



SCIENCE DU NUMERIQUE

S6 - TÉLÉCOMMUNICATIONS

Projet 2 : Introduction à la synchronisation

Impact d'une erreur de phase porteuse et correction de cette erreur

Auteurs :

Bryan CHEN

Aicha BENNAGHMOUCH

4 juin 2022

Département Sciences du Numérique - Première année
2021-2022

Table des matières

1	Introduction	2
2	Impact d'une erreur de phase porteuse	3
2.1	Etude théorique	3
2.1.1	QUESTION 1	3
2.1.2	QUESTION 2	3
2.1.3	QUESTION 3	4
2.1.4	QUESTION 4	4
2.1.5	QUESTION 5	5
2.1.6	QUESTION 6	5
2.2	Implantation sous Matlab	6
3	Estimation et correction de l'erreur de phase porteuse : Implantation sous Matlab	11
4	Utilisation d'un codage par transition	12
4.1	Etude théorique	12
5	Étude des interférences entre symbole et du critère de Nyquist	13
5.1	Implantation sur Matlab	13
6	Conclusion	13
7	Références	14

Table des figures

1	Chaîne de transmission passe-bas équivalente avec une synchronisation idéale de la chaîne sur porteuse correspondante (modulation BPSK).	2
2	Chaîne de transmission BPSK avec synchronisation idéale.	2
3	Chaîne de transmission passe-bas équivalente avec une erreur de phase porteuse φ . . .	3
4	Tracé de la constellation en sortie de l'échantillonneur	6
5	TEB de la liaison nul	6
6	Tracé de la constellation en sortie de l'échantillonneur $\varphi = 40^\circ$	7
7	Tracé de la constellation en sortie de l'échantillonneur $\varphi = 100^\circ$	8
8	Tracé de la constellation en sortie de l'échantillonneur $\varphi = 180^\circ$	9
9	TEBs $\varphi = 40, 100, 180$	9
10	Tracé de la comparaison du TEB simulé avec TEB théorique	10
11	Tracé de la comparaison des TEB pour $\varphi : 40^\circ$ et 0°	10
12	Tracé de la comparaison des TEB pour $\varphi : 40^\circ$ et 100°	11
13	TEB pour $\varphi = 40^\circ$ et $\varphi = 100^\circ$	11
14	Tracé de la comparaison des TEB pour $\varphi : 40^\circ$ avec et sans correction	12
15	Tracé de la comparaison des TEB pour $\varphi : 100^\circ$ avec et sans correction	12
16	Codage par transition	13
17	Décodage par transition	13

1 Introduction

Soit la chaîne de transmission présentée dans la figure 1. Elle représente la chaîne passe-bas équivalente associée à une transmission BPSK sur canal AWGN : $x_e(t)$ représente l'enveloppe complexe associée au signal modulé sur porteuse (voie en phase uniquement en BPSK : $x_e(t) = I(t)$), tandis que $I_n(t)$ représente l'enveloppe complexe associée au bruit introduit par le canal de propagation (voie en phase uniquement également).

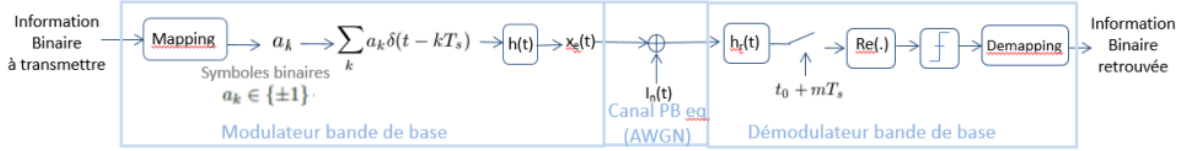


FIGURE 1 – Chaîne de transmission passe-bas équivalente avec une synchronisation idéale de la chaîne sur porteuse correspondante (modulation BPSK).

Cette chaîne passe-bas équivalente suppose que, dans la chaîne de transmission sur porteuse associée (figure 2), le récepteur dispose localement d'une onde porteuse avec exactement la même fréquence et la même phase que celle utilisée à l'émission (démodulation cohérente). On suppose également ici que l'horloge du récepteur dispose localement d'une horloge avec la même phase et la même fréquence que celle de l'émetteur, lui permettant d'échantillonner aux instants optimaux. En résumé on suppose une synchronisation idéale, à la fois "en fréquence" (sur la porteuse) et "en temps" (sur l'horloge).

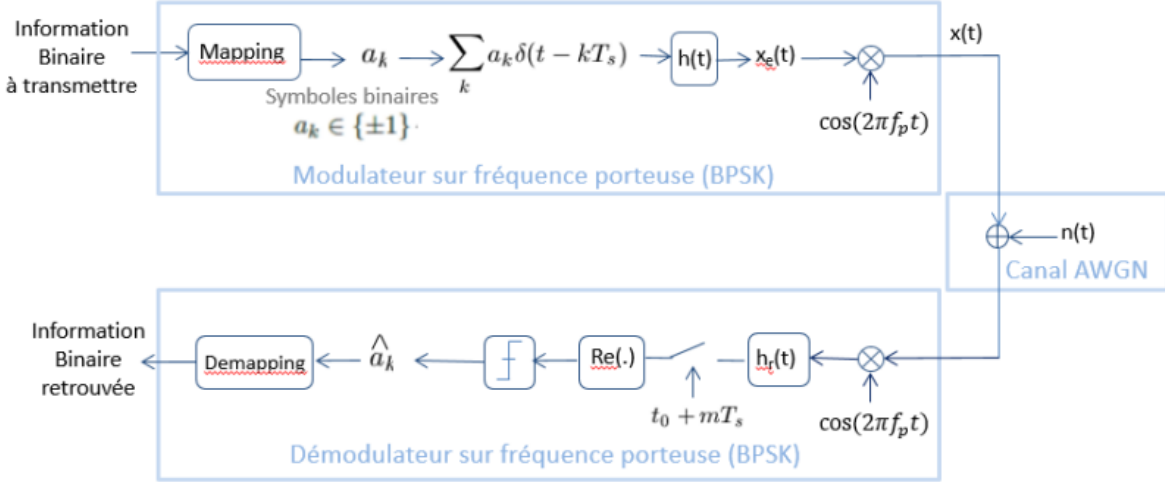


FIGURE 2 – Chaîne de transmission BPSK avec synchronisation idéale.

En pratique, des méthodes de synchronisation doivent être mise en oeuvre pour assurer une démodulation cohérente et une synchronisation temporelle. L'objectif de ce projet n'est pas de développer complètement la mise en place de la synchronisation au niveau du récepteur (cela fait l'objet d'un cours de deuxième année), mais d'en introduire quelques concepts. Après avoir étudié l'impact d'une erreur de synchronisation sur la phase porteuse, nous allons vous proposer d'implanter une méthode de synchronisation basée sur le calcul de l'estimée de l'erreur pour correction.

2 Impact d'une erreur de phase porteuse

La figure 3 présente la chaîne passe-bas équivalente associée à une transmission sur porteuse de type BPSK lorsqu'il existe une erreur de phase porteuse φ . On va supposer que sont placés en émission et en réception deux filtres de même réponse impulsionnelle : fonction porte de largeur T_s et de hauteur égale à 1. L'enveloppe complexe associée au bruit introduit par le canal de transmission, $n_e(t)$, est ici réelle avec une densité spectrale de puissance égale à N_0 quelle que soit la fréquence.

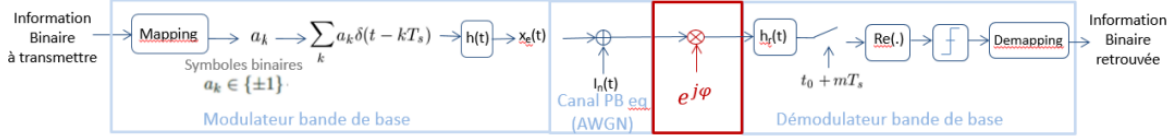


FIGURE 3 – Chaîne de transmission passe-bas équivalente avec une erreur de phase porteuse φ

2.1 Etude théorique

Ce premier travail va être dédié à l'étude des modulateurs bande de base et, en particulier, à l'identification des éléments ayant un impact sur l'efficacité spectrale obtenue pour la transmission.

2.1.1 QUESTION 1

D'après l'énoncé, les filtres d'émission et de réception admettent une réponse impulsionnelle qui sont des portes de largeur T_s et de hauteur 1.

Ainsi, leur produit de convolution $G(f) = H(f) \cdot H_r(f)$ est un signal triangulaire de base $2T_s$ et de hauteur T_s d'après le cours/TDs. Afin de respecter le critère de Nyquist, il faut échantillonner à $t_0 + mT_s$ avec l'instant optimal $t_0 = T_s$. En effet, de ce fait, on a alors

$$\begin{cases} g(t_0) & \neq 0 \\ g(t_0 + mT_s) & = 0, \forall m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2.1.2 QUESTION 2

En supposant que la condition de Nyquist est respectée, pour une erreur de phase porteuse φ donnée, à l'entrée de l'échantillonneur, on obtient :

$$\begin{aligned} z(t) &= h_r(t) * \left(\left[\sum_k a_k \delta(t - kT_s) * h(t) + I_n(t) \right] \cdot \exp(j\varphi) \right) \\ &= \sum_k a_k \delta(t - kT_s) * g(t) \cdot \exp(j\varphi) + \exp(j\varphi) I_n(t) * h_r(t) \end{aligned}$$

D'où, à la sortie d'échantillonneur, comme $g(t_0) = T_s$ (vu à la question 1) et d'après les notations de l'énoncé, on aura :

$$\begin{aligned} z(t_0 + mT_s) &= a_m \exp(j\varphi) * g(t_0) + I_w(t_0 + mT_s) \\ &= a_m \exp(j\varphi) \cdot T_s + I_w(t_0 + mT_s) \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$z(t_0 + mT_s) = a_m \exp(j\varphi) \cdot T_s + I_w(t_0 + mT_s)$$

2.1.3 QUESTION 3

D'après le cours, le taux d'erreur symboles (TES) se calcule de la manière suivante :

$$TES = P(\hat{a}_m = 1 \cap a_m = -1) + P(\hat{a}_m = -1 \cap a_m = 1)$$

Avec $P(\hat{a}_m = 1 \cap a_m = -1)$ la probabilité que le symbole estimé soit 1 tandis que le symbole envoyé était -1 et $P(\hat{a}_m = -1 \cap a_m = 1)$ la probabilité que le symbole estimé soit -1 tandis que le symbole envoyé était 1. On obtient, d'après les formules de probabilité et sachant que les symboles sont équiprobables :

$$\begin{aligned} TES &= P(\hat{a}_m = 1 \cap a_m = -1) + P(\hat{a}_m = -1 \cap a_m = 1) \\ &= P(a_m = -1)P(\hat{a}_m = 1|a_m = -1) + P(a_m = 1)P(\hat{a}_m = -1|a_m = 1) \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{P(\text{Re}(z(t_0 + mT_s)) > 0 | a_m = -1)}_{\hat{a}_m=1 \text{ et car BPSK}} + \frac{1}{2} \underbrace{P(\text{Re}(z(t_0 + mT_s)) < 0 | a_m = 1)}_{\hat{a}_m=-1 \text{ et car BPSK}} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} P(\text{Re}(z(t_0 + mT_s)) > 0 | a_m = -1) &= P(-T_s \cos(\varphi) + \text{Re}(I_w(t_0 + mT_s)) > 0) \\ &= P(T_s \cos(\varphi) < \text{Re}(I_w(t_0 + mT_s))) \\ &= P\left(\frac{T_s \cos(\varphi)}{\sigma_{I_w}} < \frac{\text{Re}(I_w(t_0 + mT_s))}{\sigma_{I_w}}\right) \text{ car } \sigma_{I_w} > 0 \\ &= Q\left(\frac{T_s \cos(\varphi)}{\sigma_{I_w}}\right) \text{ on reconnaît la fonction } Q \end{aligned}$$

Par symétrie, on obtient ainsi, tout calcul fait :

$$TES = \frac{1}{2} Q\left(\frac{T_s \cos(\varphi)}{\sigma_{I_w}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{T_s \cos(\varphi)}{\sigma_{I_w}}\right) = Q\left(\frac{T_s \cos(\varphi)}{\sigma_{I_w}}\right)$$

Dans le cas d'une modulation BPSK et comme on respecte le critère de Nyquist ainsi qu'on utilise un filtrage adapté, on a ainsi $TEB \approx \frac{TES}{\log_2(M)}$ avec $M = 2$. Finalement, on obtient :

$$TEB \approx \frac{TES}{\log_2(M)} = Q\left(\frac{T_s \cos(\varphi)}{\sigma_{I_w}}\right)$$

2.1.4 QUESTION 4

D'après le cours, $P_w = \int_R S_w(f) df$. Ainsi, d'après l'énoncé, la puissance de bruit en sortie du filtre de réception est noté $\sigma_{I_w}^2$, on obtient

$$\begin{aligned} \sigma_{I_w}^2 &= \int_R S_w(f) df \\ &= N_0 \int_R |H(f)|^2 df \quad (\text{Relation de Wiener - Lee}) \\ &= N_0 \int_R |h(t)|^2 dt \quad (\text{Identité de Parseval}) \\ &= N_0 \cdot T_s \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\sigma_{I_w}^2 = N_0 \cdot T_s$$

2.1.5 QUESTION 5

Afin de calculer l'énergie des symboles à l'entrée de récepteur, on a la formule, d'après le cours/TDs, suivante :

$$E_s = E_b = P_x T_s$$

Avec P_x la puissance du signal $x(t)$. Les symboles émis sont, de plus, indépendants et de moyenne nulle donc

- $m_a = 0$
- $\sigma_a = E[|a_k - m_a|^2] = E[|a_k|^2]$.

On a donc, en simplifiant la formule du cours :

$$\begin{aligned} S_x(f) &= \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 \\ &= \frac{E[|a_k|^2]}{T_s} |H(f)|^2 \\ &= \frac{\frac{1}{2}((-1)^2 + 1^2)}{T_s} |H(f)|^2 \\ &= \frac{1}{T_s} |T_s \cdot \sin_c(\pi f T_s) \cdot \exp(j\pi f T_s)|^2 \\ &= T_s \cdot \sin_c^2(\pi f T_s) \text{ car module d'un complexe} = 1 \end{aligned}$$

De plus, d'après le cours, on calcule la puissance du signal à partir de sa densité spectrale de puissance, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} P_x &= \int_R T_s \cdot \sin_c^2(\pi f T_s) df \\ &= \frac{1}{T_s} \int_R T_s^2 \cdot \sin_c^2(\pi f T_s) df \\ &= 1 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{E_s = E_b = T_s}$$

2.1.6 QUESTION 6

A partir des questions précédentes, on peut déduire l'expression du taux d'erreur binaire de la liaison, conditionnellement à une erreur de phase porteuse φ , en fonction de E_b/N_0 , rapport signal sur bruit par bit à l'entrée du récepteur, pour la chaîne étudiée :

$$\begin{aligned} TEB &= Q\left(\frac{T_s \cos(\varphi)}{\sigma_{I_w}}\right) \\ &= Q\left(\frac{T_s \cos(\varphi)}{\sqrt{T_s N_0}}\right) \text{ d'après QUESTION 4} \\ &= Q\left(\cos(\varphi) \sqrt{\frac{T_s}{N_0}}\right) \\ &= \boxed{Q\left(\cos(\varphi) \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)} \text{ d'après QUESTION 5} \end{aligned}$$

Si le déphasage est nul, soit $\varphi = 0^\circ$ on remarque que $TEB = Q \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$ ce qui correspond au TEB du signal transmis sans erreur de synchronisation sur la phase porteuse (d'après le cours/TDs).

2.2 Implantation sous Matlab

1. Paramètres : la chaîne de transmission sera implantée avec une fréquence d'échantillonnage $F_e = 24000\text{Hz}$, pour transmettre un débit binaire $R_b = 6000$ bits par seconde.

2. Après implantation de la chaîne de transmission sans erreur de phase et sans bruit, voici ci-dessous le tracé de la constellation en sortie de l'échantillonneur (cf. FIGURE 4) et on vérifie également que le TEB de la liaison est bien nul. (cf. FIGURE 5)

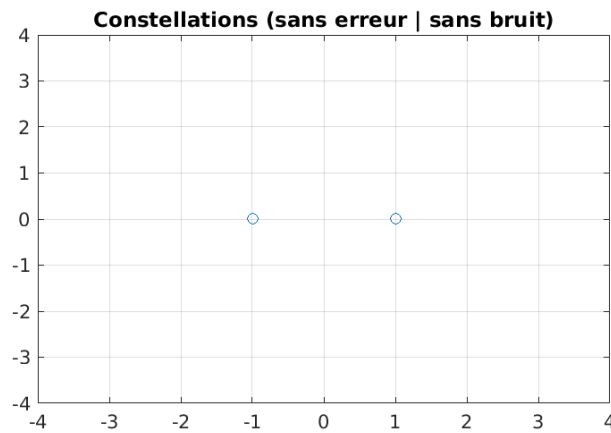


FIGURE 4 – Tracé de la constellation en sortie de l'échantillonneur

```
>> Projet
Pour une chaîne sans erreur de phase et sans bruit : TEB = 0
```

FIGURE 5 – TEB de la liaison nul

3. Après implantation de la chaîne de transmission avec erreur de phase et sans bruit, voici ci-dessous le tracé de la constellation en sortie de l'échantillonneur et déterminez le TEB de la liaison pour des erreurs de phase de 40° (cf. FIGURE 6 et FIGURE 9), 100° (cf. FIGURE ?? et FIGURE 9) et 180° (cf. FIGURE 8 et FIGURE 9). Expliquez les résultats obtenus : constellations observée, TEB mesurés. On expliquera notamment, à partir des constellations attendues et observées, la mesure attendue et obtenue pour le TEB.

Pour $\varphi = 40^\circ$

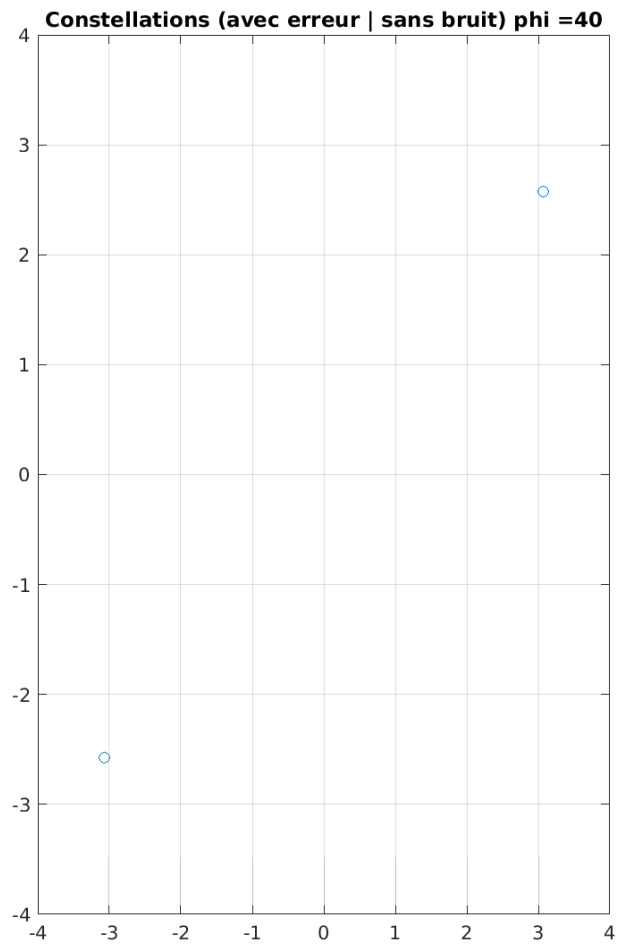


FIGURE 6 – Tracé de la constellation en sortie de l'échantillonneur $\varphi = 40^\circ$

Pour $\varphi = 100^\circ$

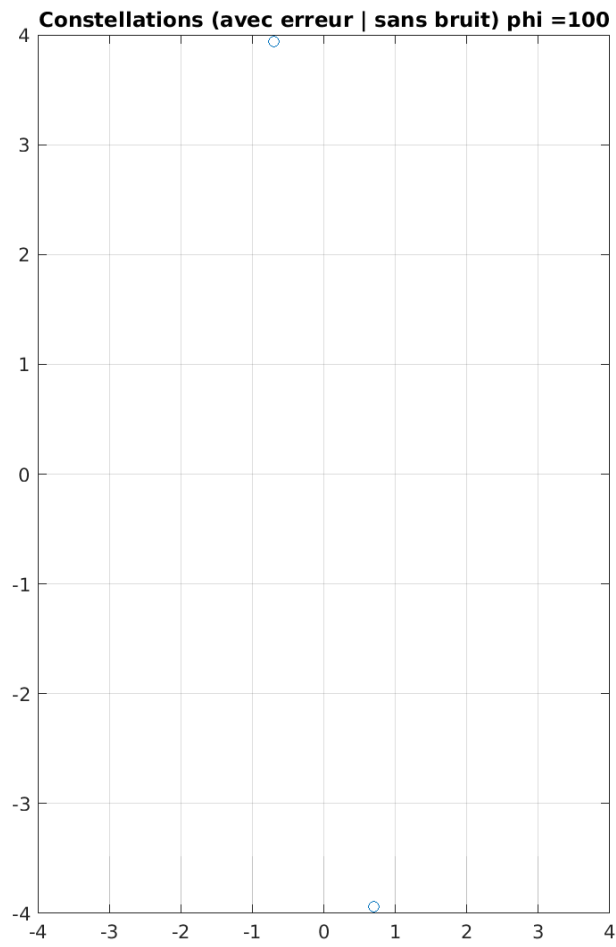


FIGURE 7 – Tracé de la constellation en sortie de l'échantillonneur $\varphi = 100^\circ$

Pour $\varphi = 180^\circ$

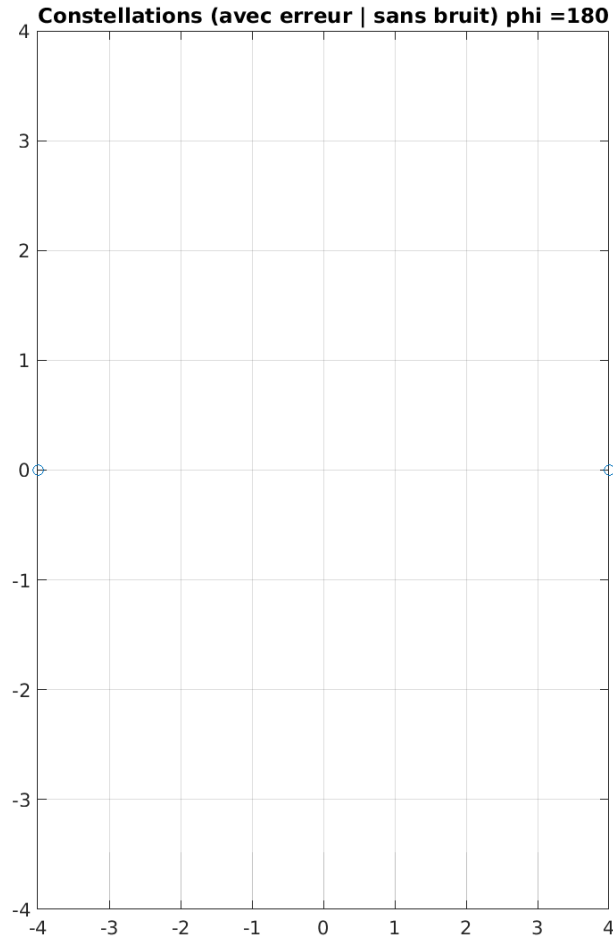


FIGURE 8 – Tracé de la constellation en sortie de l'échantillonneur $\varphi = 180^\circ$

Pour leur TEB

Pour une chaîne avec erreur de phase ($\phi=40$) et sans bruit : TEB = 0
 Pour une chaîne avec erreur de phase ($\phi=100$) et sans bruit : TEB = 1
 Pour une chaîne avec erreur de phase ($\phi=180$) et sans bruit : TEB = 1

FIGURE 9 – TEBs $\varphi = 40, 100, 180$

4. Après implantation de la chaîne de transmission complète avec erreur de phase et ajout de bruit.

(a). Voici ci-dessous le tracé de la comparaison sur une même figure, du TEB simulé avec le TEB théorique de la chaîne étudiée, en fonction de $(E_b/N_0)_{dB}$, pour une erreur de phase porteuse de $\varphi = 40^\circ$. (cf. FIGURE 10)

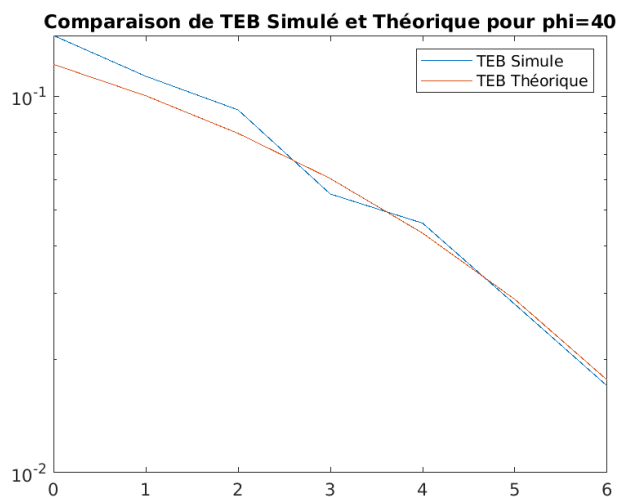


FIGURE 10 – Tracé de la comparaison du TEB simulé avec TEB théorique

(b). Voici ci-dessous le tracé de la comparaison sur une même figure, du TEB de la chaîne de transmission implantée pour une erreur de phase porteuse donnée de $\varphi = 40^\circ$, et le TEB obtenu pour la même chaîne de transmission sans erreur de phase ($\varphi = 0^\circ$). (cf. FIGURE 11)

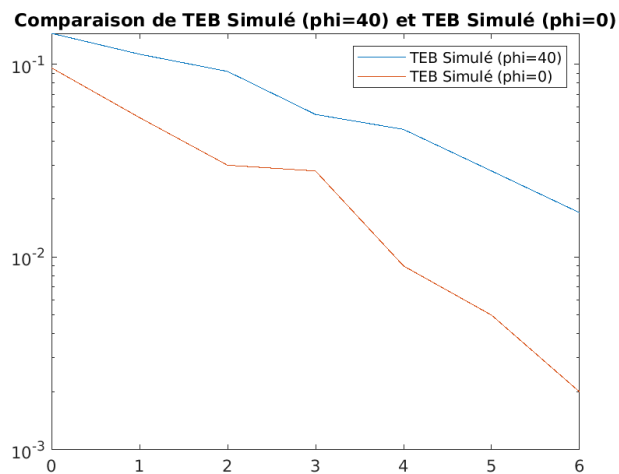


FIGURE 11 – Tracé de la comparaison des TEB pour $\varphi : 40^\circ$ et 0°

(c). Voici ci-dessous le tracé du taux d'erreur binaire (TEB) en fonction de $(E_b/N_0)_{dB}$, pour les deux valeurs de l'erreur de phase φ utilisées précédemment : 40° et 100° . (cf. FIGURE 12)

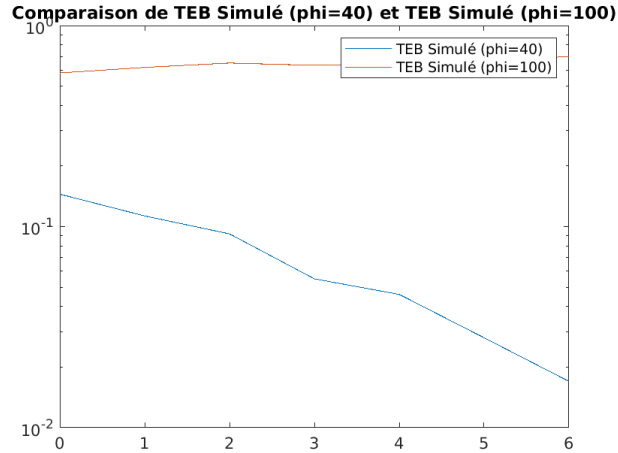


FIGURE 12 – Tracé de la comparaison des TEB pour φ : 40° et 100°

(d). On observe que lorsque φ est proche de 90° , le TEB est plus important. Ce qui est étonnant ici est que lorsque $\varphi = 40^\circ$, le TEB est proche du TEB théorique, contrairement au TEB pour $\varphi = 90^\circ$.

3 Estimation et correction de l'erreur de phase porteuse : Implantation sous Matlab

Implantez la chaîne de transmission avec estimation de l'erreur de phase et correction, en gardant $F_e = 24000$ Hz et $R_b = 6000$ bits par seconde.

1. Les résultats obtenus pour les estimées de l'erreur de phase φ , quand $\varphi = 40^\circ$ et quand $\varphi = 100^\circ$ sont les suivantes (cf. FIGURE 13) :

```
Pour une chaîne avec erreur de phase (phi=40) et avec bruit AVEC CORRECTION: TEB = 0
Pour une chaîne avec erreur de phase (phi=100) et avec bruit AVEC CORRECTION: TEB = 0.79
```

FIGURE 13 – TEB pour $\varphi = 40^\circ$ et $\varphi = 100^\circ$

On observe que pour $\varphi = 40^\circ$, le TEB reste nul même en étant corrigé. Et pour $\varphi = 100^\circ$, le TEB est meilleur lorsqu'il est corrigé (qui valait 1 lorsqu'il n'était pas corrigé).

2. Voici ci-dessous le TEB obtenu avec correction de l'erreur de phase et comparez le à celui obtenu avec erreur de phase non corrigée et à celui obtenu sans erreur de phase pour les deux erreurs de phase : $\varphi = 40^\circ$ (cf. FIGURE 14) et $\varphi = 100^\circ$ (cf. FIGURE 15).

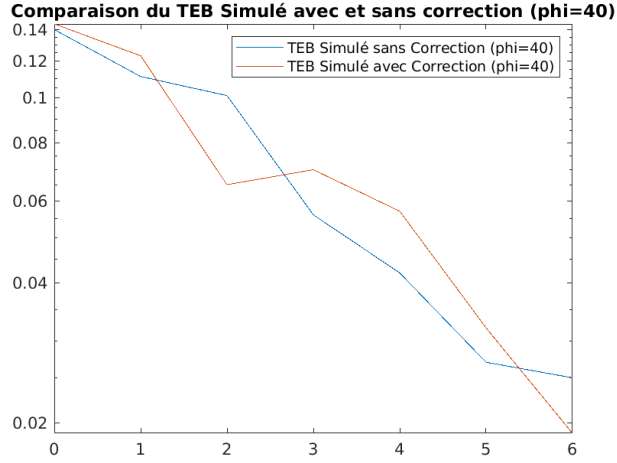


FIGURE 14 – Tracé de la comparaison des TEB pour $\varphi : 40^\circ$ avec et sans correction

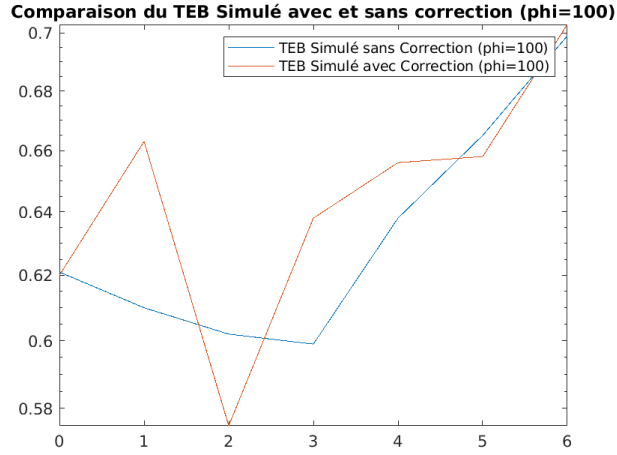


FIGURE 15 – Tracé de la comparaison des TEB pour $\varphi : 100^\circ$ avec et sans correction

On observe que les TEB simulés avec et sans correction sont semblables.

4 Utilisation d'un codage par transition

Nous allons vous demander, dans cette partie d'implanter un codage par transition des symboles émis et d'analyser l'impact sur la chaîne de transmission. La figure 16 présente la réalisation du codage par transition (au niveau de l'émetteur), tandis que la figure 17 présente la réalisation du décodage par transition (au niveau du récepteur).

4.1 Etude théorique

1. L'utilisation du codage par transition permet de s'affranchir de l'ambiguïté de π sur l'estimée de l'erreur de phase porteuse, en effet comme $c_k = \prod_{i=1}^k a_i$, ainsi on prend en considération tous les symboles émis et tente de minimiser la distance entre la suite de symboles estimés et le signal reçu.

2. Le TEB sur les symboles codés (par codage par transition) est le double du TEB obtenu sur les symboles non codés, en effet en tentant de minimiser la distance entre la suite de symboles estimés et le

signal reçu, cela permet de s'affranchir de l'ambiguïté de π sur l'estimée de l'erreur de phase porteuse et on divise par deux le taux d'erreur binaire.

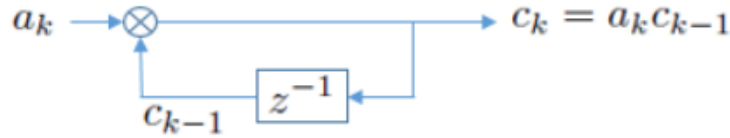


FIGURE 16 – Codage par transition

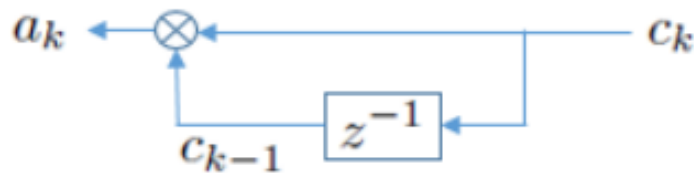


FIGURE 17 – Décodage par transition

5 Étude des interférences entre symbole et du critère de Nyquist

5.1 Implantation sur Matlab

Introduisez le codage par transition dans votre chaîne précédente et, pour les deux erreurs de phase $\varphi = 40^\circ$ et $\varphi = 100^\circ$, tracez le TEB obtenu et comparez le avec :

1. celui obtenu sans correction de l'erreur de phase :
2. celui obtenu avec correction de l'erreur de phase mais sans utilisation du codage par transition :

6 Conclusion

Au cours de ce projet qui nous introduction au notion de synchronisation, de l'impact d'un ajout d'une erreur de phase porteuse et de méthode de récupération :

1. Mettre en application et surtout, adapter nos connaissances qu'on a accumulé aux TPs, TDs et cours sur ce projet.
2. Implanter une chaîne de transmission sur fréquence porteuse de type BPSK.
3. Estimer et corriger une erreur de phase porteuse sur une chaîne de transmission. Comprendre également son impact.

7 Références

- [1] Viterbi, A. J. ; Viterbi, A. M. Nonlinear estimation of PSK-modulated carrier phase with application to burst digital transmission, IEEE Trans. Inf. Theory 1983, 29(4), 543-551.
- [2] Benoît ESCRIG, Enseignant-chercheur à Toulouse INP-ENSEEIH
- [3] Jean-Yves TOURNERET, Enseignant-chercheur à Toulouse INP-ENSEEIH
- [4] Nathalie THOMAS, Enseignante-chercheuse à Toulouse INP-ENSEEIH