《离散数学》| Discrete Mathematics

离散数学是计算机学科的经典核心基础课程。课程内容主要包括集合论，数理逻辑，关系理论，图论相关内容，为进一步学习计算机科学的基本理论和方法以及之后的专业课打下良好的基础。通过这门课程的学习，将会培养学生的抽象思维能力，逻辑推理能力，缜密概括能力以及分析和解决实际问题的能力。

离散数学的学习，为其后续课程（如数据结构、操作系统、计算机网络、编译理论、数字逻辑理论、数据库系统、算法分析、系统结构、人工智能等）的学习打下坚实的理论基础。

这门课程的理论性较强，知识点比较多，及时学习巩固。

离散模型在生产生活中的应用

应用数学 离散数学 计算机

离散模型是通过离散方法建立的模型，它被广泛应用于经济、管理和工程技术等方面，为合理地利用有限的人力、物力、财力等资源作出的最优决策，提供科学的依据。本课题关注五个比较简单的离散模型：层次分析模型、循环比赛排名、经济系统的冲量过程、席位分配模型和效益分配模型。层次分析模型通过定性和定量相结合解决各种简单的决策问题。循环比赛排名和经济系统的冲量过程是典型的图论模型。席位分配模型和效益分配模型都和公平有关，往往需要通过公理化途径解决。鼓励学生使用这些模型解决其它实际应用问题。本课题需要学生使用Matlab或Python编写代码，并且分析模拟结果。 使学生掌握简单的离散模型和方法，引导学生这些工具解决实际有价值的问题，深入理解数学工具在解决现实问题方面的意义。

Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography

https://www.sciencedirect.com/journal/discrete-applied-mathematics/issues

课程内容

- 第一部分为 数理逻辑，主要内容有命题逻辑的基本概念、等值演算及推理理论；一阶逻辑的基本概念、等值演算及推理理论。

- 第二部分为 集合论 ，主要内容有集合代数，二元关系和函数。

- 第三部分为代数结构，主要内容有代数系统，群，格与布尔代数。

- 第四部分为图论，主要内容有图的基本概念，欧拉图与哈密顿图，树等。

第一部分 数理逻辑

数理逻辑是研究推理的数学分支，包含两部分内容:

命题演算是研究关于命题如何通过一些联结词构成更复杂的命题以及逻辑推理的方法。

一阶逻辑把命题分解成个体词和谓词，由个体词、谓词、联结词和量词构成更复杂的命题，研究这样的命题间的逻辑推理关系。

第一章 命题逻辑的基本概念

主要内容

- 命题与联结词
  命题及其分类
  联结词与复合命题
- 命题公式及其赋值

1.1 命 题

⑩ 两类逻辑：逻辑分为辩证逻辑和形式逻辑两种。形式逻辑所研究的思维的形式结构，就是指概念、判断和推理之间的结构和关系。

概念：是指反映事物的本质属性的思维形式，是思维的基本单位。

判断：是指对事物是否具有某种属性，即是否符合某概念进行肯定或否定的回答。

推理：是指由一个或几个判断推出另一个判断的思维形式。

现代形式逻辑利用数学方法或者说借助符号体系进行推理规律的研究，因此，也称其为数理逻辑或符号逻辑，是指利用数学方法或者说借助符号体系研究推理规律的科学，目的就是利用计算的方法来代替人们思维中的逻辑推理过程。

[定义1-1：命题] 表达判断的可判别真假的陈述句称为命题(proposition,statement)。

一个命题所表达判断的或“真”、“假”结果称为命题的值或真值(truth)。

命题一般用字母表示，如p或P。如，

⑩ p：合肥是一个大城市。

若命题的值为真，可用**T**、1或“真”表示；若值为假用**F**、0或“假”表示。

代表一个固定的命题的p是命题常量（proposition constant）。在p可以任意指代时称为命题变元（proposition variable）。不可再拆分的命题称为原子命题（atom）或简单命题，由原子命题与联结词构成的命题称为复合命题（compound proposition）。

在逻辑学中，命题与判断是两个既有联系又有区别的概念，命题是对事物情况的陈述，判断是对思维对象有所断定的思维形式，是断定者在一定时空条件下对一个命题是真或假的断言。因此，判断一定是命题，而命题不一定是判断。例如，“火星上有生物。”是命题，但没有经过证实，不是判断。

1.1 命题与联结词

命题与真值

- 命题：非真即假的陈述句
- 命题的真值：陈述句所表达的判断结果

  真值的两个取值：真与假

  真命题/假命题

判断是否为命题：

（1）是否为陈述句

感叹句、祈使句、疑问句都不是命题

（2）是否有唯一的真值

命题概念

例 下列句子中哪些是命题?

(1) $\sqrt{2}$ 是有理数. 假命题

(2) $2+5=7$. 真命题

(3) $x+5>3$. 不是命题

(4) 你去教室吗? 不是命题

(5) 这个苹果真大呀! 不是命题

(6) 请不要讲话! 不是命题

(7) 2050年元旦下大雪. 命题，但真值现在不知道

真值不知道 ≠ 真值不唯一

(8) 我正在说假话.

由真能推出假，由假能推出真，既不能为真，也不能为假的陈述句称为“悖论”。“悖论”不是命题。

命题分类

命题“因为3>2，所以3≠2。”由两个更简单的命题“3>2”和“3≠2”组成。而“3>2”和“3≠2”不能再分解成更简单的命题了。

命题分类：

简单命题：不能分解成更简单的命题，也称原子命题。

复合命题：由简单命题通过联结词联结而成的命题。

简单命题符号化

- 用小写英文字母 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i$ $(i\geq1)$表示简单命题
- 用“1”表示真，用“0”表示假

例如，令

p: $\sqrt{2}$ 是有理数，则 p 的真值为0

q： $2+5=7$，则 q 的真值为1

例 先将下面陈述句中出现的原子命题符号化，并指出他们的真值，然后再写出这些陈述。（P4）

(1) $\sqrt{2}$ 是有理数是不对的。

（2） 2是偶素数。

（3） 2或4是素数。

（4） 如果2是素数，则3也是素数。

（5） 2是素数当且仅当3也是素数。

p:$\sqrt{2}$是有理数. q:2是素数. r: 2是偶数.
s:3是素数. t:4是素数.

(1)非p (2)q并且r (3)q或t (4)如果q,则s (5)q当且仅当s

命题符号化，联结词也需符号化。

否定、合取、析取联结词

自然语言中出现联结词有的具有二义性，因此在数理逻辑中必须给出联结词的严格定义，并且将他们符号化。

定义1.1 设 p为命题，复合命题"非p"(或"p的否定")称为p的否定式，记作$\neg p$，符号$\neg$称作否定联结词. 规定$\neg p$为真当且仅当p为假.

自然语言中的"非"，"不"，"没有"，"无"，"并非"都可用$\neg$表示。

定义1.2 设p,q为两个命题，复合命题"p并且q"(或"p与q")称为p与q的合取式，记作$p\wedge q$，$\wedge$称作合取联结词. 规定$p\wedge q$为真当且仅当p与q同时为真.

合取联结词的实例

例 将下列命题符号化.

(1) 吴颖既用功又聪明.

(2) 吴颖不仅用功而且聪明.

(3) 吴颖虽然聪明，但不用功.

(4) 张辉与王丽都是三好生.

(5)张辉与王丽是同学.

设p:吴颖用功, q:吴颖聪明

(1) $p \wedge q$

(2) $p \wedge q$

(3) $\neg p \wedge q$

(4) 设p:张辉是三好生,

q:王丽是三好生

$p \wedge q$

(5) p:张辉与王丽是同学

(1)—(3) 说明描述合取式的多样性与灵活性

(4)—(5) 要求分清“与”所联结的成分

析取联结词的实例

定义1.3 设p, q为两个命题，复合命题 “p或q”称作p与q的**析取式**，记作$p \vee q$，$\vee$称作**析取联结词**. 规定$p \vee q$为假当且仅当p与q同时为假.

析取联结词的实例

例 将下列命题符号化

(1) 2 或 4 是素数.

(2) 小元只能拿一个苹果或一个梨.

(3) 王红生于 1975 年或 1976 年.

解(1) 令p:2是素数, q:4是素数, $p \vee q$

(2) 令p:小元拿一个苹果, q:小元拿一个梨

$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

(3) p:王红生于 1975 年, q:王红生于1976 年,

$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 或者 $p \vee q$

(1) 为相容或

(2)、(3) 为排斥或

蕴涵联结词

定义1.4 设p, q为两个命题，复合命题“如果p, 则q”称作p与q的蕴涵式，记作$p \to q$，并称p是蕴涵式的前件，q为蕴涵式的后件，$\to$称作蕴涵联结词. 规定：$p \to q$为假当且仅当p为真q为假.

(1) $p \to q$ 的逻辑关系：q为 p 的必要条件

(2) 在自然语言中，“如果p，则q”前件与后件间往往具有某种内在联系。而数理逻辑中，前件与后件可以无任何内在联系。

(3) “如果 p, 则 q”有很多不同的表述方法：

只要p，就q

因为p，所以q

p仅当q

只有q才p

除非q，才p

除非q，否则非p，....

蕴涵联结词的实例

例 设 p：天冷，q：小王穿羽绒服，将下列命题符号化

(1) 只要天冷，小王就穿羽绒服. $p \to q$

(2) 因为天冷，所以小王穿羽绒服. $p \to q$

(3) 只有天冷，小王才穿羽绒服. $q \to p$

(4) 除非天冷，小王才穿羽绒服. $q \to p$

(5) 除非小王穿羽绒服，否则天不冷. $p \to q$

(6) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候. $q \to p$

等价联结词

定义1.5 设 p, q为两个命题，复合命题 “p当且仅当q”称作p与q的等价式，记作$p\leftrightarrow q$，$\leftrightarrow$称作等价联结词. 规定$p\leftrightarrow q$为真当且仅当p与q同时为真或同时为假.

$p\leftrightarrow q$ 的逻辑关系：p与q互为充分必要条件

例 求下列复合命题的真值

1 (1) 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 3 + 3 ＝ 6.

0 (2) 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 美国位于非洲.

注：p, q可以没有任何逻辑联系。

小　结

- 联结词的优先级：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$依次降低,
  同级按先出现先运算.
- 有括号，括号内的先运算.
- 本小节中$p, q, r, \ldots$ 均表示命题.
- 联结词集为$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，$\neg p, p\wedge q, p\vee q, p\rightarrow q, p\leftrightarrow q$为复合命题. 其中要特别注意理解$p\rightarrow q$的涵义. 反复使用$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$中的联结词组成更为复杂的复合命题.

设 p:$\sqrt{2}$ 是无理数，q: 3是奇数，

r: 苹果是方的，　s: 太阳绕地球转

则复合命题 $(p\rightarrow q) \leftrightarrow ((r\wedge\neg s) \vee\neg p)$ 是假命题.

1.2 命题公式及其赋值

命题变项与合式公式

- 命题变项
- 合式公式
- 合式公式的层次

公式的赋值

- 公式赋值
- 公式类型
- 真值表

命题变项与合式公式

命题常项：真值确定的命题

命题变项（命题变元）：取值为0或1的变元，可以用命题变项表示真值可以变化的陈述句。命题变项不是命题。

常项与变项均用 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots,$ 等表示.

定义1.6 合式公式（简称公式）的递归定义：

(1) 单个命题变项是合式公式, 并称为原子命题公式

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$ 是合式公式

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B), (A\vee B), (A\rightarrow B), (A\leftrightarrow B)$是合式公式

(4) 有限次地应用(1)-(3) 形成的符号串是合式公式

将命题常项 、命题变项用联结词和圆括号按照一定的逻辑关系联结起来的符号串称作合式公式。

合式公式的层次

定义1.7

(1) 若公式A是单个命题变项，则称A为0层公式.

(2) 称 A 是 $n+1(n\geq 0)$ 层公式是指下面情况之一：

(a) $A=\neg B$, B 是 n 层公式;

(b) $A=B\wedge C$, 其中B,C 分别为 i 层和 j 层公式, 且 $n=\max(i,j)$;

(c) $A=B\vee C$, 其中 B,C 的层次及 n 同(b);

(d) $A=B\rightarrow C$, 其中B,C 的层次及 n 同(b);

(e) $A=B\leftrightarrow C$, 其中B,C 的层次及 n 同(b).

(3) 若公式A的层次为k, 则称A为k层公式.

例 公式 $A=p$, $B=\neg p$, $C=\neg p\rightarrow q$, $D=\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$,

$$E=((\neg p\wedge q)\rightarrow r)\leftrightarrow(\neg r\vee s)$$

分别为0层，1层，2层，3层，4层公式.

公式赋值

用命题常项替换公式中的命题变项称作解释。

将公式中出现的全部命题变项都解释成具体的命题常项之后，公式就成了真值确定的命题。

定义1.8 设$p_1, p_2, \ldots, p_n$是出现在公式A中的全部命题变项, 给$p_1, p_2, \ldots, p_n$各指定一个真值, 称为对A的一个赋值或解释. 若使A为1, 则称这组值为A的成真赋值; 若使A为0, 则称这组值为A的成假赋值.

说明：

- 含n个命题变项的公式有2^n个赋值

真值表

定义1.9 将命题公式A在所有赋值下取值的情况列成表, 称作A的**真值表**.

构造真值表的步骤:

(1) 找出公式中所含的全部命题变项$p_1, p_2, \dots, p_n$（若无下角标则按字母顺序排列）, 列出2^n个全部赋值, 从00…0开始, 按二进制加法, 每次加1, 直至11…1为止.

(2) 按从低到高的顺序写出公式的各个层次.

(3) 对每个赋值依次计算各层次的真值, 直到最后计算出公式的真值为止.

真值表

例 写出下列公式的真值表, 并求它们的成真赋值和成假赋值:

(1) $(p \vee q) \to \neg r$

(2) $(q \to p) \wedge q \to p$

(3) $\neg(\neg p \vee q) \wedge q$

真值表1

(1) $A = (p \vee q) \to \neg r$

p q r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \to \neg r$
0 0 0	0	1	1
0 0 1	0	0	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	0	0
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

成真赋值:000,001,010,100,110; 成假赋值:011,101,111

真值表2

(2) $B=(q\to p)\wedge q\to p$

p q	$q\to p$	$(q\to p)\wedge q$	$(q\to p)\wedge q\to p$
0 0	1	0	1
0 1	0	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	1	1

成真赋值:00,01,10,11; 无成假赋值

真值表3

(3) $C = \neg(\neg p \vee q) \wedge q$ 的真值表

p q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$\neg(\neg p \vee q) \wedge q$
0 0	1	1	0	0
0 1	1	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	1	0	0

成假赋值:00,01,10,11; 无成真赋值

公式的类型

定义1.10 设A为任一命题公式.

(1) 若A在它的任何赋值下均为真, 则称A为重言式或永真式;

(2) 若A在它的任何赋值下均为假, 则称A为矛盾式或永假式;

(3) 若A不是矛盾式, 则称A是可满足式.

由例子可知, $(p\vee q)\rightarrow\neg r$, $(q\rightarrow p)\wedge q\rightarrow p$, $\neg(\neg p\vee q)\wedge q$ 分别为非重言式的可满足式，重言式，矛盾式.

注意：重言式是可满足式，但反之不真.

真值表的用途:

求出公式的全部成真赋值与成假赋值，判断公式的类型

第一章 习题课

主要内容

- 命题、真值、简单命题与复合命题、命题符号化
- 联结词$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$及复合命题符号化
- 命题公式及层次
- 公式的类型
- 真值表及应用

基本要求

- 深刻理解各联结词的逻辑关系, 熟练地将命题符号化
- 会求复合命题的真值
- 深刻理解合式公式及重言式、矛盾式、可满足式等概念
- 熟练地求公式的真值表，并用它求公式的成真赋值与成假赋值及判断公式类型

练习1

1. 将下列命题符号化

(3) 王小红或李大明是物理组成员.

(4) 王小红或李大明中的一人是物理组成员.

(5) 由于交通阻塞，他迟到了.

(6) 如果交通不阻塞，他就不会迟到.

(7) 他没迟到，所以交通没阻塞.

(8) 除非交通阻塞，否则他不会迟到.

(9) 他迟到当且仅当交通阻塞.

练习1解答

提示：

- 分清复合命题与简单命题
- 分清相容或与排斥或
- 分清必要与充分条件及充分必要条件

答案：

(3) 是析取式（相容或）(4) 是析取式（排斥或）

设 p: 交通阻塞，q: 他迟到

(5) $p \to q$,

(6) $\neg p \to \neg q$ 或 $q \to p$

(7) $\neg q \to \neg p$ 或 $p \to q$,

(8) $q \to p$ 或 $\neg p \to \neg q$

(9) $p \leftrightarrow q$ 或 $\neg p \leftrightarrow \neg q$

可见(5)与(7)，(6)与(8) 相同（等值）

① ¬，非

P	$\neg P$
F	T
T	F

或

P	$\neg P$
0	1
1	0

② ∧，合取

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

或

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

③ ∨，析取

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

或

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

④ →，蕴含

P	Q	$P \to Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

或

$\neg p$

1

1

0

0

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

⑤ ↔，等价

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

或

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

练习3

3. 用真值表判断下面公式的类型

(1) $p \wedge r \wedge \neg(q \to p)$

(2) $((p \to q) \to (\neg q \to \neg p)) \vee r$

(3) $(p \to q) \leftrightarrow (p \to r)$

练习3解答

(1) $p \wedge r \wedge \neg(q \rightarrow p)$

p q r	$q \rightarrow p$	$\neg(q \rightarrow p)$	$p \wedge r \wedge \neg(q \rightarrow p)$
0 0 0	1	0	0
0 0 1	1	0	0
0 1 0	0	1	0
0 1 1	0	1	0
1 0 0	1	0	0
1 0 1	1	0	0
1 1 0	1	0	0
1 1 1	1	0	0

矛盾式

练习3解答

(2) $((p\to q)\to(\neg q\to\neg p))\vee r$

p	q	r	$p\to q$	$\neg q\to\neg p$	$((p\to q)\to(\neg q\to\neg p))\vee r$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

永真式

练习3解答

(3) $(p\to q)\leftrightarrow(p\to r)$

p q r	$p\to q$	$p\to r$	$(p\to q)\leftrightarrow(p\to r)$
0 0 0			
0 0 1			
0 1 0			
0 1 1			
1 0 0			
1 0 1			
1 1 0			
1 1 1			

非永真式的<u>可满足式</u>

练习3解答

(3) $(p \to q) \leftrightarrow (p \to r)$

p q r	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \leftrightarrow (p \to r)$
0 0 0	1	1	1
0 0 1	1	1	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	1	1
1 0 0	0	0	1
1 0 1	0	1	0
1 1 0	1	0	0
1 1 1	1	1	1

非永真式的可满足式