数值分析第十一次作业

肖涵薄 31360164

2019 年 5 月 23 日

4

(1)

$$\begin{aligned} y_{n+1} =& y_n + \frac{h}{4}\left(y_n' + 3K_2\right) \\ y_{n+1} =& y_n + hy_n' + \frac{1}{2}h^2y_n'' + \frac{1}{6}h^3y_n''' + \frac{1}{27}h^4y_n'''' \end{aligned}$$

因此截断误差主项为 $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{1}{216}h^4y_n''''$.

(2)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{n}{4}(4\lambda y_n + 2h\lambda^2 y_n) = (1 + \lambda h + \frac{1}{2}h^2\lambda^2)y_n$$

$\varepsilon_{n+1} = (1 + \lambda h + \frac{1}{2}h^2\lambda^2)\varepsilon_n$, 令 $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$, 要求 $0 < h < -\frac{2}{\lambda}$.

5

$$y_n + 2hy_n' + \frac{(2h)^2}{2}y_n'' + \frac{(2h)^3}{6}y_n''' = ay_n + ahy_n' + \frac{ah^2}{2}y_n'' - \frac{1}{5}y_n + \frac{7h}{5}(y_n' + hy_n'' + \frac{h^2}{2}y_n''') + \frac{hb}{5}y_n'$$

$$\frac{6}{5}y_n + 2hy_n' + 2h^2y_n'' + \frac{4h^3}{3}y_n''' = ay_n + (a + \frac{7}{5} + \frac{b}{5})hy_n' + (\frac{a}{2} + \frac{7}{5})h^2y_n'' + \frac{7h^3}{10}y_n'''$$

则当

$$\begin{cases} a =& \frac{6}{5} \\ b =& -3 \end{cases}$$

阶数最高, 截断误差主部为 $(\frac{4}{3}-\frac{7}{10}-\frac{1}{6})h^3y_n'''=\frac{13}{30}h^3y_n'''$

6

$$y_{n+1}=\frac{1}{2}y_n+\frac{1}{2}y_n-\frac{1}{2}hy_n'+\frac{1}{4}h^2y_n''-\frac{1}{12}h^3y_n'''+\frac{h}{4}\left(4y_n'+4hy_n''+2h^2y_n'''-y_n'+3y_n'-hy_n''+\frac{3}{2}h^2y_n'''\right)$$

$$y_{n+1}=y_n+hy_n'+\frac{1}{2}h^2y_n''+\frac{19}{24}h^3y_n'''$$

截断误差主部为 $(\frac{1}{6}-\frac{19}{24})h^3=-\frac{5}{8}h^3y_n'''$.

7

(1)

定义 $\vec{y}=[y,y']^T$. 原式化为

$$\vec{y'}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}y=Ay$$

利用梯形公式

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left[y_n'+y_{n+1}'\right]\implies y_{n+1}=\left(1+\frac{1}{h-\frac{1}{2}}\right)y_n$$

$$\implies (I+\frac{h}{2}A)y_n=(I-\frac{h}{2}A)y_{n+1}$$

两边取二范数, 由于 A 反对称,

$$\left\|I+\frac{h}{2}A\right\|=\left\|I-\frac{h}{2}A\right\|$$

因此

$$\|y_n\|^2=\|y_{n+1}\|^2$$

(2)

(1) 问中的 A 即为这里的 A, 由上述推导, A 需要满足

$$\left\|I+\frac{h}{2}A\right\|=\left\|I-\frac{h}{2}A\right\|$$

当 A 为反对称矩阵时该式满足.