

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА.
ПРИЛОЖЕНИЕ К НЕКОТОРЫМ ВОПРОСАМ
ФИЗИКИ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ****И. Л. Розенталь**

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время теория не способна сколько-нибудь одно-значно описать взаимопревращения элементарных частиц. Поэтому представляется весьма ценным развитие методов, базирующихся на безусловно верных законах сохранения и помогающих раскрытию характеристик частиц и их схем распада. Для экспериментаторов, работающих в этом направлении, первостепенное значение имеет возможность идентификации частиц. В этом отношении также большую помощь может оказать последовательное применение законов сохранения. Задачей настоящей статьи и является изложение данных о приложении законов сохранения энергии-импульса к исследованию распада частиц*). Естественно, что в статье не излагаются сколько-нибудь последовательно имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные об элементарных частицах. Эти данные, почерпнутые в основном из ряда обзоров (см., например, ^{1,2}), привлекаются только для иллюстрации общих методов.

Успешное применение законов сохранения энергии и импульса к интересующей нас проблеме в значительной степени основывается на некоторых особенностях системы координат, связанной с центром тяжести частиц, обусловливающих рассматриваемое явление (ζ -система). Первой, по существу тривиальной, характеристикой этой системы является уравнение $\Sigma \bar{\mathbf{p}} = 0$ ($\bar{\mathbf{p}}$ — импульс i -й части-

*) Мы не касаемся применения других законов сохранения (чётности, спина, изотопического спина и т. д.) к решению задач, связанных с элементарными частицами. Описание этого весьма перспективного подхода является совершенно самостоятельной задачей, частично решённой в обзоре ³. [См. также работу ¹⁹.]

цы в \mathcal{U} -системе). Другая характеристика связана с некоторыми симметрическими свойствами процессов, рассматриваемых в \mathcal{U} -системе. Так, обычно при распаде в \mathcal{U} -системе (которая связана с распадающейся частицей) явления характеризуются сферической симметрией в том смысле, что их усреднённые характеристики одинаковы относительно любого направления. Несколько более сложный вид симметрии имеет место при столкновениях. Наличие выделенного направления (относительное направление движения частиц) приводит к осевой симметрии*). Такой же тип симметрии может иметь место и при распаде, сопровождаемом поляризационными эффектами. В этом случае выделенным направлением может быть, например, направление спина первичной частицы.

Указанные особенности обуславливают преимущества рассмотрения различных явлений в \mathcal{U} -системе, от которой далее путём релятивистских преобразований можно перейти к лабораторной системе координат (\mathcal{L} -системе). Выводы основных формул теории относительности можно найти в любом курсе теории относительности (например, Л. Ландау и Е. Лифшица⁴).

Использованные обозначения

\bar{E}_0, \bar{p}_0 — соответственно энергия и импульс первичной частицы в \mathcal{U} -системе;

E_0, p_0 — энергия и импульс первичной частицы в \mathcal{L} -системе;

$\bar{E}, \bar{p}, \bar{\vartheta}$ — энергия, импульс и полярный угол направления движения некоторой вторичной частицы (относительно направления движения первичной частицы) в \mathcal{U} -системе;

$\bar{E}_1, \bar{p}_1, \bar{\vartheta}_1, \bar{E}_2, \bar{p}_2, \bar{\vartheta}_2$ — энергии, импульсы и полярные углы определённых вторичных частиц (которые мы обозначаем индексами 1, 2, ...) в \mathcal{U} -системе;

$E, p, \vartheta; E_1, p_1, \vartheta_1; E_2, p_2, \vartheta_2$ — те же величины в \mathcal{L} -системе;

M, m, m_1, m_2 — массы первичной и вторичных частиц;

$\bar{\beta}_0, \bar{\beta}, \bar{\beta}_1$ — скорости первичной и вторичных частиц в \mathcal{U} -системе;

β_0, β, β_1 — скорости первичной и вторичных частиц в \mathcal{L} -системе;

V — скорость \mathcal{U} -системы относительно \mathcal{L} -системы**);

*) Кинематическое рассмотрение процессов распада и столкновений имеет много общих сторон. Поэтому, хотя исследование столкновений и не входит в нашу задачу, мы проводим вычисления в форме, позволяющей применить их к решению этой проблемы.

**) За единицу скорости принята скорость света.

по симметрии

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}};$$

$\bar{N}(\bar{p}, \cos \bar{\vartheta}) d\bar{p} d\cos \bar{\vartheta} d\bar{\varphi}$ — число вторичных частиц, обладающих импульсом, заключённым в интервале $\bar{p}, \bar{p} + d\bar{p}$, и вылетающих в направлении с азимутальным и полярным углами, заключёнными соответственно между $\bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi} + d\bar{\varphi}$ и $\arccos \bar{\vartheta}$ и $\arccos(\bar{\vartheta} + d\cos \bar{\vartheta})$.

Так как в последующем анализируются задачи, которые характеризуются осевой симметрией, то функция $\bar{N}(\bar{p}, \cos \bar{\vartheta})$ не зависит от азимутального угла $\bar{\varphi}$; $N(p, \cos \vartheta)$ определяется аналогично функции $\bar{N}(\bar{p}, \cos \bar{\vartheta})$.

1. ОБЩАЯ СХЕМА КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

ОТ η -СИСТЕМЫ К λ -СИСТЕМЕ

Особенностью релятивистских преобразований углов ϑ , под которыми движутся вторичные частицы*), от одной системы координат к другой является независимость их от динамических свойств частиц (например, массы).

Как известно (см., например, ⁴),

$$\operatorname{tg} \bar{\vartheta} = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta - \frac{V}{\beta}}, \quad (1)$$

и, обратно,

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \bar{\vartheta}}{\cos \bar{\vartheta} + \frac{V}{\bar{\beta}}}. \quad (2)$$

Воспользовавшись соотношениями

$$\bar{\beta} = \frac{\bar{p}}{E} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{p}{E},$$

уравнения (1) и (2) можно записать в следующей форме:

$$\operatorname{tg} \bar{\vartheta} = \frac{1}{\gamma} \frac{p \sin \vartheta}{p \cos \vartheta - VE}, \quad (1a)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{\gamma} \frac{\bar{p} \sin \bar{\vartheta}}{p \cos \bar{\vartheta} + V\bar{E}}. \quad (2a)$$

Так как

$$\bar{p} \sin \bar{\vartheta} = p \sin \vartheta \quad (3)$$

*) Вторичными называются все частицы после акта столкновения или распада и ими обусловленные (т. е. вновь возникшие частицы, δ -нуклоны, а также первичная частица).

и

$$\bar{p} \cos \bar{\vartheta} = \gamma [p \cos \vartheta - VE] *, \quad (4)$$

$$p \cos \vartheta = \gamma [\bar{p} \cos \bar{\vartheta} + V\bar{E}], \quad (5)$$

то

$$\bar{p} = \gamma \sqrt{[E - pV \cos \vartheta]^2 - \frac{\mu^2}{\gamma^2}}, \quad (6)$$

$$p = \gamma \sqrt{[\bar{E} + \bar{p}V \cos \bar{\vartheta}]^2 - \frac{\mu^2}{\gamma^2}}. \quad (7)$$

При переходе от одной системы координат к другой функции распределения по импульсам и углам преобразуются следующим образом:

$$\bar{N}(\bar{p}, \cos \bar{\vartheta}) d\bar{p} d\cos \bar{\vartheta} d\bar{\varphi} = N(p, \cos \vartheta) J dp d\cos \vartheta d\varphi, \quad (8)$$

где якобиан

$$J = \frac{\partial \bar{p}}{\partial p} \frac{\partial \cos \bar{\vartheta}}{\partial \cos \vartheta} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \cos \vartheta} \frac{\partial \cos \bar{\vartheta}}{\partial p}$$

можно получить, используя (1а), (6) и равенство $d\bar{\varphi} = d\varphi$:

$$J = \frac{p^2 \gamma}{p^2 E} (E - pV \cos \vartheta) = \frac{p^2}{\gamma E} \frac{(E - pV \cos \vartheta)}{(E - pV \cos \vartheta)^2 - \frac{\mu^2}{\gamma^2}}. \quad (9)$$

В полярной системе координат $(\bar{p}, \bar{\vartheta})$ область, в которой заключены величины \bar{p} , $\bar{\vartheta}$ для каждого данного процесса, ограничивается кривыми

$$\bar{p} = \bar{p}_{\max} = \Phi_1(\bar{\vartheta}) \quad (10a)$$

и

$$\bar{p} = \bar{p}_{\min} = \Phi_2(\bar{\vartheta}), \quad (10б)$$

где Φ_1 , Φ_2 — некоторые функции, определяемые конкретными физическими процессами и законами сохранения.

Так, при распаде на три частицы импульсы вторичных частиц могут принимать любые значения от 0 до \bar{p}_{\max} , определяемого величинами M , μ_1 , μ_2 , μ_3 (см. уравнение (54)). Например, в случае

*) В статье ⁵ ошибочно формула (4) была записана в форме

$$\bar{p} \cos \bar{\vartheta} = \pm \gamma [p \cos \vartheta - VE].$$

Наличие двух знаков приводит к неоднозначности лоренцовского преобразования импульсов, что уже само по себе свидетельствует против наличия двух знаков.

распада μ -мезона на электрон и два нейтрино импульс $\bar{p}_{\text{макс}} \sim \frac{M}{2}$.

При распаде на две частицы их импульсы в $\bar{\mu}$ -системе могут принимать строго определённые значения, зависящие только от значений M , μ_1 , μ_2 (см. (29)).

Подставляя в (10) значения величин $\bar{\vartheta}$, \bar{p} , определённые в соответствии с (1) и (6), получаем следующие уравнения, описывающие кривые, которые ограничивают области в системе координат p , ϑ :

$$\gamma \sqrt{(E - pV \cos \vartheta)^2 - \frac{\mu^2}{\gamma^2}} = \Phi_1 \left[\arctg \frac{1}{\gamma} \left(\frac{p \sin \vartheta}{p \cos \vartheta - VE} \right) \right], \quad (11a)$$

$$\gamma \sqrt{(E - pV \cos \vartheta)^2 - \frac{\mu^2}{\gamma^2}} = \Phi_2 \left[\arctg \frac{1}{\gamma} \left(\frac{p \sin \vartheta}{p \cos \vartheta - VE} \right) \right]. \quad (11b)$$

Уравнения (11a) и (11b) на практике сильно упрощаются, так как при распаде $\Phi_1 = \bar{p}_{\text{макс}} = \text{const}$; в случае распада на две частицы $\Phi_1 = \Phi_2$; при распаде на три частицы $\Phi_2 = 0$.

В этих случаях кривая, соответствующая (11a), описывается уравнением второго порядка. Исследование показывает, что эта кривая всегда является эллипсом. Таким образом, если в системе координат $(\bar{p}, \bar{\vartheta})$ кривая, ограничивающая некоторую область, является окружностью, то преобразование в систему координат (p, ϑ) трансформирует её в эллипс.

Большая ось этого эллипса лежит на прямой, являющейся продолжением вектора скорости V , и равна $2p\gamma$; малая ось равна $2\bar{p}$; центр располагается от начала координат на расстоянии $\bar{E}V\gamma^*$.

Разрешая уравнение (11a) относительно p , получим:

$$p = \frac{\bar{E}V \cos \vartheta \pm \sqrt{\mu^2 \gamma^2 V^2 \cos^2 \vartheta - \mu^2 \gamma^2 + E^2}}{\gamma(1 - V^2 \cos^2 \vartheta)}. \quad (12)$$

Знак перед радикалом в формуле (12) выбирается следующим образом.

1. Если выражение под радикалом всегда положительно, то следует выбрать знак «+». Действительно, в данном случае при изменении импульса от 0 до $\bar{p}_{\text{макс}}$ знак перед радикалом не может изменяться, так как функция должна быть непрерывной. Поэтому во всём интервале должен быть либо знак «+», либо знак «-».

Но так как всегда имеются положительные значения p (например, при $\vartheta = 0$), то в данном случае следует выбрать знак «+» для всего интервала $(0 - \bar{p}_{\text{макс}})$. Таким образом, первым крите-

*) Исследование эллипса для случая упругого столкновения проведено в ⁴, общий случай проанализирован Блетоном ⁶.

рием для выбора знака является положительная дефинитность выражения

$$D(\vartheta) = \mu^2 \gamma^2 V^2 \cos^2 \vartheta - \mu^2 \gamma^2 + \bar{E}^2. \quad (13a)$$

Легко показать, что $D(\vartheta) > 0$, если $\bar{\beta} > V$. Следовательно, если скорость частицы $\bar{\beta} > V$, то всегда выбирается знак «+».

2. Если $\bar{\beta} < V$, то при некотором значении $\vartheta = \vartheta_{\text{макс}}$ $D(\vartheta) = 0$ и необходимо учитывать оба знака. Так как при $\vartheta > \vartheta_{\text{макс}}$ имеем $D(\vartheta) < 0$, то $\vartheta_{\text{макс}}$ соответствует максимально возможному значению угла ϑ^* ($2\vartheta_{\text{макс}}$ — угол, под которым виден из начала координат эллипс, описываемый уравнением (11a)).

Из условия $D(\vartheta_{\text{макс}}) = 0$ можно получить

$$\sin \vartheta_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{1 - V^2}{\bar{\beta}^2 - V^2}}. \quad (14)$$

Наличие максимального угла означает, что в этом случае частицы движутся только в пределах передней полусферы.

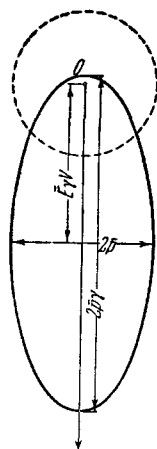


Рис. 1а. Преобразование $(\bar{r}, \bar{\vartheta}) \rightarrow (r, \vartheta)$; $\bar{\beta} < V$, $\bar{E} = 3$; $V = 0.9$. На рис. 1а, 1б, 2а, 2б и 3 используется одинаковый масштаб.

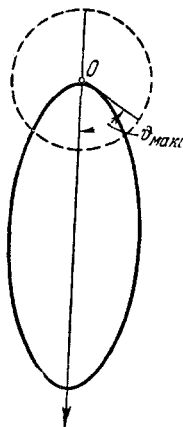


Рис. 1б. Преобразование $(\bar{r}, \bar{\vartheta}) \rightarrow (r, \vartheta)$; $\bar{\beta} > V$; $\bar{E} = 2$; $V = 0.9$.

На рис. 1а изображена схема трансформации окружностей $\bar{r} = \text{const}$ при лоренцовском преобразовании для случая $\bar{\beta} < V$. Между радиусами-векторами окружности и эллипса имеется взаим-

*) Существование максимального угла $\vartheta_{\text{макс}}$ при условии $\bar{\beta} < V$ было отмечено в ряде работ ^{5, 6, 7}.

но однозначное соответствие. Эллиптическая кривая вычислялась по формуле (12) при следующих значениях параметров: $\mu=1$; $E=3$; $V=0,9$. Случай, когда максимально возможная энергия частиц в \mathcal{L} -системе численно равна утроенной её массе, может осуществиться при распаде одного из типов χ -частиц по схеме

$$\chi \rightarrow \mu + \nu + \nu \quad (15)$$

(μ — μ -мезон; ν — нейтрино).

Для этого необходимо (поскольку $\mu_\nu = 0$), чтобы масса χ -частицы $M_\chi = 5,7 \mu_\mu$ (см. формулу (54)). Характерной особенностью описанного преобразования является отсутствие запрещённых углов в \mathcal{L} -системе.

На рис. 16 представлена схема трансформации окружности для случая $\bar{\beta} > V$. Эллипс определяется величинами: $\mu=1$; $E=2$; $V=0,9$. Максимально возможная в \mathcal{L} -системе энергия μ -мезона будет численно равна удвоенному значению его массы, если осуществляется следующая схема распада:

$$\chi \rightarrow \mu + \nu + \pi^0 \quad (16)$$

и массы частиц равны: $M_\chi = 4,2$; $\mu_{\pi^0} = 1,3$. $\vartheta_{\text{макс}}$ — максимально допустимый угол вылета μ -мезона для этой схемы распада и данного значения скорости.

Описанный метод преобразований целесообразно использовать для получения угловых и энергетических зависимостей в \mathcal{L} -системе (см. § 3).

Другая форма анализа была использована Братом, Капланом и Петерсом⁵, применившими смешанную систему координат (p, ϑ) . Для того чтобы вычислить в этом случае якобиан, воспользуемся формулой (2а), из которой следует

$$\cos \bar{\vartheta} = \frac{-E V \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta \pm \sqrt{p^2 + [p^2 - V^2 E^2] \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta}}{p [\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta + 1]}. \quad (17)$$

Знак в формуле (17) выбирается из соображений, аналогичных приведённым ранее (см. стр. 409):

1. Если выражение, стоящее под радикалом, всегда положительно, то следует выбрать знак «+» во всём интервале изменения угла ϑ $[0 - \pi]$.

Критерием для выбора знака является положительная дефинитность выражения

$$f(\vartheta) = \bar{p}^2 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta [\bar{p}^2 - V^2 E^2], \quad (136)$$

что также имеет место при условии $\bar{\beta} > V$.

2. Если $\bar{\beta} < V$, то всегда имеется максимально допустимый угол $\vartheta_{\text{макс}} < \pi$. (Ясно, что $\bar{\vartheta}$ может и в этом случае принимать любые значения от 0 до π .) Из соображений непрерывности сле-

дует, что в интервалах $0 < \bar{\vartheta} < \vartheta_{\text{макс}}$ и $\bar{\vartheta}_{\text{макс}} < \bar{\vartheta} < \pi$ ($\bar{\vartheta}_{\text{макс}}$ — угол, соответствующий $\vartheta_{\text{макс}}$) перед радикалом выбирается постоянный знак. Так как при значении $\vartheta = 0 \cos 0 = 1 > 0$, то во всём интервале $0 < \bar{\vartheta} < \bar{\vartheta}_{\text{макс}}$ следует выбирать знак «+»; аналогично в интервале $\bar{\vartheta}_{\text{макс}} < \bar{\vartheta} < \pi$ выбирается знак «-».

Используя условие $f[\vartheta(\bar{\vartheta})] = 0$ можно написать:

$$\cos \bar{\vartheta}_{\text{макс}} = -\frac{\bar{\beta}}{V}. \quad (18)$$

$\bar{\vartheta}_{\text{макс}}$ — угол в φ -системе, соответствующий максимально возможному углу $\vartheta_{\text{макс}}$ в λ -системе. В λ -системе угол $\vartheta_{\text{макс}}$ определяется формулой (14).

Таким образом, если $\bar{\beta} < V$, то при $\bar{\vartheta} < \bar{\vartheta}_{\text{макс}}$ выбирается знак «+», а при $\bar{\vartheta} > \bar{\vartheta}_{\text{макс}}$ — знак «-».

В данном случае окружность, соответствующая в системе координат $(\bar{p}, \bar{\vartheta})$ уравнению $\bar{p} = \text{const}$, трансформируется в системе (\bar{p}, ϑ) либо в окружность ($\bar{\beta} > V$), либо в сектор ($\bar{\beta} < V$).

Из (16) можно вычислить $J_1 = \frac{\partial \cos \bar{\vartheta}}{\partial \cos \vartheta} \Big|_{\bar{p} = \text{const}}$

$$J_1 = \frac{\pm \gamma^2 [V\bar{E} \pm V\sqrt{\bar{p}^2 + \gamma^2 \text{tg}^2 \vartheta (\bar{p}^2 - V^2 \bar{E}^2)}]^2}{\bar{p} \cos^3 \vartheta (\gamma^2 \text{tg}^2 \vartheta + 1)^2 V \sqrt{\bar{p}^2 + \gamma^2 \text{tg}^2 \vartheta (\bar{p}^2 - V^2 \bar{E}^2)}}; \quad (19)$$

знак «+» выбирается, если $\bar{\beta} > V$ или если $\bar{\beta} < V$ и $0 < \bar{\vartheta} < \bar{\vartheta}_{\text{макс}}$; знак «-», если $\bar{\beta} < V$ и $\bar{\vartheta}_{\text{макс}} < \bar{\vartheta} < \pi$.

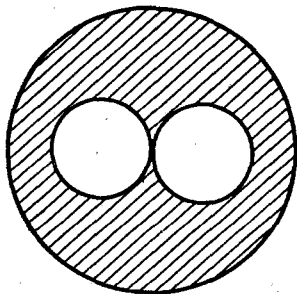


Рис. 2а. Преобразование $(\bar{p}, \bar{\vartheta}) \rightarrow (\bar{p}, \vartheta)$; $\bar{\beta}_{\text{макс}} > V$;
 $\bar{E} = 3$; $V = 0,9$.

На рис. 2а представлено преобразование области, ограниченной в φ -системе уравнениями $\bar{p}_{\text{макс}} = \text{const}$; $\bar{p}_{\text{мин}} = 0$ для случая $\bar{\beta}_{\text{макс}} > V$. Поскольку импульс не преобразуется, постольку, естественно,

окружность $\bar{p}_{\text{макс}} = \text{const}$ не изменяется. Однако для малых импульсов в соответствии с формулой (14) появляются запрещённые области, расположенные внутри двух соприкасающихся окружностей. Заштрихованная область соответствует разрешённым значениям импульсов и углов в \mathcal{L} -системе. На рис. 26 представлено преобразование аналогичной области, если $\bar{p}_{\text{макс}} < V$.

В том случае, если импульс в \mathcal{L} -системе имеет строго определённое значение (например, при распаде на две частицы), то при $\bar{p} > V$ окружность $\bar{p} = \text{const}$ переходит в дугу. На рис. 2 выбран тот же масштаб и значения параметров, что и на рис. 1.

Указанный метод Брадт и др.³ использовали для вычисления угловых распределений в \mathcal{L} -системе при различных частных предположениях о характере распределений в \mathcal{L} -системе.

В отдельных случаях для получения импульсного распределения удобно решать $\bar{p}_{\text{макс}} < V$; $\bar{E}=2$; $V=0.9$ задачи в системе $(\bar{p}, \bar{\vartheta})$. Для того чтобы получить якобиан J_2 , соответствующий преобразованию из системы $(\bar{p}, \bar{\vartheta})$ в систему (p, ϑ) , необходимо вычислить явное выражение $\bar{p}(p, \bar{\vartheta})$.

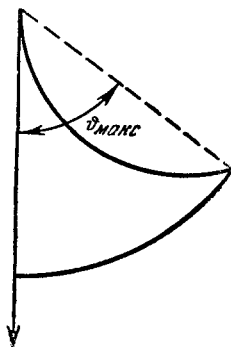


Рис. 26. Преобразование $(\bar{p}, \bar{\vartheta}) \rightarrow (p, \vartheta)$; $\bar{p}_{\text{макс}} < V$; $\bar{E}=2$; $V=0.9$

Воспользовавшись формулой (12), получаем:

$$J_2 = \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial p} \right|_{\bar{\vartheta} = \text{const}} = \frac{p}{\gamma(1 - V^2 \cos^2 \bar{\vartheta})} \left[\frac{1}{\sqrt{p^2 - \gamma^2 V^2 \mu^2 \sin^2 \bar{\vartheta}}} - \frac{V \cos \bar{\vartheta}}{\sqrt{p^2 + \kappa^2}} \right]. \quad (20)$$

Интервалы изменений величины $p(\bar{\vartheta})$ легко определить из уравнений

$$p_{\text{мин}} = \gamma \sqrt{(\bar{E}_{\text{мин}} + \bar{p}_{\text{мин}} V \cos \bar{\vartheta})^2 - \frac{\kappa^2}{\gamma^2}} \quad (21a)$$

и

$$p_{\text{макс}} = \gamma \sqrt{(\bar{E}_{\text{макс}} + \bar{p}_{\text{макс}} V \cos \bar{\vartheta})^2 - \frac{\kappa^2}{\gamma^2}}. \quad (21b)$$

Особенно простую форму принимают величины $p_{\text{мин}}$ и $p_{\text{макс}}$ в интересующем нас случае, когда $\bar{p}_{\text{мин}} = 0$, $\bar{p}_{\text{макс}} = \text{const}$.

Трансформация области при преобразовании $(\bar{p}, \bar{\vartheta}) \rightarrow (p, \vartheta)$ схематически изображена на рис. 3.

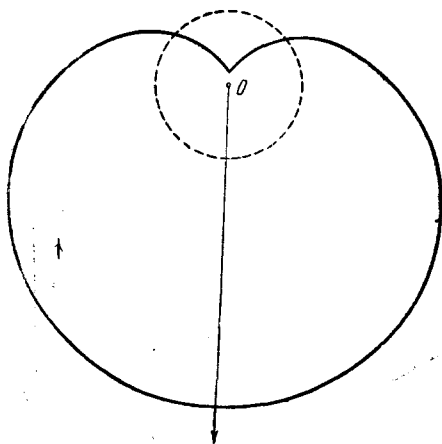


Рис. 3. Преобразование $(\bar{p}, \bar{\vartheta}) \rightarrow (p, \vartheta)$; $E=3$, $V=0,9$.

Необходимо подчеркнуть, что в крайнем релятивистском случае основные приведённые выше формулы (1а), (2а), (6), (7), (9), (16), (17), (19) и (20) существенно упрощаются.

Если

$$|\cos \vartheta - V| \gg \frac{\mu^2}{p^2},$$

то

$$\operatorname{tg} \bar{\vartheta} \sim \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta - V}, \quad (16)$$

а если

$$|\cos \vartheta - V| \gg \frac{\mu^2}{p^2},$$

то

$$\operatorname{tg} \vartheta \sim \frac{1}{\gamma} \operatorname{tg} \frac{\bar{\vartheta}}{2}. \quad (26)$$

При

$$p \gg \mu, \quad \gamma \gg 1$$

$$\bar{p} \sim \gamma (E - pV \cos \vartheta). \quad (6a)$$

Если дополнительно

$$1 - \cos \vartheta \gg \frac{\mu^2}{p^2},$$

то

$$\bar{p} \sim \gamma p (1 - V \cos \vartheta) \sim \gamma E (1 - V \cos \vartheta). \quad (66)$$

Аналогично при

$$\begin{aligned} \bar{p} &\gg \mu, \quad \gamma \gg 1 \\ p &\sim \gamma (\bar{E} + \bar{p} V \cos \bar{\vartheta}). \end{aligned} \quad (7a)$$

Если, кроме того,

$$1 + \cos \bar{\vartheta} \gg \frac{\mu^2}{p^2},$$

то

$$p \sim \gamma \bar{p} (1 + \cos \bar{\vartheta}) \sim \gamma \bar{E} (1 + \cos \bar{\vartheta}). \quad (76)$$

Если

$$p \gg \mu, \quad \gamma \gg 1,$$

то

$$J \sim \frac{1}{\gamma (E - p V \cos \vartheta)}. \quad (9a)$$

При дополнительном условии

$$\begin{aligned} 1 - \cos \vartheta &\gg \frac{\mu^2}{p^2} \\ J &\sim \frac{1}{\gamma (1 - V \cos \vartheta)}. \end{aligned} \quad (96)$$

Если

$$\gamma \gg 1 \text{ и } \vartheta \gtrsim 1,$$

то

$$\cos \bar{\vartheta} \sim \frac{-V \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \bar{\vartheta} + 1}{\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \bar{\vartheta} + 1} \quad (16a)$$

и

$$J_1 \sim \frac{\pm \gamma^2 (V \pm 1)^2}{\cos^3 \bar{\vartheta} (\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \bar{\vartheta} + 1)^2}. \quad (18a)$$

Если дополнительно

$$\vartheta \ll \frac{1}{\gamma},$$

то

$$\cos \bar{\vartheta} \sim 1 - 2 \gamma^2 \vartheta^2 \quad (166)$$

и

$$J_1 \sim 4 \gamma^2 (1 - \gamma^2 \vartheta^2). \quad (186)$$

Если

$$p \gg \gamma \mu,$$

то

$$J_2 \sim \frac{1}{\gamma (1 + V \cos \vartheta)}. \quad (20a)$$

В заключение этого раздела следует отметить, что все выведенные до сих пор соотношения описывали преобразования им-

пульсов и углов для двух любых систем координат. Однако в том случае, когда рассматривается переход от \mathcal{C} -системы к \mathcal{L} -системе, формулы существенно упрощаются, так как в этом случае коэффициент преобразования γ непосредственно выражается через важнейшую характеристику интересующих нас процессов (распад, столкновение одинаковых частиц) — энергию первичной частицы.

Действительно, в случае распада

$$\gamma = \frac{E_0}{M}. \quad (22)$$

При столкновении двух одинаковых частиц выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 2\bar{E}_0 \gamma &= E_0 + M, \\ 2E_0 \gamma V &= p_0 \end{aligned} \quad (23)$$

и, следовательно,

$$\gamma = \sqrt{\frac{E_0 + M}{2M}} = \frac{\bar{E}_0}{M}. \quad (24)$$

2. РАСПАД НА ДВЕ ЧАСТИЦЫ

Наиболее важной особенностью распада на две частицы является независимость кинематических характеристик процесса от типа взаимодействия, обуславливающего распад. При распаде на две частицы они определяются только величинами масс первичной и вторичных частиц и двумя параметрами, не зависящими от типа взаимодействия (например, импульсом первичной и углом вылета вторичной частицы в \mathcal{C} -системе). Необходимо подчеркнуть, что указанная особенность принадлежит значительно более широкому классу явлений, чем распад на две частицы. Действительно, как это следует из дальнейшего, она имеет место при любых превращениях, в результате которых в конечном состоянии имеются только две частицы (например, при соударениях двух частиц).

При экспериментальном изучении распада на две частицы обычно возникают следующие задачи:

установление критерия, которому должны подчиняться наблюдаемые при помощи фотоэмульсии или камеры Вильсона случаи, если они действительно обусловлены распадом;

определение массы первичной частицы, если известны массы и импульсы обеих вторичных частиц;

определение массы одной из вторичных частиц, если известны массы и импульсы первичной и другой из вторичных частиц;

исследование угловых и энергетических распределений.

а) Исследование критерия правильности интерпретации различных случаев как следствия распада

В настоящее время отсутствуют методы, которые позволили бы при анализе распадных процессов однозначно показать, что данный индивидуальный случай следует интерпретировать как распад. При рассмотрении отдельных случаев обычно стремятся доказать, что их нельзя приписать другим известным процессам (упругие или неупругие взаимодействия разных типов).

Вследствие отмеченного обстоятельства исследование существования распадных процессов основывается обычно на статистическом подходе. Вначале при помощи небольшого числа случаев, которые интерпретируются как распад, приблизительно определяются основные динамические характеристики распада (тип распада, массы первичной и вторичных частиц). Затем для анализа большой совокупности случаев распада по предполагаемой схеме используются полученные ранее приближенные значения характеристик. Согласие наблюдаемых особенностей исследуемой совокупности случаев с выводами, которые следуют из предполагаемой схемы распада, подтверждает её правильность. Естественно, что при таком статистическом подходе нельзя избежать ошибочного включения в исследуемую совокупность некоторого количества случаев, не относящихся к ней и не сказывающихся на общей картине.

Разумеется, описанный метод применяют не только для проверки факта наличия распада, но и для контроля правильности выбранной схемы распада.

В этом разделе мы применим статистический подход к анализу распада на две частицы. При этом естественно предполагается, что массы первичной и вторичных частиц и тип распада являются заданными *).

Для дальнейшего целесообразно иметь в виду два типа распада на две частицы: один из них, который мы назовём *H*-распадом, представляет собой превращение нейтральной частицы в две заряженные; второй тип (*З*-распад) соответствует распаду заряженной частицы на одну заряженную и одну нейтральную частицы (рис. 4).

Переходя к исследованию тех или иных распадных процессов, мы обратимся вначале к простейшему случаю — распаду остановившейся частицы.

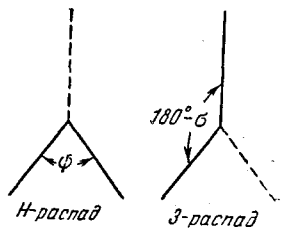


Рис. 4. Схемы распада нейтральной (*H*-) и заряженной (*З*-) частиц.

*) Некоторые методы определения масс частиц, участвующих в распаде, приводятся ниже.

В этом случае можно написать следующие уравнения:

$$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 = M = \bar{E}_0. \quad (25a)$$

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{p}_c. \quad (25b)$$

Используя соотношения

$$\bar{E}_1 = \sqrt{\bar{p}_1^2 + \mu_1^2} \quad \text{и} \quad \bar{E}_2 = \sqrt{\bar{p}_2^2 + \mu_2^2},$$

легко получить:

$$\bar{E}_1 = \frac{M^2 + \mu_1^2 - \mu_2^2}{2M}, \quad (26a)$$

$$\bar{E}_2 = \frac{M^2 - \mu_1^2 + \mu_2^2}{2M}. \quad (26b)$$

Из формул (26) следует, что при распаде остановившейся частицы на две — вторичные частицы обладают постоянной энергией, а следовательно, и пробегом. Таким образом, существование изломов с постоянной величиной отрезка от точки излома до конца следа (*З*-распад) или наличие характерных «вилки» с постоянными величинами обеих ветвей (*Н*-распад) определённо свидетельствует в пользу распада остановившихся частиц. Именно это обстоятельство послужило первым основанием для утверждения наличия (π - μ)-распада (см. ⁸).

Более сложным является исследование распада движущихся частиц. Основанием для одного из способов проверки является инвариантность поперечных компонент импульсов \bar{p}_T относительно преобразования Лоренца.

Действительно, так как вторичные частицы движутся в *ц*-системе изотропно с одним и тем же импульсом \bar{p}_c , то вероятность вылета частицы в интервале $\cos \bar{\vartheta}, \cos \bar{\vartheta} + d \cos \bar{\vartheta}$

$$\bar{N}(\bar{p}, \cos \bar{\vartheta}) d\bar{p} d \cos \bar{\vartheta} = \frac{1}{2} \delta(p - \bar{p}_c) \sin \bar{\vartheta} d\bar{\vartheta} d\bar{p} \quad (27)$$

(δ — дельта-функция Дирака).

Так как

$$\sin \bar{\vartheta} = \frac{\bar{p}_T}{\bar{p}_c},$$

то ⁹

$$N(\bar{p}_T) d\bar{p}_T \sim \frac{\bar{p}_T}{\bar{p}_c \sqrt{(\bar{p}_c^2 - \bar{p}_T^2)}} d\bar{p}_T, \quad (28)$$

где в соответствии с (25а, б) и (26а, б)

$$\bar{p}_c = \frac{\sqrt{M^4 + \mu_1^4 + \mu_2^4 - 2(M^2\mu_1^2 + M^2\mu_2^2 + \mu_1^2\mu_2^2)}}{2M}. \quad (29)$$

Таким образом, если исследуемая совокупность случаев обусловливается распадом на две частицы, то распределение поперечных компонент импульсов подчиняется соотношению (28).

Другой метод анализа распада на две частицы базируется на существовании экстремальных значений углов вылета частиц в \mathcal{L} -системе. Вообще говоря, экстремальные значения углов ϑ определяются двумя параметрами (например, величинами импульса p_0 первичной частицы в \mathcal{L} -системе и импульса вторичной частицы \bar{p}_1 в \mathcal{U} -системе). Однако при распаде на две частицы импульс \bar{p}_1 полностью определяется значением масс (см. (29)). Поэтому можно вычислить функциональную зависимость $\vartheta_{\text{экстр}}(p_0)$ и, следовательно, определить и пределы, в которых должны заключаться углы вылета вторичных частиц, образованных при распаде частицы с импульсом p_0 .

Один из вариантов этого метода, который применим к анализу обоих типов распада, основан на использовании формулы (14).

Подставляя в (14) значения $\bar{\beta} =$

$$= \frac{\bar{p}_c}{\sqrt{\bar{p}_c^2 + c^2}} \text{ и } V = \frac{p_0}{p_0^2 + M^2},$$

получаем:

$$\vartheta_{\text{макс}} = \arctg \frac{\bar{p}_c M}{\sqrt{p_0^2 c^2 - \bar{p}_c^2 M^2}}, \quad (30)$$

если

$$p_0^2 c^2 > \bar{p}_c^2 M^2,$$

и

$$\vartheta_{\text{макс}} = \frac{\pi}{2},$$

если

$$p_0^2 c^2 < \bar{p}_c^2 M^2$$

(\bar{p}_c находится из (29)).

Следовательно, при распаде частицы с массой M и импульсом p_0 на две вторичные частицы с массой μ_1 не может отклониться на угол, больший чем $\vartheta_{\text{макс}}$, определённый (30). На рис. 5 приведена зависимость $\vartheta_{\text{макс}}(p_0)$ для случая распада нейтральной частицы с массой $1000m_e$ на два π -мезона с массой $280m_e$.

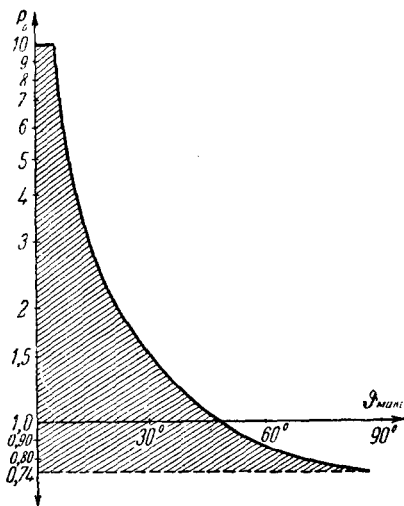


Рис. 5. Зависимость $\vartheta_{\text{макс}}(p_0)$ для случая распада мезона с массой $1000m_e$ на два π -мезона ($m_\pi = 280m_e$).

Заштрихованная область соответствует разрешённым углам. На этом рисунке, так же как и на всех последующих, за единицу импульса принята величина, равная $2000m_e$.

Другой метод использования экстремальных значений углов применим только к H -распаду и заключается в нахождении функциональной зависимости $\psi_{\text{экстр}}(p_0)$ (см. рис. 4).

Дело в том, что при определённых численных значениях параметров угол между направлениями вторичных частиц заключён в определённых интервалах. Поэтому если в большом числе случаев этот угол лежит в вычисленных пределах, то это является важным дополнительным доказательством того, что исследуемая совокупность обусловлена распадом определённого типа.

В соответствии с (2а) можно написать:

$$\psi = \vartheta_1 + \vartheta_2 = \arctg \frac{1}{\gamma} \frac{\bar{p}_1 \sin \bar{\vartheta}_1}{\bar{p}_1 \cos \bar{\vartheta}_1 + VE_1} + \arctg \frac{1}{\gamma} \frac{\bar{p}_2 \sin \bar{\vartheta}_2}{\bar{p}_2 \cos \bar{\vartheta}_2 + VE_2}. \quad (31)$$

Имея в виду, что $\bar{\vartheta}_2 = \pi - \bar{\vartheta}_1$, и ограничиваясь для простоты анализом случая, когда $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, можно переписать (31) в следующей форме:

$$\psi = \arctg \frac{1}{\gamma} \frac{\bar{p}_c \sin \bar{\vartheta}}{\bar{p}_c \cos \bar{\vartheta} + VE_c} + \arctg \frac{1}{\gamma} \frac{\bar{p}_c \sin \bar{\vartheta}}{VE_c - \bar{p}_c \cos \bar{\vartheta}}, \quad (32)$$

где согласно (29) $\bar{p}_c = \sqrt{\frac{M^2 - 4\mu^2}{4}}$.

Функция $\psi(\cos \bar{\vartheta})$ имеет экстремальные значения при $\cos \bar{\vartheta} = 0$ (максимум), а также при

$$\cos^2 \bar{\vartheta} = \frac{p_0^2 M^2 - 8p_0^2 \mu^2 + M^4 - 4\mu^2 M^2}{p_0^2 (M^2 - 4\mu^2)}. \quad (33)$$

В зависимости от знака выражения $M^2 - 8\mu^2$ уравнение (33), определяющее минимальное значение $\psi_{\text{мин}}$, имеет решения в действительной области ($0 < \cos^2 \bar{\vartheta} < 1$) в разных интервалах изменения p_0 :

$$a) M^2 - 8\mu^2 > 0.$$

Уравнение (33) имеет решение при

$$p_0^2 > \frac{M^2 (M^2 - 4\mu^2)}{4\mu^2}.$$

$$b) M^2 - 8\mu^2 < 0.$$

Уравнение (33) имеет решение, если

$$\frac{M^2(M^2 - 4\mu^2)}{4\mu^2} < p_0^2 < \frac{M^2(M^2 - 4\mu^2)}{8\mu^2 - M^2}.$$

На рис. 6 представлены кривые $\varphi_{\text{макс}}(p_0)$ для случая H -распада частиц с массой $1000m_e$ на два заряженных π -мезона (μ_π принималась равной $280m_e$). Заштрихованная область соответствует

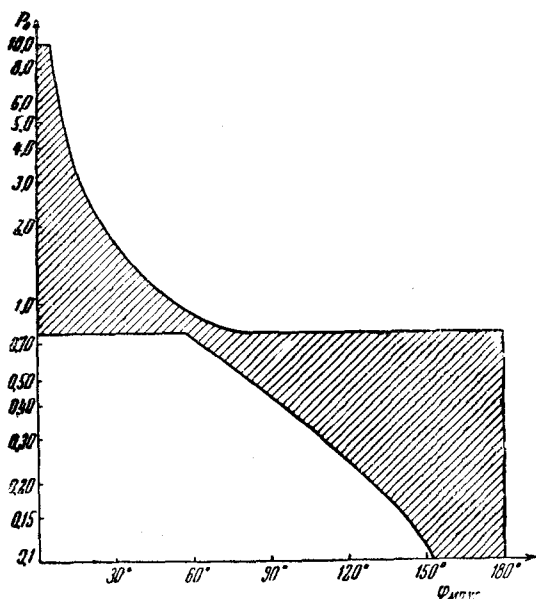


Рис. 6. Зависимость $\varphi_{\text{макс}}(p_0)$ для случая распада мезона с массой $1000m_e$ на два π -мезона.

разрешённым значениям углов φ . Аналогичные кривые были опубликованы в работе Батлера¹⁰, применившего их для анализа схемы распада V^0 -частиц.

В заключение необходимо отметить, что оба метода анализа (методы поперечных компонент импульсов и экстремальных углов) по существу применимы не только к распадным процессам, но также и к другим процессам, в результате которых в конечном состоянии присутствуют две частицы (например, упругое рассеяние).

Однако вероятность ошибочной интерпретации других процессов, как распадных, невелика, поскольку значения масс частиц, возникших вследствие распада, как правило, отличаются от значений масс рассеивающихся частиц.

Следует остановиться ещё на одном критерии (критерии компланарности), который, однако, обладает тем недостатком, что он применим не только к распадным процессам, но и к упругому рассеянию, причём, поскольку в рассмотрение не входят значения масс, его нельзя рекомендовать для доказательства распадного характера процессов. Но если уже установлено, что данная совокупность случаев обуславливается распадом, то метод компланарности может служить критерием для установления числа вторичных частиц, т. е. позволяя решить вопрос о том, сколько частиц образуется при распаде.

Критерий компланарности основан на простом соотношении:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2. \quad (34)$$

Умножая это векторное уравнение скалярно на \mathbf{n} (\mathbf{n} — вектор, нормальный к плоскости, образованной двумя из трёх векторов, например \mathbf{p}_0 и \mathbf{p}_1), получаем $(\mathbf{n}\mathbf{p}_2) = 0$, т. е. третий вектор лежит в той же плоскости.

В заключение этого раздела *) необходимо отметить, что в некоторых частных случаях, например, когда масса одной из вторичных частиц близка к массе первичной частицы, указанные выше методы могут привести к ошибочной интерпретации исследуемых случаев как распада на две частицы, в то время как в действительности в процессах будет участвовать большее число частиц. Более подробно эти особые случаи разобраны в п. 3.

б) Определение массы первичной частицы **)

Из уравнений сохранения

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_0, \quad (34)$$

$$E_1 + E_2 = E_0, \quad (34a)$$

если использовать соотношения

$$E_1 = \sqrt{p_1^2 + \mu_1^2}, \quad E_2 = \sqrt{p_2^2 + \mu_2^2}, \quad (35)$$

получаем:

$$M^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + 2 \{ [(p_1^2 + \mu_1^2)(p_2^2 + \mu_2^2)]^{1/2} - p_1 p_2 \cos \psi \}. \quad (36)$$

*) Методы доказательства распадного характера процессов, основанные на определении значений масс, рассмотрены в следующих двух разделах.

**) В данном и следующем разделах мы рассмотрим кинематические методы определения масс. Различные методы определения масс индивидуальных частиц, основанные на характеристиках их следов, исследованы в ряде работ (см., например, 8).

Если рассматривается распад остановившейся частицы

$$(\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{p}_c \text{ и } \psi = \pi),$$

то формула (36) сильно упрощается:

$$M^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + 2[(\bar{p}_c^2 + \mu_1^2)(\bar{p}_c^2 + \mu_2^2)]^{1/2}. \quad (36a)$$

Уравнение (36) также упрощается, если $p_1 \ll \mu_1$ или $p_2 \ll \mu_2$; тогда член $p_1 p_2 \cos \psi \ll [(\mu_1^2 + p_1^2)(\mu_2^2 + p_2^2)]^{1/2}$, и им можно пренебречь.

в) Определение массы вторичной частицы (3-распад)

Из уравнения (34) следует:

$$M_2^2 = M^2 + \mu_1^2 - 2[(M^2 + p_0^2)(\mu_1^2 + p_1^2)]^{1/2} - p_0 p_1 \cos \vartheta. \quad (37)$$

Так же как и ранее, если $p_0 \ll M$ или $p_1 \ll \mu_1$, то членом $p_0 p_1 \cos \vartheta$ можно пренебречь. В частности, если распадаются остановившиеся частицы, то

$$\mu_2^2 = M^2 + \mu_1^2 - 2M\bar{E}_1. \quad (37a)$$

Для иллюстрации можно определить массу нейтральной частицы, образованной при $(\pi-\mu)$ -распаде.

Используя значения масс $M = \mu_\pi = 280m_e$; $\mu_1 = \mu_\mu = 210m_e$ и $\bar{E}_1 = 218,3m_e$ ($E_{1\text{кин}} = 8,3m_e$), получаем, что $\mu_2 \sim 15m_e$. Так как в данном случае $\frac{\delta\mu_2}{\delta M} \sim \frac{M - E_1}{\mu_2} \gg 1$, то значение μ_2 очень сильно зависит от значений M и μ_1 . Так, если положить $m_\pi = 278m_e$, то $\mu_2 \sim 3m_e$. Поэтому естественно принять, что $\mu_2 = 0$. Такое значение вполне согласуется в пределах ошибок опыта с экспериментальными значениями μ_π и μ_μ .

Иногда возникает задача об определении энергии первичной частицы по известным значениям энергии одной из вторичных частиц E_1 и угла её вылета ϑ . Эта задача и её решение были подробно рассмотрены Д. В. Скобельцыным⁷.

Для её решения можно воспользоваться соотношением (25a). В соответствии с (6) это уравнение можно записать в следующем виде:

$$M = \gamma \left\{ (E_1 - p_1 V \cos \vartheta) + \sqrt{(E_1 - p_1 V \cos \vartheta)^2 - (\mu_1^2 - \mu_2^2)(1 - V^2)} \right\}. \quad (38)$$

В частности, если $\mu_2 = 0$, то

$$M = \bar{E}_1 + |\bar{p}_1|. \quad (39)$$

В этом случае, если $\cos \vartheta = \pm 1$, то

$$M = \gamma \{E_1 \mp p_1 V + |p_1 \mp E_1 V|\}. \quad (39a)$$

Если $\cos \vartheta = 1$, то в зависимости от знака выражения $p_1 + E_1 V$ формулу (39a) можно переписать следующим образом:

$$M = \sqrt{\frac{1-V}{1+V}} [E_1 + p_1], \quad (40)$$

$$\frac{p_1}{E_1} > V,$$

$$M = \sqrt{\frac{1+V}{1-V}} [E_1 - p_1]. \quad (40a)$$

Если $\cos \vartheta = -1$, то всегда

$$M = \sqrt{\frac{1+V}{1-V}} [E_1 + p_1]. \quad (40b)$$

Формулы (40) были получены ранее⁷.

Необходимо отметить, что (36), (37) и (39) можно использовать для проверки предположений о наличии распада с вылетом частиц, если известны массы μ_1 и μ_2 (уравнения (36) и (39)) или известны массы M и μ_1 (уравнение (37)). Действительно, тогда правая часть уравнений (36), (37) и (39) должна быть для всех случаев исследуемой совокупности постоянной.

г) Угловое и энергетическое распределение частиц, образованных при распаде*)

При распаде на две частицы импульс $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{p}_c$ определяется из уравнения (29). Поэтому, используя формулы, полученные в предыдущем разделе, можно получить общие выражения для углового и энергетического распределения.

Угловое распределение. В \mathcal{C} -системе угловое распределение вторичных частиц является изотропным; частицы обладают постоянным импульсом. Поэтому вероятность вылета частицы под углом, косинус которого заключён между $\cos \vartheta$ и $\cos \vartheta + d \cos \vartheta$, определяется уравнением (27). Тогда угловое распределение $N(\vartheta) d \cos \vartheta$ определяется интегралом

$$N(\vartheta) d \cos \vartheta = \frac{1}{2} d \cos \vartheta \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \delta[\bar{p}(p) - \bar{p}_c] J dp. \quad (41)$$

*) Мы рассмотрим трансформацию изотропного распределения при постоянном импульсе в общем виде, так как этот простой случай играет важную роль при анализе столкновений (см., например, работу Брадта и др.⁸).

Воспользовавшись формулой

$$\delta [\bar{p}(p) - \bar{p}_c] = \sum_{\kappa} \frac{\delta(p - p_{\kappa})}{\left| \frac{d\bar{p}}{dp} \right|_{p=p_{\kappa}}} \quad (42)$$

(p_{κ} — корни уравнения $\bar{p}(p) = \bar{p}_c$ в интервале, в котором проводится интегрирование) и принимая во внимание уравнения (6), (9) и (12), уравнение (41) можно записать следующим образом:

$$N(\vartheta) d \cos \vartheta = \frac{p_{\kappa}^2 d \cos \vartheta}{2\gamma \bar{p}_c [p_{\kappa} - E_{\kappa} V \cos \vartheta]}, \quad (43a)$$

если $\bar{p} > V$, и

$$N(\vartheta) d \cos \vartheta =$$

$$= \frac{d \cos \vartheta}{2\gamma \bar{p}_c} \left[\frac{p_{\kappa_1}^2}{(p_{\kappa_1} - E_{\kappa_1} V \cos \vartheta)} + \frac{p_{\kappa_2}^2}{(E_{\kappa_2} V \cos \vartheta - p_{\kappa_2})} \right] \quad (p_{\kappa_1} > p_{\kappa_2}), \quad (43b)$$

если $\bar{p} < V$.

Используя правую часть соотношения (12) в качестве решения уравнения $\bar{p}(p) = \bar{p}_c$, получаем:

$$N(\vartheta) d \cos \vartheta = \frac{[E_c V \cos \vartheta + \sqrt{\mu^2 \gamma^2 V^2 \cos^2 \vartheta + \bar{E}_c^2 - \mu^2 \gamma^2}]^2 d \cos \vartheta}{2\bar{p}_c \gamma^2 (1 - V^2 \cos^2 \vartheta)^2 \sqrt{\mu^2 \gamma^2 \cos^2 \vartheta + \bar{E}_c^2 - \mu^2 \gamma^2}}, \quad (44a)$$

если $\bar{p} > V$, ϑ изменяется в интервале $0 - 2\pi$.

Если $\bar{p} < V$, то

$$N(\vartheta) d \cos \vartheta = \frac{[\bar{E}_c^2 V^2 \cos^2 \vartheta + \mu^2 \gamma^2 V^2 \cos^2 \vartheta + \bar{E}_c^2 - \mu^2 \gamma^2] d \cos \vartheta}{p_c \gamma^2 (1 - V^2 \cos^2 \vartheta)^2 \sqrt{\mu^2 \gamma^2 V^2 \cos^2 \vartheta + \bar{E}_c^2 - \mu^2 \gamma^2}}. \quad (44b)$$

В последнем случае ϑ изменяется в интервале $0 - \vartheta_{\text{макс}}$ ($\vartheta_{\text{макс}}$ определяется соотношением (14)). Формулы (44) упрощаются, если $\bar{E}_c \gg \mu\gamma$; в этом случае ¹¹

$$N(\vartheta) d \cos \vartheta = \frac{d \cos \vartheta}{2\gamma^2 (1 - V \cos \vartheta)^2}. \quad (45)$$

Приведённые в этом разделе формулы можно применять, в частности, для анализа распада на две частицы. При этом для определения параметра распределения \bar{p}_c следует воспользоваться фор-

мулой (29). Угловое распределение для частицы с массой μ_1 можно записать в форме

$$\begin{aligned}
 & N(\vartheta) d \cos \vartheta = \\
 & = \frac{\left[(M^2 + \mu_1^2 - \mu_2^2) V \cos \vartheta + \right. \\
 & \quad \left. 2\gamma^2 (1 - V^2 \cos^2 \vartheta)^2 \sqrt{M^4 + \mu_1^4 + \mu_2^4 - 2(M^2 \mu_1^2 + M^2 \mu_2^2 + \mu_1^2 \mu_2^2)} \right. \\
 & \quad \left. \rightarrow \sqrt{4M^2 \mu_1^2 V^2 \gamma^2 \cos^2 \vartheta + (M^2 + \mu_1^2 - \mu_2^2)^2 - 4M^2 \mu_1^2 \gamma^2} \right]^2}{2\gamma^2 (1 - V^2 \cos^2 \vartheta)^2 \sqrt{M^4 + \mu_1^4 + \mu_2^4 - 2(M^2 \mu_1^2 + M^2 \mu_2^2 + \mu_1^2 \mu_2^2)}} \times \\
 & \quad \times \frac{d \cos \vartheta}{\sqrt{4M^2 \mu_1^2 V^2 \gamma^2 \cos^2 \vartheta + (M^2 + \mu_1^2 - \mu_2^2)^2 - 4M^2 \mu_1^2 \gamma^2}}, \quad (46)
 \end{aligned}$$

если $\bar{\beta} > V$, и аналогично для случая $\bar{\beta} < V$. Особенно простую форму принимает формула в случае распада на две релятивистские частицы. Например, при распаде частицы на два фотона (такой

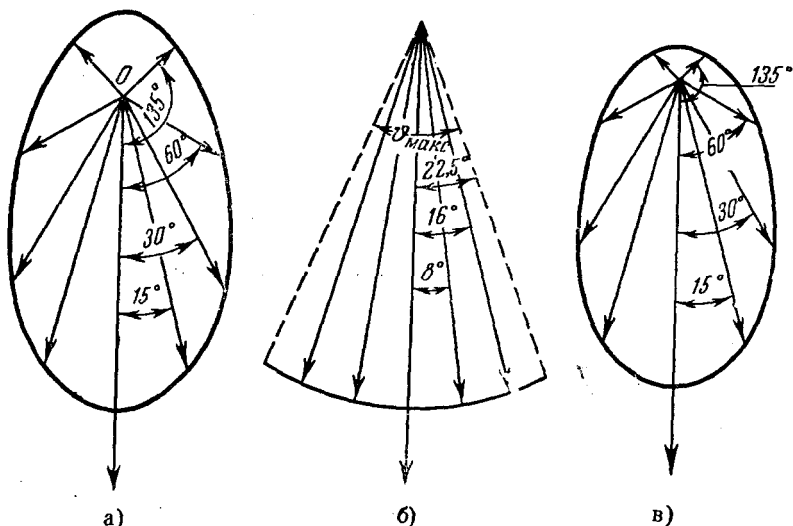


Рис. 7. Зависимости $N(\vartheta)$. а) Для случая распада частицы с массой $1000 m_e$ на два π -мезона; $V=0,6$. б) Для случая распада $V_1^0 \rightarrow p + \pi^-$. $M_{V_1^0} = 2230 m_e$; $\mu_p = 1820 m_e$; $\mu_\pi = 280 m_e$; $V=0,6$. в) Для случая распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$; $V=0,9$.

случай осуществляется при распаде нейтрального π -мезона) следует принять формулу (45).

На рис. 7 представлены угловые распределения $N(\vartheta)$ вторичных частиц для различных случаев распада на две частицы.

Энергетическое распределение. Энергетическое распределение $N(p) dp$ определяется интегралом

$$N(p) dp = \frac{dp}{2} \int_0^{\vartheta_{\max}} \delta[\bar{p}(\vartheta) - \bar{p}_c] J \sin \vartheta d\vartheta. \quad (47)$$

Используя формулы (6), (9) и (42), легко получить:

$$N(p) dp = \frac{p dp}{2E_{\bar{p}_c} \gamma V}. \quad (48)$$

Интервал изменения p определится границами

$$\gamma |\bar{p}_c - \bar{E}_c V| \leq p \leq \gamma (\bar{p}_c + \bar{E}_c V).$$

При релятивистских скоростях ($p \gg \mu$)

$$N(p) dp = \frac{dp}{2\bar{p}_c \gamma V}. \quad (49)$$

В случае распада на две частицы формулы (48) и (49) можно записать в форме

$$N(p) dp = \frac{p M dp}{E \gamma V \sqrt{M^4 + \mu_1^4 + \mu_2^4 - 2(M^2 \mu_1^2 + M^2 \mu_2^2 + \mu_1^2 \mu_2^2)}} \quad *) \quad (50)$$

и, в частности, если $p \gg \mu_1$ и $p \gg \mu_2$,

$$N(p) dp = \frac{dp}{M \gamma V}. \quad (51)$$

Пример энергетического распределения приведён на рис. 8. Так же как и ранее, за единицу импульса принято $2000 m_e$.

Таким образом, при распаде на две ультрарелятивистские частицы эти частицы могут иметь с одинаковой вероятностью любое значение энергии в интервале от $\frac{M}{2} \sqrt{\frac{1-V}{1+V}}$ до $\frac{M}{2} \sqrt{\frac{1+V}{1-V}}$. Энергией,

лежащей вне этого интервала, вторичные частицы обладать не могут. Такая особенность энергетического распределения позволяет сделать два заключения о характере энергетического распределения

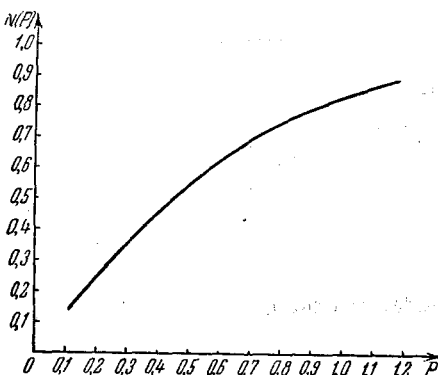


Рис. 8. Распределение по импульсам частиц, образованных при распаде $V_1^0 \rightarrow \rho + \pi^-$; $V = 0.6$.

*) Энергетическое распределение для обеих частиц тождественно.

вторичных частиц, возникших при распаде немонотонического пучка мезонов. Существенно, что сделанные ниже заключения практически не зависят от вида спектра первичных частиц.

Из выражения, определяющего границы интервала, следует, что, какой бы энергией ни обладал первичный мезон, вторичные частицы всегда могут иметь энергию, равную $\frac{M}{2}$. Если спектр

первичных частиц простирается от 0 до ∞ , то величина $\frac{M}{2}$ является единственной, обладающей таким свойством. Для любой определённой энергии первичной частицы вторичные частицы распределены равномерно в пределах соответствующего интервала.

Поэтому при значении $\frac{M}{2}$ независимо от формы спектра первичных частиц будет максимум энергетического спектра вторичных. Рассмотрим далее два значения энергии E_1 и E_2 , обладающих тем свойством, что $N(E_1) = N(E_2)$. Поскольку спектр вторичных частиц имеет максимум при любом распределении первичных, постольку всегда имеется бесконечное значение пар энергий (расположенных по обе стороны от максимума), при которых это соотношение выполняется.

Ясно, что E_1 и E_2 должны быть граничными значениями интервала, соответствующего какой-то величине энергии $\frac{M}{\sqrt{1-V^2}}$ первичной частицы.

Поэтому можно написать:

$$\frac{M}{2} \sqrt{\frac{1-V}{1+V}} = E_1.$$

$$\frac{M}{2} \sqrt{\frac{1+V}{1-V}} = E_2$$

и, следовательно,

$$M = 2 \sqrt{E_1 E_2}. \quad (52)$$

Рассмотренные выше особенности энергетического спектра вторичных частиц были впервые установлены Карлсоном и др.¹¹.

3. РАСПАД НА ТРИ ЧАСТИЦЫ

Характерной особенностью распада на три частицы (так же как и любого превращения, в результате которого образуются три или более частиц) по сравнению с распадом на две частицы является зависимость энергетических и угловых распределений вторичных частиц от типа взаимодействия, обуславливающего распад.

Действительно, в \mathcal{C} -системе можно написать следующие уравнения:

$$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = M, \quad (53a)$$

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0, \quad (53b)$$

и следовательно, даже при заданных значениях масс μ_1, μ_2, μ_3 возможен непрерывный спектр импульсов каждой из частиц от 0 до некоторого $p_{\text{макс}}$.

Поэтому, поскольку в настоящей работе мы отвлекаемся от исследования конкретных типов взаимодействия, при описании распада на три частицы будут даны только решения некоторых частных задач.

а) Исследование экстремальных значений импульсов и углов

Прежде всего определим максимально достижимое при распаде на три частицы значение импульса \bar{p}_1 частицы с массой μ_1 .

Ясно, что импульс \bar{p}_1 будет иметь максимальное значение, если импульсы всех трёх частиц коллинеарны, причём таким образом, что направления импульсов двух других частиц \bar{p}_2 и \bar{p}_3 антипараллельны направлению импульса \bar{p}_1 :

$$-\bar{p}_1 = \bar{p}_2 + \bar{p}_3.$$

Подставляя в (53a), получаем:

$$\sqrt{\bar{p}_1^2 + \mu_1^2} + \sqrt{\bar{p}_2^2 + \mu_2^2} + \sqrt{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)^2 + \mu_3^2} = M. \quad (53b)$$

Рассматривая в (53b) величину \bar{p}_1 как функцию \bar{p}_2 , можно найти максимальное значение функции $\bar{p}_1(\bar{p}_2)$, которое определяется выражением

$$\sqrt{\bar{p}_{1\text{макс}}^2 + \mu_1^2} = \frac{M^2 + \mu_1^2 - (\mu_2 + \mu_3)^2}{2M}. \quad (54)$$

Это соотношение было получено Мишелем¹².

Максимальная суммарная энергия двух частиц легко определяется по (53a):

$$(\bar{E}_1 + \bar{E}_2)_{\text{макс}} = M - \mu_3. \quad (55)$$

Перейдём к определению экстремальных значений углов. Из формулы (14) следует, что максимальный угол, на который отклоняется частица с массой μ_1 , возрастает с её импульсом. Поэтому максимально допустимый угол $\vartheta_{\text{макс}}$ определяется формулой (30), где вместо p_c необходимо подставить величину $p_{\text{макс}}$ согласно выражению (54).

Если масса одной из частиц пренебрежимо мала по сравнению с массами других вторичных частиц, то $\bar{p}_{\text{макс}}$ переходит в \bar{p}_c . Поэтому описанный метод анализа не позволяет сделать однозначного заключения о том, обусловлена ли исследуемая совокупность распадом на две частицы или распадом на три частицы, из которых, по крайней мере, одна обладает массой, пренебрежимо малой сравнительно с массами других частиц.

Известную осмотрительность необходимо также проявлять при анализе допустимых углов ψ (см. § 2).

Рассмотрим частные случаи:

- 1) масса одной из частиц $\mu_1 \sim M^*$;
- 2) $\mu_1 + \mu_2 \sim M$ при дополнительных условиях $\mu_1 \gg \bar{p}_{1 \text{ макс}}$ и $\mu_2 \gg \bar{p}_{2 \text{ макс}}$.

В этих частных случаях можно написать:

$$\psi = \arctg \frac{1}{\gamma} \frac{\bar{p}_{\text{макс}}}{\mu_1 V} + \arctg \frac{1}{\gamma} \frac{\bar{p}_{\text{макс}}}{\mu_2 V}, \quad (56)$$

где $\bar{p}_{\text{макс}}$ определяется из (54).

Так как в этих случаях масса третьей частицы μ_3 пренебрежимо мала сравнительно с массой, по крайней мере, одной из частиц, то $\bar{p}_{\text{макс}} \sim \bar{p}_c$, и следовательно, также нельзя сделать однозначного заключения о числе вторичных частиц. Именно поэтому нельзя считать убедительным проведенный Батлером¹⁰ анализ допустимых углов разлёта вторичных заряженных частиц при распаде тяжёлой V_1^0 -частицы. Хотя экспериментально наблюдаемые углы ψ согласуются с вычисленными, однако это отнюдь не исключает возможности появления при распаде третьей лёгкой нейтральной частицы.

Аналогичная неоднозначность может возникнуть и при анализе компланарности следов первичной и двух заряженных вторичных частиц (см. § 3).

Действительно, можно доказать следующее положение: если масса одной из двух вторичных заряженных частиц (например, μ_2) близка к массе первичной частицы M и скорость последней близка к 1, то пути обеих заряженных и первичной частиц почти компланарны.

В L -системе выполняется соотношение

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3. \quad (57)$$

Умножая это равенство скалярно на единичный вектор \mathbf{n} , нор-

*) Определение угла ψ для общего случая распада на три частицы сводится к решению системы пяти трансцендентных уравнений и, следовательно, не может быть проведено в общем виде.

мальный к векторам \mathbf{p}_0 и \mathbf{p}_1 , получим:

$$(\mathbf{n}\mathbf{p}_1) = -(\mathbf{n}\mathbf{p}_3). \quad (58)$$

Так как в данном случае $p_2 \sim VE_2 \gamma \gg (\bar{p}_3 + VE_3) \gamma \sim p_3$, то

$$|\cos \theta_2| = \frac{p_3}{p_2} |\cos \theta_3| \ll 1 \quad (59)$$

(θ_2 и θ_3 — соответственно углы между векторами \mathbf{p}_2 , \mathbf{n} и \mathbf{p}_3 , \mathbf{n}); следовательно, вектор \mathbf{n} близок к нормали к импульсу \mathbf{p}_2 . Таким образом, если первичная частица распадается на две заряженные (причём $\mu_2 \sim M$) и одну нейтральную частицы, то векторы \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 почти компланарны.

б) Энергетический спектр вторичных частиц

Как уже упоминалось выше, для строгого вычисления энергетического спектра вторичных частиц, образованных при распаде мезонов на три частицы, необходимо знать вид взаимодействия частиц с полем. Однако до сих пор ни в одном случае не удалось однозначно установить характер такого взаимодействия. Поэтому целесообразно при получении оценок энергетического спектра пожертвовать для большей общности строгостью вычислений. Наиболее простой общий метод вычислений характеристик распада основывается на предположении, что они определяются только статистическим весом конечных состояний и не зависят от формы взаимодействий. Можно ожидать, что такой подход оправдает себя в случае распада при не очень сильных взаимодействиях между вторичными частицами. Так, вычисленные при этом предположении формы энергетических спектров электронов, образованных при распаде μ -мезонов и при β -распаде, не противоречат опытным данным¹³. Аналогичный метод с успехом был применён к исследованию множественных процессов при высоких энергиях взаимодействующих частиц^{14, 15}. Однако в этом случае применение такого метода заведомо оправдано тем, что при значительных энергиях в процессах участвует большое число частиц. Ферми^{13, 14} попытался также распространить такой подход и на случай взаимодействия нуклонов с энергией, близкой к величине порога образования π -мезонов. Оказалось, что, в то время как величина полного сечения удовлетворительно согласуется с опытными данными, для получения правильной формы энергетического спектра π -мезонов необходимо принять во внимание конкретный характер взаимодействия нуклонов, т. е. учесть зависимость матричного элемента от энергии.

Вычисления энергетических спектров при предположении о решающем влиянии статистических факторов были проведены в работах^{12, 16, 17, 18}. Оказалось, что в ψ -системе вероятность $d\omega$ того, что частица с массой μ_1 будет иметь импульс, заключённый ме-

жду \bar{p}_1 , $\bar{p}_1 + d\bar{p}_1$, определяется выражением

$$d\omega \propto \frac{B^{\frac{1}{2}} \bar{p}_1^2}{(A^2 - \bar{p}_1^2)^2} \left[\left(1 - \frac{4A^2}{A^2 - \bar{p}_1^2} \right) B + AC \right] d\bar{p}_1, \quad (60)$$

где

$$\begin{aligned} A &= M + \sqrt{\bar{p}_1^2 + \mu_1^2}, \\ B &= (\bar{p}_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 - A^2)^2 - 4\mu_2^2\mu_3^2, \\ C &= 6A [A^2 - (\bar{p}_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)]; \end{aligned}$$

\bar{p}_1 изменяется в пределах 0, $\bar{p}_{1\text{ макс}}$; $\bar{p}_{1\text{ макс}}$ определяется (54). Естественно, что распределение (60) определяется только значениями масс.

Для того чтобы перейти к энергетическому представлению, нужно в (60) заменить \bar{p}_1 на $\sqrt{\bar{E}_1^2 - \mu_1^2}$ и $d\bar{p}$ на $\frac{\bar{E}}{p} d\bar{E}$.

Рассмотрим отдельные частные случаи соотношения (60):

1) $\mu_i \ll \bar{p}_i$, $i = 1, 2, 3$,

$$d\omega \propto (3M^2 - 6M\bar{p}_1 + 2\bar{p}_1^2) \bar{p}_1^2 d\bar{p}_1; \quad (61)$$

2) $\mu_i \gg \bar{p}_i$,

$$d\omega \propto \left[2(\mu_2 + \mu_3) \bar{T} - \frac{\bar{p}_2^2 M}{\mu_1} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{p}_1^2 d\bar{p}_1; \quad (62)$$

$\bar{T} = M - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$ — суммарная кинетическая энергия вторичных частиц;

3) $\mu_1 \ll \bar{p}_1$, $\mu_2 \gg \bar{p}_2$, $\mu_3 \gg \bar{p}_3$,

$$d\omega \propto (\bar{T} - \bar{p}_1)^{\frac{1}{2}} \bar{p}_1^2 d\bar{p}_1; \quad (63)$$

4) $\mu_1 \gg \bar{p}_1$, $\mu_2 \ll \bar{p}_2$, $\mu_3 \gg \bar{p}_3$,

$$d\omega \propto (\bar{T}^2 + \bar{p}_1^2) \bar{p}_1^2 d\bar{p}_1; \quad (64)$$

5) $\mu_1 \ll \bar{p}_1$, $\mu_2 \ll \bar{p}_2$, $\mu_3 \gg \bar{p}_3$,

$$d\omega \propto (\bar{T}^2 - \bar{p}_1^2) \bar{p}_1^2 d\bar{p}_1. \quad (65)$$

в) Энергетические и угловые распределения вторичных частиц при распаде на лету

Вычислим энергетические и угловые распределения в \mathcal{L} -системе, если распределение в \mathcal{U} -системе соответствует функции распределения (61). В этом случае в \mathcal{U} -системе

$$\bar{N}(\bar{p}_1) d\bar{p}_1 d\cos\bar{\vartheta} \sim (3M^2 - 6M\bar{p}_1 + 2\bar{p}_1^2) \bar{p}_1^2 d\bar{p}_1 d\cos\bar{\vartheta}. \quad (61a)$$

Для функций $J(\vartheta)$ и $\bar{p}(p)$ воспользуемся приближёнными выражениями (96) и (66). Тогда импульсное распределение

$$\begin{aligned} N(p_1) dp_1 &\sim dp_1 \int_{\cos \vartheta_{\text{макс}}(p)}^1 \frac{[3M^2 - 6M\bar{p}_1 + 2\bar{p}_1^2] \bar{p}_1^2}{1 - V \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= dp_1 \int_{\cos \vartheta_{\text{макс}}(p)}^1 [3M^2 - 6Mp_1(1 - V \cos \vartheta) + \\ &\quad + 2p_1^2(1 - V \cos \vartheta)^2] p_1^2(1 - V \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \quad (66)$$

Из (66) следует, что

$$\cos \vartheta_{\text{макс}} = \begin{cases} \frac{1}{V} \left(1 - \frac{\bar{p}_{1\text{макс}}}{\gamma p_1} \right) & \text{при } \frac{1}{V} \left(1 - \frac{\bar{p}_{1\text{макс}}}{\gamma p} \right) > -1, \\ -1 & \text{при } \frac{1}{V} \left(1 - \frac{\bar{p}_{1\text{макс}}}{\gamma p} \right) < -1. \end{cases}$$

После интегрирования получаем:

$$\begin{aligned} N(p_1) dp_1 &\sim p_1^2 \{ 3M^2 [H_1^2 - (1 - V)^2] - 4M\gamma p_1 [H^3 - (1 - V)^3] + \\ &\quad + \gamma^2 p_1^2 [H^4 - (1 - V)^4] \}. \end{aligned} \quad (67)$$

$$H = \begin{cases} \frac{M}{2p_1\gamma} & \text{при } p_1 > \frac{M}{2(1+V)\gamma}, \\ 1+V & \text{при } p_1 < \frac{M}{2(1+V)\gamma}. \end{cases}$$

Значения импульса p заключены в интервале

$$0; \quad \frac{M}{2} (1+V)\gamma.$$

В интересующем нас случае (ультрарелятивистские частицы) можно установить общие соотношения для средних импульсов. В соответствии с (51) средний импульс p_1 в \mathcal{L} -системе, соответствующий фиксированному импульсу \bar{p}_1 , равен $\gamma \bar{p}_1$; поэтому в случае произвольного распределения в \mathcal{U} -системе

$$p_1 = \gamma \int_0^{\frac{M}{2}} \bar{N}(\bar{p}_1) \bar{p}_1 d\bar{p}_1 = \gamma \bar{p}_1.$$

Перейдём к вычислению углового распределения

$$N(\vartheta) d \cos \vartheta \sim d \cos \vartheta \int_0^{p_{\max}(\vartheta)} [3M^2 - 6Mp_1(1 - V \cos \vartheta) + \\ + 2p_1^2(1 - V \cos \vartheta)^2] p_1^2(1 - V \cos \vartheta) dp_1, \quad (68)$$

$$p_{\max} = \frac{M}{2\gamma(1 - V \cos \vartheta)}.$$

После интегрирования получаем:

$$N(\vartheta) d \cos \vartheta \sim \frac{d \cos \vartheta}{(1 - V \cos \vartheta)^2}. \quad (69)$$

Это выражение совпадает, если его нормировать, с угловым распределением ультрарелятивистских частиц, возникших при распаде на две частицы (см. (45)). Также совпадение отнюдь не случайно. Характерной особенностью выражения (45) и (69) является его независимость от энергии вторичных частиц (лишь бы они обладали достаточно большими скоростями). Поэтому при любом импульсном распределении ультрарелятивистских частиц в φ -системе их угловое распределение в \mathcal{L} -системе будет определяться соотношением (45).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. C. D. Rochester, C. C. Butler, Rep. Prog. Phys. **41**, 364 (1953).
2. А. И. Алиханов, УФН **50**, 481 (1953).
3. L. Michel, Progress in Cosmic Ray Physics, Amsterdam, 1952.
4. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, 1941.
5. H. Bratt, M. Kaplon, B. Peters, Helv. Phys. Acta **23**, 24 (1950).
6. J. Blaton, Det Kgl. Vidensk. Selskab. Mat.-fys. Medd **24**, № 20 (1950).
7. Д. В. Скобельцын, Сб. Памяти С. И. Вавилова, стр. 292, 1952.
8. С. Поуэлл, УФН **45**, 15 (1951).
9. R. Armenteros, K. H. Barker, C. C. Butler, A. Cachon, Phil. Mag. **42**, 1113 (1951).
10. С. С. Батлер, УФН **48**, 389 (1952).
11. A. G. Carlson, J. E. Hooper, D. T. King, Phil. Mag. **41**, 701 (1950).
12. L. Michel, Proc. Phys. Soc. **63A**, 514 (1950).
13. Э. Ферми, Элементарные частицы, ИЛ, 1952.
14. E. Fermi, Prog. Theor. Phys. **5**, 570 (1950).
15. Л. Д. Ландау, Изв. АН СССР, сер. физ., **17**, 51 (1953).
16. O. Kofoed-Hansen, Phil. Mag. **42**, 1411 (1951).
17. K. A. Brueckner, R. W. Watson, Phys. Rev. **87**, 390 (1952).
18. М. И. Подгорецкий, И. Л. Розенталь, ЖЭТФ **26**, № 8 (1954).
19. И. С. Шапиро, УФН **53**, 7 (1954).