Validation par analyse statique

Partie : Interprétation abstraite, cours 2/3

Pierre-Loïc Garoche
(merci à Pierre Roux pour ses contributions à ce cours)

ENAC

ENSEEIHT 2A
2022-2023

Abstraire la sémantique concrète

- Rappels sur la sémantique concrète
- Abstractions relationnelles ou non

Abstractions non relationnelles

- Signes
- Constantes
- Intervalles

Analyse arrière

Type de la sémantique concrète

La sémantique concrète d'un programme est de type

$$L \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$$

Type de la sémantique concrète

La sémantique concrète d'un programme est de type

$$L \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$$

- une fonction qui à chaque point du programme (dans L)
- associe un ensemble d'états possibles de la mémoire
  - une fonction qui à chaque variable (dans $\mathbb{V}$)
  - associe sa valeur en mémoire (dans $\mathbb{Z}$)

Exemple

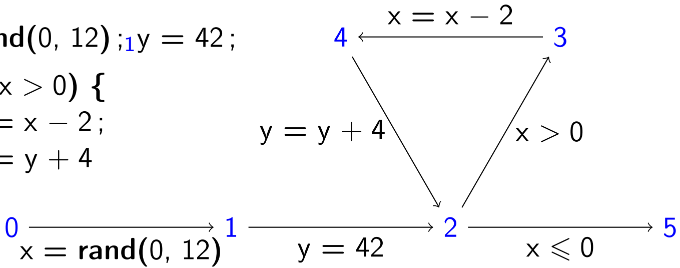
$_0\mathrm{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\ ;_1\mathrm{y} = 42\,;$

$\mathbf{while}\ _2(\mathrm{x} > 0)\ \{$

$\qquad _3\mathrm{x} = \mathrm{x} - 2\,;$

$\qquad _4\mathrm{y} = \mathrm{y} + 4$

$\}_5$



$$
\begin{aligned}
R_0 &= \mathbb{V} \to \mathbb{Z} \qquad\qquad (\mathbb{V} = \{\, x, y \,\})\\
R_1 &= \{ f \in (\mathbb{V} \to \mathbb{Z}) \mid f(x) \in [\![0, 12]\!] \}\\
R_2 &= \{ f \mid f(x) \in [\![-1, 12]\!], f(y) \in [\![42, 66]\!] \cap 4\mathbb{Z} + 2, 2f(x) + f(y) \in [\![42, 66]\!] \}\\
R_3 &= \{ f \mid f(x) \in [\![1, 12]\!], f(y) \in [\![42, 66]\!] \cap 4\mathbb{Z} + 2, 2f(x) + f(y) \in [\![42, 66]\!] \}\\
R_4 &= \{ f \mid f(x) \in [\![-1, 10]\!], f(y) \in [\![42, 66]\!] \cap 4\mathbb{Z} + 2, 2f(x) + f(y) \in [\![38, 62]\!] \}\\
R_5 &= \{ f \mid f(x) \in [\![-1, 0]\!], f(y) \in [\![42, 66]\!] \cap 4\mathbb{Z} + 2, 2f(x) + f(y) \in [\![42, 66]\!] \}
\end{aligned}
$$

Abstraire ? oui mais quoi ?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier.
Mais que simplifier ?

Abstraire ? oui mais quoi ?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier.
Mais que simplifier ?

- L est fini et on veut savoir ce qui se passe en chaque point

Abstraire ? oui mais quoi ?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier.
Mais que simplifier ?

- L est fini et on veut savoir ce qui se passe en chaque point
  $\Rightarrow$ on le garde à l'identique

Abstraire ? oui mais quoi ?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier.
Mais que simplifier ?

- L est fini et on veut savoir ce qui se passe en chaque point
  $\Rightarrow$ on le garde à l'identique
- $\mathbb{V}$ est fini et on s'intéresse à toutes les variables

Abstraire ? oui mais quoi ?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier.
Mais que simplifier ?

- L est fini et on veut savoir ce qui se passe en chaque point
  $\Rightarrow$ on le garde à l'identique
- $\mathbb{V}$ est fini et on s'intéresse à toutes les variables
  $\Rightarrow$ on le garde à l'identique

Abstraire ? oui mais quoi ?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier.
Mais que simplifier ?

- L est fini et on veut savoir ce qui se passe en chaque point
  $\Rightarrow$ on le garde à l'identique
- $\mathbb{V}$ est fini et on s'intéresse à toutes les variables
  $\Rightarrow$ on le garde à l'identique
- $\mathbb{Z}$ (et donc l'ensemble des fonctions $\mathbb{V} \to \mathbb{Z}$) est infini

Abstraire ? oui mais quoi ?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier.
Mais que simplifier ?

- L est fini et on veut savoir ce qui se passe en chaque point
  $\Rightarrow$ on le garde à l'identique
- $\mathbb{V}$ est fini et on s'intéresse à toutes les variables
  $\Rightarrow$ on le garde à l'identique
- $\mathbb{Z}$ (et donc l'ensemble des fonctions $\mathbb{V} \to \mathbb{Z}$) est infini
  $\Rightarrow$ c'est ici qu'on va abstraire

Comment abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$?

Deux grandes solutions

- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ en $\mathbb{V} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ puis $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *non relationnel* : les valeurs de x et y sont indépendantes

Comment abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$?

Deux grandes solutions

- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ en $\mathbb{V} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ puis $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *non relationnel* : les valeurs de x et y sont indépendantes
- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ directement en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *relationnel* : certaines combinaisons de x et y sont impossibles

Comment abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$?

Deux grandes solutions

- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ en $\mathbb{V} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ puis $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *non relationnel* : les valeurs de x et y sont indépendantes
- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ directement en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *relationnel* : certaines combinaisons de x et y sont impossibles

  $+$ plus précis

  $-$ plus compliqué et plus coûteux

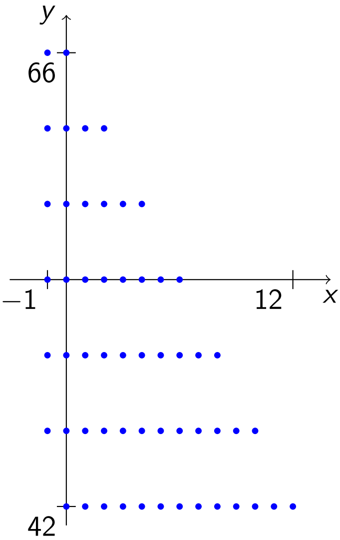
Comment abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$?

Deux grandes solutions

- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ en $\mathbb{V} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ puis $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *non relationnel* : les valeurs de x et y sont indépendantes
  - ce cours
- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ directement en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *relationnel* : certaines combinaisons de x et y sont impossibles
  - $+$ plus précis
  - $-$ plus compliqué et plus coûteux
  - le cours suivant

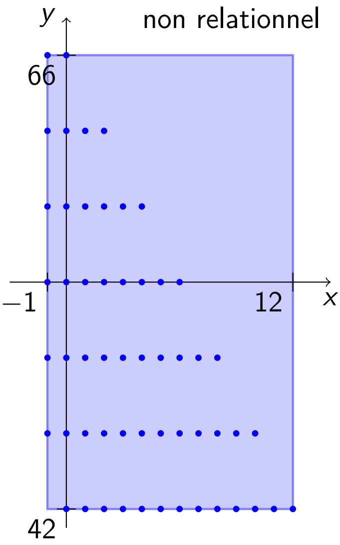
Deux petits dessins valent mieux que de longs discours

Exemple précédent au point de programme 2 (invariant de boucle)



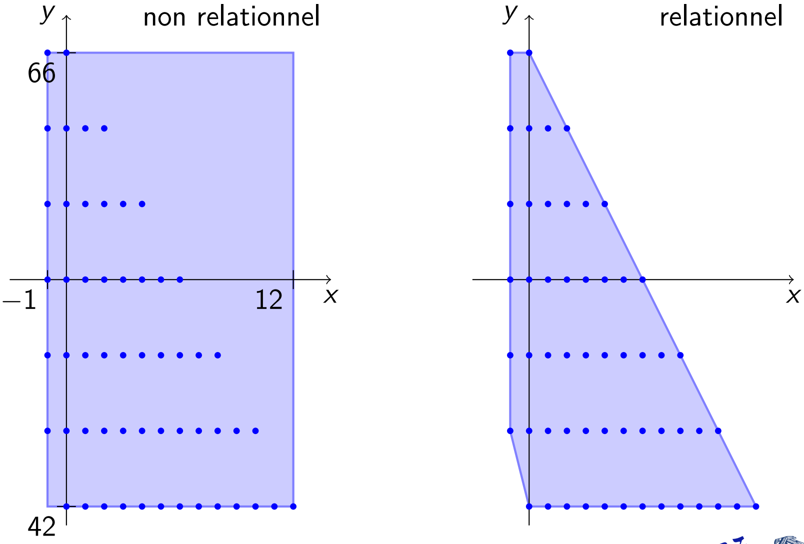
Deux petits dessins valent mieux que de longs discours

Exemple précédent au point de programme 2 (invariant de boucle)



Deux petits dessins valent mieux que de longs discours

Exemple précédent au point de programme 2 (invariant de boucle)



Domaine des signes

Définition

Treillis des signes $(\mathcal{D}^\sharp, \sqsubseteq^\sharp)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \top \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\leqslant 0 & & \geqslant 0 \\
 & \bot \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(\top) &= \mathbb{Z} \\
\gamma(\leqslant 0) &= \rrbracket -\infty, 0 \rrbracket \\
\gamma(\geqslant 0) &= \llbracket 0, +\infty \llbracket \\
\gamma(\bot) &= \emptyset
\end{aligned}$$

Domaine des signes

Définition

Treillis des signes $(\mathcal{D}^\sharp, \sqsubseteq^\sharp)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \top \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\leqslant 0 \arrow[dr, dash] & & \geqslant 0 \arrow[dl, dash] \\
 & \bot &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(\top) &= \mathbb{Z} \\
\gamma(\leqslant 0) &=]\!] -\infty, 0]\!] \\
\gamma(\geqslant 0) &= [\![0, +\infty[\![\\
\gamma(\bot) &= \emptyset
\end{aligned}$$

Question

L'ordre $\sqsubseteq^\sharp$ ci dessus est il correct par rapport à l'ordre $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Domaine des signes

Définition

Treillis des signes $(\mathcal{D}^\sharp, \sqsubseteq^\sharp)$

$$\begin{tikzcd}
 & \top \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\leqslant 0 \arrow[dr, dash] & & \geqslant 0 \arrow[dl, dash] \\
 & \bot &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(\top) &= \mathbb{Z} \\
\gamma(\leqslant 0) &= \rrbracket -\infty, 0 \rrbracket \\
\gamma(\geqslant 0) &= \llbracket 0, +\infty \llbracket \\
\gamma(\bot) &= \emptyset
\end{aligned}$$

Question

L'ordre $\sqsubseteq^\sharp$ ci dessus est il correct par rapport à l'ordre $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Rappel (correction de l'ordre abstrait par rapport au concret)

L'ordre $\sqsubseteq^\sharp$ est correct par rapport à l'ordre $\sqsubseteq$ si γ est monotone

$$\forall x^\sharp, y^\sharp \in \mathcal{D}^\sharp, \quad x^\sharp \sqsubseteq^\sharp y^\sharp \Rightarrow \gamma(x^\sharp) \sqsubseteq \gamma(y^\sharp)$$

Domaine des signes

Définition

Treillis des signes $(\mathcal{D}^\sharp, \sqsubseteq^\sharp)$

$$
\begin{tikzcd}
 & \top \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\leqslant 0 \arrow[dr, dash] & & \geqslant 0 \arrow[dl, dash] \\
 & \bot &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma(\top) &= \mathbb{Z} \\
\gamma(\leqslant 0) &= \rrbracket -\infty, 0 \rrbracket \\
\gamma(\geqslant 0) &= \llbracket 0, +\infty \llbracket \\
\gamma(\bot) &= \emptyset
\end{aligned}
$$

Question

L'ordre $\sqsubseteq^\sharp$ ci dessus est il correct par rapport à l'ordre $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Réponse

Oui ($\emptyset \subseteq \llbracket 0, +\infty \llbracket$, $\emptyset \subseteq \rrbracket -\infty, 0 \rrbracket$, $\llbracket 0, +\infty \llbracket \subseteq \mathbb{Z}$ et $\rrbracket -\infty, 0 \rrbracket \subseteq \mathbb{Z}$).

Domaine des signes, meilleure abstraction

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \top \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \leqslant 0 \arrow[dr, dash] & & \geqslant 0 \arrow[dl, dash] \\ & \bot & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \gamma(\top) &= \mathbb{Z} \\ \gamma(\leqslant 0) &= \rrbracket -\infty, 0\rrbracket \\ \gamma(\geqslant 0) &= \llbracket 0, +\infty\llbracket \\ \gamma(\bot) &= \emptyset \end{aligned}$$

Question

Toute partie S de $\mathbb{Z}$ (i.e. $S \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$) admet elle
une meilleure abstraction dans ce domaine ?

Domaine des signes, meilleure abstraction

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \top \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\leqslant 0 \arrow[dr, dash] & & \geqslant 0 \arrow[dl, dash] \\
 & \bot &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(\top) &= \mathbb{Z} \\
\gamma(\leqslant 0) &= \rrbracket -\infty, 0 \rrbracket \\
\gamma(\geqslant 0) &= \llbracket 0, +\infty \llbracket \\
\gamma(\bot) &= \emptyset
\end{aligned}$$

Question

Toute partie S de $\mathbb{Z}$ (i.e. $S \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$) admet elle une meilleure abstraction dans ce domaine ?

Rappel (meilleure abstraction)

Une partie S de $\mathbb{Z}$ admet une meilleure abstraction si l'ensemble $\left\{ S^\sharp \in \mathcal{D}^\sharp \;\middle|\; S \subseteq \gamma\left(S^\sharp\right) \right\}$ a un minimum.

Domaine des signes, meilleure abstraction

$$
\begin{tikzcd}
 & \top \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\leqslant 0 \arrow[dr, no head] & & \geqslant 0 \arrow[dl, no head] \\
 & \bot &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma(\top) &= \mathbb{Z} \\
\gamma(\leqslant 0) &= \rrbracket -\infty, 0 \rrbracket \\
\gamma(\geqslant 0) &= \llbracket 0, +\infty \llbracket \\
\gamma(\bot) &= \emptyset
\end{aligned}
$$

Question

Toute partie S de $\mathbb{Z}$ (i.e. $S \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$) admet elle
une meilleure abstraction dans ce domaine ?

Réponse

Toute sauf le singleton $\{\, 0 \,\}$ qui admet deux abstractions
($\leqslant 0$ et $\geqslant 0$) incomparables.

Domaine des signes, meilleure abstraction (suite et fin)

Définition

On corrige en ajoutant un élément

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \top \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\leqslant 0 \arrow[dr] & & \geqslant 0 \arrow[dl] \\
 & 0 \arrow[d] & \\
 & \bot &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma(\top) &= \mathbb{Z} \\
\gamma(\leqslant 0) &= \rrbracket -\infty, 0 \rrbracket \\
\gamma(\geqslant 0) &= \llbracket 0, +\infty \llbracket \\
\gamma(0) &= \{ 0 \} \\
\gamma(\bot) &= \emptyset
\end{aligned}
$$

Domaine des signes, meilleure abstraction (suite et fin)

Définition

On corrige en ajoutant un élément

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \top \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\leqslant 0 \arrow[dr, dash] & & \geqslant 0 \arrow[dl, dash] \\
 & 0 \arrow[d, dash] & \\
 & \bot &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma(\top) &= \mathbb{Z} \\
\gamma(\leqslant 0) &= \rrbracket -\infty, 0 \rrbracket \\
\gamma(\geqslant 0) &= \llbracket 0, +\infty \llbracket \\
\gamma(0) &= \{\, 0 \,\} \\
\gamma(\bot) &= \emptyset
\end{aligned}
$$

Remarques

- γ reste monotone.
- On a bien une correspondance de Galois avec

$$
\alpha(S) = \begin{cases}
\top & \text{si } \exists s, s' \in S, s < 0, s' > 0 \\
\leqslant 0 & \text{si } \forall s \in S, s \leqslant 0 \wedge \exists s \in S, s < 0 \\
\geqslant 0 & \text{si } \forall s \in S, s \geqslant 0 \wedge \exists s \in S, s > 0 \\
0 & \text{si } S = \{\, 0 \,\} \\
\bot & \text{si } S = \emptyset
\end{cases}
$$

Abstraction non relationnelle

D'une abstraction $\mathcal{D}^\sharp$ de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$,
on déduit une abstraction $\mathcal{D}^\sharp_{\text{nr}}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$,
en procédant point à point :

- $\mathcal{D}^\sharp_{\text{nr}} = \mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp$
- $x^\sharp \sqsubseteq^\sharp_{\text{nr}} y^\sharp$ si pour tout $v \in \mathbb{V}$, $x^\sharp(v) \sqsubseteq y^\sharp(v)$
- $\gamma_{\text{nr}}\left(x^\sharp\right) = \left\{\rho \in (\mathbb{V} \to \mathbb{Z}) \,\middle|\, \forall v \in \mathbb{V}, \rho(v) \in \gamma\left(x^\sharp(v)\right)\right\}$
- $\alpha_{\text{nr}}(x) = v \mapsto \alpha\left(\{\rho(v) \mid \rho \in x\}\right)$

Abstraction non relationnelle

D'une abstraction $\mathcal{D}^\sharp$ de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$,
on déduit une abstraction $\mathcal{D}^\sharp_{\mathrm{nr}}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$,
en procédant point à point :

- $\mathcal{D}^\sharp_{\mathrm{nr}} = \mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp$
- $x^\sharp \sqsubseteq^\sharp_{\mathrm{nr}} y^\sharp$ si pour tout $v \in \mathbb{V}$, $x^\sharp(v) \sqsubseteq y^\sharp(v)$
- $\gamma_{\mathrm{nr}}\left(x^\sharp\right) = \left\{\rho \in (\mathbb{V} \to \mathbb{Z}) \;\middle|\; \forall v \in \mathbb{V}, \rho(v) \in \gamma\left(x^\sharp(v)\right)\right\}$
- $\alpha_{\mathrm{nr}}(x) = v \mapsto \alpha\left(\{\rho(v) \mid \rho \in x\}\right)$
- $\top_{\mathrm{nr}} = v \mapsto \top$
- $\bot_{\mathrm{nr}} = v \mapsto \bot$
- $x^\sharp \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} y^\sharp = v \mapsto x^\sharp(v) \sqcup^\sharp y^\sharp(v)$
- $x^\sharp \sqcap^\sharp_{\mathrm{nr}} y^\sharp = v \mapsto x^\sharp(v) \sqcap^\sharp y^\sharp(v)$

Syntaxe de notre langage (rappel)

Syntaxe

$$
\begin{aligned}
\mathit{stm} ::=\ & v = \mathit{expr}\,\textbf{;} \mid \mathit{stm}\ \mathit{stm}\\
& \mid \textbf{if}\ \textbf{(}\mathit{expr} > 0\textbf{)}\ \textbf{\{}\ \mathit{stm}\ \textbf{\}}\ \textbf{else}\ \textbf{\{}\ \mathit{stm}\ \textbf{\}}\\
& \mid \textbf{while}\ \textbf{(}\mathit{expr} > 0\textbf{)}\ \textbf{\{}\ \mathit{stm}\ \textbf{\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathit{expr} ::=\ & v \mid n \mid \textbf{rand(}n,\ n\textbf{)}\\
& \mid \mathit{expr} + \mathit{expr} \mid \mathit{expr} - \mathit{expr} \mid \mathit{expr} \times \mathit{expr} \mid \mathit{expr} / \mathit{expr}
\end{aligned}
$$

$v \in \mathbb{V}$, un ensemble de variables

$n \in \mathbb{Z}$ (on ne manipule que des entiers)

$\textbf{rand(}n_1,\ n_2\textbf{)}$ représente le choix aléatoire d'un entier entre n_1 et n_2 (sert à simuler une entrée).

Domaine des signes, opérations arithmétiques abstraites

- $n^\sharp = \alpha(\{\, n \,\}) = \begin{cases} \leqslant 0 & \text{si } n < 0 \\ \geqslant 0 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

Domaine des signes, opérations arithmétiques abstraites

- $n^\sharp = \alpha(\{\, n \,\}) = \begin{cases} \leqslant 0 & \text{si } n < 0 \\ \geqslant 0 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

- $\mathbf{rand}^\sharp(n_1, n_2) = \alpha([\![n_1, n_2]\!]) = \begin{cases} \bot & \text{si } n_1 > n_2 \\ 0 & \text{si } n_1 = n_2 = 0 \\ \leqslant 0 & \text{sinon si } n_2 \leqslant 0 \\ \geqslant 0 & \text{sinon si } n_1 \geqslant 0 \\ \top & \text{sinon} \end{cases}$

Domaine des signes, opérations arithmétiques abstraites

- $n^\sharp = \alpha(\{\, n \,\}) = \begin{cases} \leqslant 0 & \text{si } n < 0 \\ \geqslant 0 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$
- $\mathbf{rand}^\sharp(n_1, n_2) = \alpha([\![n_1, n_2]\!]) = \begin{cases} \bot & \text{si } n_1 > n_2 \\ 0 & \text{si } n_1 = n_2 = 0 \\ \leqslant 0 & \text{sinon si } n_2 \leqslant 0 \\ \geqslant 0 & \text{sinon si } n_1 \geqslant 0 \\ \top & \text{sinon} \end{cases}$
- $x^\sharp +^\sharp y^\sharp = \alpha\left(\left\{ x + y \;\middle|\; x \in \gamma(x^\sharp), y \in \gamma(y^\sharp) \right\}\right) =$

$+^\sharp$	$\top$	$\leqslant 0$	$\geqslant 0$	0	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\leqslant 0$	$\top$	$\leqslant 0$	$\top$	$\leqslant 0$	$\bot$
$\geqslant 0$	$\top$	$\top$	$\geqslant 0$	$\geqslant 0$	$\bot$
0	$\top$	$\leqslant 0$	$\geqslant 0$	0	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

- ...

Domaine des signes, opérations arithmétiques abstraites (suite et fin)

Exercice 1

Compléter la table de la soustraction abstraite

$-^\sharp$	$\top$	$\leqslant 0$	$\geqslant 0$	0	$\bot$
$\top$					
$\leqslant 0$					
$\geqslant 0$					
0					
$\bot$					

Sémantique abstraite, expressions

Sémantique des expressions : $[\![e]\!]^\sharp_{\mathrm{E}} : (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp) \to \mathcal{D}^\sharp$

$$
\begin{array}{ll}
[\![v]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}(\rho) & = \rho(v) \\
[\![n]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}(\rho) & = n^\sharp \\
[\![\mathbf{rand(}n_1, n_2\mathbf{)}]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}(\rho) & = \mathbf{rand}^\sharp\mathbf{(}n_1, n_2\mathbf{)} \\
[\![e_1 + e_2]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}(\rho) & = [\![e_1]\!]^\sharp_{\mathrm{E}} +^\sharp [\![e_2]\!]^\sharp_{\mathrm{E}} \\
\ldots &
\end{array}
$$

Sémantique abstraite, expressions

Sémantique des expressions : $[\![e]\!]^\sharp_{\mathrm{E}} : (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp) \to \mathcal{D}^\sharp$

$$
\begin{array}{ll}
[\![v]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}(\rho) & = \rho(v) \\
[\![n]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}(\rho) & = n^\sharp \\
[\![\mathbf{rand}(n_1, n_2)]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}(\rho) & = \mathbf{rand}^\sharp(n_1, n_2) \\
[\![e_1 + e_2]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}(\rho) & = [\![e_1]\!]^\sharp_{\mathrm{E}} +^\sharp [\![e_2]\!]^\sharp_{\mathrm{E}} \\
\ldots &
\end{array}
$$

Remarque

Ça se calcule très bien.

Graphe de flot de contrôle (rappel)

On étudie les graphes de flot de contrôle des programmes.

Définition

Un *graphe de flot de contrôle* (L, A) est composé d'un ensemble de points de programme L, d'un point d'entrée $0 \in L$ et d'arêtes $A \subseteq L \times com \times L$ avec :
$com ::= v = expr \mid expr > 0$

Graphe de flot de contrôle (rappel)

On étudie les graphes de flot de contrôle des programmes.

Définition

Un *graphe de flot de contrôle* (L, A) est composé d'un ensemble de points de programme L, d'un point d'entrée $0 \in L$ et d'arêtes $A \subseteq L \times com \times L$ avec :

$com ::= v = expr \mid expr > 0$

Exemple

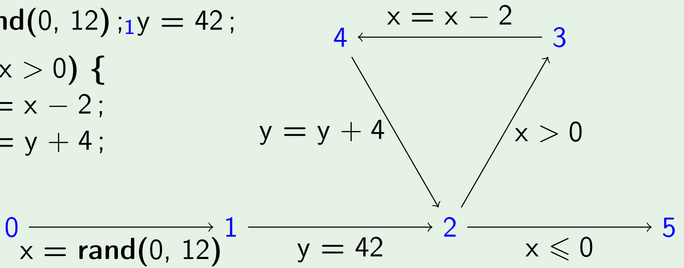
$_0\mathsf{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\ ;_1\mathsf{y} = 42\,;$

$\mathbf{while}\ _2(\mathsf{x} > 0)\ \{$

$\quad _3\mathsf{x} = \mathsf{x} - 2\,;$

$\quad _4\mathsf{y} = \mathsf{y} + 4\,;$

$\}_5$



Sémantique abstraite, commandes

Sémantique des commandes : $[\![c]\!]^\sharp_{\mathrm{C}} : (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp) \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)$

$$[\![v = e]\!]^\sharp_{\mathrm{C}}(\rho) = \rho\left[v \mapsto [\![e]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}\,\rho\right]$$

$$[\![e > 0]\!]^\sharp_{\mathrm{C}}(\rho) = \begin{cases} \rho\left[v \mapsto \rho(v)\ \sqcap^\sharp \alpha\left([\![1, +\infty[\![\right)\right] & \text{si } e = v \\ \rho & \text{sinon} \end{cases}$$

...

Sémantique abstraite, commandes

Sémantique des commandes : $[\![c]\!]^\sharp_{\mathrm{C}} : (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp) \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)$

$$[\![v = e]\!]^\sharp_{\mathrm{C}}(\rho) = \rho\left[v \mapsto [\![e]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}\,\rho\right]$$

$$[\![e > 0]\!]^\sharp_{\mathrm{C}}(\rho) = \begin{cases} \rho\left[v \mapsto \rho(v) \ \sqcap^\sharp \alpha\left([\![1, +\infty[\![\right)\right] & \text{si } e = v \\ \rho & \text{sinon} \end{cases}$$

...

Remarque

Ça se calcule toujours aussi bien.

Sémantique abstraite, programme

Sémantique des programmes : $[\![(L, A)]\!]^\sharp : L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)$

C'est la plus petite solution (au sens de l'ordre abstrait $\sqsubseteq^\sharp_{\mathrm{nr}}$) du système

$$\left\{ \begin{array}{lr} R^\sharp_0 = \mathbb{V} \to \top & \\ R^\sharp_{l'} = \displaystyle\bigsqcup^\sharp_{\substack{\mathrm{nr}\\(l,c,l')\in A}} [\![c]\!]^\sharp_{\mathrm{C}}\,(R^\sharp_l) & l' \neq 0 \end{array} \right.$$

Sémantique abstraite, programme

Sémantique des programmes : $[\![(L, A)]\!]^\sharp : L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)$

C'est la plus petite solution (au sens de l'ordre abstrait $\sqsubseteq^\sharp_{\mathrm{nr}}$) du système

$$\left\{ \begin{array}{ll} R^\sharp_0 = \mathbb{V} \to \top & \\ R^\sharp_{l'} = \displaystyle\bigsqcup^\sharp_{\mathrm{nr}\,(l,c,l')\in A} [\![c]\!]^\sharp_{\mathrm{C}} (R^\sharp_l) & \qquad l' \neq 0 \end{array} \right.$$

Remarques

- Une telle solution existe (c.f. théorème de Knaster-Tarski).

Sémantique abstraite, programme

Sémantique des programmes : $[\![(L, A)]\!]^\sharp : L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)$

C'est la plus petite solution (au sens de l'ordre abstrait $\sqsubseteq^\sharp_{\mathrm{nr}}$) du système

$$\begin{cases} R^\sharp_0 = \mathbb{V} \to \top & \\ R^\sharp_{l'} = \displaystyle\bigsqcup^\sharp_{\mathrm{nr}\,(l,c,l')\in A} [\![c]\!]^\sharp_{\mathrm{C}}\,(R^\sharp_l) & l' \neq 0 \end{cases}$$

Remarques

- Une telle solution existe (c.f. théorème de Knaster-Tarski).
- Ça semble un peu moins évident à calculer.

Sémantique abstraite, calcul effectif

Théorème

Si S est un treillis complet, f une fonction monotone sur ce treillis et si la suite $(f^n(\bot))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire $(\exists N, \forall n, f^n(\bot) = f^N(\bot))$ alors sa limite est le plus petit point fixe de f

$$\mathrm{lfp}\, f = f^N(\bot)$$

Sémantique abstraite, calcul effectif

Théorème

Si S est un treillis complet, f une fonction monotone sur ce treillis et si la suite $(f^n(\bot))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire $(\exists N, \forall n, f^n(\bot) = f^N(\bot))$ alors sa limite est le plus petit point fixe de f

$$\mathrm{lfp}\, f = f^N(\bot)$$

Démonstration.

- $f^N(\bot)$ est un point fixe : $f(f^N)(\bot) = f^{N+1}(\bot) = f^N(\bot)$;

Sémantique abstraite, calcul effectif

Théorème

Si S est un treillis complet, f une fonction monotone sur ce treillis et si la suite $(f^n(\bot))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire $(\exists N, \forall n, f^n(\bot) = f^N(\bot))$ alors sa limite est le plus petit point fixe de f

$$\mathrm{lfp}\, f = f^N(\bot)$$

Démonstration.

- $f^N(\bot)$ est un point fixe : $f(f^N)(\bot) = f^{N+1}(\bot) = f^N(\bot)$;
- et c'est le plus petit : soit y un point fixe $(f(y) = y)$, $\bot \sqsubseteq y$ donc par croissance de f, $f(\bot) \sqsubseteq f(y) = y$ et par récurrence immédiate $f^N(\bot) \sqsubseteq y$.

$\square$

Sémantique abstraite, calcul effectif (suite et fin)

- $L \rightarrow (\mathbb{V} \rightarrow \mathcal{D}^\sharp)$ est un treillis complet (car $\mathcal{D}^\sharp$ en est un).
- La fonction $F^\sharp : (L \rightarrow (\mathbb{V} \rightarrow \mathcal{D}^\sharp)) \rightarrow (L \rightarrow (\mathbb{V} \rightarrow \mathcal{D}^\sharp))$

$$F^\sharp(R^\sharp) = \begin{cases} 0 & \mapsto \quad \top_{\mathrm{nr}} \\ l' & \mapsto \quad \displaystyle\bigsqcup^\sharp_{\mathrm{nr}\ (l,c,l') \in A} \llbracket c \rrbracket^\sharp_{\mathrm{C}} \left(R^\sharp(l)\right) \end{cases}$$

est monotone et calculable.

Sémantique abstraite, calcul effectif (suite et fin)

- $L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)$ est un treillis complet (car $\mathcal{D}^\sharp$ en est un).
- La fonction $F^\sharp : (L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)) \to (L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp))$

$$F^\sharp(R^\sharp) = \begin{cases} 0 & \mapsto & \top_{\mathrm{nr}} \\ l' & \mapsto & \displaystyle\bigsqcup^\sharp_{\mathrm{nr}\atop (l,c,l')\in A} \llbracket c \rrbracket^\sharp_{\mathrm{C}} (R^\sharp(l)) \end{cases}$$

  est monotone et calculable.
- Donc si la suite $\left(F^{\sharp^n}(L \to \bot_{\mathrm{nr}})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, on a une méthode de calcul de la sémantique abstraite :
  1. On part de $R^{\sharp^0} := L \to \bot_{\mathrm{nr}}$;
  2. on calcule $R^{\sharp^{k+1}} := F^\sharp\left(R^{\sharp^k}\right)$;
  3. on retourne en 2 jusqu'à atteindre un point fixe.

Exemple de calcul du point fixe abstrait

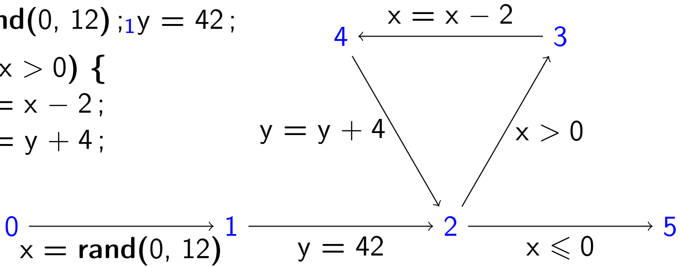
$_{0}\mathsf{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\,;_{1}\mathsf{y} = 42\,;$

$\mathbf{while}\ _{2}(\mathsf{x} > 0)\ \{$

$\quad _{3}\mathsf{x} = \mathsf{x} - 2\,;$

$\quad _{4}\mathsf{y} = \mathsf{y} + 4\,;$

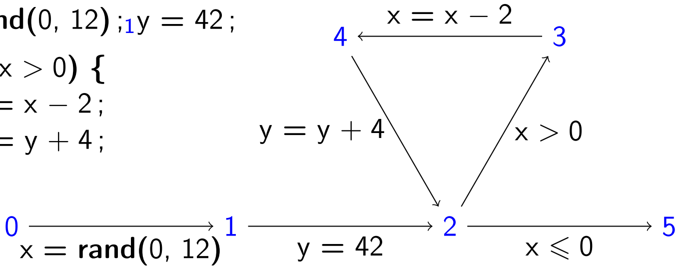
$\}_{5}$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0] \\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right] \\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) **{**
    $_3$x = x − 2 ;
    $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

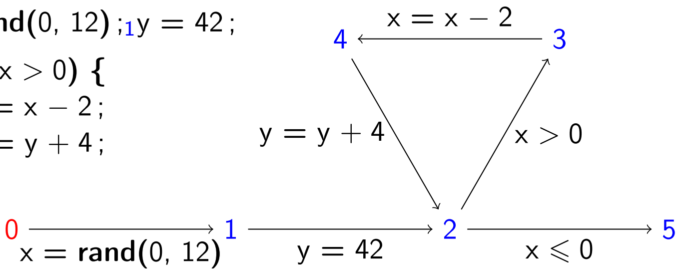


$$
\begin{aligned}
{R_0^\sharp}^{i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
{R_1^\sharp}^{i+1} &= {R_0^\sharp}^{i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0] \\
{R_2^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad {R_4^\sharp}^{i}\left[y \mapsto {R_4^\sharp}^{i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
{R_3^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right] \\
{R_4^\sharp}^{i+1} &= {R_3^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_3^\sharp}^{i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
{R_5^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	${R_l^\sharp}^0$	${R_l^\sharp}^1$	${R_l^\sharp}^2$	${R_l^\sharp}^3$
0	$(\bot, \bot)$			
1	$(\bot, \bot)$			
2	$(\bot, \bot)$			
3	$(\bot, \bot)$			
4	$(\bot, \bot)$			
5	$(\bot, \bot)$			

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_{0}$x = **rand**(0, 12) ;$_{1}$y = 42 ;
while $_{2}$(x > 0) **{**
  $_{3}$x = x − 2 ;
  $_{4}$y = y + 4 ;
}$_{5}$



$$
\begin{aligned}
{R^{\sharp}_0}^{i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
{R^{\sharp}_1}^{i+1} &= {R^{\sharp}_0}^{i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0] \\
{R^{\sharp}_2}^{i+1} &= {R^{\sharp}_1}^{i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} \\
&\quad {R^{\sharp}_4}^{i}\left[y \mapsto {R^{\sharp}_4}^{i}(y) +^{\sharp} (\geqslant 0)\right] \\
{R^{\sharp}_3}^{i+1} &= {R^{\sharp}_2}^{i+1}\left[x \mapsto {R^{\sharp}_2}^{i+1}(x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0\right] \\
{R^{\sharp}_4}^{i+1} &= {R^{\sharp}_3}^{i+1}\left[x \mapsto {R^{\sharp}_3}^{i+1}(x) -^{\sharp} (\geqslant 0)\right] \\
{R^{\sharp}_5}^{i+1} &= {R^{\sharp}_2}^{i+1}\left[x \mapsto {R^{\sharp}_2}^{i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	${R^{\sharp}_l}^0$	${R^{\sharp}_l}^1$	${R^{\sharp}_l}^2$	${R^{\sharp}_l}^3$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$		
1	$(\bot, \bot)$			
2	$(\bot, \bot)$			
3	$(\bot, \bot)$			
4	$(\bot, \bot)$			
5	$(\bot, \bot)$			

Exemple de calcul du point fixe abstrait

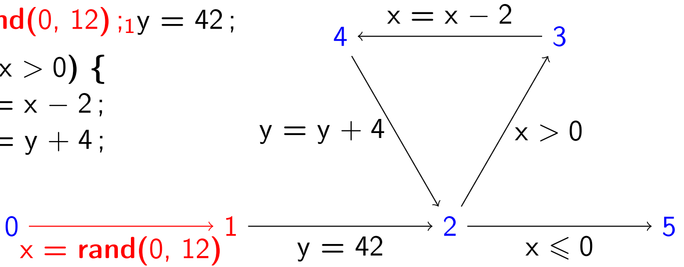
$_0\mathrm{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\,;_1 \mathrm{y} = 42\,;$

$\mathbf{while}\ _2(\mathrm{x} > 0)\ \{$

$\quad _3\mathrm{x} = \mathrm{x} - 2\,;$

$\quad _4\mathrm{y} = \mathrm{y} + 4\,;$

$\}_5$



$$
\begin{aligned}
{R_0^\sharp}^{i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
{R_1^\sharp}^{i+1} &= {R_0^\sharp}^{i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0]\\
{R_2^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}}\\
&\quad {R_4^\sharp}^{i}\left[y \mapsto {R_4^\sharp}^{i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]\\
{R_3^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right]\\
{R_4^\sharp}^{i+1} &= {R_3^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_3^\sharp}^{i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]\\
{R_5^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	${R_l^\sharp}^0$	${R_l^\sharp}^1$	${R_l^\sharp}^2$	${R_l^\sharp}^3$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$		
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$		
2	$(\bot,\bot)$			
3	$(\bot,\bot)$			
4	$(\bot,\bot)$			
5	$(\bot,\bot)$			

Exemple de calcul du point fixe abstrait

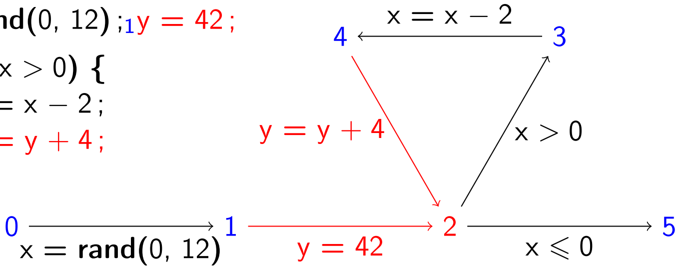
$_0\mathsf{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\,;_1\mathsf{y} = 42\,;$

$\mathbf{while}\ _2(\mathsf{x} > 0)\ \{$

$\quad _3\mathsf{x} = \mathsf{x} - 2\,;$

$\quad _4\mathsf{y} = \mathsf{y} + 4\,;$

$\}_5$



$$
\begin{aligned}
{R_0^\sharp}^{i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
{R_1^\sharp}^{i+1} &= {R_0^\sharp}^{i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0] \\
{R_2^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad {R_4^\sharp}^{i}\left[y \mapsto {R_4^\sharp}^{i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
{R_3^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right] \\
{R_4^\sharp}^{i+1} &= {R_3^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_3^\sharp}^{i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
{R_5^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	${R_l^\sharp}^0$	${R_l^\sharp}^1$	${R_l^\sharp}^2$	${R_l^\sharp}^3$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$		
1	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \top)$		
2	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$		
3	$(\bot, \bot)$			
4	$(\bot, \bot)$			
5	$(\bot, \bot)$			

$$(\geqslant 0, \geqslant 0) \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} (\bot, \bot)$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x $=$ **rand**(0, 12) ; $_1$y $=$ 42 ;
while $_2$(x $>$ 0) **{**
    $_3$x $=$ x $-$ 2 ;
    $_4$y $=$ y $+$ 4 ;
}$_5$

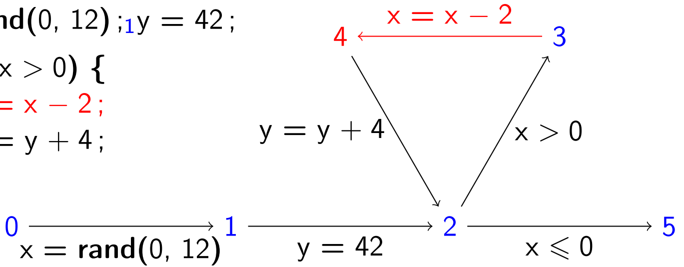
$$\begin{tikzcd}
& & 4 \arrow[dr, "y = y + 4"'] & & 3 \arrow[ll, "x = x - 2"'] \\
0 \arrow[r, "x = \mathbf{rand}(0,\ 12)"'] & 1 \arrow[rr, "y = 42"'] & & 2 \arrow[ur, "x > 0"'] \arrow[rr, "x \leqslant 0"'] & & 5
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
{R_0^\sharp}^{i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
{R_1^\sharp}^{i+1} &= {R_0^\sharp}^{i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0] \\
{R_2^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad\ {R_4^\sharp}^{i}\left[y \mapsto {R_4^\sharp}^{i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
{R_3^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right] \\
{R_4^\sharp}^{i+1} &= {R_3^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_3^\sharp}^{i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
{R_5^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]
\end{aligned}$$

l	${R_l^\sharp}^0$	${R_l^\sharp}^1$	${R_l^\sharp}^2$	${R_l^\sharp}^3$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$		
1	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \top)$		
2	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$		
3	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$		
4	$(\bot, \bot)$			
5	$(\bot, \bot)$			

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
    $_3$x = x − 2 ;
    $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

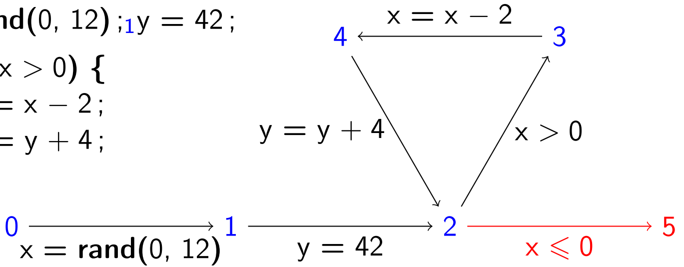


$$
\begin{aligned}
{R_0^\sharp}^{i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
{R_1^\sharp}^{i+1} &= {R_0^\sharp}^{i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0] \\
{R_2^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad {R_4^\sharp}^{i}\left[y \mapsto {R_4^\sharp}^{i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
{R_3^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right] \\
{R_4^\sharp}^{i+1} &= {R_3^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_3^\sharp}^{i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
{R_5^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	${R_l^\sharp}^0$	${R_l^\sharp}^1$	${R_l^\sharp}^2$	${R_l^\sharp}^3$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$		
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$		
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$		
5	$(\bot,\bot)$			

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) **{**
    $_3$x = x − 2 ;
    $_4$y = y + 4 ;
}$_5$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0] \\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} \\
&\qquad R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^{\sharp} (\geqslant 0)\right] \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0\right] \\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^{\sharp} (\geqslant 0)\right] \\
\color{red}{R_5^{\sharp\,i+1}} &\color{red}{= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0\right]}
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$		
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$		
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$		
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

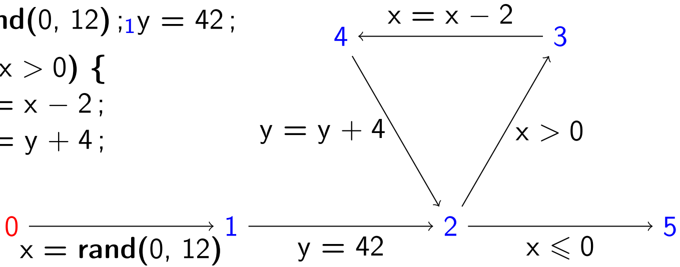
$_{0}\mathtt{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\ ;_{1}\mathtt{y} = 42\ ;$

$\mathbf{while}\ _{2}(\mathtt{x} > 0)\ \{$

$\quad _{3}\mathtt{x} = \mathtt{x} - 2\ ;$

$\quad _{4}\mathtt{y} = \mathtt{y} + 4\ ;$

$\}_{5}$

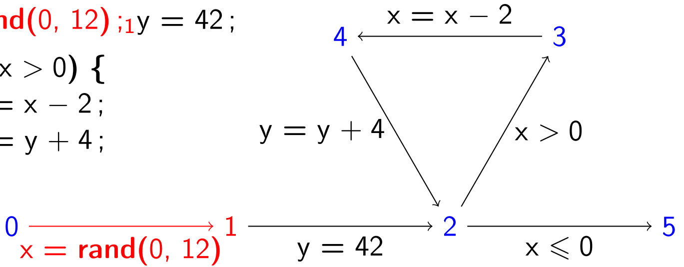


$$
\begin{aligned}
{R_0^{\sharp}}^{i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
{R_1^{\sharp}}^{i+1} &= {R_0^{\sharp}}^{i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0] \\
{R_2^{\sharp}}^{i+1} &= {R_1^{\sharp}}^{i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} \\
&\quad {R_4^{\sharp}}^{i}\left[y \mapsto {R_4^{\sharp}}^{i}(y) +^{\sharp} (\geqslant 0)\right] \\
{R_3^{\sharp}}^{i+1} &= {R_2^{\sharp}}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^{\sharp}}^{i+1}(x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0\right] \\
{R_4^{\sharp}}^{i+1} &= {R_3^{\sharp}}^{i+1}\left[x \mapsto {R_3^{\sharp}}^{i+1}(x) -^{\sharp} (\geqslant 0)\right] \\
{R_5^{\sharp}}^{i+1} &= {R_2^{\sharp}}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^{\sharp}}^{i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	${R_l^{\sharp}}^{0}$	${R_l^{\sharp}}^{1}$	${R_l^{\sharp}}^{2}$	${R_l^{\sharp}}^{3}$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$	
1	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \top)$		
2	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$		
3	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$		
4	$(\bot, \bot)$	$(\top, \geqslant 0)$		
5	$(\bot, \bot)$	$(0, \geqslant 0)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) **{**
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$



$$R_0^{\sharp\,i+1} = \top_{\mathrm{nr}}$$
$$R_1^{\sharp\,i+1} = R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0]$$
$$R_2^{\sharp\,i+1} = R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]$$
$$R_3^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right]$$
$$R_4^{\sharp\,i+1} = R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]$$
$$R_5^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$		
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

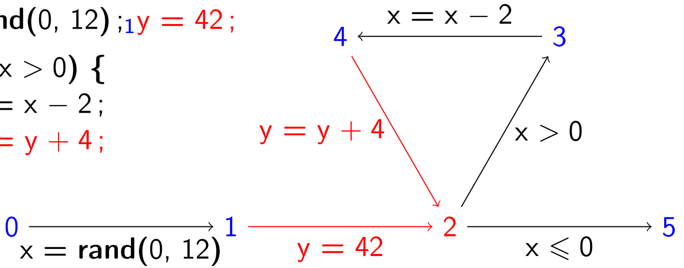
$_0\mathsf{x} = \textbf{rand}(0,\,12)\,;{}_1\mathsf{y} = 42\,;$

$\textbf{while}\ {}_2(\mathsf{x} > 0)\ \{$

$\quad {}_3\mathsf{x} = \mathsf{x} - 2\,;$

$\quad {}_4\mathsf{y} = \mathsf{y} + 4\,;$

$\}_5$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0] \\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right] \\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$		
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$		

$$(\geqslant 0, \geqslant 0) \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} (\top, \geqslant 0)$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

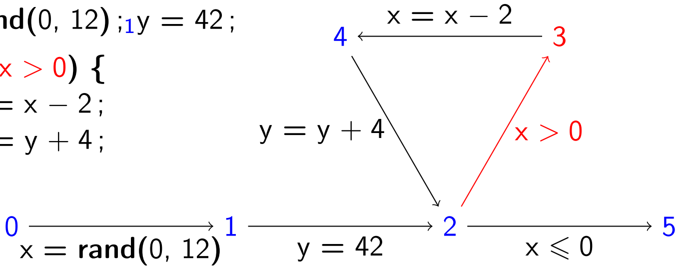
$_0\mathtt{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\ ;_1\mathtt{y} = 42\,;$

$\mathbf{while}\ _2(\mathtt{x} > 0)\ \{$

$\quad _3\mathtt{x} = \mathtt{x} - 2\,;$

$\quad _4\mathtt{y} = \mathtt{y} + 4\,;$

$\}_5$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0]\\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^{\sharp} (\geqslant 0)\right]\\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0\right]\\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^{\sharp} (\geqslant 0)\right]\\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$		
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

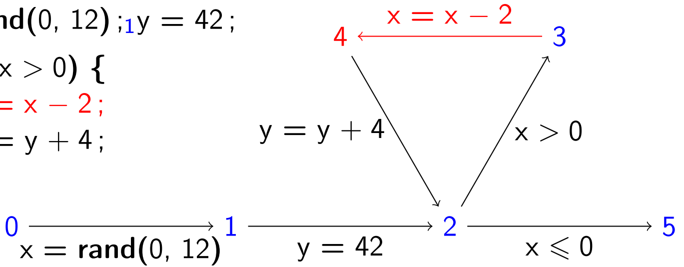
$_0$x $=$ **rand**(0, 12) ;$_1$y $=$ 42 ;

while $_2$(x $>$ 0) **{**

  $_3$x $=$ x $-$ 2 ;

  $_4$y $=$ y $+$ 4 ;

}$_5$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\, i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
R_1^{\sharp\, i+1} &= R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0] \\
R_2^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} \\
&\qquad R_4^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} (\geqslant 0)\right] \\
R_3^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0\right] \\
R_4^{\sharp\, i+1} &= R_3^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} (\geqslant 0)\right] \\
R_5^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	${R_l^{\sharp}}^{0}$	${R_l^{\sharp}}^{1}$	${R_l^{\sharp}}^{2}$	${R_l^{\sharp}}^{3}$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$	
1	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \top)$	$(\geqslant 0, \top)$	
2	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$	
3	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	
4	$(\bot, \bot)$	$(\top, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$	
5	$(\bot, \bot)$	$(0, \geqslant 0)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

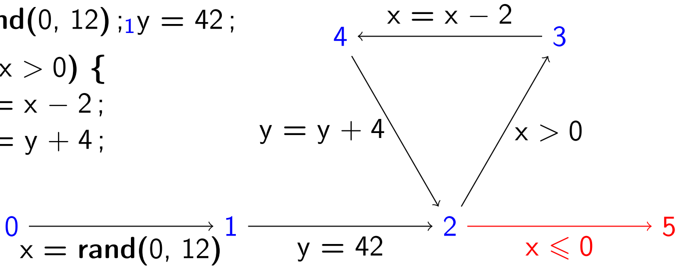
$_0\mathtt{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\ ;{}_1\mathtt{y} = 42\ ;$

$\mathbf{while}\ {}_2(\mathtt{x} > 0)\ \{$

$\quad {}_3\mathtt{x} = \mathtt{x} - 2\ ;$

$\quad {}_4\mathtt{y} = \mathtt{y} + 4\ ;$

$\}_5$

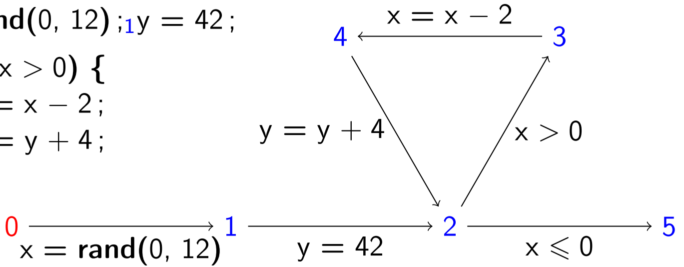


$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0] \\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right] \\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$	
1	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \top)$	$(\geqslant 0, \top)$	
2	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$	
3	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	
4	$(\bot, \bot)$	$(\top, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$	
5	$(\bot, \bot)$	$(0, \geqslant 0)$	$(\leqslant 0, \geqslant 0)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) **{**
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

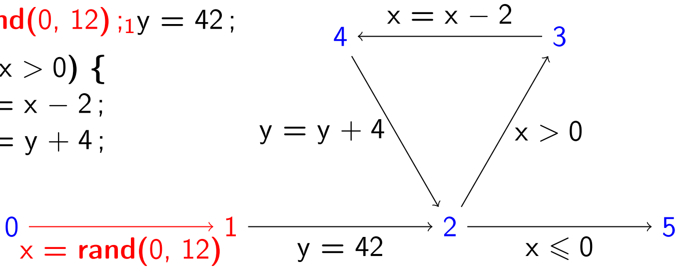


$$
\begin{aligned}
{R^\sharp_0}^{i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
{R^\sharp_1}^{i+1} &= {R^\sharp_0}^{i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0] \\
{R^\sharp_2}^{i+1} &= {R^\sharp_1}^{i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
& \quad {R^\sharp_4}^{i}\left[y \mapsto {R^\sharp_4}^{i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
{R^\sharp_3}^{i+1} &= {R^\sharp_2}^{i+1}\left[x \mapsto {R^\sharp_2}^{i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right] \\
{R^\sharp_4}^{i+1} &= {R^\sharp_3}^{i+1}\left[x \mapsto {R^\sharp_3}^{i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
{R^\sharp_5}^{i+1} &= {R^\sharp_2}^{i+1}\left[x \mapsto {R^\sharp_2}^{i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	${R^\sharp_l}^0$	${R^\sharp_l}^1$	${R^\sharp_l}^2$	${R^\sharp_l}^3$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$
1	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \top)$	$(\geqslant 0, \top)$	
2	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$	
3	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	
4	$(\bot, \bot)$	$(\top, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$	
5	$(\bot, \bot)$	$(0, \geqslant 0)$	$(\leqslant 0, \geqslant 0)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) **{**
    $_3$x = x − 2 ;
    $_4$y = y + 4 ;
}$_5$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0] \\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^{\sharp} (\geqslant 0)\right] \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0\right] \\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^{\sharp} (\geqslant 0)\right] \\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$
1	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \top)$	$(\geqslant 0, \top)$	$(\geqslant 0, \top)$
2	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$	
3	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	
4	$(\bot, \bot)$	$(\top, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$	
5	$(\bot, \bot)$	$(0, \geqslant 0)$	$(\leqslant 0, \geqslant 0)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

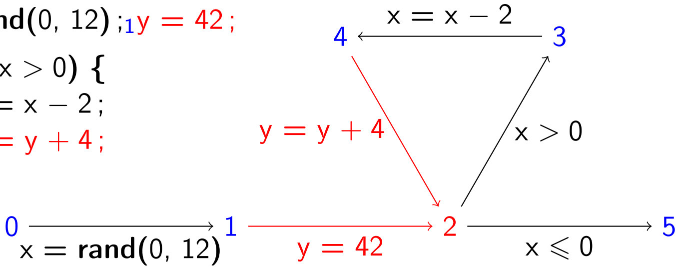
$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;

while $_2$(x > 0) **{**

  $_3$x = x − 2 ;

  $_4$y = y + 4 ;

}$_5$



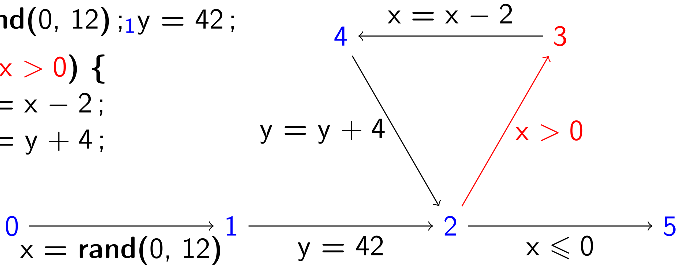
$$
\begin{aligned}
{R_0^\sharp}^{i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
{R_1^\sharp}^{i+1} &= {R_0^\sharp}^{i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0] \\
{R_2^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad {R_4^\sharp}^{i}\left[y \mapsto {R_4^\sharp}^{i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
{R_3^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right] \\
{R_4^\sharp}^{i+1} &= {R_3^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_3^\sharp}^{i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
{R_5^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	${R_l^\sharp}^0$	${R_l^\sharp}^1$	${R_l^\sharp}^2$	${R_l^\sharp}^3$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$
1	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \top)$	$(\geqslant 0, \top)$	$(\geqslant 0, \top)$
2	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$
3	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	
4	$(\bot, \bot)$	$(\top, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$	
5	$(\bot, \bot)$	$(0, \geqslant 0)$	$(\leqslant 0, \geqslant 0)$	

$$(\geqslant 0, \geqslant 0) \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} (\top, \geqslant 0)$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

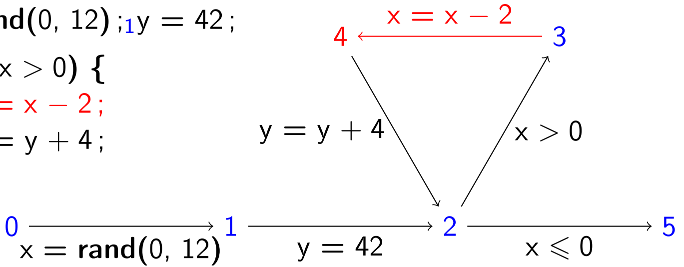


$$
\begin{aligned}
{R_0^\sharp}^{i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
{R_1^\sharp}^{i+1} &= {R_0^\sharp}^{i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0] \\
{R_2^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad {R_4^\sharp}^{i}\left[y \mapsto {R_4^\sharp}^{i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
{R_3^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right] \\
{R_4^\sharp}^{i+1} &= {R_3^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_3^\sharp}^{i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
{R_5^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	${R_l^\sharp}^0$	${R_l^\sharp}^1$	${R_l^\sharp}^2$	${R_l^\sharp}^3$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$	$(\leqslant 0,\geqslant 0)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) **{**
    $_3$x = x − 2 ;
    $_4$y = y + 4 ;
}$_5$



$$
\begin{aligned}
{R_0^\sharp}^{i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
{R_1^\sharp}^{i+1} &= {R_0^\sharp}^{i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0]\\
{R_2^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}}\\
&\quad {R_4^\sharp}^{i}\left[y \mapsto {R_4^\sharp}^{i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]\\
{R_3^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right]\\
{R_4^\sharp}^{i+1} &= {R_3^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_3^\sharp}^{i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]\\
{R_5^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	${R_l^\sharp}^0$	${R_l^\sharp}^1$	${R_l^\sharp}^2$	${R_l^\sharp}^3$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$
1	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \top)$	$(\geqslant 0, \top)$	$(\geqslant 0, \top)$
2	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$
3	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$
4	$(\bot, \bot)$	$(\top, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$
5	$(\bot, \bot)$	$(0, \geqslant 0)$	$(\leqslant 0, \geqslant 0)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

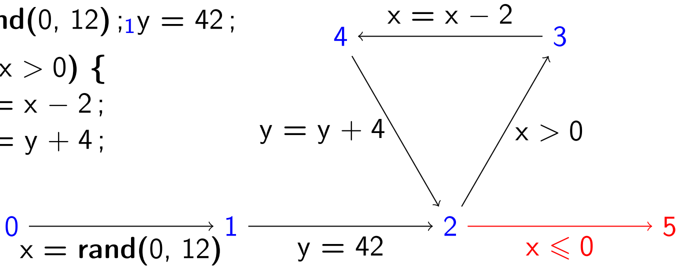
$_0\mathrm{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\,;{}_1\mathrm{y} = 42\,;$

$\mathbf{while}\ {}_2(\mathrm{x} > 0)\ \{$

$\quad {}_3\mathrm{x} = \mathrm{x} - 2\,;$

$\quad {}_4\mathrm{y} = \mathrm{y} + 4\,;$

$\}_5$



$$
\begin{aligned}
{R_0^\sharp}^{i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
{R_1^\sharp}^{i+1} &= {R_0^\sharp}^{i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0] \\
{R_2^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad {R_4^\sharp}^{i}\left[y \mapsto {R_4^\sharp}^{i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
{R_3^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right] \\
{R_4^\sharp}^{i+1} &= {R_3^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_3^\sharp}^{i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right] \\
{R_5^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	${R_l^\sharp}^0$	${R_l^\sharp}^1$	${R_l^\sharp}^2$	${R_l^\sharp}^3$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$	$(\leqslant 0,\geqslant 0)$	$(\leqslant 0,\geqslant 0)$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0\mathtt{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\,;_1\mathtt{y} = 42\,;$

$\mathbf{while}\ _2(\mathtt{x} > 0)\ \{$

$\quad _3\mathtt{x} = \mathtt{x} - 2\,;$

$\quad _4\mathtt{y} = \mathtt{y} + 4\,;$

$\}_5$

$$
\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[dr, "y = y + 4"'] & & 3 \arrow[ll, "x = x - 2"'] & \\
0 \arrow[r, "x = \mathbf{rand}(0,\ 12)"'] & 1 \arrow[rr, "y = 42"'] & & 2 \arrow[ur, "x > 0"'] \arrow[rr, "x \leqslant 0"'] & & 5
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0] \\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} \\
&\quad\; R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^{\sharp} (\geqslant 0)\right] \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0\right] \\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^{\sharp} (\geqslant 0)\right] \\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$
1	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \top)$	$(\geqslant 0, \top)$	$(\geqslant 0, \top)$
2	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$
3	$(\bot, \bot)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$
4	$(\bot, \bot)$	$(\top, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$
5	$(\bot, \bot)$	$(0, \geqslant 0)$	$(\leqslant 0, \geqslant 0)$	$(\leqslant 0, \geqslant 0)$

On a atteint le point fixe !

Correction et terminaison

Théorème (correction)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_l \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_l^\sharp\right)$$

Correction et terminaison

Théorème (correction)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_l \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_l^\sharp\right)$$

Propriété (terminaison)

Le calcul du point fixe par itérations termine.

Correction et terminaison

Théorème (correction)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_l \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_l^\sharp\right)$$

Propriété (terminaison)

Le calcul du point fixe par itérations termine.

Démonstration.

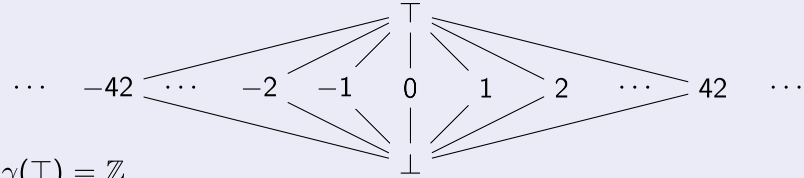
$\mathcal{D}^\sharp$ est fini donc $L \to \left(\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp\right)$ également

donc la suite croissante $\left({R^\sharp}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. $\square$

Domaine des constantes

Définition

Treillis des constantes $(\mathcal{D}^\sharp, \sqsubseteq^\sharp)$

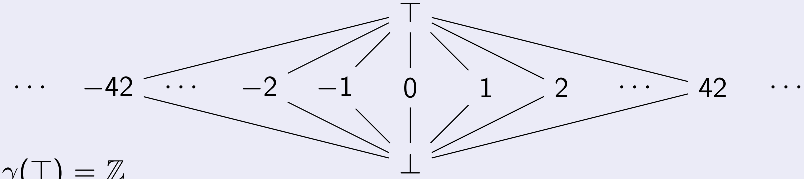


$\gamma(\top) = \mathbb{Z}$
$\gamma(n) \ = \{\, n \,\}$
$\gamma(\bot) = \emptyset$

Domaine des constantes

Définition

Treillis des constantes $(\mathcal{D}^\sharp, \sqsubseteq^\sharp)$



$$
\begin{aligned}
\gamma(\top) &= \mathbb{Z} \\
\gamma(n) &= \{\, n \,\} \\
\gamma(\perp) &= \emptyset
\end{aligned}
$$

Remarque

L'ordre $\sqsubseteq^\sharp$ ci dessus est correct par rapport à l'ordre $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Domaine des constantes, meilleure abstraction

Remarque

On a bien une correspondance de Galois avec

$$\alpha(S) = \begin{cases} \top & \text{si } \mathrm{card}(S) \geqslant 2 \\ n & \text{si } S = \{\, n \,\} \\ \bot & \text{si } S = \emptyset \end{cases}$$

Domaine des constantes, opérations arithmétiques abstraites

- $n^\sharp = \alpha(\{ n \}) = n$

Domaine des constantes, opérations arithmétiques abstraites

- $n^\sharp = \alpha(\{\, n \,\}) = n$
- $\mathbf{rand}^\sharp(n_1, n_2) = \alpha(\llbracket n_1, n_2 \rrbracket) = \begin{cases} \top & \text{si } n_1 < n_2 \\ n_1 & \text{si } n_1 = n_2 \\ \bot & \text{si } n_1 > n_2 \end{cases}$

Domaine des constantes, opérations arithmétiques abstraites

- $n^\sharp = \alpha(\{\, n \,\}) = n$
- $\textbf{rand}^\sharp(n_1, n_2) = \alpha([\![n_1, n_2]\!]) = \begin{cases} \top & \text{si } n_1 < n_2 \\ n_1 & \text{si } n_1 = n_2 \\ \bot & \text{si } n_1 > n_2 \end{cases}$
- $x^\sharp +^\sharp y^\sharp = \alpha\left(\left\{x + y \;\middle|\; x \in \gamma(x^\sharp), y \in \gamma(y^\sharp)\right\}\right) =$

$$\begin{cases} \top & \text{si } x^\sharp = \top \text{ ou } y^\sharp = \top \\ n_1 + n_2 & \text{si } x^\sharp = n_1 \text{ et } y^\sharp = n_2 \\ \bot & \text{si } x^\sharp = \bot \text{ ou } y^\sharp = \bot \end{cases}$$

- ...

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_{0}\mathrm{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\,;_{1}\mathrm{y} = 15\,;$

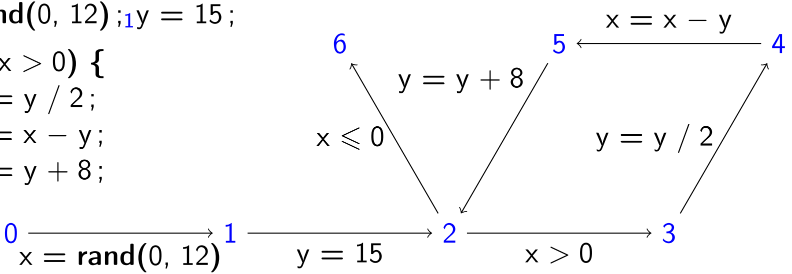
$\mathbf{while}\ _{2}(\mathrm{x} > 0)\ \{$

$\quad {}_{3}\mathrm{y} = \mathrm{y}\ /\ 2\,;$

$\quad {}_{4}\mathrm{x} = \mathrm{x} - \mathrm{y}\,;$

$\quad {}_{5}\mathrm{y} = \mathrm{y} + 8\,;$

$\}_{6}$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \top] \\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_5^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\,i}(y) +^{\sharp} 8\right] \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1} \\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(y) /^{\sharp} 2\right] \\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_4^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\,i+1}(x) -^{\sharp} R_4^{\sharp\,i+1}(y)\right] \\
R_6^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}
\end{aligned}
$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) **{**
    $_3$y = y / 2 ;
    $_4$x = x − y ;
    $_5$y = y + 8 ;
}$_6$

$$
\begin{tikzcd}
 & & 6 & & 5 \arrow[dl, "y = y + 8"'] & & 4 \arrow[ll, "x = x - y"'] \\
0 \arrow[r, "x = \mathbf{rand}(0,\ 12)"'] & 1 \arrow[rr, "y = 15"'] & & 2 \arrow[ul, "x \leqslant 0"] \arrow[rr, "x > 0"'] & & 3 \arrow[ur, "y = y / 2"] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
{R_0^\sharp}^{i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
{R_1^\sharp}^{i+1} &= {R_0^\sharp}^{i+1}\,[x \mapsto \top] \\
{R_2^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad {R_5^\sharp}^{i}\left[y \mapsto {R_5^\sharp}^{i}(y) +^\sharp 8\right] \\
{R_3^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1} \\
{R_4^\sharp}^{i+1} &= {R_3^\sharp}^{i+1}\left[y \mapsto {R_3^\sharp}^{i+1}(y) /^\sharp 2\right] \\
{R_5^\sharp}^{i+1} &= {R_4^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_4^\sharp}^{i+1}(x) -^\sharp {R_4^\sharp}^{i+1}(y)\right] \\
{R_6^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}
\end{aligned}
$$

l	${R_l^\sharp}^0$	${R_l^\sharp}^1$	${R_l^\sharp}^2$
0	$(\bot, \bot)$		
1	$(\bot, \bot)$		
2	$(\bot, \bot)$		
3	$(\bot, \bot)$		
4	$(\bot, \bot)$		
5	$(\bot, \bot)$		
6	$(\bot, \bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 15 ;

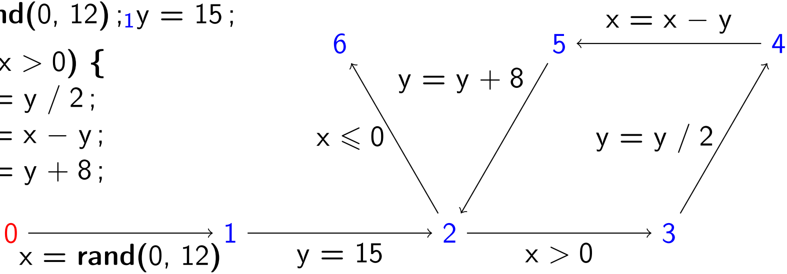
while $_2$(x > 0) **{**

  $_3$y = y / 2 ;

  $_4$x = x − y ;

  $_5$y = y + 8 ;

}$_6$



$$
\begin{aligned}
{R_0^\sharp}^{i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
{R_1^\sharp}^{i+1} &= {R_0^\sharp}^{i+1}\,[x \mapsto \top] \\
{R_2^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad {R_5^\sharp}^{i}\left[y \mapsto {R_5^\sharp}^{i}(y) +^\sharp 8\right] \\
{R_3^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1} \\
{R_4^\sharp}^{i+1} &= {R_3^\sharp}^{i+1}\left[y \mapsto {R_3^\sharp}^{i+1}(y) /^\sharp 2\right] \\
{R_5^\sharp}^{i+1} &= {R_4^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_4^\sharp}^{i+1}(x) -^\sharp {R_4^\sharp}^{i+1}(y)\right] \\
{R_6^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}
\end{aligned}
$$

l	${R_l^\sharp}^0$	${R_l^\sharp}^1$	${R_l^\sharp}^2$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	
1	$(\bot, \bot)$		
2	$(\bot, \bot)$		
3	$(\bot, \bot)$		
4	$(\bot, \bot)$		
5	$(\bot, \bot)$		
6	$(\bot, \bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;

while $_2$(x > 0) **{**

  $_3$y = y / 2 ;

  $_4$x = x − y ;

  $_5$y = y + 8 ;

}$_6$

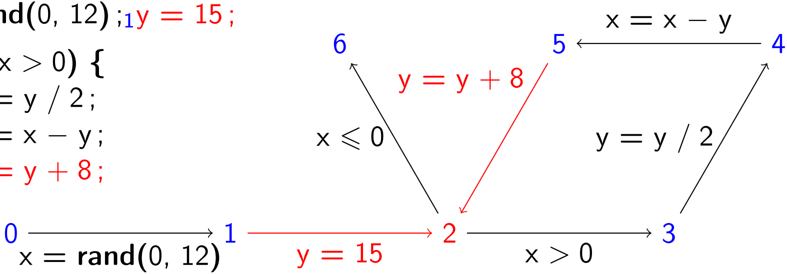
$$\begin{tikzcd}
 & & 6 & & 5 \arrow[dl, "y = y + 8"'] & & 4 \arrow[ll, "x = x - y"'] \\
0 \arrow[r, "x = \mathbf{rand}(0,\,12)"'] & 1 \arrow[rr, "y = 15"'] & & 2 \arrow[ul, "x \leqslant 0"] \arrow[rr, "x > 0"'] & & 3 \arrow[ur, "y = y / 2"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
R_0^{\sharp\, i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
R_1^{\sharp\, i+1} &= R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \top] \\
R_2^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_5^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} 8\right] \\
R_3^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1} \\
R_4^{\sharp\, i+1} &= R_3^{\sharp\, i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(y) /^{\sharp} 2\right] \\
R_5^{\sharp\, i+1} &= R_4^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} R_4^{\sharp\, i+1}(y)\right] \\
R_6^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}
\end{aligned}$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	
1	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	
2	$(\bot, \bot)$		
3	$(\bot, \bot)$		
4	$(\bot, \bot)$		
5	$(\bot, \bot)$		
6	$(\bot, \bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

```
₀x = rand(0, 12) ;₁y = 15;
while ₂(x > 0) {
    ₃y = y / 2;
    ₄x = x - y;
    ₅y = y + 8;
}₆
```



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \top]\\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_5^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\,i}(y) +^\sharp 8\right]\\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(y) /^\sharp 2\right]\\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_4^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp R_4^{\sharp\,i+1}(y)\right]\\
R_6^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	
1	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	
2	$(\bot, \bot)$	$(\top, 15)$	
3	$(\bot, \bot)$		
4	$(\bot, \bot)$		
5	$(\bot, \bot)$		
6	$(\bot, \bot)$		

$$(\top, 15) \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} (\bot, \bot)$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
    $_3$y = y / 2 ;
    $_4$x = x − y ;
    $_5$y = y + 8 ;
}$_6$

$$
\begin{tikzcd}
 & 6 & & 5 \arrow[dl, "y = y + 8"'] & & 4 \arrow[ll, "x = x - y"'] \\
0 \arrow[r, "x = \mathbf{rand}(0,\,12)"'] & 1 \arrow[r, "y = 15"'] & 2 \arrow[ul, "x \leqslant 0"] \arrow[rr, "x > 0"'] & & 3 \arrow[ur, "y = y\,/\,2"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \top]\\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_5^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\,i}(y) +^{\sharp} 8\right]\\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(y) /^{\sharp} 2\right]\\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_4^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\,i+1}(x) -^{\sharp} R_4^{\sharp\,i+1}(y)\right]\\
R_6^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	
1	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	
2	$(\bot, \bot)$	$(\top, 15)$	
3	$(\bot, \bot)$	$(\top, 15)$	
4	$(\bot, \bot)$		
5	$(\bot, \bot)$		
6	$(\bot, \bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0\mathrm{x} = \textbf{rand}(0,\ 12)\ ;_1\mathrm{y} = 15\ ;$

$\textbf{while}\ _2(\mathrm{x} > 0)\ \{$

$\quad {}_3\mathrm{y} = \mathrm{y}\ /\ 2\ ;$

$\quad {}_4\mathrm{x} = \mathrm{x} - \mathrm{y}\ ;$

$\quad {}_5\mathrm{y} = \mathrm{y} + 8\ ;$

$\}_6$

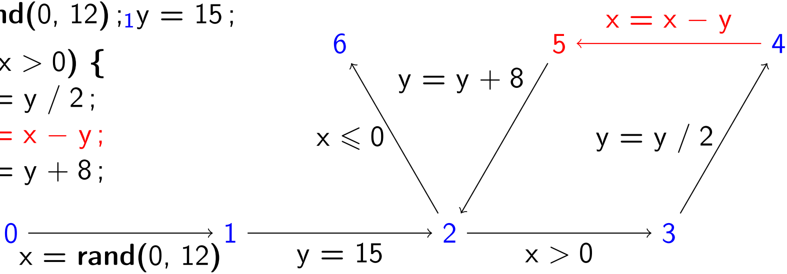
$$\begin{tikzcd}
 & & 6 & & 5 \arrow[dl, "\mathrm{y} = \mathrm{y} + 8"'] & & 4 \arrow[ll, "\mathrm{x} = \mathrm{x} - \mathrm{y}"'] \\
0 \arrow[r, "\mathrm{x} = \textbf{rand}(0,\ 12)"'] & 1 \arrow[rr, "\mathrm{y} = 15"'] & & 2 \arrow[ul, "\mathrm{x} \leqslant 0"] \arrow[rr, "\mathrm{x} > 0"'] & & 3 \arrow[ur, "\mathrm{y} = \mathrm{y}\ /\ 2"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \top] \\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_5^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\,i}(y) +^\sharp 8\right] \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1} \\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(y) /^\sharp 2\right] \\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_4^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp R_4^{\sharp\,i+1}(y)\right] \\
R_6^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}
\end{aligned}$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	
1	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	
2	$(\bot, \bot)$	$(\top, 15)$	
3	$(\bot, \bot)$	$(\top, 15)$	
4	$(\bot, \bot)$	$(\top, 7)$	
5	$(\bot, \bot)$		
6	$(\bot, \bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) **{**
    $_3$y = y / 2 ;
    $_4$x = x − y ;
    $_5$y = y + 8 ;
}$_6$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \top] \\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_5^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\,i}(y) +^{\sharp} 8\right] \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1} \\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(y) /^{\sharp} 2\right] \\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_4^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\,i+1}(x) -^{\sharp} R_4^{\sharp\,i+1}(y)\right] \\
R_6^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	
1	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	
2	$(\bot, \bot)$	$(\top, 15)$	
3	$(\bot, \bot)$	$(\top, 15)$	
4	$(\bot, \bot)$	$(\top, 7)$	
5	$(\bot, \bot)$	$(\top, 7)$	
6	$(\bot, \bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 15 ;

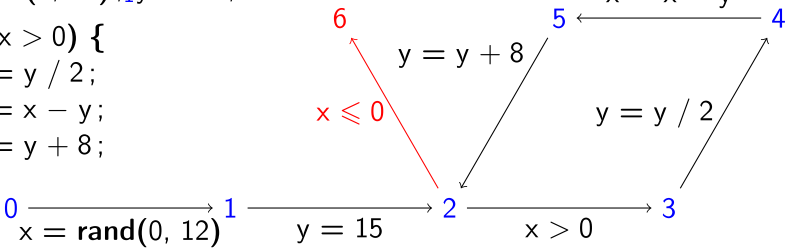
while $_2$(x > 0) **{**

  $_3$y = y / 2 ;

  $_4$x = x − y ;

  $_5$y = y + 8 ;

}$_6$

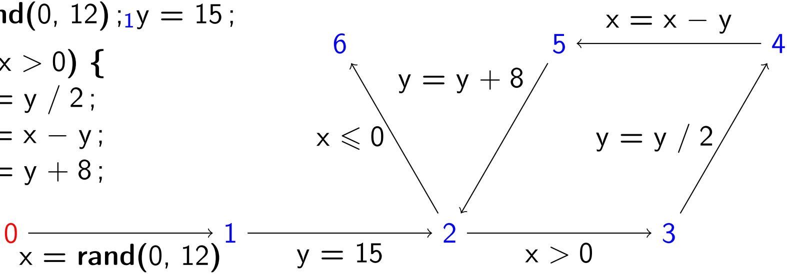


$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \top]\\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_5^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\,i}(y) +^\sharp 8\right]\\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(y)/^\sharp 2\right]\\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_4^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp R_4^{\sharp\,i+1}(y)\right]\\
R_6^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
5	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
6	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
    $_3$y = y / 2 ;
    $_4$x = x − y ;
    $_5$y = y + 8 ;
}$_6$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\, i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\, i+1} &= R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \top]\\
R_2^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_5^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} 8\right]\\
R_3^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\\
R_4^{\sharp\, i+1} &= R_3^{\sharp\, i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(y) /^{\sharp} 2\right]\\
R_5^{\sharp\, i+1} &= R_4^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} R_4^{\sharp\, i+1}(y)\right]\\
R_6^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
5	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
6	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
    $_3$y = y / 2 ;
    $_4$x = x − y ;
    $_5$y = y + 8 ;
}$_6$

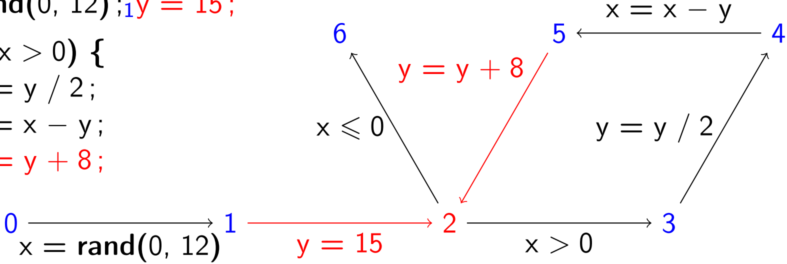
$$\begin{tikzcd}
 & & 6 & & 5 \arrow[dl, "\mathrm{y} = \mathrm{y} + 8"'] & & 4 \arrow[ll, "\mathrm{x} = \mathrm{x} - \mathrm{y}"'] \\
0 \arrow[r, "\mathrm{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)"'] & 1 \arrow[rr, "\mathrm{y} = 15"'] & & 2 \arrow[ul, "\mathrm{x} \leqslant 0"] \arrow[rr, "\mathrm{x} > 0"'] & & 3 \arrow[ur, "\mathrm{y} = \mathrm{y}\ /\ 2"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
R_0^{\sharp\, i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
R_1^{\sharp\, i+1} &= R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \top] \\
R_2^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_5^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\, i}(y) +^\sharp 8\right] \\
R_3^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1} \\
R_4^{\sharp\, i+1} &= R_3^{\sharp\, i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(y) /^\sharp 2\right] \\
R_5^{\sharp\, i+1} &= R_4^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\, i+1}(x) -^\sharp R_4^{\sharp\, i+1}(y)\right] \\
R_6^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}
\end{aligned}$$

l	$R_l^{\sharp\, 0}$	$R_l^{\sharp\, 1}$	$R_l^{\sharp\, 2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
5	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
6	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

```
₀x = rand(0, 12) ;₁y = 15 ;
while ₂(x > 0) {
      ₃y = y / 2 ;
      ₄x = x − y ;
      ₅y = y + 8 ;
}₆
```



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \top]\\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_5^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\,i}(y) +^{\sharp} 8\right]\\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(y) /^{\sharp} 2\right]\\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_4^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\,i+1}(x) -^{\sharp} R_4^{\sharp\,i+1}(y)\right]\\
R_6^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
5	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
6	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	

$$(\top, 15) \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} (\top, 7+8)$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$${}_0\mathrm{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\ ;{}_1\mathrm{y} = 15\ ;$$
$$\mathbf{while}\ {}_2(\mathrm{x} > 0)\ \{$$
$$\quad {}_3\mathrm{y} = \mathrm{y}\ /\ 2\ ;$$
$$\quad {}_4\mathrm{x} = \mathrm{x} - \mathrm{y}\ ;$$
$$\quad {}_5\mathrm{y} = \mathrm{y} + 8\ ;$$
$$\}_6$$

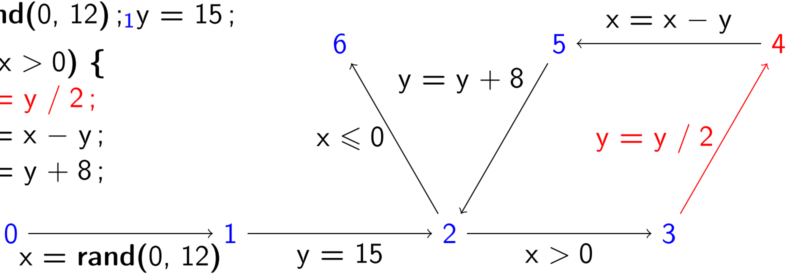
$$\begin{tikzcd}
& & & 6 & & 5 \arrow[dl, "\mathrm{y} = \mathrm{y} + 8"'] & & 4 \arrow[ll, "\mathrm{x} = \mathrm{x} - \mathrm{y}"'] \\
0 \arrow[rr, "\mathrm{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)"'] & & 1 \arrow[rr, "\mathrm{y} = 15"'] & & 2 \arrow[ul, "\mathrm{x} \leqslant 0"] \arrow[rr, "\mathrm{x} > 0"'] & & 3 \arrow[ur, "\mathrm{y} = \mathrm{y}\ /\ 2"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
R_0^{\sharp\, i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
R_1^{\sharp\, i+1} &= R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \top] \\
R_2^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_5^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} 8\right] \\
R_3^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1} \\
R_4^{\sharp\, i+1} &= R_3^{\sharp\, i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(y) /^{\sharp} 2\right] \\
R_5^{\sharp\, i+1} &= R_4^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} R_4^{\sharp\, i+1}(y)\right] \\
R_6^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}
\end{aligned}$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
5	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
6	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) **{**
  $_3$y = y / 2 ;
  $_4$x = x − y ;
  $_5$y = y + 8 ;
}$_6$

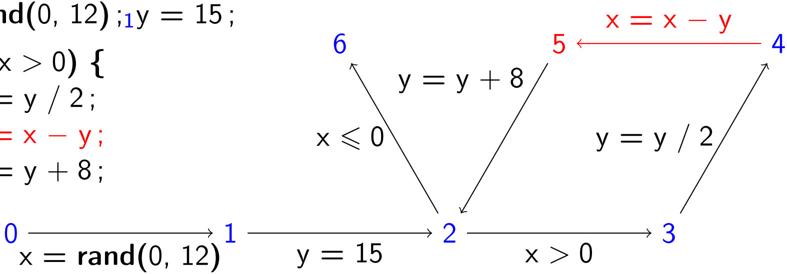


$$
\begin{aligned}
{R_0^\sharp}^{i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
{R_1^\sharp}^{i+1} &= {R_0^\sharp}^{i+1}\,[x \mapsto \top] \\
{R_2^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad {R_5^\sharp}^{i}\left[y \mapsto {R_5^\sharp}^{i}(y) +^\sharp 8\right] \\
{R_3^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1} \\
{R_4^\sharp}^{i+1} &= {R_3^\sharp}^{i+1}\left[y \mapsto {R_3^\sharp}^{i+1}(y) /^\sharp 2\right] \\
{R_5^\sharp}^{i+1} &= {R_4^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_4^\sharp}^{i+1}(x) -^\sharp {R_4^\sharp}^{i+1}(y)\right] \\
{R_6^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}
\end{aligned}
$$

l	${R_l^\sharp}^0$	${R_l^\sharp}^1$	${R_l^\sharp}^2$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$
1	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$
2	$(\bot, \bot)$	$(\top, 15)$	$(\top, 15)$
3	$(\bot, \bot)$	$(\top, 15)$	$(\top, 15)$
4	$(\bot, \bot)$	$(\top, 7)$	$(\top, 7)$
5	$(\bot, \bot)$	$(\top, 7)$	
6	$(\bot, \bot)$	$(\top, 15)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
    $_3$y = y / 2 ;
    $_4$x = x − y ;
    $_5$y = y + 8 ;
}$_6$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \top] \\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} \\
&\quad\; R_5^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\,i}(y) +^{\sharp} 8\right] \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1} \\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(y) /^{\sharp} 2\right] \\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_4^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\,i+1}(x) -^{\sharp} R_4^{\sharp\,i+1}(y)\right] \\
R_6^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	$(\top,7)$
5	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	$(\top,7)$
6	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;

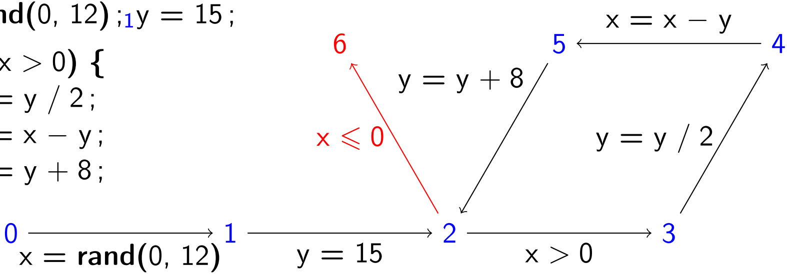
while $_2$(x > 0) **{**

  $_3$y = y / 2 ;

  $_4$x = x − y ;

  $_5$y = y + 8 ;

}$_6$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \top] \\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_5^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\,i}(y) +^{\sharp} 8\right] \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1} \\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(y) /^{\sharp} 2\right] \\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_4^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\,i+1}(x) -^{\sharp} R_4^{\sharp\,i+1}(y)\right] \\
R_6^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	$(\top,7)$
5	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	$(\top,7)$
6	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;

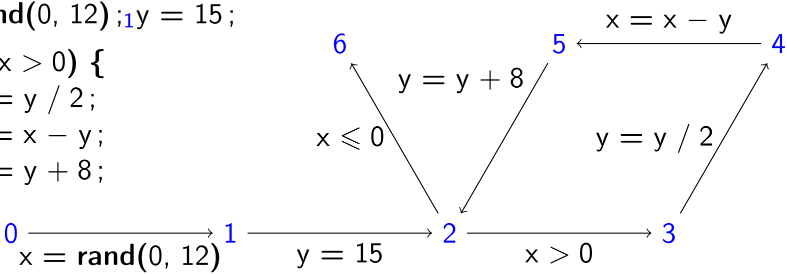
while $_2$(x > 0) **{**

  $_3$y = y / 2 ;

  $_4$x = x − y ;

  $_5$y = y + 8 ;

}$_6$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\, i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
R_1^{\sharp\, i+1} &= R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \top] \\
R_2^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_5^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} 8\right] \\
R_3^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1} \\
R_4^{\sharp\, i+1} &= R_3^{\sharp\, i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(y) /^{\sharp} 2\right] \\
R_5^{\sharp\, i+1} &= R_4^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} R_4^{\sharp\, i+1}(y)\right] \\
R_6^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	$(\top,7)$
5	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	$(\top,7)$
6	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$

On a atteint le point fixe !

Correction et terminaison

Théorème (correction, *pareil que pour les signes*)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_l \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_l^\sharp\right)$$

Correction et terminaison

Théorème (correction, *pareil que pour les signes*)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_l \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_l^\sharp\right)$$

Propriété (terminaison)

Le calcul du point fixe par itérations termine.

Correction et terminaison

Théorème (correction, *pareil que pour les signes*)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_l \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_l^\sharp\right)$$

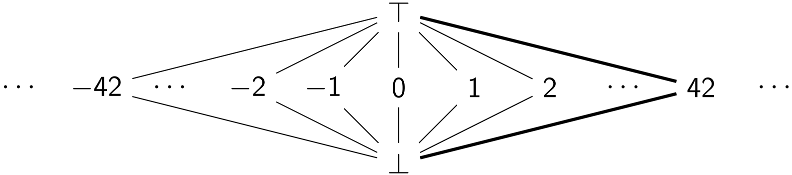
Propriété (terminaison)

Le calcul du point fixe par itérations termine.

Démonstration.

$\mathcal{D}^\sharp$ est infini mais n'a pas de chaîne strictement croissante infinie donc $L \to \left(\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp\right)$ non plus donc la suite croissante $\left({R^\sharp}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. $\square$

Le treillis des constantes n'a pas de chaîne croissante infinie



Remarques

- Le domaine des constantes est souvent appelé Killdall.
- Il est utilisé en compilation pour faire du constant folding.

Remarques

- Le domaine des constantes est souvent appelé Killdall.
- Il est utilisé en compilation pour faire du constant folding.
- Démo GCC.

Remarques

- Le domaine des constantes est souvent appelé Killdall.
- Il est utilisé en compilation pour faire du constant folding.
- Démo GCC.
- Le domaine des constantes est en fait
  le domaine des singletons de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
- Sur le même principe, on peut construire pour un $n \in \mathbb{N}$
  quelconque un domaine « ensembles d'au plus n éléments ».

Domaine des intervalles

Définition

Treillis des intervalles $(\mathcal{D}^\sharp, \sqsubseteq^\sharp)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & & & \rrbracket -\infty, +\infty \llbracket \arrow[d, dash, dotted] & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & \\
 & & \cdots & & \llbracket -1, 1 \rrbracket \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots & & \\
 & \cdots & & \llbracket -1, 0 \rrbracket \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \llbracket 0, 1 \rrbracket \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots & \\
 \cdots & & \llbracket -1, -1 \rrbracket & & \llbracket 0, 0 \rrbracket & & \llbracket 1, 1 \rrbracket & & \cdots \\
 & & & & \bot \arrow[ull, dash] \arrow[u, dash] \arrow[urr, dash] & & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(\rrbracket -\infty, +\infty \llbracket) &= \rrbracket -\infty, +\infty \llbracket \\
\gamma(\rrbracket -\infty, n \rrbracket) &= \rrbracket -\infty, n \rrbracket \\
\gamma(\llbracket n, +\infty \llbracket) &= \llbracket n, +\infty \llbracket \\
\gamma(\llbracket n_1, n_2 \rrbracket) &= \llbracket n_1, n_2 \rrbracket \\
\gamma(\bot) &= \emptyset
\end{aligned}$$

Domaine des intervalles

Définition

Treillis des intervalles $(\mathcal{D}^\sharp, \sqsubseteq^\sharp)$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & & & \rrbracket -\infty, +\infty \llbracket \arrow[d, dash, dotted] & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & \\
 & & \cdots & & \llbracket -1, 1 \rrbracket \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots & & \\
 & \cdots & & \llbracket -1, 0 \rrbracket \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \llbracket 0, 1 \rrbracket \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots & \\
 \cdots & & \llbracket -1, -1 \rrbracket \arrow[drr, dash] & & \llbracket 0, 0 \rrbracket \arrow[d, dash] & & \llbracket 1, 1 \rrbracket \arrow[dll, dash] & & \cdots \\
 & & & & \perp & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma(\rrbracket -\infty, +\infty \llbracket) &= \rrbracket -\infty, +\infty \llbracket \\
\gamma(\rrbracket -\infty, n \rrbracket) &= \rrbracket -\infty, n \rrbracket \\
\gamma(\llbracket n, +\infty \llbracket) &= \llbracket n, +\infty \llbracket \\
\gamma(\llbracket n_1, n_2 \rrbracket) &= \llbracket n_1, n_2 \rrbracket \\
\gamma(\perp) &= \emptyset
\end{aligned}
$$

Remarque

L'ordre est correct.

Domaine des intervalles, meilleure abstraction

Remarque

On a bien une correspondance de Galois avec

$$\alpha(S) = \begin{cases} [\![n_1, n_2]\!] & \text{avec } n_1 = \min S \text{ et } n_2 = \max S \\ \bot & \text{si } S = \emptyset \end{cases}$$

Domaine des intervalles, opérations arithmétiques abstraites

- $n^\sharp = \alpha(\{\, n \,\}) = [\![n, n]\!]$

Domaine des intervalles, opérations arithmétiques abstraites

- $n^\sharp = \alpha(\{\, n \,\}) = [\![n, n]\!]$
- $\mathbf{rand}^\sharp(n_1, n_2) = \alpha([\![n_1, n_2]\!]) = \begin{cases} [\![n_1, n_2]\!] & \text{si } n_1 \leqslant n_2 \\ \bot & \text{si } n_1 > n_2 \end{cases}$

Domaine des intervalles, opérations arithmétiques abstraites

- $n^\sharp = \alpha(\{\, n \,\}) = [\![n, n]\!]$
- $\mathbf{rand}^\sharp(n_1, n_2) = \alpha([\![n_1, n_2]\!]) = \begin{cases} [\![n_1, n_2]\!] & \text{si } n_1 \leqslant n_2 \\ \bot & \text{si } n_1 > n_2 \end{cases}$
- $x^\sharp +^\sharp y^\sharp = \alpha\left(\left\{x + y \;\middle|\; x \in \gamma(x^\sharp), y \in \gamma(y^\sharp)\right\}\right) =$

$$\begin{cases} [\![a + c, b + d]\!] & \text{avec } x^\sharp = [\![a, b]\!] \text{ et } y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ \bot & \text{si } x^\sharp = \bot \text{ ou } y^\sharp = \bot \end{cases}$$

- ...

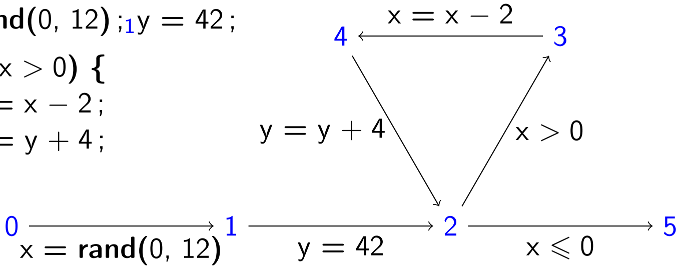
Domaine des intervalles, opérations arithmétiques abstraites (suite et fin)

Exercice 2

- Donner la soustraction d'intervalles.
- Donner la multiplication d'intervalles.

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) **{**
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$



$$
\begin{aligned}
{R_0^\sharp}^{i+1} &= \top \\
{R_1^\sharp}^{i+1} &= {R_0^\sharp}^{i+1}\,[x \mapsto [\![0, 12]\!]] \\
{R_2^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i+1}\,[y \mapsto [\![42, 42]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad {R_4^\sharp}^{i}\left[y \mapsto {R_4^\sharp}^{i}(y) +^\sharp [\![4, 4]\!]\right] \\
{R_3^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1}(x) \right. \\
&\qquad\qquad \left. \sqcap^\sharp [\![1, +\infty[\![\right] \\
{R_4^\sharp}^{i+1} &= {R_3^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_3^\sharp}^{i+1}(x) -^\sharp [\![2, 2]\!]\right] \\
{R_5^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1}(x) \right. \\
&\qquad\qquad \left. \sqcap^\sharp]\!]-\infty, 0]\!]\right]
\end{aligned}
$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

```
₀x = rand(0, 12) ;₁y = 42 ;
while ₂(x > 0) {
    ₃x = x − 2 ;
    ₄y = y + 4 ;
}₅
```

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[dr, "y = y + 4"'] & & 3 \arrow[ll, "x = x - 2"'] & \\
0 \arrow[r, "x = \mathbf{rand}(0,\ 12)"'] & 1 \arrow[rr, "y = 42"'] & & 2 \arrow[ur, "x > 0"'] \arrow[rr, "x \leqslant 0"'] & & 5
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
R_0^{\sharp\, i+1} &= \top \\
R_1^{\sharp\, i+1} &= R_0^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto \llbracket 0, 12 \rrbracket\right] \\
R_2^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1}\left[y \mapsto \llbracket 42, 42 \rrbracket\right] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_4^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^\sharp \llbracket 4, 4 \rrbracket\right] \\
R_3^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\Big[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \\
&\qquad\qquad \sqcap^\sharp \llbracket 1, +\infty \llbracket\Big] \\
R_4^{\sharp\, i+1} &= R_3^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(x) -^\sharp \llbracket 2, 2 \rrbracket\right] \\
R_5^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\Big[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \\
&\qquad\qquad \sqcap^\sharp \rrbracket -\infty, 0 \rrbracket\Big]
\end{aligned}$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot, \bot)$		
1	$(\bot, \bot)$		
2	$(\bot, \bot)$		
3	$(\bot, \bot)$		
4	$(\bot, \bot)$		
5	$(\bot, \bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

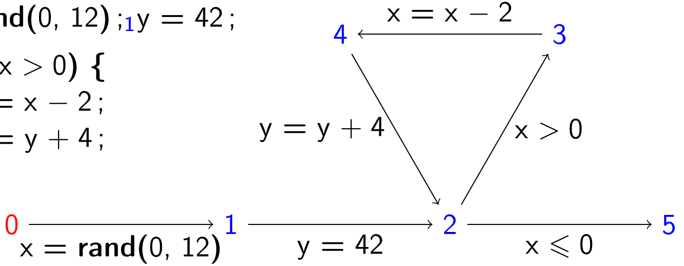
$_0$x $=$ **rand**$(0,\ 12)$; $_1$y $= 42$;

while $_2$(x > 0) **{**

$_3$x $=$ x $- 2$;

$_4$y $=$ y $+ 4$;

}$_5$

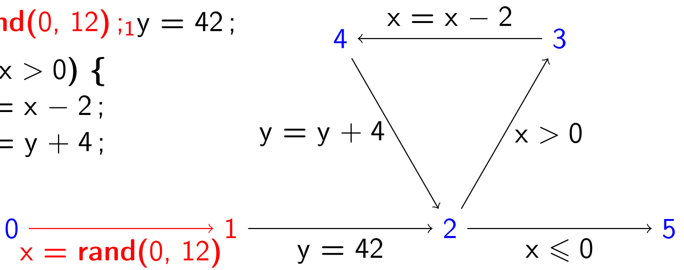


$$
\begin{aligned}
{R^\sharp_0}^{i+1} &= \top \\
{R^\sharp_1}^{i+1} &= {R^\sharp_0}^{i+1}\,[x \mapsto [\![0, 12]\!]] \\
{R^\sharp_2}^{i+1} &= {R^\sharp_1}^{i+1}\,[y \mapsto [\![42, 42]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad {R^\sharp_4}^{i}\left[y \mapsto {R^\sharp_4}^{i}(y) +^\sharp [\![4, 4]\!]\right] \\
{R^\sharp_3}^{i+1} &= {R^\sharp_2}^{i+1}\left[x \mapsto {R^\sharp_2}^{i+1}(x) \right. \\
&\qquad\qquad \left. \sqcap^\sharp [\![1, +\infty[\![\right] \\
{R^\sharp_4}^{i+1} &= {R^\sharp_3}^{i+1}\left[x \mapsto {R^\sharp_3}^{i+1}(x) -^\sharp [\![2, 2]\!]\right] \\
{R^\sharp_5}^{i+1} &= {R^\sharp_2}^{i+1}\left[x \mapsto {R^\sharp_2}^{i+1}(x) \right. \\
&\qquad\qquad \left. \sqcap^\sharp]\!]-\infty, 0]\!]\right]
\end{aligned}
$$

l	${R^\sharp_l}^0$	${R^\sharp_l}^1$	${R^\sharp_l}^2$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	
1	$(\bot, \bot)$		
2	$(\bot, \bot)$		
3	$(\bot, \bot)$		
4	$(\bot, \bot)$		
5	$(\bot, \bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) **{**
    $_3$x = x − 2 ;
    $_4$y = y + 4 ;
}$_5$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto [\![0,12]\!]] \\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto [\![42,42]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\ R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp [\![4,4]\!]\right] \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp [\![1,+\infty[\![\right] \\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp [\![2,2]\!]\right] \\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp]\!]-\infty,0]\!]\right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$([\![0,12]\!],\top)$	
2	$(\bot,\bot)$		
3	$(\bot,\bot)$		
4	$(\bot,\bot)$		
5	$(\bot,\bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0\mathtt{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\ ;_1\mathtt{y} = 42\ ;$

$\mathbf{while}\ _2(\mathtt{x} > 0)\ \{$

$\quad _3\mathtt{x} = \mathtt{x} - 2\ ;$

$\quad _4\mathtt{y} = \mathtt{y} + 4\ ;$

$\}_5$

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[d, "\mathtt{y} = \mathtt{y} + 4"'] & 3 \arrow[l, "\mathtt{x} = \mathtt{x} - 2"'] \\
0 \arrow[r, "\mathtt{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)"'] & 1 \arrow[r, "\mathtt{y} = 42"'] & 2 \arrow[r, "\mathtt{x} \leqslant 0"'] \arrow[ur, "\mathtt{x} > 0"'] & 5
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto [\![0, 12]\!]] \\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto [\![42, 42]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
& \quad R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp [\![4, 4]\!]\right] \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x)\right. \\
& \qquad \left.\sqcap^\sharp [\![1, +\infty[\![\right] \\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp [\![2, 2]\!]\right] \\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x)\right. \\
& \qquad \left.\sqcap^\sharp]\!]-\infty, 0]\!]\right]
\end{aligned}$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	
1	$(\bot, \bot)$	$([\![0, 12]\!]\,, \top)$	
2	$(\bot, \bot)$	$([\![0, 12]\!]\,, \{\,42\,\})$	
3	$(\bot, \bot)$		
4	$(\bot, \bot)$		
5	$(\bot, \bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0\mathrm{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\ ;_1\mathrm{y} = 42\ ;$

$\mathbf{while}\ _2(\mathrm{x} > 0)\ \{$

$\quad _3\mathrm{x} = \mathrm{x} - 2\ ;$

$\quad _4\mathrm{y} = \mathrm{y} + 4\ ;$

$\}_5$

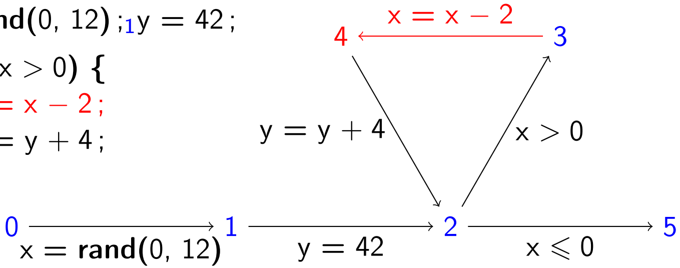
$$
\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[d, "\mathrm{y} = \mathrm{y} + 4"'] & 3 \arrow[l, "\mathrm{x} = \mathrm{x} - 2"'] \\
0 \arrow[r, "\mathrm{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)"'] & 1 \arrow[r, "\mathrm{y} = 42"'] & 2 \arrow[ur, "\mathrm{x} > 0"'] \arrow[r, "\mathrm{x} \leqslant 0"'] & 5
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto [\![0, 12]\!]] \\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto [\![42, 42]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
& \quad R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp [\![4, 4]\!]\right] \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \right. \\
& \qquad \left. \sqcap^\sharp [\![1, +\infty[\![\right] \\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp [\![2, 2]\!]\right] \\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \right. \\
& \qquad \left. \sqcap^\sharp]\!]-\infty, 0]\!]\right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	
1	$(\bot, \bot)$	$([\![0, 12]\!], \top)$	
2	$(\bot, \bot)$	$([\![0, 12]\!], \{42\})$	
3	$(\bot, \bot)$	$([\![1, 12]\!], \{42\})$	
4	$(\bot, \bot)$		
5	$(\bot, \bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x $=$ **rand**(0, 12) ;$_1$y $=$ 42 ;
while $_2$(x $>$ 0) **{**
  $_3$x $=$ x $-$ 2 ;
  $_4$y $=$ y $+$ 4 ;
}$_5$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto [\![0, 12]\!]] \\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto [\![42, 42]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp [\![4, 4]\!]\right] \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp [\![1, +\infty[\![\right] \\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp [\![2, 2]\!]\right] \\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp]\!]-\infty, 0]\!]\right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	
1	$(\bot, \bot)$	$([\![0, 12]\!], \top)$	
2	$(\bot, \bot)$	$([\![0, 12]\!], \{42\})$	
3	$(\bot, \bot)$	$([\![1, 12]\!], \{42\})$	
4	$(\bot, \bot)$	$([\![-1, 10]\!], \{42\})$	
5	$(\bot, \bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) **{**
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[dr, "\mathrm{y} = \mathrm{y} + 4"'] & & 3 \arrow[ll, "\mathrm{x} = \mathrm{x} - 2"'] & \\
0 \arrow[r, "\mathrm{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)"'] & 1 \arrow[rr, "\mathrm{y} = 42"'] & & 2 \arrow[ur, "\mathrm{x} > 0"'] \arrow[rr, "\mathrm{x} \leqslant 0"'] & & 5
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto [\![0, 12]\!]] \\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto [\![42, 42]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp [\![4, 4]\!]\right] \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x)\right. \\
&\qquad\qquad \left.\sqcap^\sharp [\![1, +\infty[\![\right] \\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp [\![2, 2]\!]\right] \\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x)\right. \\
&\qquad\qquad \left.\sqcap^\sharp]\!]-\infty, 0]\!]\right]
\end{aligned}$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	
1	$(\bot, \bot)$	$([\![0, 12]\!], \top)$	
2	$(\bot, \bot)$	$([\![0, 12]\!], \{42\})$	
3	$(\bot, \bot)$	$([\![1, 12]\!], \{42\})$	
4	$(\bot, \bot)$	$([\![-1, 10]\!], \{42\})$	
5	$(\bot, \bot)$	$(\{0\}, \{42\})$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_{0}\mathtt{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\ ;_{1}\mathtt{y} = 42\ ;$

$\mathbf{while}\ _{2}(\mathtt{x} > 0)\ \{$

$\quad _{3}\mathtt{x} = \mathtt{x} - 2\ ;$

$\quad _{4}\mathtt{y} = \mathtt{y} + 4\ ;$

$\}_{5}$

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[dr, "\mathtt{y} = \mathtt{y} + 4"'] & & 3 \arrow[ll, "\mathtt{x} = \mathtt{x} - 2"'] \\
0 \arrow[r, "\mathtt{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)"'] & 1 \arrow[rr, "\mathtt{y} = 42"'] & & 2 \arrow[ur, "\mathtt{x} > 0"'] \arrow[r, "\mathtt{x} \leqslant 0"'] & 5
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{aligned}
{R_0^\sharp}^{i+1} &= \top \\
{R_1^\sharp}^{i+1} &= {R_0^\sharp}^{i+1}\,[x \mapsto [\![0, 12]\!]] \\
{R_2^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i+1}\,[y \mapsto [\![42, 42]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad {R_4^\sharp}^{i}\left[y \mapsto {R_4^\sharp}^{i}(y) +^\sharp [\![4, 4]\!]\right] \\
{R_3^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1}(x) \right. \\
&\qquad\qquad \left. \sqcap^\sharp [\![1, +\infty[\![\right] \\
{R_4^\sharp}^{i+1} &= {R_3^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_3^\sharp}^{i+1}(x) -^\sharp [\![2, 2]\!]\right] \\
{R_5^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1}(x) \right. \\
&\qquad\qquad \left. \sqcap^\sharp]\!]-\infty, 0]\!]\right]
\end{aligned}
$$

l	${R_l^\sharp}^0$	${R_l^\sharp}^1$	${R_l^\sharp}^2$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$
1	$(\bot, \bot)$	$([\![0, 12]\!], \top)$	
2	$(\bot, \bot)$	$([\![0, 12]\!], \{42\})$	
3	$(\bot, \bot)$	$([\![1, 12]\!], \{42\})$	
4	$(\bot, \bot)$	$([\![-1, 10]\!], \{42\})$	
5	$(\bot, \bot)$	$(\{0\}, \{42\})$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 42 ;

while $_2$(x > 0) **{**

  $_3$x = x − 2 ;

  $_4$y = y + 4 ;

}$_5$

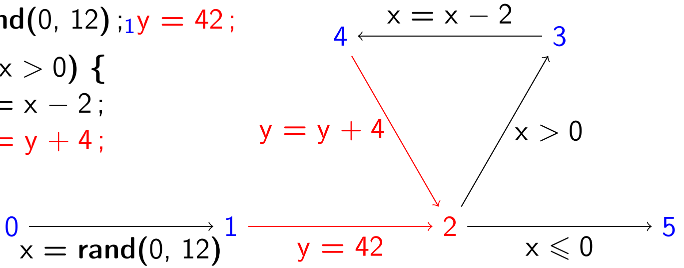
$$
\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[dr, "y = y + 4"'] & & 3 \arrow[ll, "x = x - 2"'] & \\
0 \arrow[r, "x = \mathbf{rand}(0,\ 12)"'] & 1 \arrow[rr, "y = 42"'] & & 2 \arrow[ur, "x > 0"'] \arrow[rr, "x \leqslant 0"'] & & 5
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\, i+1} &= \top \\
R_1^{\sharp\, i+1} &= R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \llbracket 0, 12 \rrbracket] \\
R_2^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto \llbracket 42, 42 \rrbracket] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_4^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^\sharp \llbracket 4, 4 \rrbracket\right] \\
R_3^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \right. \\
&\qquad \left. \sqcap^\sharp \llbracket 1, +\infty \llbracket \right] \\
R_4^{\sharp\, i+1} &= R_3^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(x) -^\sharp \llbracket 2, 2 \rrbracket\right] \\
R_5^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \right. \\
&\qquad \left. \sqcap^\sharp \rrbracket -\infty, 0 \rrbracket \right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\, 0}$	$R_l^{\sharp\, 1}$	$R_l^{\sharp\, 2}$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$
1	$(\bot, \bot)$	$(\llbracket 0, 12 \rrbracket, \top)$	$(\llbracket 0, 12 \rrbracket, \top)$
2	$(\bot, \bot)$	$(\llbracket 0, 12 \rrbracket, \{ 42 \})$	
3	$(\bot, \bot)$	$(\llbracket 1, 12 \rrbracket, \{ 42 \})$	
4	$(\bot, \bot)$	$(\llbracket -1, 10 \rrbracket, \{ 42 \})$	
5	$(\bot, \bot)$	$(\{ 0 \}, \{ 42 \})$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\, i+1} &= \top \\
R_1^{\sharp\, i+1} &= R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto [\![0, 12]\!]] \\
R_2^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto [\![42, 42]\!]] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_4^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} [\![4, 4]\!]\right] \\
R_3^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \right.\\
&\quad \left. \sqcap^{\sharp} [\![1, +\infty[\![\right] \\
R_4^{\sharp\, i+1} &= R_3^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} [\![2, 2]\!]\right] \\
R_5^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \right.\\
&\quad \left. \sqcap^{\sharp}]\!]-\infty, 0]\!] \right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$
1	$(\bot, \bot)$	$([\![0, 12]\!], \top)$	$([\![0, 12]\!], \top)$
2	$(\bot, \bot)$	$([\![0, 12]\!], \{42\})$	$([\![-1, 12]\!], [\![42, 46]\!])$
3	$(\bot, \bot)$	$([\![1, 12]\!], \{42\})$	
4	$(\bot, \bot)$	$([\![-1, 10]\!], \{42\})$	
5	$(\bot, \bot)$	$(\{0\}, \{42\})$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

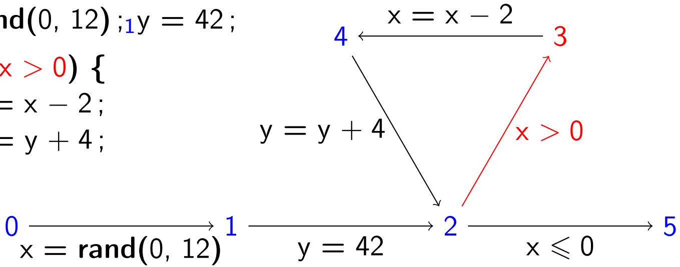
$_0\mathtt{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\,;_1\mathtt{y} = 42\,;$

$\mathbf{while}\ _2(\mathtt{x} > 0)\ \{$

$\quad _3\mathtt{x} = \mathtt{x} - 2\,;$

$\quad _4\mathtt{y} = \mathtt{y} + 4\,;$

$\}_5$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\, i+1} &= \top \\
R_1^{\sharp\, i+1} &= R_0^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto [\![0, 12]\!]\right] \\
R_2^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1}\left[y \mapsto [\![42, 42]\!]\right] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_4^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^\sharp [\![4, 4]\!]\right] \\
R_3^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \right.\\
&\qquad\qquad \left. \sqcap^\sharp [\![1, +\infty[\![\right] \\
R_4^{\sharp\, i+1} &= R_3^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(x) -^\sharp [\![2, 2]\!]\right] \\
R_5^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \right.\\
&\qquad\qquad \left. \sqcap^\sharp]\!]-\infty, 0]\!]\right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$
1	$(\bot, \bot)$	$([\![0, 12]\!], \top)$	$([\![0, 12]\!], \top)$
2	$(\bot, \bot)$	$([\![0, 12]\!], \{42\})$	$([\![-1, 12]\!], [\![42, 46]\!])$
3	$(\bot, \bot)$	$([\![1, 12]\!], \{42\})$	$([\![1, 12]\!], [\![42, 46]\!])$
4	$(\bot, \bot)$	$([\![-1, 10]\!], \{42\})$	
5	$(\bot, \bot)$	$(\{0\}, \{42\})$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

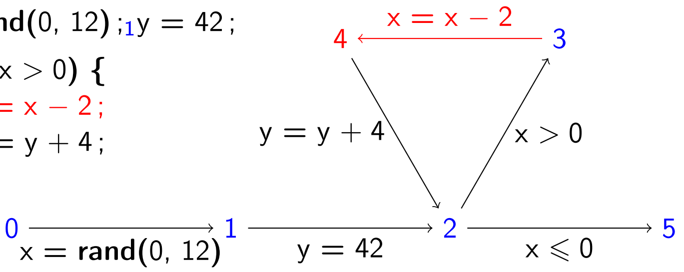
$_0\mathsf{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\,;_1\mathsf{y} = 42\,;$

$\mathbf{while}\ _2(\mathsf{x} > 0)\ \{$

$\quad {}_3\mathsf{x} = \mathsf{x} - 2\,;$

$\quad {}_4\mathsf{y} = \mathsf{y} + 4\,;$

$\}_5$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\, i+1} &= \top \\
R_1^{\sharp\, i+1} &= R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto [\![0,12]\!]] \\
R_2^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto [\![42,42]\!]] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_4^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} [\![4,4]\!]\right] \\
R_3^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x)\right. \\
&\qquad \left.\sqcap^{\sharp} [\![1,+\infty[\![\right] \\
R_4^{\sharp\, i+1} &= R_3^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} [\![2,2]\!]\right] \\
R_5^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x)\right. \\
&\qquad \left.\sqcap^{\sharp}]\!]-\infty,0]\!]\right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$([\![0,12]\!]\,,\top)$	$([\![0,12]\!]\,,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$([\![0,12]\!]\,,\{\,42\,\})$	$([\![-1,12]\!]\,,[\![42,46]\!])$
3	$(\bot,\bot)$	$([\![1,12]\!]\,,\{\,42\,\})$	$([\![1,12]\!]\,,[\![42,46]\!])$
4	$(\bot,\bot)$	$([\![-1,10]\!]\,,\{\,42\,\})$	$([\![-1,10]\!]\,,[\![42,46]\!])$
5	$(\bot,\bot)$	$(\{\,0\,\}\,,\{\,42\,\})$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0\mathsf{x} = \textbf{rand}(0,\ 12)\ ;_1\mathsf{y} = 42\ ;$
$\textbf{while}\ _2(\mathsf{x} > 0)\ \{$
$\quad _3\mathsf{x} = \mathsf{x} - 2\ ;$
$\quad _4\mathsf{y} = \mathsf{y} + 4\ ;$
$\}_5$

$$
\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[d, "\mathsf{y} = \mathsf{y} + 4"'] & 3 \arrow[l, "\mathsf{x} = \mathsf{x} - 2"'] & \\
0 \arrow[r, "\mathsf{x} = \textbf{rand}(0,\ 12)"'] & 1 \arrow[r, "\mathsf{y} = 42"'] & 2 \arrow[ur, "\mathsf{x} > 0"'] \arrow[rr, "\mathsf{x} \leqslant 0"'] & & 5
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto [\![0, 12]\!]] \\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto [\![42, 42]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\ R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp [\![4, 4]\!]\right] \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x)\right. \\
&\qquad\qquad \left.\sqcap^\sharp [\![1, +\infty[\![\right] \\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp [\![2, 2]\!]\right] \\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x)\right. \\
&\qquad\qquad \left.\sqcap^\sharp]\!]-\infty, 0]\!]\right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$
1	$(\bot, \bot)$	$([\![0, 12]\!], \top)$	$([\![0, 12]\!], \top)$
2	$(\bot, \bot)$	$([\![0, 12]\!], \{42\})$	$([\![-1, 12]\!], [\![42, 46]\!])$
3	$(\bot, \bot)$	$([\![1, 12]\!], \{42\})$	$([\![1, 12]\!], [\![42, 46]\!])$
4	$(\bot, \bot)$	$([\![-1, 10]\!], \{42\})$	$([\![-1, 10]\!], [\![42, 46]\!])$
5	$(\bot, \bot)$	$(\{0\}, \{42\})$	$([\![-1, 0]\!], [\![42, 46]\!])$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

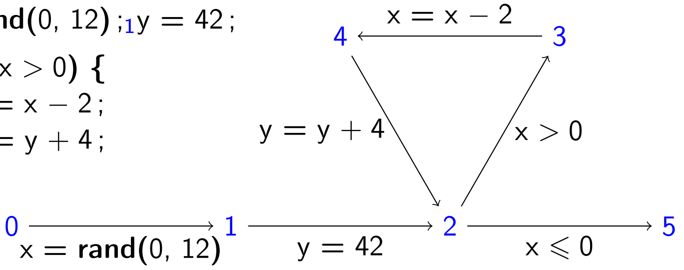
$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;

while $_2$(x > 0) **{**

  $_3$x = x − 2 ;

  $_4$y = y + 4 ;

}$_5$



$$
\begin{aligned}
{R_0^\sharp}^{i+1} &= \top \\
{R_1^\sharp}^{i+1} &= {R_0^\sharp}^{i+1}\,[x \mapsto \llbracket 0, 12 \rrbracket] \\
{R_2^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i+1}\,[y \mapsto \llbracket 42, 42 \rrbracket] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad {R_4^\sharp}^{i}\left[y \mapsto {R_4^\sharp}^{i}(y) +^\sharp \llbracket 4, 4 \rrbracket\right] \\
{R_3^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1}(x) \right. \\
&\qquad\qquad \left. \sqcap^\sharp \llbracket 1, +\infty \llbracket \right] \\
{R_4^\sharp}^{i+1} &= {R_3^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_3^\sharp}^{i+1}(x) -^\sharp \llbracket 2, 2 \rrbracket\right] \\
{R_5^\sharp}^{i+1} &= {R_2^\sharp}^{i+1}\left[x \mapsto {R_2^\sharp}^{i+1}(x) \right. \\
&\qquad\qquad \left. \sqcap^\sharp \rrbracket -\infty, 0 \rrbracket \right]
\end{aligned}
$$

l	${R_l^\sharp}^0$	${R_l^\sharp}^1$	${R_l^\sharp}^2$
0	$(\bot, \bot)$	$(\top, \top)$	$(\top, \top)$
1	$(\bot, \bot)$	$(\llbracket 0, 12 \rrbracket, \top)$	$(\llbracket 0, 12 \rrbracket, \top)$
2	$(\bot, \bot)$	$(\llbracket 0, 12 \rrbracket, \{ 42 \})$	$(\llbracket -1, 12 \rrbracket, \llbracket 42, 46 \rrbracket)$
3	$(\bot, \bot)$	$(\llbracket 1, 12 \rrbracket, \{ 42 \})$	$(\llbracket 1, 12 \rrbracket, \llbracket 42, 46 \rrbracket)$
4	$(\bot, \bot)$	$(\llbracket -1, 10 \rrbracket, \{ 42 \})$	$(\llbracket -1, 10 \rrbracket, \llbracket 42, 46 \rrbracket)$
5	$(\bot, \bot)$	$(\{ 0 \}, \{ 42 \})$	$(\llbracket -1, 0 \rrbracket, \llbracket 42, 46 \rrbracket)$

Le point fixe est encore loin !

Correction et terminaison

Théorème (correction, *encore le même*)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_l \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_l^\sharp\right)$$

Correction et terminaison

Théorème (correction, *encore le même*)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_l \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_l^\sharp\right)$$

Remarques

- De manière générale, ca ne termine pas !
  Car le treillis a des chaînes croissantes infinies (ex. $(\llbracket 0, n \rrbracket)_{n\in\mathbb{N}}$).

Correction et terminaison

Théorème (correction, *encore le même*)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_l \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_l^\sharp\right)$$

Remarques

- De manière générale, ca ne termine pas !
  Car le treillis a des chaînes croissantes infinies (ex. $(\llbracket 0, n \rrbracket)_{n\in\mathbb{N}}$).
- Et quand bien même ça termine, ça peut être long...

Accélération de convergence

On va donc intercaler entre chaque itération un *élargissement* (widening en anglais) qui va empêcher de suivre des chaînes croissantes infinies en « sautant » plus haut.

Accélération de convergence

On va donc intercaler entre chaque itération un *élargissement* (widening en anglais) qui va empêcher de suivre des chaînes croissantes infinies en « sautant » plus haut.

Définition (élargissement)

Un élargissement $\triangledown$ est une opération binaire ($\triangledown : \mathcal{D}^\sharp \times \mathcal{D}^\sharp \to \mathcal{D}^\sharp$) vérifiant

- $\forall x^\sharp, y^\sharp, \quad x^\sharp \sqcup^\sharp y^\sharp \ \sqsubseteq^\sharp \ x^\sharp \triangledown y^\sharp$;

Accélération de convergence

On va donc intercaler entre chaque itération un *élargissement* (widening en anglais) qui va empêcher de suivre des chaînes croissantes infinies en « sautant » plus haut.

Définition (élargissement)

Un élargissement $\triangledown$ est une opération binaire ($\triangledown : \mathcal{D}^\sharp \times \mathcal{D}^\sharp \to \mathcal{D}^\sharp$) vérifiant

- $\forall x^\sharp, y^\sharp, \quad x^\sharp \sqcup^\sharp y^\sharp \ \sqsubseteq^\sharp \ x^\sharp \triangledown y^\sharp$;
- pour toute suite $\left(x_n^\sharp\right)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite croissante

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_0^\sharp & = & x_0^\sharp \\ y_{i+1}^\sharp & = & y_i^\sharp \triangledown x_{i+1}^\sharp \end{array}\right.$$

  est stationnaire.

Élargissement, illustration

$$R^\sharp = {F^\sharp}^N(\bot) = \mathrm{lfp}\, F^\sharp$$

$$\uparrow$$

$$\vdots$$

$$\uparrow$$

$${R^\sharp}^2 = F^\sharp\left({R^\sharp}^1\right) = {F^\sharp}^2(\bot)$$

$$\uparrow$$

$${R^\sharp}^1 = F^\sharp\left({R^\sharp}^0\right) = F^\sharp(\bot)$$

$$\uparrow$$

$${R^\sharp}^0 = \bot$$

$F^\sharp$ stationnaire

Élargissement, illustration

$$
\begin{array}{c}
R^\sharp = {F^\sharp}^N(\bot) = \operatorname{lfp} F^\sharp \\
\uparrow \\
\vdots \\
\uparrow \\
{R^\sharp}^2 = F^\sharp\left({R^\sharp}^1\right) = {F^\sharp}^2(\bot) \\
\uparrow \\
{R^\sharp}^1 = F^\sharp\left({R^\sharp}^0\right) = F^\sharp(\bot) \\
\uparrow \\
{R^\sharp}^0 = \bot
\end{array}
$$

$F^\sharp$ stationnaire

$$
\begin{array}{c}
R^\sharp = R^\sharp \triangledown F^\sharp(R^\sharp) \\
\operatorname{lfp} F^\sharp \\
\vdots \\
{R^\sharp}^2 = {R^\sharp}^1 \triangledown F^\sharp\left({R^\sharp}^1\right) \\
{R^\sharp}^1 = {R^\sharp}^0 \triangledown F^\sharp\left({R^\sharp}^0\right) \\
{R^\sharp}^0 = \bot
\end{array}
$$

$F^\sharp$ non stationnaire, élargissement

Élargissement, illustration

$$R^\sharp = {F^\sharp}^N(\bot) = \mathrm{lfp}\, F^\sharp$$

$$\vdots$$

$${R^\sharp}^2 = F^\sharp\left({R^\sharp}^1\right) = {F^\sharp}^2(\bot)$$

$${R^\sharp}^1 = F^\sharp\left({R^\sharp}^0\right) = F^\sharp(\bot)$$

$${R^\sharp}^0 = \bot$$

$F^\sharp$ stationnaire

$$R^\sharp = R^\sharp \triangledown F^\sharp(R^\sharp)$$

$$\mathrm{lfp}\, F^\sharp$$

$$\vdots$$

$${R^\sharp}^2 = {R^\sharp}^1 \triangledown F^\sharp\left({R^\sharp}^1\right)$$

$${R^\sharp}^1 = {R^\sharp}^0 \triangledown F^\sharp\left({R^\sharp}^0\right)$$

$${R^\sharp}^0 = \bot$$

$F^\sharp$ non stationnaire, élargissement

Remarque : $\mathrm{lfp}\, F^\sharp \sqsubseteq^\sharp R^\sharp$

On s'arrête avec $R^\sharp = R^\sharp \triangledown F^\sharp(R^\sharp)$ donc $F^\sharp(R^\sharp) \sqsubseteq^\sharp R^\sharp$ donc

$$\mathrm{lfp}\, F^\sharp = {\bigsqcap}^\sharp \left\{ x \;\middle|\; F^\sharp(x) \sqsubseteq^\sharp x \right\} \sqsubseteq^\sharp R^\sharp.$$

Exemple d'élargissement

Si les bornes de l'intervalle sont stables, on les conserve,
sinon on les remplace par ∞.

Exemple d'élargissement

Si les bornes de l'intervalle sont stables, on les conserve,
sinon on les remplace par ∞.

Définition

$$x^\sharp \triangledown y^\sharp = \begin{cases} [\![a, b]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!]\,, y^\sharp = [\![c, d]\!]\,, c \geqslant a, d \leqslant b \\ [\![a, +\infty[\![& \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!]\,, y^\sharp = [\![c, d]\!]\,, c \geqslant a, d > b \\ ]\!]-\infty, b]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!]\,, y^\sharp = [\![c, d]\!]\,, c < a, d \leqslant b \\ ]\!]-\infty, +\infty[\![& \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!]\,, y^\sharp = [\![c, d]\!]\,, c < a, d > b \\ y^\sharp & \text{si } x^\sharp = \bot \\ x^\sharp & \text{si } y^\sharp = \bot \end{cases}$$

Exemple d'élargissement

Si les bornes de l'intervalle sont stables, on les conserve,
sinon on les remplace par ∞.

Définition

$$x^\sharp \nabla y^\sharp = \begin{cases} [\![a, b]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!], y^\sharp = [\![c, d]\!], c \geqslant a, d \leqslant b \\ [\![a, +\infty[\![& \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!], y^\sharp = [\![c, d]\!], c \geqslant a, d > b \\ ]\!]-\infty, b]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!], y^\sharp = [\![c, d]\!], c < a, d \leqslant b \\ ]\!]-\infty, +\infty[\![& \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!], y^\sharp = [\![c, d]\!], c < a, d > b \\ y^\sharp & \text{si } x^\sharp = \perp \\ x^\sharp & \text{si } y^\sharp = \perp \end{cases}$$

Exemple

- $[\![0, 2]\!] \nabla [\![0, 1]\!] = [\![0, 2]\!]$

Exemple d'élargissement

Si les bornes de l'intervalle sont stables, on les conserve, sinon on les remplace par ∞.

Définition

$$x^\sharp \triangledown y^\sharp = \begin{cases} [\![a, b]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!]\,, y^\sharp = [\![c, d]\!]\,, c \geqslant a, d \leqslant b \\ [\![a, +\infty[\![& \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!]\,, y^\sharp = [\![c, d]\!]\,, c \geqslant a, d > b \\ ]\!]-\infty, b]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!]\,, y^\sharp = [\![c, d]\!]\,, c < a, d \leqslant b \\ ]\!]-\infty, +\infty[\![& \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!]\,, y^\sharp = [\![c, d]\!]\,, c < a, d > b \\ y^\sharp & \text{si } x^\sharp = \bot \\ x^\sharp & \text{si } y^\sharp = \bot \end{cases}$$

Exemple

- $[\![0, 2]\!] \triangledown [\![0, 1]\!] = [\![0, 2]\!]$
- $[\![0, 1]\!] \triangledown [\![0, 2]\!] = [\![0, +\infty[\![$

Exemple d'élargissement

Si les bornes de l'intervalle sont stables, on les conserve, sinon on les remplace par ∞.

Définition

$$x^\sharp \triangledown y^\sharp = \begin{cases} [\![a, b]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!]\,, y^\sharp = [\![c, d]\!]\,, c \geqslant a, d \leqslant b \\ [\![a, +\infty[\![& \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!]\,, y^\sharp = [\![c, d]\!]\,, c \geqslant a, d > b \\ ]\!]-\infty, b]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!]\,, y^\sharp = [\![c, d]\!]\,, c < a, d \leqslant b \\ ]\!]-\infty, +\infty[\![& \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!]\,, y^\sharp = [\![c, d]\!]\,, c < a, d > b \\ y^\sharp & \text{si } x^\sharp = \bot \\ x^\sharp & \text{si } y^\sharp = \bot \end{cases}$$

Exemple

- $[\![0, 2]\!] \triangledown [\![0, 1]\!] = [\![0, 2]\!]$
- $[\![0, 1]\!] \triangledown [\![0, 2]\!] = [\![0, +\infty[\![$ ($\triangledown$ n'est pas symétrique)

Exemple d'élargissement (suite et fin)

Exercice 3

Reprendre le calcul précédent en remplaçant l'equation de $R_2^\sharp$ par

$$R_2^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i} \nabla_{\mathrm{nr}} \left(R_1^{\sharp\, i+1} [y \mapsto \{42\}] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp\, i} \left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^\sharp \{4\} \right] \right)$$

(ça devrait s'arrêter après trois étapes).

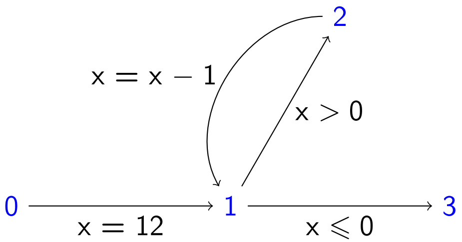
Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = 12 ;

while $_1$(x > 0) **{**

$\quad$ $_2$ x = x − 1 ;

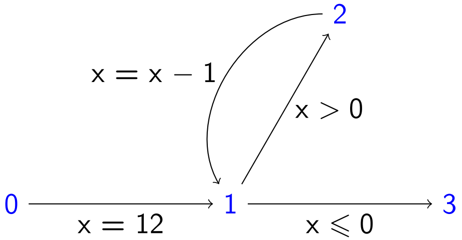
}$_3$



$$
\begin{aligned}
{R_0^\sharp}^{i+1} &= \top \\
{R_1^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i} \,\triangledown_{\mathrm{nr}} \left({R_0^\sharp}^{i+1} \left[x \mapsto [\![12, 12]\!]\right] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \right. \\
&\qquad \left. {R_2^\sharp}^{i} \left[y \mapsto {R_2^\sharp}^{i}(x) -^\sharp [\![1, 1]\!]\right] \right) \\
{R_3^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i+1} \left[x \mapsto {R_1^\sharp}^{i+1}(x) \right. \\
&\qquad \left. \sqcap^\sharp \,]\!]-\infty, 0]\!] \right]
\end{aligned}
$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = 12 ;
while $_1$(x > 0) **{**
  $_2$ x = x − 1 ;
}$_3$

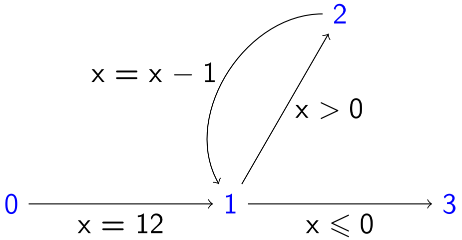


$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i} \,{\color{red}\nabla_{\mathrm{nr}}}\, \Big(R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto [\![12,12]\!]] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} \\
&\qquad R_2^{\sharp\,i}\Big[y \mapsto R_2^{\sharp\,i}(x) -^{\sharp} [\![1,1]\!]\Big]\Big) \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\Big[x \mapsto R_1^{\sharp\,i+1}(x) \\
&\qquad \sqcap^{\sharp}\,]\!]-\infty, 0]\!]\Big]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$\bot$			
1	$\bot$			
2	$\bot$			
3	$\bot$			

Exemple de calcul du point fixe abstrait

${}_0$x = 12 ;
while ${}_1$(x > 0) **{**
  ${}_2$ x = x − 1 ;
}${}_3$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i} \,{\color{red}\triangledown_{\mathrm{nr}}}\, \Big(R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto [\![12,12]\!]] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} \\
&\qquad R_2^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_2^{\sharp\,i}(x) -^{\sharp} [\![1,1]\!]\right]\Big) \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\Big[x \mapsto R_1^{\sharp\,i+1}(x) \\
&\qquad \sqcap^{\sharp}\,]\!]-\infty, 0]\!]\Big]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$\bot$	$\top$		
1	$\bot$	$[\![12,12]\!]$		
2	$\bot$	$[\![12,12]\!]$		
3	$\bot$	$\bot$		

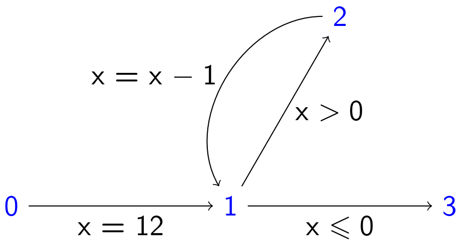
Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0\mathtt{x} = 12\,;$

$\textbf{while}\ _1(\mathtt{x} > 0)\ \{$

$\quad _2\ \mathtt{x} = \mathtt{x} - 1\,;$

$\}_3$

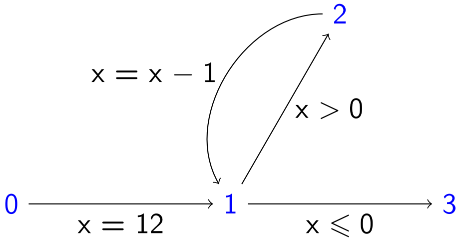


$$
\begin{aligned}
{R_0^\sharp}^{i+1} &= \top \\
{R_1^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i} \nabla_{\mathrm{nr}} \left({R_0^\sharp}^{i+1}\,[x \mapsto [\![12, 12]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \right. \\
&\qquad \left. {R_2^\sharp}^{i} \left[y \mapsto {R_2^\sharp}^{i}(x) -^\sharp [\![1, 1]\!] \right] \right) \\
{R_3^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i+1} \left[x \mapsto {R_1^\sharp}^{i+1}(x) \right. \\
&\qquad \left. \sqcap^\sharp\ ]\!]-\infty, 0]\!] \right]
\end{aligned}
$$

l	${R_l^\sharp}^0$	${R_l^\sharp}^1$	${R_l^\sharp}^2$	${R_l^\sharp}^3$
0	$\bot$	$\top$	$\top$	
1	$\bot$	$[\![12, 12]\!]$	$]\!]-\infty, 12]\!]$	
2	$\bot$	$[\![12, 12]\!]$	$[\![1, 12]\!]$	
3	$\bot$	$\bot$	$]\!]-\infty, 0]\!]$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = 12 ;
while $_1$(x > 0) **{**
  $_2$ x = x − 1 ;
}$_3$



$$
\begin{aligned}
{R_0^\sharp}^{i+1} &= \top \\
{R_1^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i} \,\triangledown_{\mathrm{nr}} \Big({R_0^\sharp}^{i+1}\,[x \mapsto [\![12,12]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\qquad {R_2^\sharp}^{i}\Big[y \mapsto {R_2^\sharp}^{i}(x) -^\sharp [\![1,1]\!]\Big]\Big) \\
{R_3^\sharp}^{i+1} &= {R_1^\sharp}^{i+1}\Big[x \mapsto {R_1^\sharp}^{i+1}(x) \\
&\qquad \sqcap^\sharp\,]\!]-\infty,0]\!]\Big]
\end{aligned}
$$

l	${R_l^\sharp}^0$	${R_l^\sharp}^1$	${R_l^\sharp}^2$	${R_l^\sharp}^3$
0	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
1	$\bot$	$[\![12,12]\!]$	$]\!]-\infty,12]\!]$	$]\!]-\infty,12]\!]$
2	$\bot$	$[\![12,12]\!]$	$[\![1,12]\!]$	$[\![1,12]\!]$
3	$\bot$	$\bot$	$]\!]-\infty,0]\!]$	$]\!]-\infty,0]\!]$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = 12 ;
while $_1$(x > 0) **{**
  $_2$ x = x − 1 ;
}$_3$

$$\begin{tikzcd}
 & & 2 \arrow[d, bend right, "\mathtt{x = x - 1}"'] & \\
0 \arrow[rr, "\mathtt{x = 12}"'] & & 1 \arrow[u, "\mathtt{x > 0}"'] \arrow[r, "\mathtt{x \leqslant 0}"'] & 3
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i} \,{\color{red}\triangledown_{\mathrm{nr}}}\, \Big(R_0^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto \llbracket 12, 12 \rrbracket\right] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\qquad R_2^{\sharp\,i} \left[y \mapsto R_2^{\sharp\,i}(x) -^\sharp \llbracket 1, 1 \rrbracket \right] \Big) \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1} \Big[x \mapsto R_1^{\sharp\,i+1}(x) \\
&\qquad \sqcap^\sharp \rrbracket -\infty, 0 \rrbracket \Big]
\end{aligned}$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
1	$\bot$	$\llbracket 12, 12 \rrbracket$	$\rrbracket -\infty, 12 \rrbracket$	$\rrbracket -\infty, 12 \rrbracket$
2	$\bot$	$\llbracket 12, 12 \rrbracket$	$\llbracket 1, 12 \rrbracket$	$\llbracket 1, 12 \rrbracket$
3	$\bot$	$\bot$	$\rrbracket -\infty, 0 \rrbracket$	$\rrbracket {\color{red}-\infty}, 0 \rrbracket$

Pourtant $x = 0$ à la fin !

Regagner de la précision

- L'élargissement permet au calcul de terminer.
- Mais entraîne une perte de précision.
- On peut en regagner un peu par des itérations descendantes.

Regagner de la précision

- L'élargissement permet au calcul de terminer.
- Mais entraîne une perte de précision.
- On peut en regagner un peu par des itérations descendantes.

Définition (rétrécissement)

Un rétrécissement (narrowing en anglais) $\triangle$ est une opération binaire ($\triangle$: $\mathcal{D}^\sharp \times \mathcal{D}^\sharp \to \mathcal{D}^\sharp$) vérifiant

- $\forall x^\sharp, y^\sharp, \quad x^\sharp \sqcap^\sharp y^\sharp \sqsubseteq^\sharp x^\sharp \triangle y^\sharp \sqsubseteq^\sharp x^\sharp\,;$

Regagner de la précision

- L'élargissement permet au calcul de terminer.
- Mais entraîne une perte de précision.
- On peut en regagner un peu par des itérations descendantes.

Définition (rétrécissement)

Un rétrécissement (narrowing en anglais) $\triangle$ est une opération binaire ($\triangle$: $\mathcal{D}^\sharp \times \mathcal{D}^\sharp \to \mathcal{D}^\sharp$) vérifiant

- $\forall x^\sharp, y^\sharp, \quad x^\sharp \sqcap^\sharp y^\sharp \sqsubseteq^\sharp x^\sharp \triangle y^\sharp \sqsubseteq^\sharp x^\sharp$;
- pour toute suite $\left(x^\sharp\right)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite décroissante

$$\begin{cases} y_0^\sharp & = & x_0^\sharp \\ y_{i+1}^\sharp & = & y_i^\sharp \triangle x_{i+1}^\sharp \end{cases}$$

est stationnaire.

Rétrécissement, illustration

$$R^\sharp = R^\sharp \triangledown F^\sharp(R^\sharp)$$

$$R^{\sharp'^1} = R^\sharp \vartriangle F^\sharp(R^\sharp)$$

$$\vdots$$

$$R^{\sharp'} = R^{\sharp'} \vartriangle F^\sharp\left(R^{\sharp'}\right)$$

$$\mathrm{lfp}\ F^\sharp$$

$$\vdots$$

$$R^{\sharp^0} = \bot$$

Rétrécissement, illustration

$$R^\sharp = R^\sharp \triangledown F^\sharp(R^\sharp)$$

$$R^{\sharp'^{1}} = R^\sharp \vartriangle F^\sharp(R^\sharp)$$

$$\vdots$$

$$R^{\sharp'} = R^{\sharp'} \vartriangle F^\sharp\left(R^{\sharp'}\right)$$

$$\operatorname{lfp} F^\sharp$$

$$\vdots$$

$$R^{\sharp^{0}} = \bot$$

Rétrécissement, illustration

$R^\sharp = R^\sharp \triangledown F^\sharp(R^\sharp)$

$R^{\sharp'1} = R^\sharp \vartriangle F^\sharp(R^\sharp)$

$\vdots$

$R^{\sharp'} = R^{\sharp'} \vartriangle F^\sharp\left(R^{\sharp'}\right)$

$\mathrm{lfp}\, F^\sharp$

$\vdots$

$R^{\sharp 0} = \bot$

Remarque : $\mathrm{lfp}\, F^\sharp \sqsubseteq^\sharp R^{\sharp'}$

On part de $R^\sharp \sqsupseteq^\sharp \mathrm{lfp}\, F^\sharp$
donc par croissance de $F^\sharp$,

$$F^\sharp(R^\sharp) \sqsupseteq^\sharp F^\sharp\left(\mathrm{lfp}\, F^\sharp\right) = \mathrm{lfp}\, F^\sharp$$

donc par propriété du rétrécissement $\vartriangle$,

$$R^{\sharp'1} = R^\sharp \vartriangle F^\sharp(R^\sharp) \sqsupseteq^\sharp \mathrm{lfp}\, F^\sharp.$$

Finalement, par récurrence immédiate,

$$R^{\sharp'} \sqsupseteq \mathrm{lfp}\, F^\sharp.$$

Exemple de rétrécissement

Pour garantir la convergence, on ne raffine que les bornes infinies.

Exemple de rétrécissement

Pour garantir la convergence, on ne raffine que les bornes infinies.

Définition

$$x^\sharp \bigtriangleup y^\sharp = \begin{cases} [\![a, d]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a, +\infty[\![\,, y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ [\![c, b]\!] & \text{si } x^\sharp =]\!]-\infty, b]\!]\,, y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ [\![c, d]\!] & \text{si } x^\sharp =]\!]-\infty, +\infty[\![\,, y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ x^\sharp & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple de rétrécissement

Pour garantir la convergence, on ne raffine que les bornes infinies.

Définition

$$x^\sharp \vartriangle y^\sharp = \begin{cases} [\![a, d]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a, +\infty[\![\,, y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ [\![c, b]\!] & \text{si } x^\sharp =]\!]-\infty, b]\!]\,, y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ [\![c, d]\!] & \text{si } x^\sharp =]\!]-\infty, +\infty[\![\,, y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ x^\sharp & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple

- $[\![0, +\infty[\![\vartriangle [\![0, 1]\!] = [\![0, 1]\!]$

Exemple de rétrécissement

Pour garantir la convergence, on ne raffine que les bornes infinies.

Définition

$$x^\sharp \mathbin{\triangle} y^\sharp = \begin{cases} [\![a, d]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a, +\infty[\![\,, y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ [\![c, b]\!] & \text{si } x^\sharp =]\!]-\infty, b]\!]\,, y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ [\![c, d]\!] & \text{si } x^\sharp =]\!]-\infty, +\infty[\![\,, y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ x^\sharp & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple

- $[\![0, +\infty[\![\mathbin{\triangle} [\![0, 1]\!] = [\![0, 1]\!]$
- $[\![0, 2]\!] \mathbin{\triangle} [\![0, 1]\!] = [\![0, 2]\!]$

Exemple de rétrécissement (suite et fin)

Exercice 4

Raffiner le résultat du calcul précédent avec le rétrécissement (i.e. partir du point fixe ${R_I^\sharp}^3$ et itérer en remplaçant ∇_{nr} par $\triangle_{\mathrm{nr}}$ dans les equations).

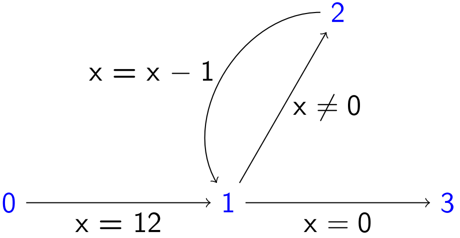
Limitations du narrowing et élargissement à seuil

$_0$x $= 12$;

while $_1$(x $\neq 0$) **{**

  $_2$ x $=$ x $- 1$;

}$_3$



- Même avec le narrowing, on ne peut pas trouver $x \geqslant 0$.

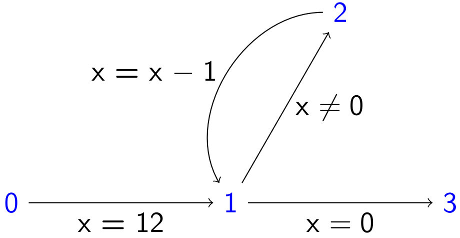
Limitations du narrowing et élargissement à seuil

$_0\mathtt{x} = 12\,;$

while $_1(\mathtt{x} \neq 0)$ **{**

$\quad _2\,\mathtt{x} = \mathtt{x} - 1\,;$

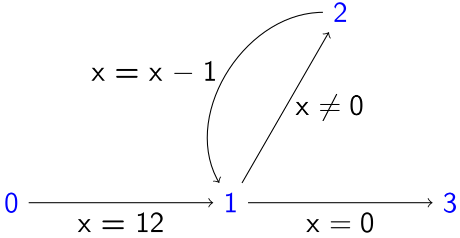
}$_3$



- Même avec le narrowing, on ne peut pas trouver $x \geqslant 0$.
- Alors que le domaine des signes y parvient.

Limitations du narrowing et élargissement à seuil

${}_0$x = 12 ;
while ${}_1$(x $\neq$ 0) **{**
    ${}_2$ x = x − 1 ;
}${}_3$



- Même avec le narrowing, on ne peut pas trouver $x \geqslant 0$.
- Alors que le domaine des signes y parvient.
- On peut améliorer l'élargissement :
  au lieu de passer directement d'une borne positive à $-\infty$,
  on s'arrête d'abord à 0.
- C'est l'idée de l'élargissement à seuil : on peut ainsi utiliser n'importe quel nombre fini de constantes comme seuils.

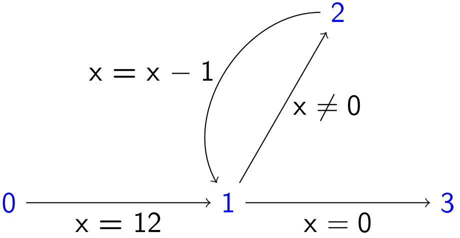
Limitations du narrowing et élargissement à seuil

${}_0\mathsf{x} = 12\,;$

while ${}_1(\mathsf{x} \neq 0)$ **{**

  ${}_2\ \mathsf{x} = \mathsf{x} - 1\,;$

}$_3$



- Même avec le narrowing, on ne peut pas trouver $x \geqslant 0$.
- Alors que le domaine des signes y parvient.
- On peut améliorer l'élargissement :
  au lieu de passer directement d'une borne positive à $-\infty$,
  on s'arrête d'abord à 0.
- C'est l'idée de l'élargissement à seuil : on peut ainsi utiliser n'importe quel nombre fini de constantes comme seuils.
- Encore faut il avoir le bon seuil (si on avait utilisé -1 ici, on n'aurait pas obtenu l'intervalle $[\![-1, 12]\!]$).

Analyse en arrière

On avait défini la sémantique abstraite des gardes comme

$$[\![e > 0]\!]^\sharp_{\mathrm{C}}\, \rho = \begin{cases} \rho\left[v \mapsto \rho(v) \ \sqcap^\sharp \alpha\left([\![1, +\infty[\![\right)\right] & \text{si } e = v \\ \rho & \text{sinon} \end{cases}$$

Comment faire pour $x - 4 > 0$?

Analyse en arrière

On avait défini la sémantique abstraite des gardes comme

$$\llbracket e > 0 \rrbracket^\sharp_{\mathrm{C}}\, \rho = \begin{cases} \rho\left[v \mapsto \rho(v)\ \sqcap^\sharp \alpha\left(\llbracket 1, +\infty \llbracket\right)\right] & \text{si } e = v \\ \rho & \text{sinon} \end{cases}$$

Comment faire pour $x - 4 > 0$?

On va utiliser une analyse en arrière des expressions :
partant du résultat de l'expression,
on en déduit les valeurs possibles des variables.

Analyse en arrière (suite)

Sémantique en arrière des expressions :
$[\![e]\!]{\downarrow}^{\sharp} : (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^{\sharp}) \times \mathcal{D}^{\sharp} \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^{\sharp})$

Analyse en arrière (suite)

Sémantique en arrière des expressions :
$[\![e]\!]\!\downarrow^\sharp : (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp) \times \mathcal{D}^\sharp \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)$

$$[\![v]\!]\!\downarrow^\sharp(\rho, r) \qquad = \rho\,[v \mapsto \rho(v) \sqcap r]\,(v)$$

Analyse en arrière (suite)

Sémantique en arrière des expressions :
$[\![e]\!]\!\downarrow^\sharp : (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp) \times \mathcal{D}^\sharp \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)$

$$[\![v]\!]\!\downarrow^\sharp(\rho, r) = \rho\,[v \mapsto \rho(v) \sqcap r]\,(v)$$

$$[\![n]\!]\!\downarrow^\sharp(\rho, r) = \begin{cases} \bot & \text{si } n^\sharp \sqcap^\sharp r = \bot \\ \rho & \text{sinon} \end{cases}$$

Analyse en arrière (suite)

Sémantique en arrière des expressions :
$[\![e]\!]{\downarrow}^\sharp : (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp) \times \mathcal{D}^\sharp \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)$

$$[\![v]\!]{\downarrow}^\sharp(\rho, r) = \rho\,[v \mapsto \rho(v) \sqcap r]\,(v)$$

$$[\![n]\!]{\downarrow}^\sharp(\rho, r) = \begin{cases} \bot & \text{si } n^\sharp \sqcap^\sharp r = \bot \\ \rho & \text{sinon} \end{cases}$$

$$[\![\mathbf{rand}(n_1, n_2)]\!]{\downarrow}^\sharp(\rho, r) = \begin{cases} \bot & \text{si } \mathbf{rand}^\sharp(n_1, n_2) \sqcap^\sharp r = \bot \\ \rho & \text{sinon} \end{cases}$$

Analyse en arrière (suite)

Sémantique en arrière des expressions :
$[\![e]\!]{\downarrow}^\sharp : (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp) \times \mathcal{D}^\sharp \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)$

$$[\![v]\!]{\downarrow}^\sharp(\rho, r) = \rho\,[v \mapsto \rho(v) \sqcap r]\,(v)$$

$$[\![n]\!]{\downarrow}^\sharp(\rho, r) = \begin{cases} \bot & \text{si } n^\sharp \sqcap^\sharp r = \bot \\ \rho & \text{sinon} \end{cases}$$

$$[\![\mathbf{rand}(n_1, n_2)]\!]{\downarrow}^\sharp(\rho, r) = \begin{cases} \bot & \text{si } \mathbf{rand}^\sharp(n_1, n_2) \sqcap^\sharp r = \bot \\ \rho & \text{sinon} \end{cases}$$

$$[\![e_1 + e_2]\!]{\downarrow}^\sharp(\rho, r) = [\![e_1]\!]{\downarrow}^\sharp(\rho, r_1) \sqcap^\sharp_{\mathrm{nr}} [\![e_2]\!]{\downarrow}^\sharp(\rho, r_2)$$
$$\text{avec } (r_1, r_2) = +{\downarrow}^\sharp\left([\![e_1]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}(\rho), [\![e_2]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}(\rho), r\right)$$

...

Analyse en arrière, arithmétique

Exemple

Dans le domaine des signes :
$+\downarrow^\sharp(\geqslant 0, \geqslant 0, \leqslant 0) = (0, 0)$

Analyse en arrière, arithmétique

Exemple

Dans le domaine des signes :
$+\downarrow^\sharp(\geqslant 0, \geqslant 0, \leqslant 0) = (0, 0)$
(si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ alors $x = y = 0$)

Analyse en arrière, arithmétique

Exemple

Dans le domaine des signes :
$+\downarrow^\sharp(\geqslant 0, \geqslant 0, \leqslant 0) = (0, 0)$
(si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ alors $x = y = 0$)

Exemple

Dans le domaine des intervalles :
$+\downarrow^\sharp(\llbracket 0, 2 \rrbracket, \llbracket 3, 8 \rrbracket, \llbracket 4, 7 \rrbracket) = (\llbracket 0, 2 \rrbracket, \llbracket 3, 7 \rrbracket)$

Analyse en arrière, arithmétique

Exemple

Dans le domaine des signes :
$+\downarrow^\sharp(\geqslant 0, \geqslant 0, \leqslant 0) = (0, 0)$

(si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ alors $x = y = 0$)

Exemple

Dans le domaine des intervalles :
$+\downarrow^\sharp(\llbracket 0, 2\rrbracket, \llbracket 3, 8\rrbracket, \llbracket 4, 7\rrbracket) = (\llbracket 0, 2\rrbracket, \llbracket 3, 7\rrbracket)$

Exercices 5

- Donner la table de $+\downarrow^\sharp$ pour le domaine des signes (tout au moins une partie, la table ayant 125 entrées).

Analyse en arrière, arithmétique

Exemple

Dans le domaine des signes :
$+\downarrow^\sharp(\geqslant 0, \geqslant 0, \leqslant 0) = (0, 0)$
(si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$ alors $x = y = 0$)

Exemple

Dans le domaine des intervalles :
$+\downarrow^\sharp([\![0, 2]\!], [\![3, 8]\!], [\![4, 7]\!]) = ([\![0, 2]\!], [\![3, 7]\!])$

Exercices 5

- Donner la table de $+\downarrow^\sharp$ pour le domaine des signes (tout au moins une partie, la table ayant 125 entrées).
- Définir $-\downarrow^\sharp$ pour le domaine des intervalles.

Analyse en arrière (suite et fin)

Exercice 6

- Avec la sémantique en arrière des expressions, définir une sémantique abstraite pour les gardes plus précise.
- Puis calculer cette sémantique dans le domaine des intervalles pour la garde $x + y \leqslant z$ avec $\rho(x) = [\![1, 10]\!]$, $\rho(y) = [\![3, 10]\!]$ et $\rho(z) = [\![3, 5]\!]$.

Liste des exercices

1. Soustraction abstraite du domaine des signes (s. 16) ;
2. Soustraction et multiplication abstraites du domaine des intervalles d'entiers (s. 37) ;
3. Itérations avec élargissement pour l'exemple du slide 38 (s. 43) ;
4. Itérations avec rétrécissement à partir du post-point fixe de l'exemple slide 44 (s. 48) ;
5. Addition et soustraction arrière pour le domaine des intervalles (s. 53)
6. Sémantique des gardes avec opérateur arrière ; évaluation de la garde $x + y \leqslant z$ (s. 54)