数值分析第十二次作业

肖涵薄 31360164

2019 年 5 月 29 日

1

$$z^{(1)} = Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad z^{(2)} = Ax^{(1)}/5 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 17/5 \\ 24/5 \end{pmatrix}$$

第 2 次近似值为 $\lambda^{(2)} = 24/5$, 对应的特征向量为 $z^{(2)}/\lambda^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 17/24 \\ 1 \end{pmatrix}$

2

$$x_k = \frac{y_{k-1}}{3} = \frac{A}{3}x_{k-1} = \left(\frac{A}{3}\right)^k x_0$$

当 $k \to \infty$, x_k 变为特征向量的倍数, 因此

$$\lim_{j\to\infty} x_{j+k} = \lim_{j\to\infty} \left(\frac{A}{3}\right)^k x_j = \left(\frac{\lambda_m}{3}\right)^k x_j$$

由于 $|A| = 3, \mathrm{tr}(A) = 4$, 因此其特征值为 $1, 3$, 最大特征值为 $\lambda_m = 3$. 于是

$$\lim_{j\to\infty} x_{j+k} = \left(\frac{\lambda_m}{3}\right)^k x_j = x_j$$

因此 x_j 存在极限, 且极限为 λ_m 对应的特征向量, 为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 也可以根据 Rayleigh 商的性质得到 $\lim_{k\to\infty} \tau_k = \lambda_m = 3$.

3

(1)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

因此

$$v_1 = U^{-1}L^{-1}v_0 = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

因此 $\lambda_3 = 1/(3/4) = 4/3$