数值分析第二次作业

肖涵薄 31360164

2019 年 3 月 13 日

1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 3 & -12 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & -1 & 19 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = & 5 \\ x_2 = & 10 \\ x_3 = & 1 \end{cases}$$

Q2

对 A_2 的各个元素: $a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{i1} = a_{ji}^{(2)}$, 因此 A_2 为对称阵. 又由于 A_2 的主元均为 A 的主元, A 是正定阵所以所有主元大于 0, 因此 A_2 的主元也大于 0, 因此 A_2 正定.

Q3

方程对应的增广矩阵为:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 16 \\ 6 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 8 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{10}{3} & \frac{43}{3} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{83}{24} & \frac{83}{6} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = & 1/2 \\ x_2 = & 1 \\ x_3 = & 4 \end{cases}$$

Q4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -7/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 27/5 \end{pmatrix}$$

令 $Ux = y,\ Ly = b$

$$\Longrightarrow y = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 69/5 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 10/9 \\ 7/9 \\ 23/9 \end{pmatrix},$$

Q5

设 $G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{1j}^T \\ G_{1j} & G' \end{pmatrix}$ $G_{11} = A_{11} = 1, G_{1j} = A_{1j}, G'G'^T = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$. 于是有:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Q6

$$(Ax,x)^{1/2} = [(Ax)^T x]^{1/2} = \left(x^T A^T x\right)^{1/2} = \left(x^T Ax\right)^{1/2}$$

1. 非负性: 由于 A 正定, 因此对任意 $x \neq 0, x^T Ax > 0,\ \left(x^T Ax\right)^{1/2} > 0$, 当且仅当 $x = 0,\ \|x\|_A = 0$.
2. 正齐次性: $\|kx\|_A = \sqrt{(kx)^T A\,(kx)} = |k|\ \sqrt{x^T Ax} = |k|\ \ \|x\|_A$.
3. 三角不等式: $y^T Ax = \left(x^T Ay\right)^T$, 由于 $x^T Ay$ 是一个标量, 标量的转置等于它自身, 于是 $y^T Ax = x^T Ay$.

$\|x+y\|_A^2 = \left(x^T + y^T\right) A\,(x+y) = x^T Ax + y^T Ay + 2x^T Ay$.
$\left(\|x\|_A + \|y\|_A\right)^2 = x^T Ax + y^T Ay + 2\sqrt{x^T Axy^T Ay}$.
要证 $\|x+y\|_A^2 \leq \left(\|x\|_A + \|y\|_A\right)^2$, 即证 $x^T Ay \leq \sqrt{x^T Axy^T Ay}$. 当 $x^T Ay \leq 0$ 时显然成立.
当 $x^T Ay > 0$, 即证 $x^T Ayx^T Ay \leq x^T Axy^T Ay$. 由于 x, y 是大小相等的矢量, $xy^T = yx^T$, 因此 $x^T Ayx^T Ay = x^T Axy^T Ay$.

该定义满足以上三个性质, 因此 $\|x\|_A$ 是范数.

Q7

(1) $\|A+B\| = \left\|A\left(I + A^{-1}B\right)\right\| \leq \|A\|\ \ \left\|I + A^{-1}B\right\| \leq \|A\| \left(\|I\| + \left\|A^{-1}B\right\|\right)$.
(2) $\left\|I - \left(I + A^{-1}B\right)^{-1}\right\| \leq 1 - \left\|\left(I + A^{-1}B\right)^{-1}\right\| \leq 1 - \frac{1}{\|I+A^{-1}B\|} \leq 1 - \frac{1}{1+\|A^{-1}B\|} = \frac{\left\|A^{-1}B\right\|}{1-\|A^{-1}B\|}$
(3) $\frac{\left\|A^{-1}-(A+B)^{-1}\right\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\| - \left\|\left(I+A^{-1}B\right)^{-1}A^{-1}\right\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\| - \left\|\left(I+A^{-1}B\right)^{-1}\right\|\ \left\|A^{-1}\right\|}{\|A^{-1}\|} = 1 - \left\|\left(I + A^{-1}B\right)^{-1}\right\|$,
代入 (2) 中结论, $\frac{\left\|A^{-1}-(A+B)^{-1}\right\|}{\|A^{-1}\|} \leq 1 - \frac{1}{1+\|A^{-1}B\|} = \frac{\left\|A^{-1}B\right\|}{1-\|A^{-1}B\|}$.

□

Q8

$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 A 有最大特征值 $\lambda_m = 6$, A^{-1} 有最大特征值 $\lambda'_m = 1/2$

$$cond\,(A)_2 = \sqrt{\lambda_m \cdot \lambda'_m} = \sqrt{3}$$