常微分方程数值解

1.已知常微分方程初值问题$\begin{cases} y'(x)=x+1, \quad (x>0) \\ y(0)=0 \end{cases}$的解析解为$y(x)=0.5x^2+x$.

（1）分别导出求解上述问题的显式欧拉方法和隐式欧拉方法的近似解的表达式；（2）求局部截断误差表达式.

2. 考虑初值问题$\begin{cases} y'+y=0, \\ y(0)=1. \end{cases}$

（1）取$h=0.1$，分别用显式欧拉公式、隐式欧拉公式和梯形公式计算$y(0.2)$的近似值；

（2） 证明：用梯形公式求上述问题的近似解为$y_n=\left(\dfrac{2-h}{2+h}\right)^n$，并证明当$h\to 0$时，它收敛于原初值问题的准确解$y=e^{-x}$.

3. 考虑求解常微分方程初值问题$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 的如下 Runge-Kutta 公式：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h(2K_2-K_1) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+h/4, y_n+hK_1/4) \end{cases}$$

求该方法的局部截断误差主项.

4. 给定求解常微分方程初值问题$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$的数值方法：

$$\begin{cases} K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+\dfrac{2}{3}h, y_n+\dfrac{2}{3}hK_1) \\ y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{4}(K_1+3K_2) \end{cases}$$

其中,$h>0$为步长，$x_n=x_0+nh, f_n=f(x_n,y_n)$.（1）求局部截断误差的主部；（2）讨论用上述方法求解模型问题$\begin{cases} y'=\lambda y, \quad \lambda<0 \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 稳定的步长h的取值范围.

5. 设函数$f(x,y)$具有连续二阶偏导数，考虑求解下列初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \quad a \le x \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

的线性多步方法：

$$y_{n+2} = ay_{n+1} - \frac{1}{5}y_n + \frac{h}{5}[7f_{n+1} + bf_n],$$

其中，$h = \dfrac{b-a}{n}$ 为步长， $y_n \approx y(x_n), f_n = f(x_n, y_n)$. 求参数$a, b$的值，使得上述线性多步方法的阶数最高，并求局部截断误差$T_{n+2} = y(x_{n+2}) - y_{n+2}$的主部.

6. 证明解$y' = f(x,y)$的下列差分公式$y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(y_n + y_{n-1}) + \dfrac{h}{4}(4y'_{n+1} - y'_n + 3y'_{n-1})$是二阶的，并求出截断误差的首项。

7. 给定求解常微分方程组初值问题$\begin{cases} \vec{y}' = \vec{f}(x,\vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$的单步方法：

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h\vec{\phi}(x_n, \vec{y}_n, \vec{y}_{n+1}) \qquad (*)$$

其中,$\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \cdots, y_m(x))^T$, $h > 0$为步长，$x_n = x_0 + nh, \vec{y}_n \approx \vec{y}(x_n)$. 如果满足：$\|\vec{y}_{n+1}\|_2^2 = \|\vec{y}_n\|_2^2 = \cdots = \|\vec{y}_0\|_2^2$，则称单步方法（*）具有平方守恒律.

(1) 证明：用梯形公式解二阶方程初始值问题：$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \end{cases}$，具有平方守恒律.

(2) 若用梯形公式解一阶方程组

$$\begin{cases} \vec{y}' = A\vec{y} \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}，\text{(其中：}A\text{为}m\text{阶常数矩阵)}$$

所导出的公式具有平方守恒律，试给出矩阵A满足的一个充分条件，并证明你的结论.