求矩阵特征值和特征向量数值方法

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&1\\0&1&4\end{pmatrix}$，用幂法计算矩阵 A 的按模最大特征值和对应的特征向量的近似值. 最初始迭代向量 $x^{(0)}=(1,1,1)^T$，迭代两次.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}$，取 $x_0=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，构造如下迭代：

$$\begin{cases}y_k=Ax_k\\x_{k+1}=\dfrac{y_k}{3}\end{cases}\quad k=0,1,2,\cdots,$$

并设 $\tau_k=\dfrac{(Ax_k,x_k)}{(x_k,x_k)}$. 计算：$\lim\limits_{k\to\infty}x_k$，$\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k$，并解释极限值与矩阵 A 的关系.

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&2\\1&1&2\\0&-1&-3\end{pmatrix}$ 的三个特征值分别为：

$$\lambda_1=-\frac{1+\sqrt{17}}{2},\lambda_2=-\frac{1-\sqrt{17}}{2},\lambda_3=1$$

（1）求 A 的 LU 分解；（2）取初始向量 $v_0=(1,1,0)^T$，用反幂法计算 λ_3 与对应特征向量的近似值（只迭代一次）.

4. 设 $x=(1,2,2)^T$，求 Householder 矩阵 H，使得 $Hx=\sigma(1,0,0)^T$.

5. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&14&9\\6&43&3\\6&22&15\end{pmatrix}$ 的 QR 分解.