方程求根习题

1. 用二分法求方程$x\sin x-1=0$在$\left[0,2\right]$内的根的近似值. 求：（1）为使近似根误差不超过10^{-4}所需要的等分次数；（2）经过 3 次等分后的近似根.

2. 给定函数$f(x)$，设$\forall x, 0<m\le f'(x)\le M$，证明对于范围$0<\lambda<\dfrac{2}{M}$内的任意定数$\lambda$，迭代过程$x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$均收敛于$f(x)$的根.

3. 设方程$x=\varphi(x)$的根为x^*，证明：若$\left|\varphi'(x)\right|\ge 1$，则由迭代格式：

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),\quad x_0\ne x^*$$

所产生的序列$\left\{x_k\right\}$ 不收敛到x^*.

4. 记$\varphi(x)=\dfrac{2-e^x+x^2}{3}$，用$x_{k+1}=\varphi(x_k)$求方程$2-\mathrm{e}^x+x^2-3x=0$在$[0,0.5]$的根，试讨论上述迭代的局部收敛性.

5. 已知方程$f(x)=\mathrm{e}^{-x}-x=0$在区间$[0.5,\ 0.6]$内有唯一的实根.

（1） 试判断以下两种求上述方程根的迭代格式的局部收敛性，并说明理由.

格式 1：$x_{n+1}=-\ln x_n,\ x_0>0$；格式 2：$x_{n+1}=\mathrm{e}^{-x_n},\ x_0>0$

（2） **方程$f(x)=0$的根就是$y=f(x)$的反函数$x=g(y)$在$y=0$时x的值**. 已知下列数据表是$y=f(x)=\mathrm{e}^{-x}-x$的一组数

x	0.50	0.55	0.60
y	0.10653	0.02695	-0.05119

求出$g(y)$的插值多项式，在此基础上求方程$f(x)=\mathrm{e}^{-x}-x=0$的近似根.

6. 用迭代法求非线性方程$f(x)=\dfrac{1}{4}\sin x-\dfrac{3}{2}x+1=0$的根. （1）证明该方程有且仅有一个实根；（2）试写出一个全局收敛的迭代格式；（3）写出 Newton 法的迭代公式.

7. 应用牛顿法于方程$f(x)=x^n-a=0$和$f(x)=1-\dfrac{a}{x^n}=0$，分别导出求$\sqrt[n]{a}$的迭代公式，并求$\lim\limits_{k\to\infty}(\sqrt[n]{a}-x_{k+1})/(\sqrt[n]{a}-x_k)^2$.

8. 给定方程 $f(x)=x^{1+\alpha}-x=0$ ，其中 $0<\alpha<1$，记 p_1,p_2 分别为用牛顿迭代法求解上述方程两个根 $x_1^*=0$ 和 $x_2^*=1$ 的收敛阶，求 p_1,p_2 的值.