数值分析第九次作业

肖涵薄 31360164

2019 年 5 月 8 日

1

(1)

区间长度为 2, 误差不超过 1. 每次迭代误差减半, $1/2^{14} < 10^{-4}$. 因此需要 14 次迭代.

(2)

令 $f(x) = s\sin x - 1$. $f(1) \approx -0.16 < 0$. $f(0) = -1 < 0$. $f(1.5) \approx 0.5 > 0$. $f(1.25) \approx 0.2 > 0$. 因此 3 等分后近似根在 $[1, 1.25]$ 区间. 取 $x = 1.125$.

2

设 $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$. $-1 < \varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) < 1$. 因此对包含根的一个区间 $x \in [a, b]$, 有 $\varphi(x) \in [a, b]$. 又由于 $\varphi(x) < 1$, 因此对 $x \in [a, b]$, 迭代收敛.

3

当 $\varphi'(x) > 1$, 对于 $x_k > x^*$, 令 $x_k = x^* + \mathrm{d}x_k$.
此时有 $x_{k+1} = \varphi(x_k) = \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)\,\mathrm{d}x_k > x^* + \mathrm{d}x_k = x_k$. 即 $x_{k+1} > x_k > x^*$. 不收敛,
当 $\varphi'(x) < 1$, 对于 $x_k < x^*$, 令 $x_k = x^* - \mathrm{d}x_k$.
此时有 $x_{k+1} = \varphi(x_k) = \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)\,\mathrm{d}x_k < x^* - \mathrm{d}x_k = x_k$. 即 $x_{k+1} < x_k < x^*$. 不收敛,

4

$$\varphi'(x)=\frac{1}{3}(2x-e^x),\varphi''(x)=\frac{1}{3}(2-e^x)$$

$\varphi'(x)$ 在 $x=\ln 2$ 取到极大值. 因此在 [0,0.5] 单调递增. 又由于 $\varphi'(0)=-\frac{1}{3}$, $\varphi'(0.5)<0$. 因此 $\varphi(x)$ 在 $[0,0.5]$ 单调递减. 且区间内 $|\varphi'(x)|<\frac{1}{3}$.
又由于 $\varphi(0)=\frac{1}{3},\varphi(0.5)=\frac{2.25-\sqrt{e}}{3}\in[0,0.5]$. 因此迭代收敛.

5

(1)
格式一
$\varphi(x)=-\ln(x)$, $\varphi'(x)=-\frac{1}{x}$, 在 $x_0>0$ 区间内, $\varphi'(x)=-\frac{1}{x}\in(-2,-1.67)$. 根据 3 题中的证明, 不收敛.
格式二
$\varphi(x)=e^{-x}$, $\varphi'(x)=-e^{-x}$. 在 $x_0>0$ 区间内, $\varphi'(x)=\in(-1,0)$. 且 $\varphi(x)\in[\varphi(0.6),\varphi(0.5)]=[0.549,0.606]$, 在 x 区间内, 因此收敛.

(2)

$$l_0(y)=\frac{y-0.02695}{0.10653-0.02695}\frac{y+0.05119}{0.10653+0.05119}$$

$$l_1(y)=\frac{y-0.10653}{0.02695-0.10653}\frac{y+0.05119}{0.02695+0.05119}$$

$$l_2(y)=\frac{y-0.10653}{-0.05119-0.10653}\frac{y-0.02695}{-0.05119-0.02695}$$

$$L(y)=l_0x_0+l_1x_1+l_2x_2=0.589335-1.02803y-16.0127y^2$$

$L(0)\approx 0.59$ 为近似根.

6

(1) 将方程变换为:

$$\frac{1}{6}\sin x+\frac{2}{3}=x$$

并令 $\varphi(x)=\frac{1}{6}\sin x+\frac{2}{3}$. 显然 $\varphi'(x)=\frac{1}{6}\cos x<\frac{1}{6}$. 又由于 $\varphi(0)=\frac{1}{2}3>0,\varphi(2\pi)=\frac{2}{3}<2\pi$. 这意味着方程在 $(0,2\pi)$ 之间有且只有一个根.

(2) $\varphi(x)$ 如上一小问定义. 有 $|\varphi'(x)|<\frac{1}{6}$. 因此在任意一个包含根的区间 (a,b) 上, $\varphi(a),\varphi(b)\in(a,b)$. 迭代在 (a,b) 上收敛.

(3) 取初始点 x_0.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$$

其中

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{4}\sin x-\frac{3}{2}x+1 \\ f'(x)=\frac{1}{4}\cos x-\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow\ x_{n+1}=x_n-\frac{\frac{1}{4}\sin x_n-\frac{3}{2}x_n+1}{\frac{1}{4}\cos x_n-\frac{3}{2}}$$

7

对于方程 $f(x)=x^n-a=0$:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^n-a}{nx_k^{n-1}}=\frac{n-1}{n}x_k+\frac{a}{nx_k^{n-1}}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}=\frac{f''(\sqrt[n]{a})}{2f'(\sqrt[n]{a})}=\frac{n(n-1)a^{\frac{n-2}{n}}}{2na^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{(n-1)a^{-\frac{1}{n}}}{2}$$

对于方程 $f(x)=1-\frac{a}{x^n}=0$:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{1-\frac{a}{x_k^n}}{anx^{-n-1}}=\frac{n+1}{n}x_k-\frac{1}{anx_k^{-n-1}}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}=\frac{f''(\sqrt[n]{a})}{2f'(\sqrt[n]{a})}=\frac{-an(n+1)a^{-\frac{n+2}{n}}}{2ana^{-\frac{n+1}{n}}}=\frac{n+1}{2}a^{-\frac{1}{n}}$$

8

$$f'(x)=(1+\alpha)x^{\alpha}-1$$

$$'f(0)=-1,\quad f'(1)=\alpha$$

. 因此两个根均为单根, 又由于 $f(x)$ 无穷阶可导, $p_1=p_2=2$.