原子物理

肖涵薄 31360164

2018 年 11 月 13 日

Q1

设 μ, B 间夹角为 θ，则所受力矩为：

$$M = \mu \times B = \mu B \sin\theta = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$$

设角动量为 P，角速度为 ω：

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \omega \times P = \omega P \sin\theta$$

$$\implies \mu B = \omega P$$

$$\implies \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\mu B}{2\pi P}$$

代入定义：$\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e}$，$\mu = \frac{P}{\hbar} g \mu_B$，磁矩进动频率 ν 为：

$$\nu = \frac{\mu B}{2\pi P} = \frac{geB}{4\pi m_e}$$

当 m 不同，若保持 g, B 不变，由 $\nu = \frac{geB}{4\pi m_e}$ 可知轨道频率不会随之改变。

频率不相同，电子有两种进动，一种是绕 B 的轨道进动，一种是绕角动量 P 的自旋进动。在 $L-S$ 耦合时，上面计算的 $\nu = \frac{geB}{4\pi m}$ 是电子绕 B 的轨道进动频率 $\nu = \frac{\mu B}{2\pi P}$，而电子的自旋进动频率为 $\pm\frac{1}{2}\mu_B$，与其不同。

Q2

假定电子是一个半径为 r_e 的带电小球，且其电荷均匀地分布在球体上。那么根据 $W_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$，这样一个带电小球的电磁能量为：

$$W_{in} = \int_{V_1} W_e \mathrm{d}\nu = \int_0^{r_e} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{re}{4\pi\varepsilon_0 r_e^3}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{e^2}{40\pi\varepsilon_0 r_e}$$

$$W_{out} = \int_{r_e}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_e}$$

$$W = W_{in} + W_{out} = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 r_e}$$

借用质能关系，$W = mc^2$ ，电子的半径为：

$$r_e = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 mc^2}$$

球体的转动惯量：

$$I = \frac{2mr_e^2}{5}$$

则其表面距转轴 r_e 处速度为：

$$v = \omega r_e = \frac{L}{I} r_e = \frac{5\sqrt{3}h}{4\pi \cdot 2mr_e^2} r_e = \frac{25\sqrt{3}c^2\varepsilon_0 h}{6e^2} = 1.48 \times 10^{11} m/s >> c$$

因此电子的自旋不能由经典的转动解释。

Q3

做圆周运动的电子会受到磁场给的洛伦兹力：

$$F_L = -ev \times B$$

设 r, B 夹角为 θ，则电子所受瞬时力矩为：

$$M = r \times F_L = -er \times (v \times B) = -e[(rB)v - (rv)B] = e(rB)\boldsymbol{v} = -eBr\boldsymbol{v}\cos\theta$$

由于 θ 随时间改变，需要求一个周期内的平均力矩：

$$\bar{M} = \frac{\int_0^T M \mathrm{d}\theta}{2\pi}$$

根据维里定理：

$$\bar{M} = \frac{M}{2} = -\frac{1}{2}eBr\boldsymbol{v}\cos\theta \tag{1}$$

做圆周运动的电子会产生一个环形电流：

$$i = -\frac{v}{2\pi r}e$$

定义电子磁矩：

$$\mu = i\boldsymbol{A} = i \cdot \pi r^2 \boldsymbol{e}_A = -\frac{evr}{2}\boldsymbol{e}_A$$

而

$$\mu \times B = -\frac{evr}{2}B\cos\theta \tag{2}$$

上式 (1),(2) 右侧相等，因此

$$\bar{M} = \mu \times B$$

Q4

该态 $J = 1/2, L = 2, S = 3/2, m_j = \pm 1/2$ 根据 g 因子的计算式：

$$g = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\frac{s(s+1) - l(l+1)}{j(j+1)} = 0$$

因此 $\mu_{J,z} = 0$，又由于 J 自身不为 0，电子总角动量 μ 不为零。从矢量图的角度出发，说明 μ 与 J 的方向垂直。也即这个状态的电子只有一个快进动，对外效果被平均掉抵消了，表现为没有有效磁矩。

Q5

对于 $^2D_{3/2}$

$l = 2, j = 3/2, s = 1/2, m_j = \pm 3/2, \pm 1/2,$

$^2D_{3/2}$ 弱磁场

$g = \frac{0.5(0.51.5-2\ 3)}{1.52.5} + \frac{3}{2} = 4/5 \implies \mu_{j,z} = -m_j g \mu_B = \pm\frac{6}{5}\mu_B, \pm\frac{2}{5}\mu_B$

能级能量差为：$U = -\mu B = \pm\dfrac{6}{5}\dfrac{e\hbar}{2m_e}B, \pm\dfrac{2}{5}\dfrac{e\hbar}{2m_e}B$

其能级图为：

$$
\begin{array}{lcc}
\rule{2cm}{0.4pt} & \frac{6}{5} & \frac{e\hbar}{2m_e}B \\
\rule{2cm}{0.4pt} & \frac{2}{5} & \frac{e\hbar}{2m_e}B \\
\rule{2cm}{0.4pt} & -\frac{2}{5} & \frac{e\hbar}{2m_e}B \\
\rule{2cm}{0.4pt} & -\frac{6}{5} & \frac{e\hbar}{2m_e}B
\end{array}
$$

$^2D_{3/2}$ 强磁场

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} = \frac{e}{2m_{\mathrm{e}}}\left(g_s \boldsymbol{S} + g_l \boldsymbol{L}\right) \cdot \boldsymbol{B} = \frac{eB}{2m_e}\left(2S_z + L_z\right) = \frac{e\hbar B}{2m_e}\left(2m_s + m_L\right)$$

$$\Longrightarrow U = \frac{eB}{2m_e}\left(2S_z + L_z\right) = \frac{e\hbar B}{2m_e}\left(2m_s + m_L\right)$$

要求 $\Delta m_s = 0; \Delta m_{\mathrm{L}} = 0, \pm 1$

$$\Longrightarrow U = \pm \frac{e\hbar B}{2m_e}, 0$$

其能级图为：

$$
\begin{array}{lcc}
\rule{2cm}{0.4pt} & 1 & \frac{e\hbar}{2m_e}B \\
\rule{2cm}{0.4pt} & 0 & \frac{e\hbar}{2m_e}B \\
\rule{2cm}{0.4pt} & -1 & \frac{e\hbar}{2m_e}B
\end{array}
$$

对于 $^2P_{3/2}$

$l = 1, j = 3/2, s = 1/2, m_j = \pm 3/2, \pm 1/2,$

$^2P_{3/2}$ 弱磁场

$g = 3/2 - 1/6 = 4/3 \Longrightarrow mg = \pm 2, \pm 2/3$

能级能量差为：$U = -\mu B = \pm 2\frac{e\hbar}{2m_e}B, \pm 2/3\frac{e\hbar}{2m_e}B$

其能级图为：

$$\begin{array}{lcc}
\rule{4em}{0.4pt} & 2 & \dfrac{e\hbar}{2m_e}B \\
\rule{4em}{0.4pt} & 2/3 & \dfrac{e\hbar}{2m_e}B \\
\rule{4em}{0.4pt} & -2/3 & \dfrac{e\hbar}{2m_e}B \\
\rule{4em}{0.4pt} & -2 & \dfrac{e\hbar}{2m_e}B
\end{array}$$

$^2P_{3/2}$ **强磁场**

$$U=\frac{eB}{2m_e}\left(2S_z+L_z\right)=\frac{e\hbar B}{2m_e}\left(2m_s+m_L\right)$$

要求 $\Delta m_s=0;\Delta m_{\mathrm{L}}=0,\pm1$

$$\Longrightarrow\ U=\pm\frac{e\hbar B}{2m_e},0$$

其能级图为：

$$\begin{array}{lcc}
\rule{4em}{0.4pt} & 1 & \dfrac{e\hbar}{2m_e}B \\
\rule{4em}{0.4pt} & 0 & \dfrac{e\hbar}{2m_e}B \\
\rule{4em}{0.4pt} & -1 & \dfrac{e\hbar}{2m_e}B
\end{array}$$

Q6

强磁场

此时近似为正常塞曼效应：

光子能量

$$E=E_0+U_1-U_2$$

U_1 为 $^2D_{3/2}$ 劈裂能级，共 3 种：

$$U_1=\pm\frac{e\hbar B}{2m_e},0$$

U_2 为 $^2P_{3/2}$ 劈裂能级，共 3 种：

$$U_2=\pm\frac{e\hbar B}{2m_e},0$$

则由于选择规则，一共有三条线，位置分别为：

$$\nu = E/2\pi\hbar = \nu_0 + \begin{cases} \frac{eB}{4\pi m_e} \\ 0 \\ -\frac{eB}{4\pi m_e} \end{cases}$$

弱磁场

此时为反常塞曼效应

光子能量

$$E = E_0 + U_1 - U_2$$

U_1 为 $^2D_{3/2}$ 劈裂能级，共 4 种：

$$U_1 = \pm\frac{6}{5}\frac{e\hbar}{2m_e}B, \pm\frac{2}{5}\frac{e\hbar}{2m_e}B$$

U_2 为 $^2P_{3/2}$ 劈裂能级，共 4 种：

$$U = \pm 2\frac{e\hbar}{2m_e}B,\ \pm 2/3\frac{e\hbar}{2m_e}B$$

则一共有 16 条线，位置分别为：

$$\nu = E/2\pi\hbar = \nu_0 + \begin{cases} 16/5 & \dfrac{e}{4\pi m_e}B \\ 12/5 & \dfrac{e}{4\pi m_e}B \\ 28/15 & \dfrac{e}{4\pi m_e}B \\ 8/5 & \dfrac{e}{4\pi m_e}B \\ 16/15 & \dfrac{e}{4\pi m_e}B \\ 4/5 & \dfrac{e}{4\pi m_e}B \\ 8/15 & \dfrac{e}{4\pi m_e}B \\ 4/15 & \dfrac{e}{4\pi m_e}B \\ -16/5 & \dfrac{e}{4\pi m_e}B \\ -12/5 & \dfrac{e}{4\pi m_e}B \\ -28/15 & \dfrac{e}{4\pi m_e}B \\ -8/5 & \dfrac{e}{4\pi m_e}B \\ -16/15 & \dfrac{e}{4\pi m_e}B \\ -4/5 & \dfrac{e}{4\pi m_e}B \\ -8/15 & \dfrac{e}{4\pi m_e}B \\ -4/15 & \dfrac{e}{4\pi m_e}B \end{cases}$$