in R \Leftrightarrow <b,a>\in S$

已知R，求其逆关系的运算称为**关系的逆运算**。

定义4.9 设A，B是两个集合， R：A→B ，则从B到A的关系

$$R^{-1} = \{\langle b,a\rangle \mid \langle a,b\rangle \in R\}$$

称为R的**逆关系**(Inverse Relation)，

运算“$^{-1}$”称为**逆运算**(Inverse Operation) 。

由定义4.9知： $(R^{-1})^{-1}=R$； $\Phi^{-1}=\Phi$； $(A\times B)^{-1} = B\times A$

解题小贴士—关系R的R^{-1}的计算方法

将R中所有序偶中两个元素的位置交换即得R^{-1}。

反函数：
y=f(x)的定义域是D，值域是f(D)。如果对于值域f(D)中的每一个y，在D中有且只有一个x使得g(y)=x

例4.17 设$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{a,b,c,d\}$，$C=\{2,3,4,5\}$，

R：$A\to B$且$R=\{\langle 1,a\rangle, \langle 2,c\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 4,b\rangle,\langle 4,d\rangle\}$

S：$B\to C$且$S=\{\langle a,2\rangle, \langle b,4\rangle, \langle c,3\rangle,\langle c,5\rangle, \langle d,5\rangle\}$

（1）计算R^{-1}，并画出R和R^{-1}的关系图。

（2）写出R和R^{-1}的关系矩阵。

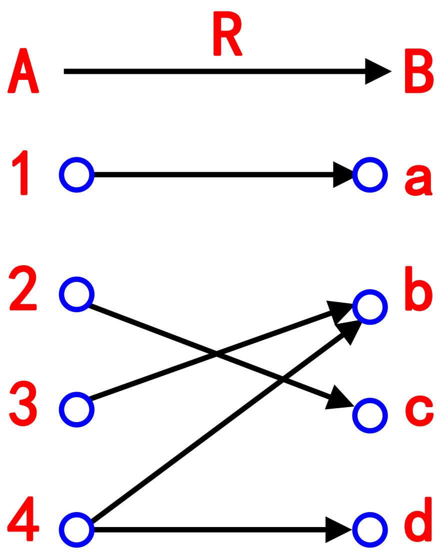
（3）计算$(R\circ S)^{-1}$和$S^{-1}\circ R^{-1}$。

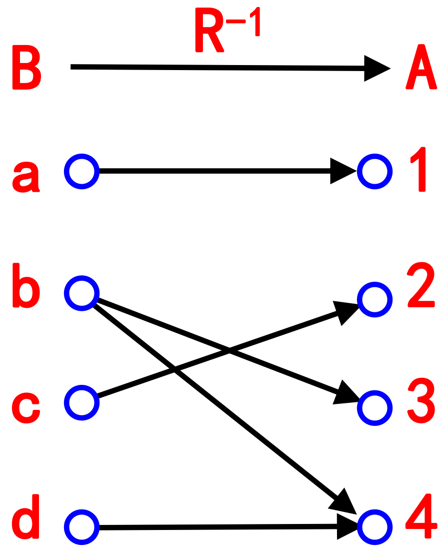
（1）计算R^{-1}，并画出R和R^{-1}的关系图。

(1) $R^{-1}=\{<1,a>,<2,c>,<3,b>,<4,b>,<4,d>\}^{-1}$

$=\{<a,1>,<c,2>,<b,3>,<b,4>,<d,4>\}$

R和R^{-1}的关系图分别见下面的左图与右图。





设A={1,2,3,4}，B={a,b,c,d}，C={2,3,4,5}，
R={<1,a>, <2,c>,<3,b>,<4,b>,<4,d>}
S={<a,2>, <b,4>, <c,3>,<c,5>, <d,5>}

(2) R和R^{-1}的关系矩阵为：

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},\qquad M_{R^{-1}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(3) ∵ RoS={<1,2>,<2,3>,<2,5>,<3,4>,<4,4>,<4,5>}

∴ $(RoS)^{-1}$={<2,1>,<3,2>,<5,2>,<4,3>,<4,4>,<5,4>}

∵ R^{-1}={<a,1>,<c,2>,<b,3>,<b,4>,<d,4>}

S^{-1}={<2,a>,<4,b>,<3,c>,<5,c>,<5,d>}

∴ $S^{-1}oR^{-1}$={<2,1>,<3,2>,<5,2>,<4,3>,<4,4>,<5,4>}

1. 将R的关系图中有向边的方向改变成相反方向即得R^{-1}的关系图，反之亦然。

2. 将R的关系矩阵转置即得R^{-1}的关系矩阵，即R和R^{-1}的关系矩阵互为转置矩阵。

3. R^{-1}的定义域与值域正好是R的值域和定义域，即$domR=ranR^{-1}$，$domR^{-1}=ranR$。

4. $|R|=|R^{-1}|$。

5. $(RoS)^{-1}=S^{-1}oR^{-1}$。（逆运算）

定理4.7 设R：A→B，S：A→B，则有

(1) $(R\cup S)^{-1} = R^{-1}\cup S^{-1}$ (分配性)

$(R\cap S)^{-1} = R^{-1}\cap S^{-1}$

$(R-S)^{-1} = R^{-1}-S^{-1}$

(2) $(R^{C})^{-1} = (R^{-1})^{C}$ (可换性)

$(A\times B)^{-1} = B\times A$

(3) $S\subseteq R \Leftrightarrow S^{-1}\subseteq R^{-1}$ (单调性)

设R：A→A

当2个R进行复合运算时，有RoR $= R^2$

当3个R进行复合运算时，有 RoRoR $= R^3$

以此类推，当n个R进行复合运算时，有 $\underset{n\text{个}}{R\circ R\circ\cdots\circ R} = R^n$

是否有简便的记法呢?

关系的幂

定义7.10

设 R 为 A 上的关系, n为自然数, 则 R 的 n 次幂定义为:

(1) $R^0 = \{ <x, x> \mid x \in A \} = I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意:

- 对于A上的任何关系 R 都有 $R^1 = R$
- 对于A上的任何关系 R_1 和 R_2 都有 $R_1^0 = R_2^0 = I_A$

例4.18 设$A=\{1,2,3,4\}$，定义在A上的关系

$R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<3,4>\}$，$S=\{<1,2>,<2,3>,<3,4>\}$，

计算：

(1)$R^n(n=1,2,3,4,\cdots)$，$\bigcup_{i=1}^{4} R^i$ 和 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

(2)$S^n(n=1,2,3,4,\cdots)$，$\bigcup_{i=1}^{4} S^i$ 和 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S^i$。

$R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<3,4>\}$

解（1）$R^1=R$,

$R^2=R\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,4>\}$

$R^3=R^2\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>\}$

$R^4=R^3\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>\}=R^3$

……

$R^n=R^3 \quad (n\geqslant 3)$

$$\bigcup_{i=1}^{4} R^i = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,3>,<2,4>,<3,4>\}$$

$$\therefore \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R^1 \cup R^2 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{4} R^i$$

(2) $S^1 = S$,

$S^2 = S \circ S = \{<1,3>, <2,4>\}$

$S^3 = S^2 \circ S = \{<1,4>\}$

$S^4 = S^3 \circ S = \Phi$

……,

$S^n = \Phi \quad (n \geq 4)$

$$\bigcup_{i=1}^{4} S^i = S^1 \cup S^2 \cup S^3 \cup S^4 = \{<1,2>, <1,3>, <1,4>, <2,3>, <2,4>, <3,4>\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S^i = S^1 \cup S^2 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{4} S^i$$

定理4.8 设A是有限集合，且|A| = n，R是A上的关系，则：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^{i} = \bigcup_{i=1}^{n} R^{i}$$

关系的性质

R是中国人集合A上的同姓关系，S是集合P(B)上的包含关系，

这两个不同的关系间有什么联系呢?

对$\forall a \in A$，都有$<a,a> \in R$。

对$\forall C \in P(B)$，也都有$<C,C> \in S$。

不同的两个关系，

却具有相同的性质

本节涉及到的关系，如无特别声明，都是**假定其前域和后域相同**。即都为定义在集合A上的关系，且**A是非空集合**。对于前后域不相同的关系，其性质无法加以定义。

定义4.11 设R是非空集合A上的关系，

(1) 如果$\forall x(x \in A \rightarrow \langle x,x \rangle \in R)=1$，那么称R在A上是**自反的**(Reflexive)，或称R具有**自反性**(Reflexivity)；

例如：**同姓关系**。

(2) 如果$\forall x(x \in A \rightarrow \langle x,x \rangle \notin R)=1$，那么称R在A上是**反自反的**(Antireflexive)，或称R具有**反自反性**(Antireflexivity)。

例如：**父子关系**。

自反性和反自反性的集合表示判断方法

R是非空集合A上的关系，则

（1）R在A上是自反的 $\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow \langle x,x\rangle \in R)=1$

（2）R在A上是反自反的$\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow \langle x,x\rangle \notin R)=1$

（3）R在A上既不是自反的，也不是反自反的

$$\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge \langle x,x\rangle \notin R)\wedge \exists x(x\in A\wedge \langle x,x\rangle \in R)=1$$

例4.19 设$A=\{a,b,c\}$，R_1，R_2和R_3都是A上的关系，其中$R_1=\{<a,a>,<a,c>,<b,b>\}$，$R_2=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$，$R_3=\{<a,b>,<b,c>\}$。试判定它们是否具有自反性和反自反性，并写出$R_1$，$R_2$和$R_3$的关系矩阵，画出相应的关系图。

解 （1）在R_1中，因为$\exists c(c\in A\wedge <c,c>\notin R_1)\wedge \exists a(a\in A\wedge <a,a>\in R_1)$，所以$R_1$不是自反的，也不是反自反的。

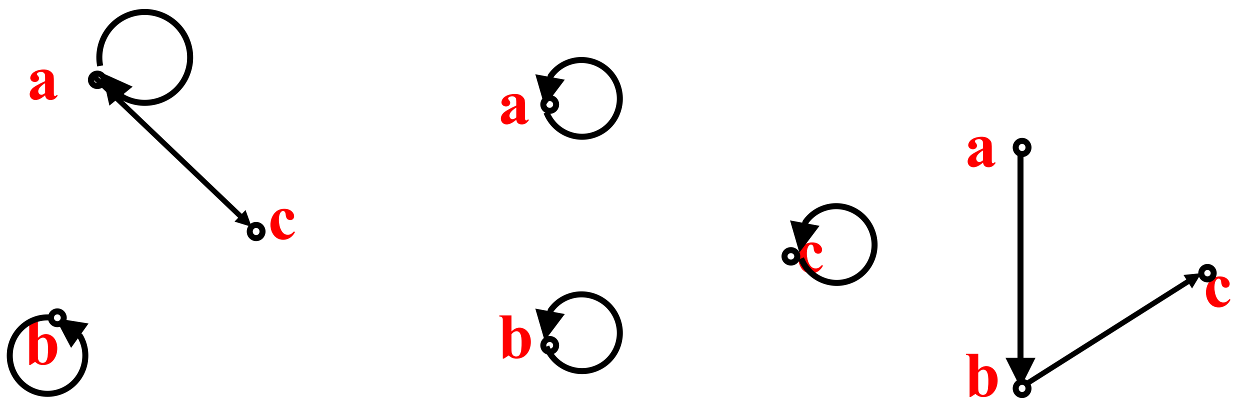
在R_2中，因为$\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\in R_2)=1$，所以$R_2$是自反的。

在R_3中，因为$\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\notin R_3)=1$，所以$R_3$是反自反的。$\{<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$

(2) 设R_1，R_2和R_3的关系矩阵分别为M_{R1}，M_{R2}和M_{R3}，则：

$$M_{R_1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad M_{R_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad M_{R_3}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(3) R_1，R_2和R_3的关系图分别是下图的(a),(b)和(c)。



(a) (b) (c)

解题小贴士—自反性和反自反性的关系矩阵表示判断方法($(r_{ij})_{n\times n}$是R的关系矩阵)，则

（1）R是自反的$\Leftrightarrow \forall i \forall j(i=j \rightarrow r_{ij}=1)=1$。

（2）R是反自反的$\Leftrightarrow \forall i \forall j(i=j \rightarrow r_{ij}=0)=1$。

（3）关系R不是自反的，也不是反自反的$\Leftrightarrow \exists i(r_{ii}=0) \wedge \exists j(r_{jj}=1)=1$。

解题小贴士—自反性和反自反性的关系图表示判断方法(G_R是R的关系图)，则

（1）R是自反的$\Leftrightarrow$ G_R中每个结点都有自环。

（2）R是反自反的$\Leftrightarrow$ G_R中每个结点都没有自环。

（3）关系R既不是自反的，也不是反自反的

$\Leftrightarrow$ G_R中同时存在有自环的结点与没有自环的结点。

定义4.12 设R是非空集合A上的关系。

（1）如果$\forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge \underline{\langle x,y \rangle \in R} \rightarrow \underline{\langle y,x \rangle \in R})=1$，则称关系R是**对称的**(Symmetric)，或称R具有**对称性**(Symmetry)。

例如：同姓关系。

（2）如果$\forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge (\langle x,y \rangle \in R \wedge \langle y,x \rangle \in R) \rightarrow x=y)=1$，则称关系R是**反对称的**(Antisymmetric)，或称R具有**反对称性**(Antisymmetry)。

例如：父子关系。

解题小贴士—对称性和反对称性的集合表示判断方法

R是非空集合A上的关系，则

（1）**R是对称的** $\Leftrightarrow$ $\forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge <x,y>\in R\rightarrow \underline{<y,x>\in R})=1$

（2）**R是反对称的**$\Leftrightarrow$

$$\forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge(<x,y>\in R\wedge <y,x>\in R)\rightarrow \underline{x=y})=1$$

（3）**关系R既不是对称的，也不是反对称的**$\Leftrightarrow$

$$\exists x\exists y(x\in A\wedge y\in A\wedge \underline{<x,y>\in R}\wedge \underline{<y,x>\notin R})$$

$$\wedge\exists s\exists t(s\in A\wedge t\in A\wedge <s,t>\in R\wedge <t,s>\in R\wedge \underline{s\neq t})=1$$

例4.21 设A={1,2,3,4}， R、S、T和V都是A 上的关系，其中R={<1,1>,<1,3>,<3,1>}，S={<1,1>,<2,3>,<2,4>}，T={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<3,1>},V={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>}。

（1）试判定它们是否具有对称性和反对称性。

（2）分别写出R,S,T和V的关系矩阵。

（3）分别画出R,S,T和V的关系图。

（1）关系R是对称的。

关系S是反对称的。

关系T既不是对称的，也不是反对称的。

因为有<1,2>，但没有<2,1>，即T不是对称的；

另外有<1,3>，且有<3,1>，但是1≠3，即T不是反对称的。

关系V既是对称的，也是反对称的。

(2) 设R,S,T和V的关系矩阵分别为M_R,M_S,M_T和M_V，则

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_S=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_T=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_V=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

例4.21 设A={1,2,3,4}，定义A上的关系R,S,T和V如下：

(1) R={<1,1>,<1,3>,<3,1>}。

(2) S={<1,1>,<2,3>,<2,4>}。

(3) T={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<3,1>}。

(4) V={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>}。

d)

例4.21 设A={1,2,3,4}，定义A上的关系R,S,T和V如下：

(1) R={<1,1>,<1,3>,<3,1>}。

(2) S={<1,1>,<2,3>,<2,4>}。

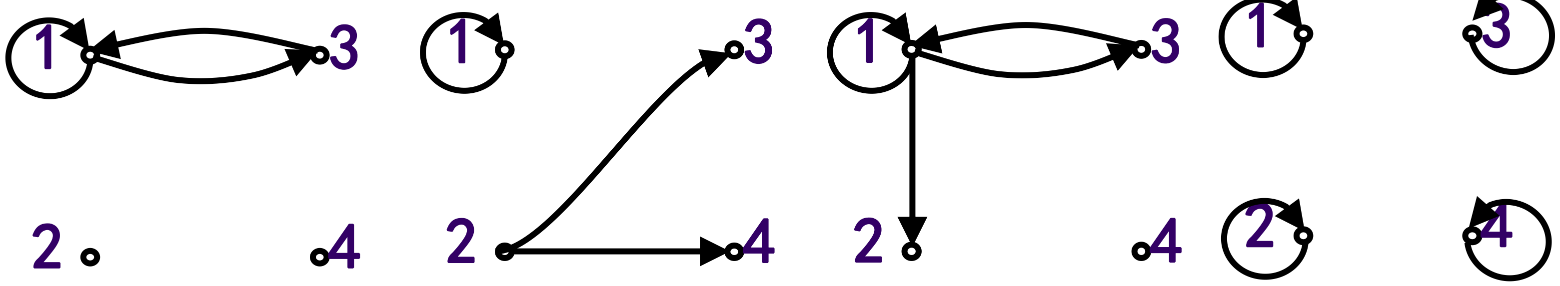
(3) T={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<3,1>}。

(4) V={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>}。

(2) 设R,S,T和V的关系矩阵分别为M_R,M_S,M_T和M_V，则

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_S=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_T=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_V=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(3)R,S,T和V的关系图分别是图(a),(b),(c)和(d)。



(a) (b) (c) (d)

解题小贴士—对称性和反对称性关系矩阵表示判断方法($(r_{ij})_{n\times n}$是R的关系矩阵），则

（1）R是对称的$\Leftrightarrow \forall i \forall j(i\neq j \rightarrow r_{ij} = r_{ji}) = 1$。

（2）R是反对称的$\Leftrightarrow \forall i \forall j(i\neq j \rightarrow r_{ij} \times r_{ji} = 0) = 1$。

解题小贴士—对称性和反对称性关系图表示判断方法(G_R是R的关系图)，则

（1）R是对称的$\Leftrightarrow$$G_R$中任何一对结点之间，要么有方向相反的两条边，要么无任何边。

（2）R是反对称的$\Leftrightarrow$$G_R$中任何一对结点之间，至多有一条边。

定义4.13 设R是非空集合A上的关系。如果

$$\forall x\forall y\forall z(x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge <x,y>\in R\wedge <y,z>\in R\rightarrow <x,z>\in R)=1,$$

则称关系R是**传递的**(Transitive)，或称R具有**传递性**(Transitivity)。

例如：同姓关系是传递的，父子关系不是传递的。

解题小贴士—传递性的集合表示判断方法

R是非空集合A上的关系，则

（1）R是传递的$\Leftrightarrow$

$$\forall x\forall y\forall z(x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge <x,y>\in R\wedge <y,z>\in R\rightarrow <x,z>\in R)=1。$$

（2）R不是传递的$\Leftrightarrow$

$$\exists x\exists y\exists z\ (x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge <x,y>\in R\wedge <y,z>\in R\wedge <x,z>\notin R)=1。$$

例4.22 设$A=\{1,2,3\}$，R、S、T和V都是A 上的关系，其中，$R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,3>\}$，$S=\{<1,2>\}$，$T=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>\}$，$V=\{<1,2>,<2,3>,<1,3>,<2,1>\}$。

（1）试判定它们是否具有传递性。

（2）分别写出R，S，T和V的关系矩阵。

（3）分别画出R，S，T和V的关系图。

（1）关系R是传递的。

关系S是传递的。

关系T是不传递的。

因为存在$x=1$，$y=2$，$z=3\in A$且$<1,2>$，$<2,3>\in T$，但$<1,3>\notin T$。

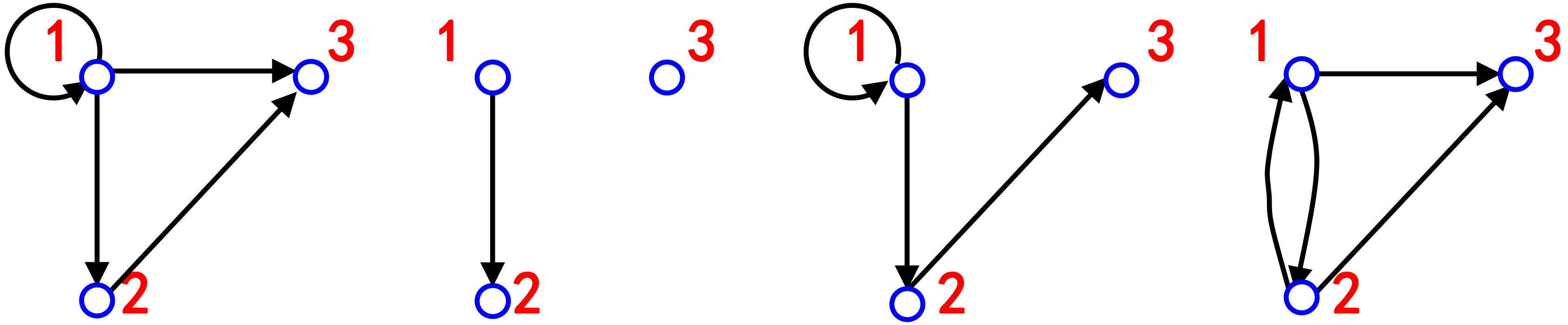
关系V是不传递的。

因为存在$x=1$，$y=2$和$z=1\in A$，使得$<1,2>\in V$且$<2,1>\in V$，但是$<1,1>\notin V$。

(2）设R,S,T和V的关系矩阵分别为M_R,M_S,M_T和M_V，则

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad M_S=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad M_T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad M_V=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(3）R,S,T和V的关系图分别是图(a),(b),(c)和(d)。



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

传递的

没有<1,1>传递关系

解题小贴士—传递性的关系矩阵表示判断方法($(r_{ij})_{n\times n}$是R的关系矩阵），则

R是传递的⇔ $\forall i \forall j \forall k (r_{ij} \wedge r_{jk} = 1 \rightarrow r_{ik} = 1) = 1$。

解题小贴士—传递性的关系图表示判断方法(G_R是R的关系图)，则

R是传递的⇔G_R中任何两个不同结点x，y之间，如果存在x到y的一条路径，则一定有x到y的一条边。

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
按定义判定法 定义	$\forall x(x\in A\rightarrow<x,x>\in R)=1$	$\forall x(x\in A\rightarrow<x,x>\notin R)=1$	$\forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge(<x,y>\in R\rightarrow<y,x>\in R))=1$	$\forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge(<x,y>\in R\wedge\underline{<y,x>\in R}\rightarrow x=y))=1$	$\forall x\forall y\forall z(x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge(<x,y>\in R\wedge\underline{<y,z>}\in R\rightarrow<x,z>\in R))=1$
关系图判定法 关系图	每个结点都有环	每个结点都无环	每对结点间或有方向相反的两条边，或无任何边	每对结点间至多有一条边存在	任三个结点x,y,z，若从x到y有边，从y到z有边，则从x到z一定有边
关系矩阵判定法 关系矩阵	$r_{ii}=1$	$r_{ii}=0$	$r_{ij}=r_{ji}$	$r_{ij}\cdot r_{ji}=0,i\neq j$	如$r_{ij}=1$且$r_{jk}=1$则$r_{ik}=1$

例4.23 设A = {1,2,3}，A上的关系R和S的关系矩阵为M_R和M_S，关系T和V的关系图如下图(a)和(b)。试判定它们所具有的特殊性质。

R是自反的、对称的和传递的

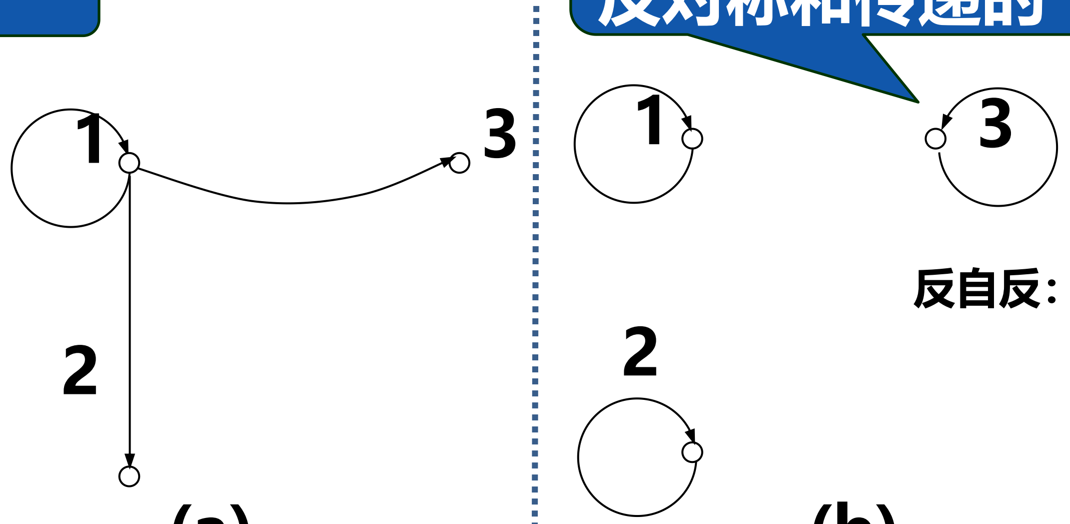
没有$\langle x,x\rangle \notin R$
没有$r_{ij} \cdot r_{ji} = 0$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

S是反自反的、对称的、反对称的和传递的

$$M_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\langle x,x\rangle \in R$



(a) (b)

V是自反的、对称的、反对称和传递的

反自反：每个结点都无环

T是反对称的和传递的

反对称：每对结点间至多有一条边存在

自反：每个结点都有环	反自反：每个结点都无环

例4.25 假设$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<3,4>\}$ 是定义在A上的关系。试判定R所具有的特殊性质。

例4.25 假设$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<3,4>\}$是定义在A上的关系。试判定R所具有的特殊性质。

解 因为存在$2\in A$，但$<2,2>\notin R$，所以**R不是自反的**。

因为存在$1\in A$，但$<1,1>\in R$，所以**R不是反自反的**。

因为$<3,4>\in R$，但$<4,3>\notin R$，所以**R不是对称的**。

因为有$<1,2>\in R$，$<2,1>\in R$，但是$1\neq 2$，所以**R不是反对称的**。

因为有$<2,1>\in R$，$<1,2>\in R$，但$<2,2>\notin R$，所以**R不是传递的**。

综上所述，R不具备上述的任何特殊性质。

例4.26 设R={<1,1>,<2,2>}，试判断R在集合A和B上具备的特殊性质，其中A={1,2}，B={1,2,3}。

解 当R是定义在集合A上的关系时，R是自反、对称、反对称和传递的。

当R是定义在集合B上的关系时，R是对称、反对称和传递的。

注意：绝对不能脱离基集（即定义关系的集合）来谈论关系的性质。

R是集合A上的关系，则

R是自反的$\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\in R)=1\Leftrightarrow$对$\forall x\in A$，一定有$<x,x>\in R$

R是反自反的$\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\notin R)=1\Leftrightarrow$对$\forall x\in A$，一定有$<x,x>\notin R$

R是对称的$\Leftrightarrow \forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge <x,y>\in R\rightarrow <y,x>\in R)=1$

$\Leftrightarrow$对$\forall x\in A, \forall y\in A$，如果$<x,y>\in R$，则一定有$<y,x>\in R$

R是反对称的$\Leftrightarrow \forall x\ \forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge (<x,y>\in R\wedge <y,x>\in R)\rightarrow x=y)=1$

$\Leftrightarrow$对 $\forall x\in A$，$\forall y\in A$，如果$<x,y>\in R$且$<y,x>\in R$，则一定有$x=y$

R是传递的$\Leftrightarrow \forall x\forall y\forall z(x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge <x,y>\in R\wedge <y,z>\in R\rightarrow <x,z>\in R)=1$

$\Leftrightarrow$对$\forall x\in A, \forall y\in A, \forall z\in A$，如果$<x,y>\in R$且$<y,z>\in R$，则一定有$<x,z>\in R$

总结

例4.27 设R集合A上的恒等关系，证明R具有自反性、对称性、反对称性和传递性。

证明 因为R是A上的恒等关系，即$R=\{<x,x> \mid x\in A\}$，从而有

（1）对$\forall x\in A$，都有$<x,x>\in R$，即R是自反的。

（2）对 $\forall x\in A$, $\forall y\in A$，如果$<x,y>\in R$，则有$x=y$，即$<y,x>\in R$，从而R是对称的。

（3）对$\forall x\in A$, $\forall y\in A$，如果$<x,y>\in R$，$<y,x>\in R$，则有$x=y$，即R是反对称的。

（4）对$\forall x\in A$, $\forall y\in A$, $\forall z\in A$，如果$<x,y>\in R$，$<y,z>\in R$，则有$x=y=z$，从而有$<x,z>\in R$，即R是传递的。

待证性质	第一步	中间过程	最后一步
R是自反的	对$\forall x\in A$	结合已知和已有定义、定理	$\langle x,x\rangle\in R$
R是反自反的	对 $\forall x\in A$		$\langle x,x\rangle\notin R$
R是对称的	对$\forall x\in A$, $\forall y\in A$，若$\langle x,y\rangle\in R$		$\langle y,x\rangle\in R$
R是反对称的	对 $\forall x\in A$，$\forall y\in A$，若$\langle x,y\rangle\in R$且$\langle y,x\rangle\in R$		$x=y$
R是传递的	对$\forall x\in A$, $\forall y\in A$, $\forall z\in A$，若$\langle x,y\rangle\in R$，$\langle y,z\rangle\in R$		$\langle x,z\rangle\in R$

给定集合A上的关系R和S，如果R，S都是反自反的，那么R-S还是反自反的吗？RoS呢？

例如　设A = {1,2,3}，R = {<1,3>,<2,3>}，S = {<2,3>,<3,1>}是A上的关系。

显然R，S都是反自反的。

R-S = {<1,3>}仍然是反自反的；

RoS = {<1,1>,<2,1>}不是反自反的。

关系性质的保守性问题：是指具有某种性质的两个关系经过运算后，运算结果是否仍具有该性质的问题。

定理4.10 设R,S是定义在A上的二元关系，则：

(1)若R,S是**自反的**，则R^{-1},$R\cup S$,$R\cap S$,$R\circ S$**也是自反的。**

(2)若R,S是**反自反的**，则R^{-1},$R\cup S$,$R\cap S$**也是反自反的。**

(3)若R,S是**对称的**，则R^{-1},$R\cup S$,$R\cap S$**也是对称的。**

(4)若R,S是**反对称的**，则R^{-1},$R\cap S$**也是反对称的。**

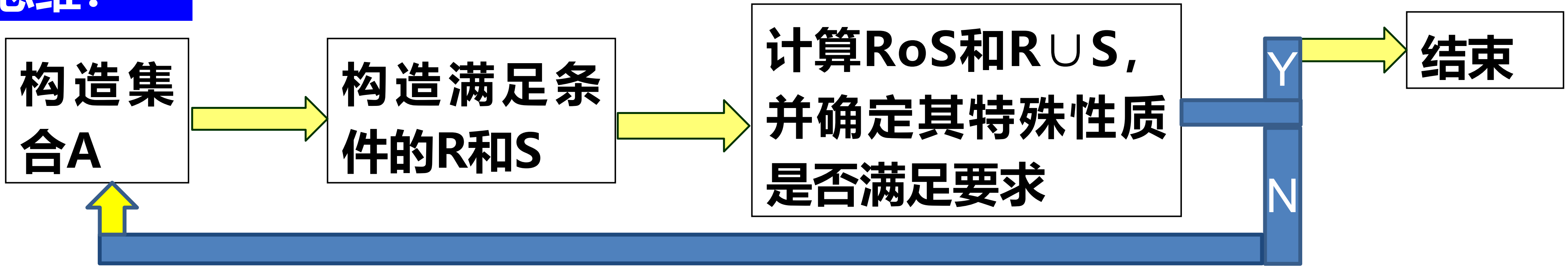
(5)若R,S是**传递的**，则R^{-1},$R\cap S$**也是传递的。**

注意：

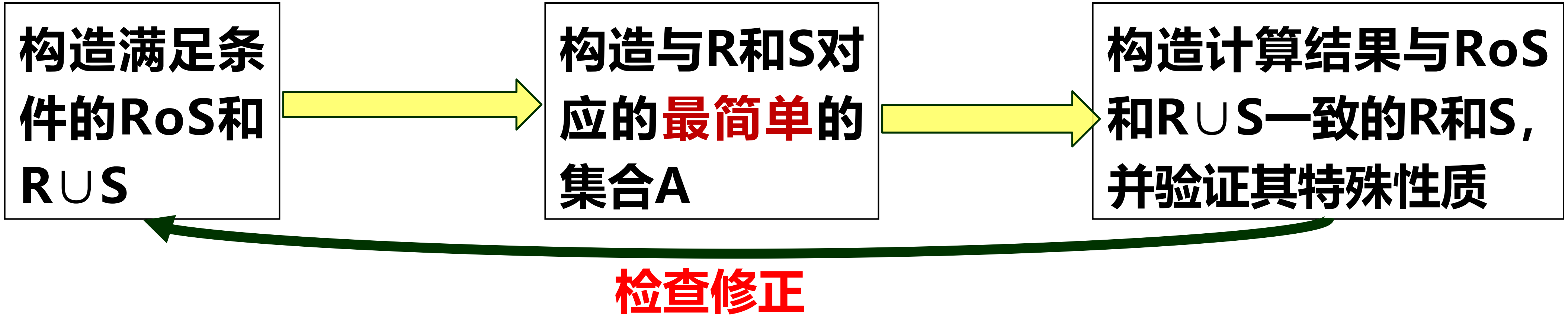
（1）逆运算与交运算具有较好的保守性；

（2）并运算、差运算和复合运算的保守性较差。

正向思维：


构造集合A
构造满足条件的R和S
计算RoS和R∪S，并确定其特殊性质是否满足要求
Y
N
结束

逆向思维：


构造满足条件的RoS和R∪S
构造与R和S对应的最简单的集合A
构造计算结果与RoS和R∪S一致的R和S，并验证其特殊性质
检查修正

解题小贴士—反例法说明R，S经过运算后不一定具有原特殊性质的思路

（1）构造R，S的运算结果，如RoS，使其不具有原特殊性质；

（2）构造最简单的R，S的基集A，使（1）成立；

（3）根据已知条件和运算规则，构造A上的R和S，并计算RoS，如果与（1）一致，则构造成功，结束；否则，返回（1）。

例4.28 试举例说明下列事实不一定成立。

（1）R和S是反自反、反对称和传递的，但是，$R \circ S$不一定具备反自反性，反对称性；$R \cup S$不一定具有反对称性和传递性；

（2）R和S是自反、对称和传递的，但是$R \circ S$不一定是对称和传递的，$R-S$不一定是自反和传递的。

分析 （1）对不一定成立的事实，可采用反例法。

按照“反例法说明R，S经过运算后不一定具有原特殊性质的思路”。

① 假设RoS={<1，1>，<1，2>，<2，1>}，显然RoS不是反自反和反对称的；

② 构造使①成立的最简单的集合A={1，2}；

③ 因为R和S是反自反、反对称和传递的以及RoS的结果已知，所以可构造R={<1，a>，<2，b>}，S={<a，2>，<b，1>}且a，b不能为1或者2。下面确定a和b的值。

若a≠b，则RoS={<1,2>,<2,1>}是反自反的，不符合要求；

若a=b，则RoS={<1,1>,<2,2>,<1,2>,<2,1>}不是反自反和反对称的，符合要求，但与原有的RoS不一致，返回①；

①′ 更新RoS={<1,1>,<2,2>,<1,2>,<2,1>};

②′ 因为a=b，但不能为1或者2，所以在集合A中增加一个元素，例如3，于是集合A更新为{1,2,3};

③′ R={<1,3>,<2,3>}，S={<3,2>,<3,1>}是反自反、反对称和传递的，且RoS={<1,1>, <2,2>,<1,2>,<2,1>}不是反自反和反对称的。

综上所述，得到满足条件的集合A和A上的关系R和S。

类似构造R和S，使得R∪S满足要求。

解（1）设A={1,2,3}, $R=\{<1,3>,<2,3>\}$，$S=\{<3,2>,<3,1>\}$是定义在A上的两个关系。**显然R,S都是反自反的、反对称的、传递的。此时**

$R \circ S=\{<1,1>,<1,2>,<2,2>,<2,1>\}$不具备反自反性和反对称性；

$R \cup S=\{<3,2>,<3,1>,<1,3>,<2,3>\}$不具备传递性和反对称性。

解（2）设$A=\{1,2,3\}$，$R=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,1>\}$，

$S=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<3,2>,<2,3>\}$是A上的两个关系。

显然R，S都是自反、对称和传递的。此时

$R\circ S=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<2,3>,<3,2>,<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$不具备对称性和传递性；

$R-S=\{<1,2>,<2,1>\}$不具备自反性和传递性。

对于一个给定的关系，可能不具有某一个特殊性质。但是，如果我们希望它具有该特定的性质，那么应该怎么做呢?

例如，对给定集合A={1,2,3}上的关系R={<1,1>,<1,2>,<2,1>}，它不具有自反性。根据自反性的定义，

在关系R中添加<2,2>，<3,3>或者

添加<2,2>，<3,3>，<1,3>或者

....

得到的R’就具有自反性。

关系的闭包

定义4.14 设R是定义在A上的关系，若**存在A上的另一个关系R′使得**R⊆R′且满足：

（1）R′是**自反的**(**对称的**、或**传递的**)；

（2）对任何**自反的**(**对称的**、或**传递的**)关系R″，如果R⊆ R″，就有R′⊆ R″。

则称R′为R的**自反闭包**(Reflexive Closure)(**对称闭包**(Symmetric Closure)、或**传递闭包**(Transitive Closure))，分别记为r(R)(s(R)或t(R))。

解题小贴士—关系R的自反/对称/传递闭包的计算方法

首先判断R是否具有自反/对称/传递性，

① 若有，则r(R)/s(R)/t(R)=R；

② 若无，则在R中**添加最少的元素**，使其具有自反/对称/传递性，添加后的结果即为r(R)/s(R)/t(R)。

例4.29 设A={1,2}，R={<1,1>,<1,2>}是A上的关系。**试判断下列关系是否是R的自反闭包、对称闭包和传递闭包。**

R是传递的，不是自反和对称的

由定义4.14知 $r(R)=\{<1,1>,<2,2>,<1,2>\}$

$s(R)=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$t(R)=R$

(1) $R_1=\{<1,1>,<2,2>,<1,2>\}$

$R_1=r(R)$，$R_1\neq s(R)$，$R_1\neq t(R)$

(2) $R_2=\{<1,1>,<2,2>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_2\neq r(R)$，$R_2\neq s(R)$，$R_2\neq t(R)$

(3) $R_3=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_3\neq r(R)$，$R_3=s(R)$，$R_3\neq t(R)$

(4) $R_4=\{<1,1>,<1,2>\}$

$R_4\neq r(R)$，$R_4\neq s(R)$，$R_4=t(R)$

例4.30 **设集合A={a,b,c,d}，R={<a,b>,<b,a>,<b,c>, <c,d>}是定义在A上的二元关系。**

（1）画出R的关系图；

（2）求出r(R),s(R),t(R),并画出其相应的关系图。

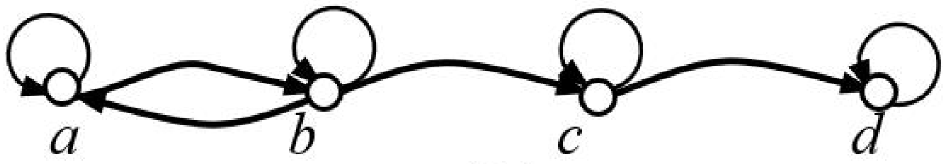
解 **（1）R的关系图见下图；**

每个结点 都有环

每对结点间或有方向相反的两条边，或无任何边

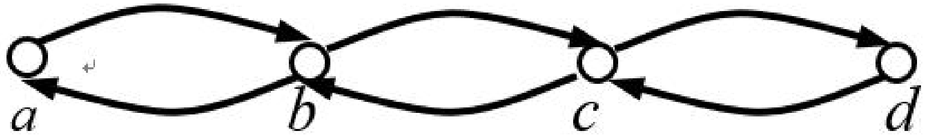
任三个结点x,y,z，若从x 到y有边，从y到z有边， 则从x到z一定有边

(2) r(R) = {<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>}，其关系图如图(b)所示；



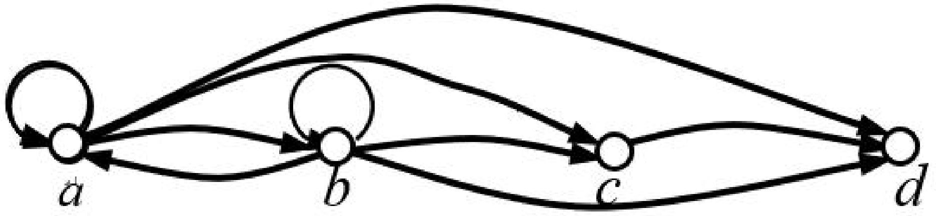
(b)

s(R) = {<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<c,b>,<d,c>}，其关系图如图(c)所示；



(c)

t(R) = {<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<a,a>,<b,b>,<a,c>,<a,d>,<b,d>}，其关系图如图(d)所示。



(d)

解题小贴士—利用R的关系图G_R求关系自反/对称/传递闭包的方法

（1）在G_R中没有自环的结点处加上自环，可得r(R)的关系图；

（2）在G_R中将每条单向边改成双向边，可得s(R)的关系图；

（3）在G_R中从每个结点出发，找到任意一条长度为2的路径的终点，如果该结点到其终点没有边相连，就加上此边，可得t(R)的关系图。

将得到的关系图分别转化为集合表示，即得R的自反/对称/传递闭包。

定理4.10　设R是集合A上的二元关系，则：

（1）$r(R) = R \cup I_A$。

（2）$s(R) = R \cup R^{-1}$。

（3）$t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$，若$|A| = n$，则$t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。

例4.31 设$A=\{a,b,c\}$，$R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$是A上的关系。

计算r(R)，s(R)，t(R)。

解 $r(R)=R\cup I_A$

$=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}\cup\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$

$=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$

$A=\{a,b,c\}$，$R=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<c,b>\}$

$s(R) = R \cup R^{-1}$

$= \{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<c,b>\} \cup \{<a,a>,<b,a>,<b,c>,<c,b>\}$

$= \{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,b>\}$

因为$R^2=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,b>,<c,c>\}$

$R^3=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,c>,<c,b>\}$

$t(R)=R^1 \cup R^2 \cup R^3$

$=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,b>,<b,c>,<c,b>,<a,c>\}$

例4.36 设$A=\{18:00，18:30，19:00,\cdots,21:30,22:00\}$ 表示从18:00到22:00的间隔半小时的时刻集，$B=\{1,2,5,8\}$ 表示中央电视台四个电视频道集，R_1和R_2是从A到B的两个二元关系，试解释二元关系R_1，R_2， $R_1\cup R_2$， $R_1\cap R_2$， $R_1\oplus R_2$和R_1-R_2的意义。

解 $A\times B$表示在晚上九个时刻和四个电视频道所组成的电视节目表， R_1和R_2分别是$A\times B$的两个子集。

如果R_1表示音乐节目播出的时间表， R_2表示戏曲节目的播出时间表，则

$R_1\cup R_2$表示音乐或戏曲节目的播出时间表;

$R_1\cap R_2$表示音乐和戏曲一起播出的时间表;

$R_1\oplus R_2$表示音乐节目表以及戏曲节目表，但不是音乐和戏曲一起的节目表;

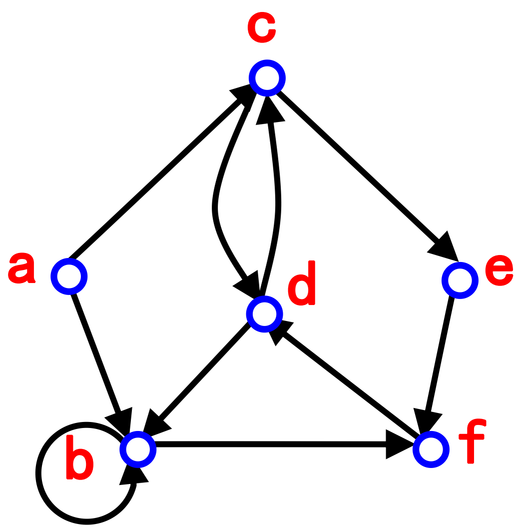
R_1-R_2表示不是戏曲时间的音乐节目时间表。

例4.33 假设点i和j之间存在路径当且仅当从结点i通过图中的边能够到达结点j，其中点i到点j的路上边的数目称为该条路径的长度。试在下图中求

（1）从点c开始的长度为1的所有路径；

（2）从点c开始的长度为2的所有路径；

（3）图中所有长度为2的路径条数。



解 首先写出图4.12的关系矩阵A，并计算$M=(m_{ij})=A\times A$，即

$$
A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
\qquad
M = A\times A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
$$

（1）由关系矩阵A可知，从点c开始的长度为1的所有路径为： c→d和 c→e.

（2）由矩阵的计算规则可知，$m_{32}=m_{33}=m_{36}=1$, 从而从c开始的长度为2的所有路径有3条，分别为c→d→b，c→d→c和 c→e→f共三条.

（3）由A×A可知，A×A中共有17个1，即图中所有长度为2的路径条数有17条。

判定下列关系具有哪些性质?

1. 生活中的朋友关系、同学关系。 ***自反性，对称性***

2. 全体中国人集合上的同姓关系。 ***自反性，对称性和传递性***

等价关系

3. 设集合A={1, 2, 3}，R={<1,3><3,2>,<1,2>}是A上的关系。

拟序关系

反自反性，反对称性和传递性

4. 设集合A={1, 2}，R={<1,1><2,2>,<1,2>}是A上的关系。

偏序关系

自反性，反对称性和传递性

假设集合A是由10个红色、蓝色或绿色球组成的集合，如右图所示。

定义A上的关系R为：

$\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow x$和$y$有相同的颜色。

关系R具有哪些性质?

等价关系

显然关系R具有*<u>自反性，对称性和传递性</u>*。

定义5.3 设R是定义在非空集合A上的关系，如果R是**自反的、对称的、传递的**，则称R为A上的**等价关系**。

解题小贴士—等价关系的判断方法

R是等价关系$\Leftrightarrow$ R同时具有自反性、对称性和传递性。

例5.4 试判定例5.1中的关系是否为等价关系。

(1) A上的“同性”关系。 是

不具有传递性

(2) A上的“朋友”关系。 否

(3) A上的“父子”关系。 否

不具有对称性

不具有自反性

例5.5 如右图所示，集合A={1，2，..., 10}上定义关系R如下：

$<x, y>\in R\Leftrightarrow x$和$y$有相同的颜色

（1）写出R中的所有元素。

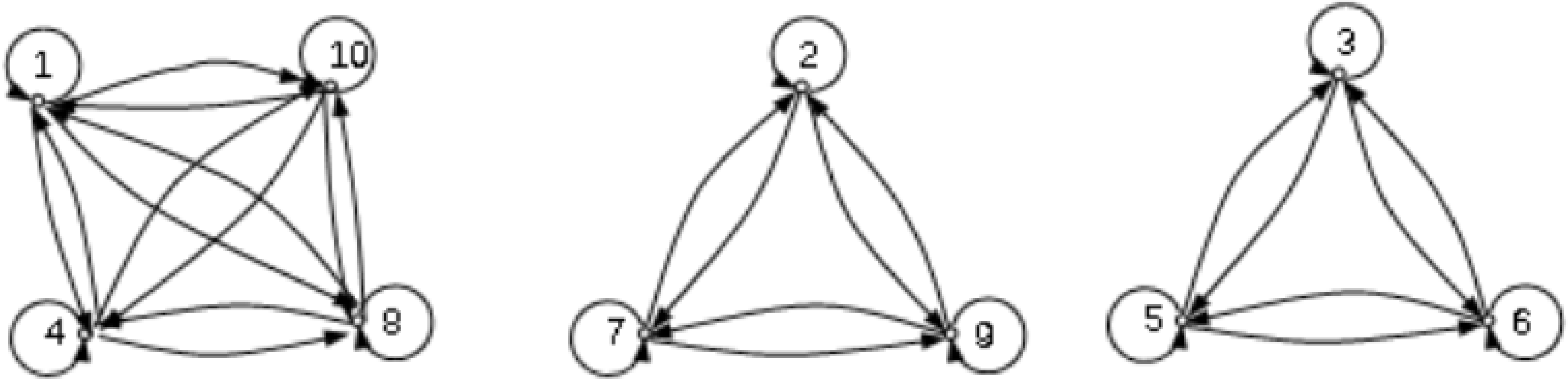
（2）画出R的关系图。

（3）证明R是一个等价关系。

解 （1）根据R的定义得：

R={<1,1>,<2,2>,...,<10,10>,<1,4>,<4,1>,<1,8>,<8,1>,<1,10>,
<10,1>，<4,8>，<8,4>，<4,10>，<10,4>,<10,8>，<8,10>，<2,7>,
<7,2>,<2,9>，<9,2>,<9,7>，<7,9>,<3,5>，<5,3>,<3,6>,<6,3>,
<5,6>,<6,5>}。

（2）R的关系图如下图所示。



注意：关系R将集合A分成了三个互不相交的子集，且它们的并集为A。

(3) 证明R是等价关系。

① 自反性 对$\forall x$,

$x\in A \Rightarrow <x, x>\in R \Rightarrow$R是自反的。

② 对称性 对$\forall x\in A$, $\forall y\in A$,

$<x, y>\in R \Rightarrow$x与y颜色相同$\Rightarrow$y与x颜色也相同$\Rightarrow <y,x>\in R \Rightarrow$ R是对称的。

③ 传递性 对 $\forall x\in A$, $\forall y\in A$, $\forall z\in A$,

$<x,y>\in R\wedge<y,z>\in R \Rightarrow$x与y颜色相同$\wedge$y与z颜色相同

$\Rightarrow$ x与z颜色也相同$\Rightarrow <x,z>\in R \Rightarrow$R是传递的。

由①,②和③知,R是等价关系。

例5.6 设n为正整数，考虑整数集合Z上的**整除关系**如下：

$$R=\{<x,y>|\{x,y\in Z\}\wedge(n|(x-y))\}$$

证明 R是一个等价关系。

分析 根据“等价关系的判断方法”分别证明 R 具有自反性、 对称性和传递性即可。

(1) 自反性 对$\forall x$，

$x \in Z \Rightarrow n|(x-x) \Rightarrow <x, x> \in R \Rightarrow$ R是自反的。

(2) 对称性 对$\forall x \in Z$，$\forall y \in Z$，

$<x, y> \in R \Rightarrow n|(x-y) \Rightarrow n|-(x-y) \Rightarrow n|(y-x) \Rightarrow <y,x> \in R \Rightarrow$ R是对称的。

(3) 传递性 对 $\forall x \in Z$，$\forall y \in Z$，$\forall z \in Z$，

$<x,y> \in R \wedge <y,z> \in R \Rightarrow n|(x-y) \wedge n|(y-z)$

$\Rightarrow n|((x-y)+(y-z)) \Rightarrow n|(x-z) \Rightarrow <x,z> \in R \Rightarrow$ R是传递的。

由(1)，(2)和(3)知，R是Z上的等价关系。

定义5.4 给定非空集合A，设有集合$S=\{A_1,A_2,\dots,A_m\}$。如果满足

(1) $A_i \subseteq A$且$A_i \neq \Phi$，$i=1,2,\dots,m$;

(2) $A_i \cap A_j = \Phi$，$i \neq j$，$i,j=1,2,\dots,m$;

(3) $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$。

例5.5 中 {{1，4，8，10}，{2，7，9}，{3，5，6}}就是集合A={1，2，…，10}的一个划分

则称S为集合A的**一个划分**(Partition)，而$A_1,A_2,\dots,A_m$叫做这个划分的**块**(Block)或**类**(Class)。

定义5.4 给定非空集合A，设有集合$S=\{A_1,A_2,\ldots,A_m\}$。如果满足

(1) $A_i \subseteq A$且$A_i \neq \Phi$，$i=1,2,\ldots$

(2) $A_i \cap A_j = \Phi$，$i \neq j$，$i,j=1,2$

(3) $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$ 。

$S_0 = \{\ldots, -2n, -n, 0, n, 2n, \ldots\}$;

$S_1 = \{\ldots, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, \ldots\}$;

……

$S_{n-1} = \{\ldots, -2n-1, -n-1, -1, n-1, 2n-1, \ldots\}$。

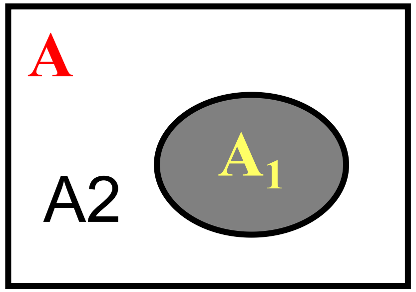
则称S为集合A的**一个划分**(Partition)，而$A_1,A_2,\ldots,A_m$叫做这个划分的**块**(Block)或**类**(Class)。

注意：集合的一个划分一定是该集合的一个覆盖，反之不然。

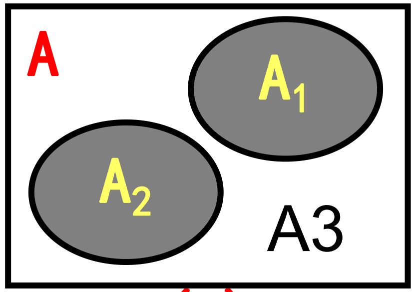
试给出非空集合A的2个不同划分

解（1）在A中设定一个非空真子集A_1，令$A_2=A-A_1$，则根据集合划分的定义，$\{A_1,A_2\}$就构成了集合A的一个划分，见图(a)；

（2）在A中设定两个不相交非空真子集A_1和A_2，令$A_3=A-(A_1\cup A_2)$，则根据集合划分的定义，$\{A_1,A_2,A_3\}$就构成了集合A的一个划分，见图(b)。



(a)



(b)

文氏图

注意：对同一个集合，划分的方法不同，得到的划分也不同。

由等价关系产生的

- $\{\{1,4,8,10\},\{2,7,9\},\{3,5,6\}\}$是集合$A=\{1,2,\ldots,10\}$的一个划分；
- $\{S_0,S_1,\ldots,S_{n-1}\}$是整数集Z的一个划分。

像这种由等价关系产生的划分又被称为**集合A上关于R的商集**，划分中的每一块被称为**等价类**。

定义5.5 设R是非空集合A上的等价关系，对∀ $x\in A$，称集合

$$[x]_R = \{y \mid y\in A \wedge \langle x,y\rangle \in R\} \quad (5\text{-}3)$$

为x关于R的等价类(Equivalence Class)，或叫作由x生成的一个R等价类，其中x称为$[x]_R$的生成元(或叫代表元，或典型元)(Generator)。

x关于R的等价类

解题小贴士—等价类$[x]_R$的计算方法

对A中的任意x，找出以x为第一元素的所有序偶，将其第二元素构成集合，这个集合就是$[x]_R$。

例5.8 设$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，R是A上以4为模的同余关系。

（1）写出R中的所有元素。

<x,y> \in R 等价 x=y mod 4

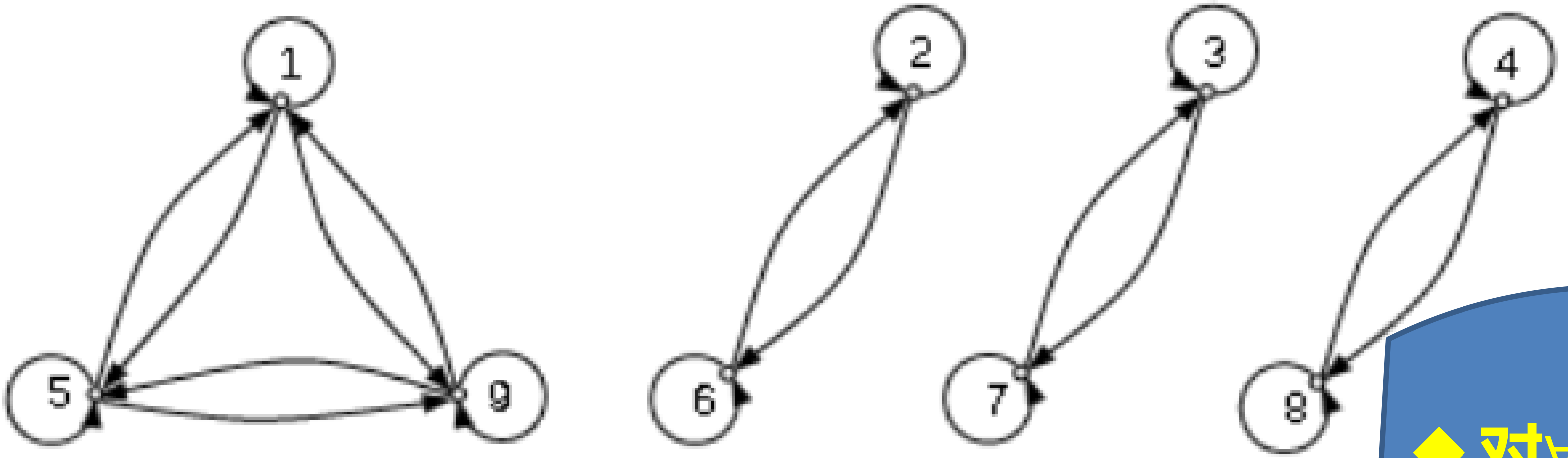
（2）画出R的关系图。

（3）计算R的所有等价类。

解：（1）根据R的定义得：

$$R=\{<1,1>,<2,2>,\ldots,<9,9>,<1,5>,<5,1>,<1,9>,<9,1>,<5,9>,<9,5>,<2,6>,<6,2>,<3,7>,<7,3>,<4,8>,<8,4>\}。$$

解：（2）R对应的关系图如下图所示。



◆ 对$\forall x \in A$，$[x]_R \neq \Phi$

◆ $\forall x \in A, \forall y \in A$，$y \in [x]_R \Rightarrow x \in [y]_R$

（3）由例5.6知，A上的关系R是一个等价关系。于是有

$[1]_R = [5]_R = [9]_R = \{1,5,9\}$　　$[2]_R = [6]_R = \{2,6\}$

$[3]_R = [7]_R = \{3,7\}$　　$[4]_R = [8]_R = \{4,8\}$

定理5.2 设R是非空集合A上的等价关系，则有下面的结论成立。

(1) 对$\forall x \in A$，$[x]_R \neq \Phi$。

(2) 对$\forall x \in A$, $\forall y \in A$,

a) 如果$y \in [x]_R$，则有$[x]_R = [y]_R$，

b) 如果$y \notin [x]_R$，则有$[x]_R \cap [y]_R = \Phi$。

(3) $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$。

定义5.6 设R是非空集合A上的**等价关系**，**由R确定的一切等价类构成的集合**，称为**集合A上关于R的商集**(Quotient Set)，记为**A/R**，即

$$A/R=\{[x]_R \mid (x\in A)\} \qquad (5\text{-}4)$$

例如，例5.8中A关于R的商集$A/R=\{[1]_R,[2]_R,[3]_R,[4]_R\}=\{\{1,5,9\},\{2,6\},\{3,7\},\{4,8\}\}$。

例5.9 设A={1,2,3}，在P(A)上规定二元关系如下：

$$R=\{<s,t>|s,t\in P(A)\wedge|s|=|t|\}$$

试证明R是A上的等价关系，并计算商集P(A)/R。

解 （1）首先证明R是P(A)上的等价关系。

① 对$\forall s$，$s\in P(A)\Rightarrow|s|=|s|\Rightarrow<s,s>\in R\Rightarrow$**R是自反的。**

② 对 $\forall s\in P(A)$，$\forall t\in P(A)$，

$<s,t>\in R\Rightarrow|s|=|t|\Rightarrow|t|=|s|\Rightarrow<t,s>\in R\Rightarrow$**R是对称的。**

③ 对$\forall s\in P(A)$，$\forall t\in P(A)$，$\forall u\in P(A)$，

$<s,t>\in R\wedge<t,u>\in R\Rightarrow|s|=|t|\wedge|t|=|u|\Rightarrow|s|=|u|\Rightarrow<s,u>\in R\Rightarrow$**R是传递的。**

综上可知R是P(A)上的等价关系。

(2）求出所有等价类。对$\forall x \in P(A)$,有

$[\Phi]_R=\{\Phi\}$。

$[\{1\}]_R=[\{2\}]_R=[\{3\}]_R=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$。

$[\{1,2\}]_R=[\{2,3\}]_R=[\{1,3\}]_R=\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$。

$[\{1,2,3\}]_R=\{\{1,2,3\}\}$。

(3）根据式（5-4）可得

$P(A)/R=\{[\Phi]_R,[\{1\}]_R,[\{1,2\}]_R,[\{1,2,3\}]_R\}$

$=\{\{\Phi\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\},\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\},\{\{1,2,3\}\}\}$。

解题小贴士—A是有限集或可数集，商集A/R的计算步骤如下：

（1）任选A中一个元素a，计算$[a]_R$。

（2）如果$[a]_R \neq A$，任选一个元素$b \in A-[a]_R$，计算$[b]_R$。

（3）如果$[a]_R \cup [b]_R \neq A$，任选一个元素$c \in A-[a]_R-[b]_R$，计算$[c]_R$。

以此类推，直到A中所有元素都包含在计算出的等价类中。

定理5.3 设R是非空集合A上的等价关系，则A对R的商集A/R是A的一个划分，称之为由R所导出的等价划分。

证明 根据定理5.2（1）知，对$\forall x \in A$，$[x]_R \subseteq A$ 且$[x]_R \neq \Phi$ 。

由定理5.2（2）知，不相等的两个等价类交集为空集。

由定理5.2（3）知，所有等价类的并集为A。

于是根据定义5.4知， A/R就是A的一个划分。

定理5.2 设R是非空集合A上的等价关系，则有下面的结论成立。

(1) 对$\forall x \in A$，$[x]_R \neq \Phi$。

(2) 对$\forall x \in A$, $\forall y \in A$,

a) 如果$y \in [x]_R$，则有$[x]_R = [y]_R$， b) 如果$y \notin [x]_R$，则有$[x]_R \cap [y]_R = \Phi$。

(3) $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$。

定理5.4 给定集合A的一个划分$\Pi=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$， 则由该划分确定的关系

$$R=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup\ldots\cup(A_n\times A_n) \qquad (5\text{-}5)$$

是A上的等价关系,称此关系R为由划分Π所导出的等价关系。

例5.10 设$A=\{1,2,3,4,5,6\}$，求出与下列划分对应的等价关系。

（1）$S_1=\{\{1,2\},\{3,5\},\{4\}\}$；

（2）$S_2=\{\{1,3\},\{2,4,5\}\}$。

解 （1）设与划分S_1对应的等价关系为R_1，则

$$R_1=(\{1,2\}\times\{1,2\})\cup(\{3,5\}\times\{3,5\})\cup(\{4\}\times\{4\})$$

$$=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}\cup\{<3,3>,<3,5>,<5,3>,<5,5>\}\cup\{<4,4>\}$$

$$=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>,<1,2>,<2,1>,<3,5>,<5,3>\}。$$

（2）设与划分S_2对应的等价关系为R_2，则

$$R_2=(\{1,3\}\times\{1,3\})\cup(\{2,3,5\}\times\{2,3,5\})$$

$$=\{<1,1>,<1,3>,<3,1>,<3,3>\}\cup$$

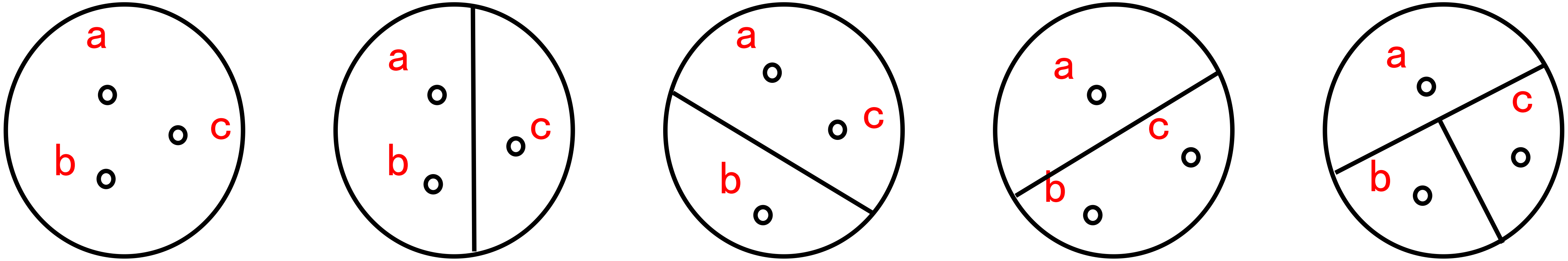
$$\{<2,2>,<3,3>,<5,5>,<2,3>,<3,2>,<2,5>,<5,2>,<5,3>,<3,5>\}$$

$$=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>,<1,3>,<3,1>,<2,3>,<3,2>,$$

$$<2,5>,<5,2>,<5,3>,<3,5>\}。$$

例5.11 设A={a,b,c}，求A上所有的等价关系及其对应的商集。

解 只有1个划分块的划分为S_1，见图(a)；具有2个划分块的划分为S_2、S_3和S_4，见图(b)、(c)和(d)，具有3个划分块的划分为S_5，见图(e)。



(a) (b) (c) (d) (e)

假设由S_i导出的对应等价关系为R_i，$i=1,2,3,4,5$，则有

$R_1=S_1\times S_1=A\times A$

$A/R_1=\{\{1,2,3\}\}$

$R_2=\{1,2\}\times\{1,2\}\cup\{3\}\times\{3\}=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<3,3>\}$

$A/R_2=\{\{1,2\},\{3\}\}$

$R_3=\{1,3\}\times\{1,3\}\cup\{2\}\times\{2\}=\{<1,1>,<1,3>,<2,2>,<3,1>,<3,3>\}$

$A/R_3=\{\{1,3\},\{2\}\}$

$R_4=\{2,3\}\times\{2,3\}\cup\{1\}\times\{1\} =\{<1,1>,<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>\}$

$A/R_4=\{\{1\},\{2,3\}\}$

$R_5=\{1\}\times\{1\}\cup\{2\}\times\{2\}\cup\{3\}\times\{3\} =\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}=I_A$

$A/R_5=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

制作一道四川名菜—四川麻婆豆腐，需执行下面的任务：

（1）把豆腐切块；

（2）牛肉剁成牛肉馅；

（3）把蒜苗切成段，蒜和姜切成小粒；

（4）锅里倒清水烧热，下豆腐块，加盐煮一下捞出；

（5）油温烧至7成热，下蒜、老姜、豆瓣酱翻炒，然后加牛肉馅炒香；

（6）加豆腐块、辣椒粉、水煮开，加蒜苗炒香，装盘上桌

次序关系

假设集合A是制作四川麻婆豆腐的任务集，即$A=\{1,2,3,4,5,6\}$，A上的关系R定义为：

不具有反自反性

$\langle i,j\rangle \in R \Leftrightarrow$ 如果$i=j$或者任务i必须在任务j之前完成。

则关系R具有什么性质？是拟序关系吗？ 否

具有自反性、反对称性和传递性的。

偏序关系

定义5.9 设R是非空集合A上的关系，**如果R是自反的、反对称的和传递的**，则称R是A上的**偏序关系**(Partial Order Relation)，简称**偏序**，记为“≤”，读作“小于等于”，并将“<a,b>∈≤”记为a≤b。

序偶<A,≤>称为**偏序集**(PartialOrder Set)。

解题小贴士—偏序关系的判断方法

R是偏序关系⇔ R同时具有自反性、反对称性和传递性。

注意： (1) “≤”的逆关系是“≥”，“<a, b>∈≥”记为“a≥b”，读作“a大于等于b”。

(2) “≤”－“I_A”为A上的拟序关系，“<”∪“I_A”为A上的偏序关系。

例5.14 **试判断下列关系是否为偏序关系**

（1）设A={1,2,3}，A上的关系R={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<3,2>}。 **是**

不具有自反性

（2）设A={1,2,3}，A上的关系S={ <1,2>,<3,2>}。 **否**

（3）整数集Z上的模m同余关系T。 **否**

不具有反对称性

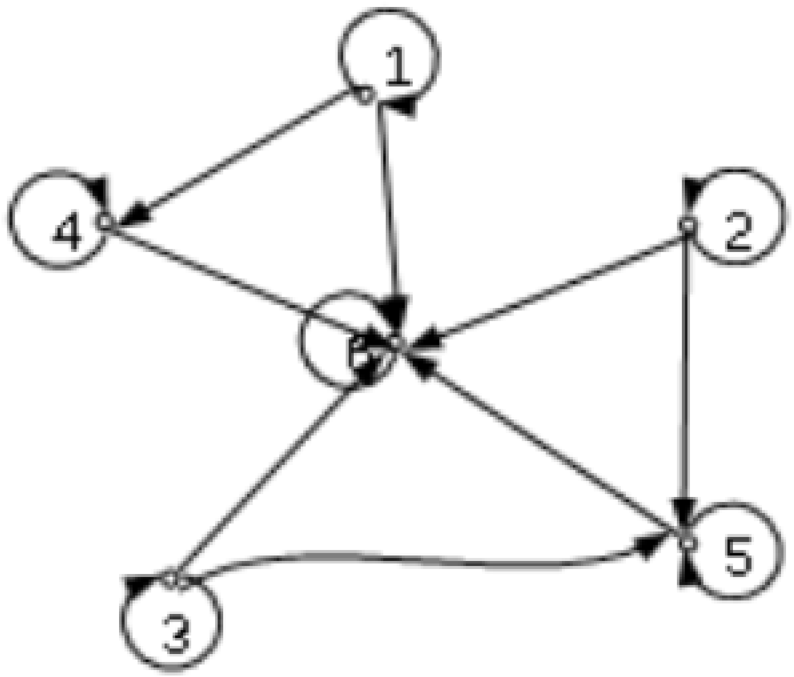
例5.16 试写出制作四川麻婆豆腐的任务集A = {1,2,3,4,5,6}上的关系R中的元素，并画出它的关系图。

解 根据R的定义，有

R = {<1,1>,<2,2>,…,<6,6>,<1,4>,<1,6>,

<2,5>,<2,6>, <3,5>,<3,6>,<4,6>,<5,6>}

其关系图如右图所示。



R是偏序关系⇔ R同时具有自反性、反对称性和传递性。

如果已知R是偏序关系，那么它的关系图一定具有如下特点：

（1）每个结点都有自环（自反性）；

（2）任意两个结点要么有且仅有一条边相连，要么没有边相连（反对称性）；

（3）如果元素a到元素b有边相连，元素b到元素c有边相连，则元素a到元素c必然有边相连（传递性）。

如果A上的关系R是偏序关系，那么可以按照下面的方式简化它的关系图。

（1）用小圆圈或点表示A中的元素，省掉关系图中所有的环； (因自反性)

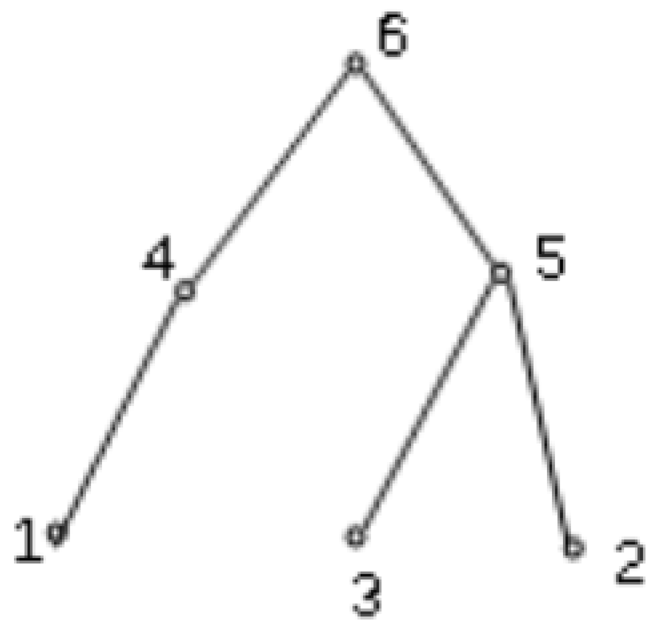
（2）对任意$x,y\in A$，若$x<y$，则将x画在y的下方，可省掉关系图中所有边的箭头； (因反对称性)

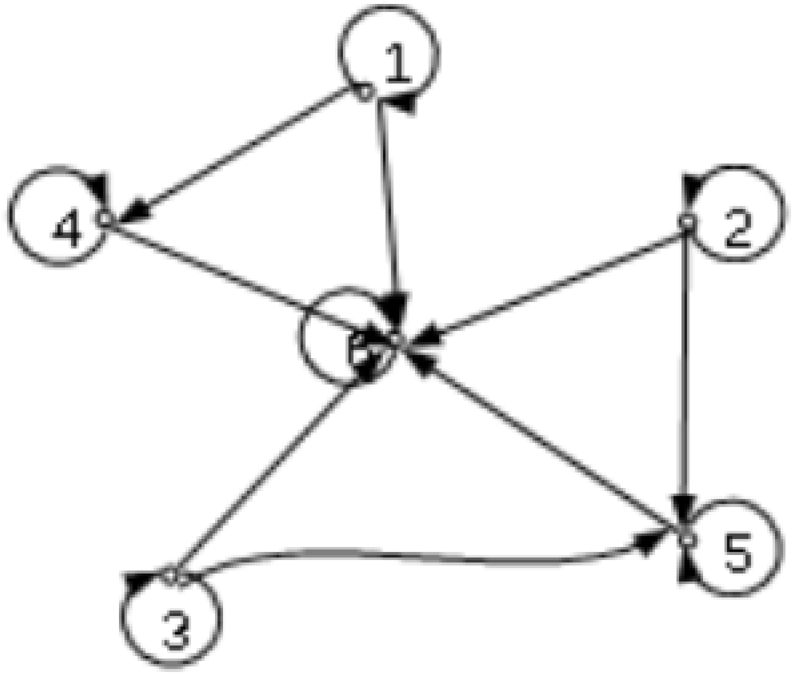
（3）对任意$x,y\in A$，若$x<y$，且不存在$z\in A$，使得$x<z, z<y$，则x与y之间用一条线相连，否则无线相连。 (因传递性)

按照（1），（2）和（3）作成的图被称为R的哈斯图（Hasse图）。

例5.17 画出例5.16中关系R的哈斯图。

解 例5.16中关系R的哈斯图如右图所示。





例5.18 设A = {1,2,3,4,6,12}， “≤”是A上的整除关系R，先写出R中元素，并判定能否画出R的哈斯图。如果能，请画出其哈斯图。

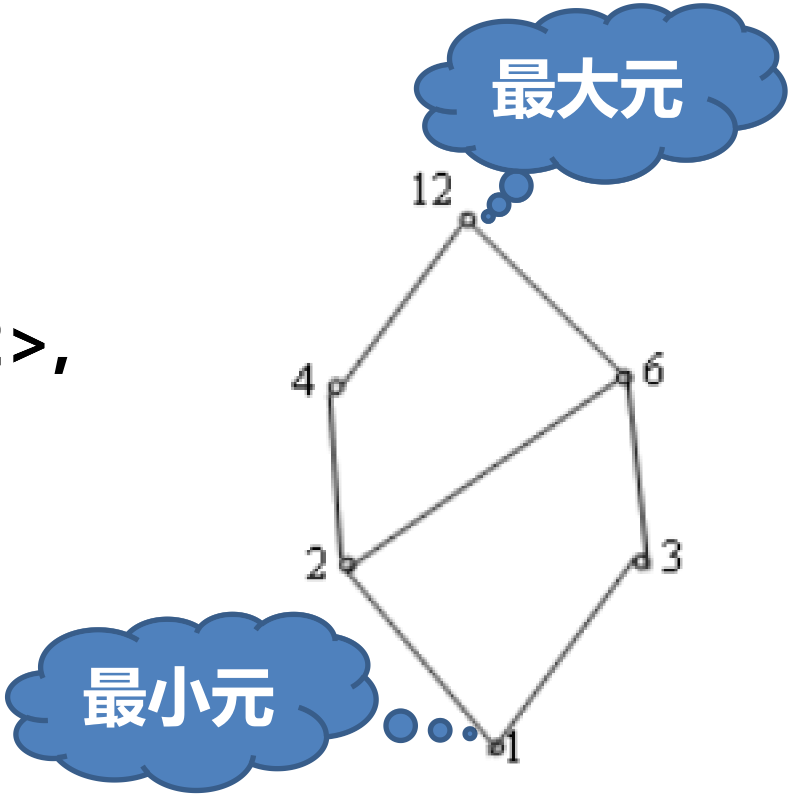
解 由题意可得

R = {<1,1>,<2,2>,…,<12,12>,<1,2>,<1,3>,

<1,4>,<1,6>, <1,12>,<2,4>,<2,6>,<2,12>,

<3,6>,<3,12>,<4,12>,<6,12>}。

其哈斯图如右图所示。



定义5.10 设<A,≤>是偏序集，B是A的非空子集，

（1）如果 $\exists b(b\in B\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\leq b))=1$，则称b为B的最大元素 （Greatest Element），简称最大元；

（2）如果$\exists b(b\in B\wedge\forall x(x\in B\rightarrow b\leq x))=1$，则称b为B的最小元素（Smallest Element），简称最小元。

解题小贴士—最大元、最小元的求解方法

（1）b为B的最大元⇔ $\exists b(b\in B\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\leq b))=1$ 。

（2）b是B的最大元⇔ b是B对应哈斯图的惟一最上端。

（3）b为B的最小元⇔ $\exists b(b\in B\wedge\forall x(x\in B\rightarrow b\leq x))=1$ 。

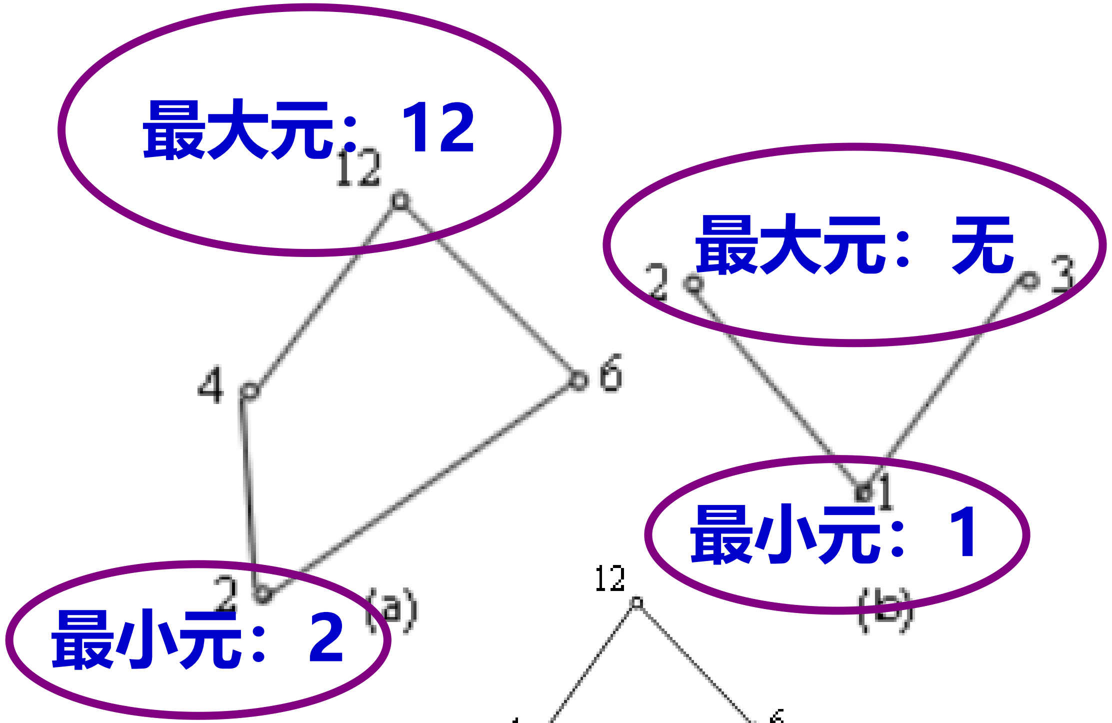
（4）b是B的最小元⇔ b是B对应哈斯图的惟一最下端。

例5.19 设$B_1=\{2,4,6,12\}$，$B_2=\{1,2,3\}$是例5.18中集合A的子集，试求出B_1，B_2的最大元和最小元。

解 子集B_1，B_2形成的哈斯图分别如右图（a）和（b）所示。

从图（a）可以看出，B_1的最大元是12，最小元是2。

从图（b）可以看出，图的最上端存在两个元素2和3，它们之间不能比较，因此B_2无最大元，最小元是1。



（2）b是B的最大元⇔ b是B对应哈斯图的惟一最上端。
（4）b是B的最小元⇔ b是B对应哈斯图的惟一最下端。

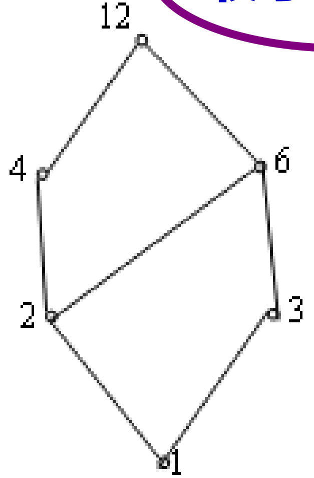


图 5.10

定义5.11 设<A,≤>是偏序集，**B是A的非空子集**，

（1）如果 $\exists b(b\in B\wedge\forall x(x\in B\wedge b\leq x\rightarrow x=b))=1$，则称b为B的极大元素 (Maximal Element)，简称极大元；

（2）如果$\exists b(b\in B\wedge\forall x(x\in B\wedge x\leq b\rightarrow x=b))=1$，则称b为B的极小元素 (Smallest Element) ，简称极小元。

解题小贴士—极大元、极小元的求解方法

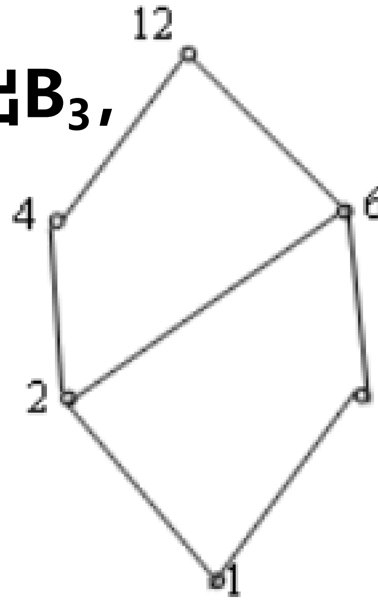
（1）b为B的极大元⇔ $\exists b(b\in)\wedge\forall x(x\in B\wedge b\leq x\rightarrow x=b))=1$ 。

（2）b是B的极大元⇔ 在B对应的哈斯图中，b的上面没有其他元素。

（3）b为B的极小元⇔ $\exists b(b\in)\wedge\forall x(x\in B\wedge x\leq b\rightarrow x=b))=1$ 。

（4）b是B的极小元⇔ 在B对应的哈斯图中，b的下面没有其他元素。

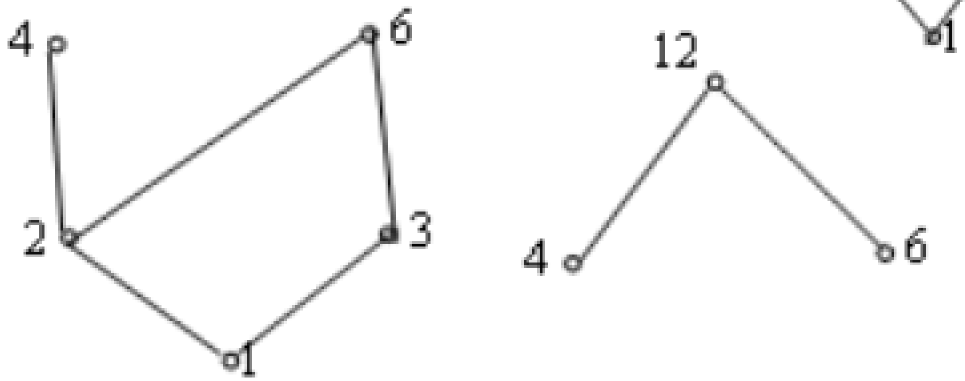
例5.20 设$B_3=\{1,2,3,4,6\}$，$B_4=\{4,6,12\}$是例5.18中集合A的子集，试求出B_3，B_4的最大元、最小元、极大元和极小元。



解 子集B_3，B_4形成的哈斯图分别如下图（a）和（b）所示。

B_3，B_4的最大元、最小元、极大元和极小元如下表所示。

集合	最大元	极大元	最小元	极小元
B_3	无	4,6	1	1
B_4	12	12	无	4,6



(a) (b)

定义5.12 设$<A,\leq>$是偏序集，B是A的任何一个子集。

（1）如果$\exists a(a\in A\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\leq a))=1$，则称a为B的上界（Upper Bound）。

（2）如果$\exists a(a\in A\wedge\forall x(x\in B\rightarrow a\leq x))=1$，则称a为B的下界（Lower Bound）。

（3）令$C=\{y|y$是B的上界$\}$，则称C的最小元为B的最小上界（Least Upper Bound）或 上确界，记SupB。

（4）令$D=\{y|y$是B的下界$\}$，则称D的最大元为B的最大下界（Greatest Lower Bound）或下确界，记InfB。

解题小贴士—上界、下界的求解方法

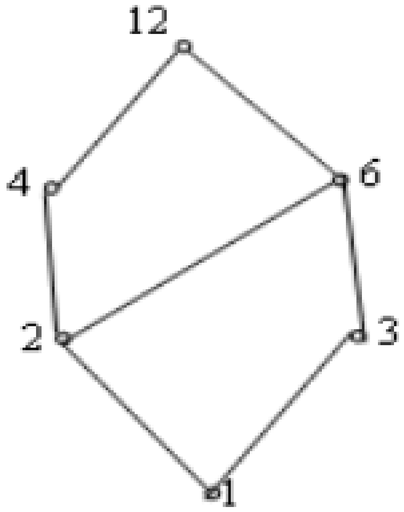
（1） $\exists a(a\in A \wedge \forall x(x\in B \rightarrow x\leq a))=1 \Leftrightarrow$ a为B的上界。

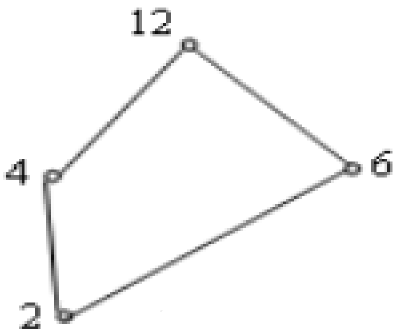
（2）在B的哈斯图中，找出B的最大元。若最大元存在，则最大元及其上面的元素都是B的上界；若最大元不存在，则向上找出“大”于其所有极大元的元素，这些元素就是B的上界。

(3 $\exists a(a\in A \wedge \forall x(x\in B \rightarrow a\leq x))=1 \Leftrightarrow$ a为B的下界。

（4）在B的哈斯图中，找出B的最小元。若最小元存在，则最小元及其下面的元素都是B的下界；若最小元不存在，则向下找出“小”于其所有极小元的元素，这些元素就是B的下界。

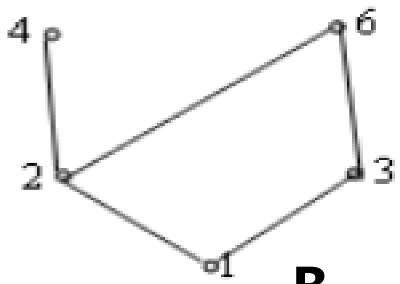
例5.21 试求出例5.19和5.20中A的子集B_1，B_2，B_3和B_4的上界、下界、上确界和下确界。



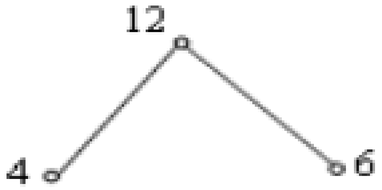


B_1

B_2

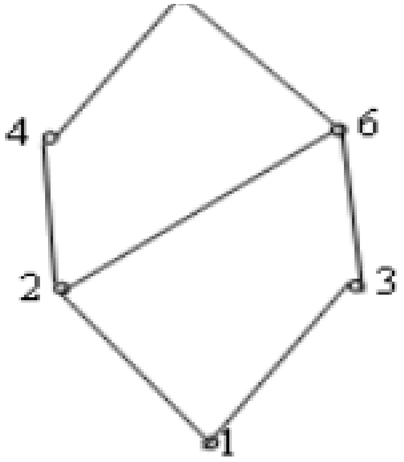


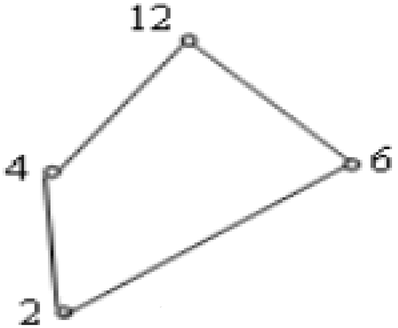
B_3



B_4

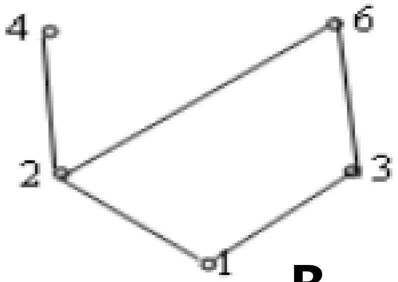
解　集合B_1，B_2，B_3和B_4的上 ,界、下界、上确界和下确界如下表所示。



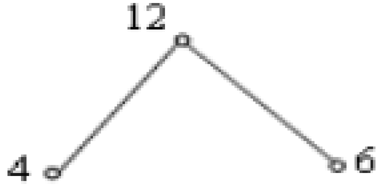


B_1

B_2



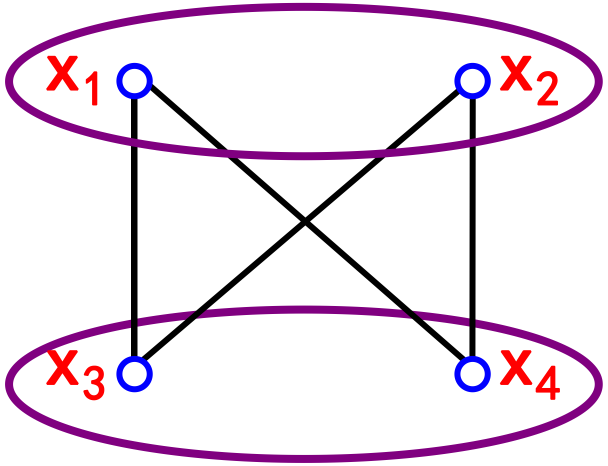
B_3



B_4

集合	上界	上确界	下界	下确界
B_1	12	12	1,2	2
B_2	6,12	6	1	1
B_3	12	12	1	1
B_4	12	12	1,2	2

例5.22 $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，A上定义偏序集$<A,\leq>$的哈斯图如右图所示。求$B=\{x_1,x_2\}$和$C=\{x_3,x_4\}$最大元、最小元、极大元、极小元、上界、下界、上确界和下确界。



解 见下表。

集合	最大元	极大元	上界	上确界	最小元	极小元	下界	下确界
B	无	x_1,x_2	无	无	无	x_1,x_2	x_3,x_4	无
C	无	x_3,x_4	x_1,x_2	无	无	x_3,x_4	无	无

定理5.5 设$<A,\leq>$是一偏序集，B是A的子集。则：

（1）b是B的最大元 $\Rightarrow$ b是B的极大元、上界、上确界；

（2）b是B的最小元 $\Rightarrow$ b是B的极小元、下界、下确界；

（3）a是B的上确界，且$a\in B$ $\Rightarrow$ a是B的最大元；

（4）a是B的下确界，且$a\in B$ $\Rightarrow$ a是B的最小元。

定理5.6 设$<A,\leq>$是一偏序集，B是A的子集。则：

（1）若B存在最大元，则B的最大元是惟一的；

（2）若B存在最小元，则B的最小元是惟一的；

（3） b是B的最大元 $\Leftrightarrow$ b是B的惟一极大元；

（4） b是B的最小元 $\Leftrightarrow$ b是B的惟一极小元；

（5）若B存在上确界，则B的上确界是惟一的；

（6）若B存在下确界，则B的下确界是惟一的。

例5.39 信息检索系统中的信息有{离散数学，高等数学，计算机操作系统，计算机网络，数据结构，编译原理，软件工程，计算机组成原理}。试给该信息检索系统指定三种不同的划分。

解 设A={离散数学，高等数学，计算机操作系统，计算机网络，数据结构，编译原理，软件工程，计算机组成原理}，则

划分1：含关键词离散数学，则

S_1={{离散数学},{高等数学,计算机操作系统,计算机网络,数据结构,编译原理,软件工程,计算机组成原理}}。

划分2：含关键词数学，则

S_2={{离散数学,高等数学},{计算机操作系统,计算机网络,数据结构,编译原理,软件工程,计算机组成原理}}。

划分3：含关键词计算机，则

S_3={{离散数学，数据结构,编译原理,软件工程,高等数学},{计算机操作系统,计算机网络,计算机组成原理}}。

例5.41 如果一个软件项目需要完成的任务对应的哈斯图如右图所示，求一个全序执行这些任务以完成这个项目。

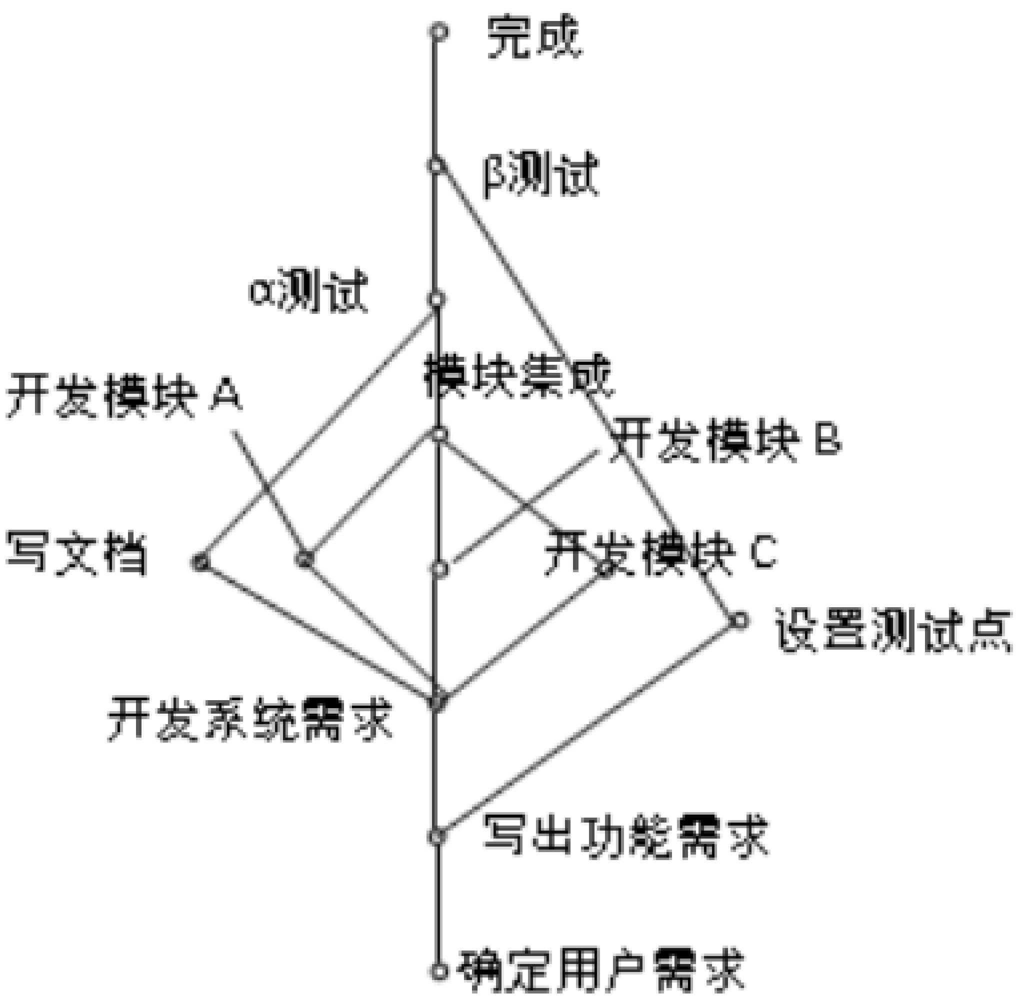


图 5.17

解 执行这些任务的一种全序为：

确定用户需求≤写出功能需求≤开发系统需求≤设置测试点≤开发模块A≤开发模块B≤开发模块C≤写文档≤模块集成≤α测试≤β测试≤完成。

还可以写出其它排序方法，此处不再叙述。

例4.32 某电视台，拟制定一项为时**半小时的节目**，其中包含**戏剧，音乐与广告**，每项节目都定为**五分钟的倍数**，试求：

（1）各种时间分配情况的集合；

（2）戏剧所分配的时间比音乐多的集合；

（3）广告所分配的时间与音乐或戏剧所分配的时间相等的集合；

（4）音乐所分配的时间恰为五分钟的集合。

解 （1） 各种时间分配情况的集合为：

$T=\{\langle 5,5,20\rangle,\langle 5,10,15\rangle,\langle 5,15,10\rangle,\langle 5,20,5\rangle,\langle 10,5,15\rangle,$

$\langle 10,10,10\rangle, \langle 10,15,5\rangle,\langle 15,5,10\rangle,\langle 15,10,5\rangle,\langle 20,5,5\rangle\}$

（2）戏剧所分配的时间大于音乐所分配时间的集合为：

$D=\{\langle 10,5,15\rangle,\langle 15,5,10\rangle,\langle 15,10,5\rangle,\langle 20,5,5\rangle\}$

（3）广告分配的时间与音乐或戏剧所分配的时间相等的集合：

$S=\{\langle 5,20,5\rangle,\langle 10,10,10\rangle,\langle 20,5,5\rangle\}$

（4）音乐所分配的时间恰为五分钟的集合：

$M=\{\langle 5,5,20\rangle,\langle 10,5,15\rangle,\langle 15,5,10\rangle,\langle 20,5,5\rangle\}$