

Mathematical Methods for Physics I

Lime

2019 年 1 月 16 日

1 复数

- De Moivre 公式: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

- $(z_1 + z_2)^n = \sum C_n^k z_1^k z_2^{n-k}$

- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}}$

- $z_1 \perp z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$

-

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, y > 0, \text{ or } y \leq 0, \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}, & x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + \arctan \frac{y}{x}, & x < 0, y < 0, \end{cases}$$

- $f(z)$ 和 $\overline{f(z)}$ 都解析时, $f(z)$ 必然为常数。

- $f(z)$ 解析时, $\overline{f(\bar{z})}$ 也解析。

- $z_1 \perp z_2$ 的充要条件为: $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = 0$

- 幂函数 $z^{\frac{p}{q}}$ 是 q 值函数

- 幂函数 z^a 当 a 是无理数或复数时是无穷多值函数。

2 解析函数

C-R 方程极坐标形式:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

3 初等解析函数

- 指数函数 $\exp(z) \equiv e^z$

$$T = 2k\pi i$$

- 对数函数 $\text{Ln}z \equiv \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i$

对数函数主支: $\ln z \equiv \ln|z| + i\arg z$

NOTICE:

$$(e^x)^y \neq e^{xy}$$

$$z \ln a \neq \ln a^z$$

- 幂函数 $f = z^a$

$$f = z^a \begin{cases} a = n & n \in \mathbb{N} & \text{单值函数} \\ a = \frac{1}{n} & n \in \mathbb{N} & \text{n 值函数} \\ a = \frac{n}{m} & m, n \in \mathbb{N} & \text{n 值函数} \\ a = \mathbb{C}/\mathbb{Q} & & \infty \text{值函数} \end{cases}$$

- 三角函数 $\sin(z), \cos(z)$

$$\begin{aligned} \sin(z) &\equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \\ \cos(z) &\equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ sh(z) &\equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ ch(z) &\equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2} \end{aligned}$$