# 方程

真空麦克斯韦方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}\qquad \oint_S\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\qquad \oint_S\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad \oint_L\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\varphi_B}{\mathrm{d}t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\qquad \oint_L\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I+\mu_0\epsilon_0\frac{\mathrm{d}\varphi_E}{\mathrm{d}t}$$

物质内麦克斯韦方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_f\qquad \oint_S\boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}=Q_f$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\qquad \oint_S\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad \oint_L\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\varphi_B}{\mathrm{d}t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_f+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\qquad \oint_L\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}=I_f+\frac{\mathrm{d}\varphi_D}{\mathrm{d}t}$$

格林函数法 $\nabla^2G(x,x')=-\frac{1}{\varepsilon}\delta^3(x-x')$

给定$\rho(x')$, 第一类边值问题的解为($G$交换了$x,x'$):

$\varphi(x)=\int_V G(x',x)\rho(x')\,\mathrm{d}V'+\varepsilon_0\oint_S(G(x',x)\frac{\partial\varphi}{\partial n'}-\varphi(x')\frac{\partial G(x',x)}{\partial n'}\,\mathrm{d}S')$

若给定边界$\varphi$, 则应使$G$在边界为0, 若给定边界$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, 则应使$\frac{\partial G}{\partial n}$在边界为0.

电多极矩

$\varphi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{q}{R}+\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}{R^3}+\frac{1}{6}\sum_{i,j}\mathfrak{D}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{R}+\cdots)$

$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5}-\frac{\boldsymbol{p}}{R^3})$

$\boldsymbol{p}=\iiint_V\rho(x')x'\,\mathrm{d}^3x'$

$\mathfrak{D}=\iiint_V 3\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')d^3x'$

磁偶极矩

$$\varphi=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R}}{4\pi R^3},\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}\iiint_V\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}^3x'$$

边界条件

| 磁场 | 电场 |
|---|---|
| $\varphi_1=\varphi_2$ | $\varphi_1=\varphi_2$ |
| $\mu_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\mu_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$ | $\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}+\sigma_f=\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$ |
| | $\sigma_{电导1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_{电导2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$ |
| $H_{1\parallel}+\boldsymbol{\alpha}_f=H_{2\parallel}$ | $E_{1\parallel}=E_{2\parallel}$ |
| $B_{1\perp}=B_{2\perp}$ | $D_{1\perp}+\sigma_f=D_{2\perp}$ |
| $M_{1\perp}+\alpha_M=M_{2\perp}$ | |
| $B_\perp=0$(超导球) | $D_\perp=\sigma_f$(导体) |

洛伦兹力: $\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$

磁偶极子:$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\widehat{R})\widehat{R}-\vec{m}}{R^3}$, $\varphi=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R}}{4\pi R^3}$.

电磁场: $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$,

$w=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})=\frac{1}{2}(\rho\varphi+\boldsymbol{J}_f\cdot\boldsymbol{A})$.

电流:

$$\nabla\cdot J=-\frac{\partial\rho}{\partial t},J=\sigma E$$

毕奥——萨伐尔定律 $\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,\mathrm{d}l\times\boldsymbol{e}_r}{r^2}$, 若$I$为直线, $B=\frac{\mu_0 Il}{4\pi r^2}$.

磁矢势:

库仑规范:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0$$

洛伦兹规范:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

达朗贝尔方程:

$$\Box\varphi=-\frac{\rho}{\epsilon_0},\boldsymbol{\Box A}=-\mu_0\boldsymbol{J}$$

## 超导体

临界磁场: 超过$H_c(T)=H_c(0)\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]$时, 超导电性会被破坏.

迈斯纳效应: 超导体内部$B=0$.

伦敦第一方程

$$\frac{\partial J_s}{\partial t}=\alpha E,\alpha=\frac{n_se^2}{m}$$

伦敦第二方程

$$\nabla\times\boldsymbol{J_s}=-\alpha B$$

# 电磁波的传播

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=0\qquad \boldsymbol{\nabla^2E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\Box\boldsymbol{E}=0$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0\qquad \boldsymbol{\nabla^2B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=\Box\boldsymbol{B}=0$$

$$\left|\frac{E}{B}\right|=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=v$$

$$S=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\boldsymbol{e}_k=vw\boldsymbol{e}_k$$

群速与相速关系

$$v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=v_p+k\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}k}=\frac{c}{n+\omega(\mathrm{d}n/\,\mathrm{d}\omega)}$$

导体内波矢量$k=\beta+i\alpha, v\omega/\beta$. 垂直入射时$\alpha\approx\beta\approx\sqrt{\omega\mu\sigma/2}, B\approx\sqrt{\mu\sigma/\omega}e^{i\frac{\pi}{4}}e_n\times E$. B的相位比E滞后1/4. 金属内部主要是磁场能. 电磁波穿透深度为$\delta=\frac{1}{\alpha}=\sqrt{2/\omega\mu\sigma}$, 此为趋肤效应.

## 反射

介质界面上的边界条件为

$$e_n\times(E_2-E_2)=0$$

$$e_n\times(H_2-H_1)=\alpha$$

入射波, 反射波和折射波分别为$E,E',E''$. 从介质1射向介质2. 有边界条件$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{k''}\cdot\boldsymbol{x}$

菲涅耳公式:

当$E\perp$入射面(s光):

$$\frac{E'}{E}=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}=-\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}\tag{1}$$

$$\frac{E''}{E}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')}\tag{2}$$

当$E\parallel$入射面(p光):

$$\frac{E'}{E}=\frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')}$$

$$\frac{E''}{E}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}$$

布儒斯特角: 当$\theta+\theta''=90°$, $E'_\parallel$消失. $\tan\theta_B=n_{21}$

半波损失: 前一种情况反射波与入射波反相.

反射系数和透射系数

$$R=\frac{E_0'^2}{E_0^2},T=\frac{n_2\cos\theta''}{n_1\cos\theta}\frac{E_0''^2}{E_0^2}$$

$$R_s=(1)^2,R_p=(2)^2$$

$$T_s=\frac{\sin2\theta\sin2\theta''}{\sin^2(\theta+\theta'')},T_p=\frac{4\sin2\theta\sin2\theta''}{(\sin2\theta+\sin2\theta'')^2}$$

当$\theta=0$, $R_s=R_p=\frac{(n_2-n_1)^2}{(n_2+n_1)^2}$.

全反射:$k_z''=i\kappa$, $\kappa=k\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}$

全反射能量守恒为:$R+\frac{\cos\theta''}{\cos\theta}T=1$

垂直入射到良导体($\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}>>1$)表面:

$$R=1-2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}=\frac{(n-n_1)^2+\kappa}{(n+n_1)+\kappa^2}$$

$$\varepsilon'=\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega}$$

折射波场沿x轴传播, 场强沿z轴指数衰减:

$$\boldsymbol{E''}=\boldsymbol{E_0''}e^{-\kappa z}e^{i(k_x''x-\omega t)}$$

其厚度$\sim\kappa^{-1}=\frac{1}{\lambda_1}2\pi\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}$

## 矩形谐振腔

1代表导体, 2代表真空. 法线由导体指向介质. 满足亥姆霍兹方程$\nabla^2u+k^2u=0$. 边界条件为$E_\parallel=H_\perp=\frac{\partial E_n}{\partial n}=0.k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$.

满足$k_xA_1+k_yA_2+k_zA_3=0$. 本征频率$\omega=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{(m/l_1)^2+\cdots}$.

$$\begin{cases}E_x=A_1\cos k_xx\sin k_yy\sin k_zze^{-i\omega t}\\E_y=A_2\sin k_xx\cos k_yy\sin k_zze^{-i\omega t}\\E_z=A_3\sin k_xx\sin k_yy\cos k_zze^{-i\omega t}\end{cases}$$

$$k_x=\frac{m\pi}{l_1},k_y=\frac{n\pi}{l_2},k_z=\frac{p\pi}{l_3}$$

## 矩形波导

$z$方向无穷长的解

为$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2.k_xA_1+k_yA_2-ik_zA_3=0$.

$$\begin{cases}E_x=A_1\cos k_xx\sin k_yye^{-k_zz}\\E_y=A_2\sin k_xx\cos k_yye^{-k_zz}\\E_z=A_3\sin k_xx\sin k_yye^{-k_zz}\end{cases},\ k_x=\frac{m\pi}{a},k_y=\frac{n\pi}{b}$$

$$H=-\frac{i}{\omega\mu}\nabla\times E$$

由上式, $E_z=0$则$H_z\neq0$. 因此波导中的波不能是TEM.

由于$k_z=\sqrt{(\omega/c)^2-(k_x^2+k_y^2)}$为实数, 截止频率为$\omega=\pi c\sqrt{(m/a)^2+(n/b)^2}$. 相速度¡c, 群速度¿c.

## 等离子体

振荡频率$\omega_p=\sqrt{n_0e^2/m\varepsilon_0}$.

$m\ddot{r}=-eE=eE_0e^{i(kx-\omega t)}$.

$J(\omega)=-n_0ev=\sigma(\omega)E,\sigma=i\frac{n_0e^2}{m\omega}$. 稀薄等离子折射率为$n=\sqrt{1-\omega_p^2/\omega^2}$. 当$\omega>\omega_p$,$v_p>c$全反射,可传播电磁波.

## 推迟势

以$R$表示原点$x'$到场点$x$的距离. $r\approx R-e_R\cdot x'$.

$$\varphi(x,t)=\int_V\frac{\rho\left(x',t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0r}\,\mathrm{d}V'$$

$A(x,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}\left(x',t-\frac{r}{c}\right)}{r}\,\mathrm{d}V'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}(x')e^{ik(R-e_R\cdot x')}}{R-e_R\cdot x'}\,\mathrm{d}V'$

展开第一项为:

$$A(x)=\frac{\mu_0e^{ikR}}{4\pi R}\int_V J(x')\,\mathrm{d}V'=\frac{\mu_0e^{ikR}}{4\pi R}\dot{\boldsymbol{p}}$$

可得电偶极辐射:
$$\begin{cases}\boldsymbol{B}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\ddot{p}e^{ikR}\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\\\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\ddot{p}e^{ikR}\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\\\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{|\ddot{p}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0c^3R^2}\sin^2\theta\boldsymbol{e}_R\\P=\oint|\overline{\boldsymbol{S}}|R^2\,\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\ddot{p}|^2}{3c^3}\end{cases}$$

磁偶极辐射和电四极辐射展开第二项:($\mathcal{D}=\sum3qx_i'x_j'-r'^2\delta_{ij}$)

$A(x)=\frac{-ik\mu_0e^{ikR}}{4\pi R}\int_V\boldsymbol{J}(x')(\boldsymbol{e_R}\cdot\boldsymbol{x'}\,\mathrm{d}V')=\frac{-ik\mu_0e^{ikR}}{4\pi R}\left(-\boldsymbol{e_R}\times\boldsymbol{m}+\frac{1}{6}\boldsymbol{e_R}\cdot\dot{\mathcal{D}}\right)$

先计算磁偶极辐射$A=\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\boldsymbol{e_R}\times\boldsymbol{m}$.

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c^2 R}(\ddot{m}\times e_R)e_R\\ \boldsymbol{E}=-\dfrac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c R}(\ddot{m}\times e_R)\\ \overline{\boldsymbol{S}}=\dfrac{\mu_0\omega^4|\boldsymbol{m}|^2}{32\pi^2c^3R^2}\sin^2\theta e_R\\ P=\dfrac{\mu_0\omega^4|\boldsymbol{m}|^2}{12\pi c^3}\end{cases}$$

再计算电四极辐射$A=\frac{-ik\mu_0 e^{ikR}}{24\pi R}\dot{\mathcal{D}}$. 定义$\boldsymbol{D}=e_R\cdot\mathcal{D}$.

$$\begin{cases}A(x)=\dfrac{e^{ikR}}{24\pi\varepsilon_0 c^4 R}\dddot{\boldsymbol{D}}\times e_R\\ B=ik\boldsymbol{e_R}\times\boldsymbol{A}\\ E=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e_R}\\ S=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{288\pi c^5R^2}(\dddot{\boldsymbol{D}}\times e_R)^2 e_R\end{cases}$$

## 衍射

基尔霍夫公式:$\psi(x)=-\frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{e^{ikr}}{r}\boldsymbol{e}_n\cdot\left[\nabla'\psi+\left(ik-\frac{1}{r}\right)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\psi\right]\mathrm{d}S'$.

夫琅禾费衍射: $x'$为小孔上一点, $x$为空间远处一点, $R$为小孔中心到远处距离. $k_1$沿入射方向, $k_2$沿R方向. $\theta_1,\theta_2$为入射出射角.

$$\phi(x)=-\frac{i\psi_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int_S e^{i(k_1-k_2)\cdot x'}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)\,\mathrm{d}S'$$

长宽为$\alpha,\beta$的矩形孔夫琅禾费衍射为:

$$I=I_0\left(\frac{1+\cos\theta_2}{2}\right)^2\left(\frac{\sin ka\alpha}{ka\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin kb\beta}{kb\beta}\right)^2$$

电磁场动量:

动量密度$\boldsymbol{g}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}=\frac{w}{c}\boldsymbol{e}_k$.

## 狭义相对论

$$a=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&i\beta\gamma\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-i\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix},\quad\beta=\frac{v}{c},\quad\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

定义固有时$d\tau=\frac{1}{c}ds$和4-速度:$U_\mu=\frac{dx_\mu}{d\tau}=\gamma_u(u_1,u_2,u_3,ic)$.

相对论多普勒效应 $\omega\approx\frac{\omega_0}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}$

定义场强张量 $F_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}cccc0&B_3&-B_2&-\frac{i}{c}E_1\\-B_3&0&B_1&-\frac{i}{c}E_2\\B_2&-B_1&0&-\frac{i}{c}E_3\\\frac{i}{c}E_1&\frac{i}{c}\boldsymbol{E}_2&\frac{i}{c}\boldsymbol{E}_3&0\end{bmatrix}$

Maxwell方程变为 $\frac{\partial F_{\mu v}}{\partial x_v}=\mu_0 J_\mu$,
$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{v\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_v}=0$

且满足

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=B^2-\frac{1}{c^2}E^2$$

$$\frac{i}{8}\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau}F_{\mu\nu}F_{\lambda\tau}=\frac{1}{c}\vec{B}\cdot\vec{E}$$

能动量洛伦兹变换

$$p_1=\frac{p_1'+\frac{\beta_c}{c^2}E_1'}{\sqrt{1-\beta_c^2/c^2}};E_1=\frac{E_1'+\beta_c p_1'}{\sqrt{1-\beta_c^2/c^2}}$$

$$p_2=\frac{p_2'+\frac{\beta_c}{c^2}E_2'}{\sqrt{1-\beta_c^2/c^2}};E_2=\frac{E_2'+\beta_c p_2'}{\sqrt{1-\beta_c^2/c^2}}$$

## 数学

### 柱坐标系 $(\rho,\phi,z)$

$\nabla\varphi=\widehat{e}_1\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\widehat{e}_2\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}+\widehat{e}_3\frac{\partial\varphi}{\partial z}$

$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_1)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\phi}+\frac{\partial A_3}{\partial z}$ $\nabla\times\boldsymbol{A}=$
$\widehat{e}_1(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\phi}-\frac{\partial A_2}{\partial z})+\widehat{e}_2(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial\rho})+\widehat{e}_3\frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_2)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_1}{\partial\phi})$

$\nabla^2\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

### 球坐标系 $(r,\theta,\varphi)$

$\nabla\varphi=\widehat{e}_1\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\widehat{e}_2\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\widehat{e}_3\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}q$

$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2A_1}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_2)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\phi}$

$\nabla\times\boldsymbol{A}=\widehat{e}_1\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_3)-\frac{\partial A_2}{\partial\phi}\right]+$
$\widehat{e}_2\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_3)\right]+\widehat{e}_3\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_2)-\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right]$

$\nabla^2\varphi=$
$\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r})+\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}\right]$

## 矢量变换

$\nabla\boldsymbol{r}=-\nabla'\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_r$ $\nabla\frac{1}{\boldsymbol{r}}=-\nabla'\frac{1}{\boldsymbol{r}}=-\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r$

$\nabla\times\frac{1}{\boldsymbol{r}^2}=\nabla\cdot\frac{1}{\boldsymbol{r}}=0$ $\nabla\cdot\varphi\boldsymbol{A}=\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\varphi$

$\nabla\times\varphi\boldsymbol{A}=\varphi\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\varphi\times\boldsymbol{A}$ $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=$
$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$

$\nabla\cdot(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})=(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{G}-\boldsymbol{F}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{G})$

$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$

$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D})]\boldsymbol{C}-[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]\boldsymbol{D}$

$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}&\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}\\\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}\end{vmatrix}$

$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0$

1.考虑两列振幅相同的、偏振方向相同、频率分别为$\omega+d\varpi$和$\omega-d\omega$的线偏振平面波，它们都沿 z 轴方向传播。
（1）求合成波，证明波的振幅不是常数，而是一个波。
（2）求合成波的相位传播速度和振幅传播速度。

解：$\vec{E}_1(\vec{x},t)=\vec{E}_0(\vec{x})\cos(k_1x-\omega_1t)$
$\vec{E}_2(\vec{x},t)=\vec{E}_0(\vec{x})\cos(k_2x-\omega_2t)$

$\vec{E}=\vec{E}_1(\vec{x},t)+\vec{E}_2(\vec{x},t)=\vec{E}_0(\vec{x})[\cos(k_1x-\omega_1t)+\cos(k_2x-\omega_2t)]$

$=2\vec{E}_0(\vec{x})\cos(\frac{k_1+k_2}{2}x-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t)\cos(\frac{k_1-k_2}{2}x-\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)$

其中$k_1=k+dk,k_2=k-dk;\omega_1=\omega+d\omega,\omega_2=\omega-d\omega$

$\therefore\vec{E}=2\vec{E}_0(\vec{x})\cos(kx-\omega t)\cos(dk\cdot x-d\omega\cdot t)$

用复数表示$\vec{E}=2\vec{E}_0(\vec{x})\cos(dk\cdot x-d\omega\cdot t)e^{i(kx-\omega t)}$

相速 $kx-\omega t=0$
$\therefore v_p=\frac{\omega}{k}$
群速 $dk\cdot x-d\omega\cdot t=0$
$\therefore v_g=\frac{d\omega}{dk}$

2．一平面电磁波以$\theta=45^{\circ}$从真空入射到$\varepsilon_r=2$的介质，电场强度垂直于入射面，求反射系数和折射系数。

解：$\vec{n}$为界面法向单位矢量，$<S>,<S'>,<S''>$分别为入射波，反射波和折射波的玻印亭矢量的周期平均值，则反射系数 R 和折射系数 T 定义为：

$$R=\left|\frac{<S'>\cdot\vec{n}}{<S>\cdot\vec{n}}\right|=\frac{E_0'^2}{E_0^2}$$

$$T=\left|\frac{<S''>\cdot\vec{n}}{<S>\cdot\vec{n}}\right|=\frac{n_2\cos\theta_2E''^2}{n_1\cos\theta E_0^2}$$

又根据电场强度垂直于入射面的菲涅耳公式，可得：

$$R=\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_2}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_2}\right)^2$$

$$T=\frac{4\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta\cos\theta_2}{(\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_2)^2}$$

又根据反射定律和折射定律

$\theta=\theta_1=45^{\circ}$
$\sqrt{\varepsilon_2}\sin\theta_2=\sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta$

由题意， $\varepsilon_1=\varepsilon_0,\varepsilon_2=\varepsilon_0\varepsilon_r=2\varepsilon_0$

$\therefore\theta_2=30^{\circ}$

$$\therefore R=\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$T=\frac{4\varepsilon_0\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\sqrt{\varepsilon_0}\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

3．有一可见平面光波由水入射到空气，入射角为 60° 。证明这时将会发生全反射，并求折射波沿表面传播的相速度和透入空气的深度。设该波在空气中的波长为$\lambda_0=6.28\times10^{-5}$cm，水的折射率为 n=1.33。

解：由折射定律得，临界角$\theta_c=\arcsin(\frac{1}{1.33})=48.75°$，所以当平面光波以 60° 入射时，将会发生全反射。

折射波： $k''=k\sin\theta$

相速度 $v_p=\frac{\omega''}{k''}=\frac{\omega}{k/\sin\theta}=\frac{\sqrt{3}}{2}c$

投入空气的深度 $\kappa=\frac{\lambda_1}{2\pi\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}}=\frac{6.28\times10^{-5}}{2\pi\sqrt{\sin^2 60-(\frac{1}{1.33})^2}}\approx1.7\times10^{-5}$ cm

4．频率为$\omega$的电磁波在各向同性介质中传播时，若$\vec{E},\vec{D},\vec{B},\vec{H}$仍按$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$变化，但$\vec{D}$不再与$\vec{E}$平行（即$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$不成立）。

（1）证明$\vec{k}\cdot\vec{B}=\vec{k}\cdot\vec{D}=\vec{B}\cdot\vec{D}=\vec{B}\cdot\vec{E}=0$,但一般$\vec{k}\cdot\vec{E}\neq0$

（2）证明$\vec{D}=\frac{1}{\omega^2\mu}[k^2\vec{E}-(\vec{k}\cdot\vec{E})\vec{k}]$

（3）证明能流$\vec{S}$与波矢$\vec{k}$一般不在同方向上。

证明：1）由麦氏方程组

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\\nabla\cdot\vec{D}=0\\\nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}$$

得：

$\nabla\cdot\vec{B}=\vec{B}_0\cdot\nabla e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}=i\vec{k}\cdot\vec{B}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}=i\vec{k}\cdot\vec{B}=0$

$\therefore\vec{k}\cdot\vec{B}=0$

同理 $\vec{k}\cdot\vec{D}=0$

$\nabla\times\vec{H}=[\nabla e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}]\times\vec{H}_0=i\vec{k}\times\vec{H}=-i\omega\vec{D}$

$\therefore i\vec{k}\times\vec{B}=-i\mu\omega\vec{D}$

$\therefore\vec{B}\cdot\vec{D}=-\frac{1}{\mu\omega}\vec{B}\cdot(\vec{k}\times\vec{B})=0$

$\nabla\times\vec{E}=[\nabla e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}]\times\vec{E}_0=i\vec{k}\times\vec{E}=i\omega\vec{B}$

$\therefore\vec{B}\cdot\vec{E}=\frac{1}{\omega}(\vec{k}\times\vec{E})\cdot\vec{E}=0$， $\nabla\cdot\vec{E}=i\vec{k}\cdot\vec{E}$

$\because\vec{D}\neq\varepsilon\vec{E}$ $\therefore\nabla\cdot\vec{E}$一般$\neq0$，即 $\vec{k}\cdot\vec{E}$一般$\neq0$

2）由$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ 得： $\vec{B}=\frac{1}{\omega}(\vec{k}\times\vec{E})$

另由$\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 得： $\vec{D}=-\frac{1}{\mu\omega}(\vec{k}\times\vec{B})$

$\therefore\vec{D}=-\frac{1}{\mu\omega^2}[\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E})]=\frac{1}{\mu\omega^2}[(\vec{k}\times\vec{E})\times\vec{k}]=\frac{1}{\mu\omega^2}[k^2\vec{E}-(\vec{k}\cdot\vec{E})\vec{k}]$

3）由$\vec{B}=\frac{1}{\omega}(\vec{k}\times\vec{E})$ 得 $\vec{H}=\frac{1}{\mu\omega}(\vec{k}\times\vec{E})$

$\therefore\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{1}{\mu\omega}\vec{E}\times(\vec{k}\times\vec{E})=\frac{1}{\mu\omega}[E^2\vec{k}-(\vec{k}\cdot\vec{E})\vec{E}]$

$\because\vec{k}\cdot\vec{E}$一般$\neq0$ $\therefore\vec{S}$一般$\neq\frac{1}{\mu\omega}E^2\vec{k}$，即$\vec{S}$一般不与$\vec{k}$同向

5．有两个频率和振幅都相等的单色平面波沿 z 轴传播，一个波沿 x 方向偏振，另一个沿 y 方向偏振，但相位比前者超前$\frac{\pi}{2}$，求合成波的偏振。

反之，一个圆偏振可以分解为怎样的两个线偏振？

解：偏振方向在 x 轴上的波可记为：

$x=A_0\cos(\omega t-kz)=A_0\cos(\omega t+\varphi_{0x})$

在 y 轴上的波可记为：

$y=A_0\cos(\omega t-kz+\frac{\pi}{2})=A_0\cos(\omega t+\varphi_{0y})$

$\Delta\varphi=\varphi_{0y}-\varphi_{0x}=\frac{\pi}{2}$

合成得轨迹方程为：

$x^2+y^2=A_0^2[\cos^2(\omega t+\varphi_{0x})+\cos^2(\omega t+\varphi_{0y})]$
$=A_0^2[\cos^2(\omega t+\varphi_{0x})+\sin^2(\omega t+\varphi_{0x})]$
$=A_0^2$

即：$x^2+y^2=A_0^2$

所以合成的振动是一个圆频率为$\omega$的沿 z 轴方向传播的右旋圆偏振。反之，一个圆偏振可以分解为两个偏振方向垂直，同振幅，同频率，相位差为$\pi/2$的线偏振的合成。

6．平面电磁波垂直直射到金属表面上，试证明透入金属内部的电磁波能量全部变为焦耳热。

证明：设在 z>0 的空间中是金属导体，电磁波由 z<0 的空间中垂直于导体表面入射。

已知导体中电磁波的电场部分表达式是：

$\vec{E}=\vec{E}_0e^{-\alpha z}e^{i(\beta z-\omega t)}$

于是，由 z=0 的表面，单位面积进入导体的能量为：

$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$，其中，$\vec{H}=\frac{1}{\omega\mu}\vec{k}\times\vec{E}=\frac{1}{\omega\mu}(\beta+i\alpha)\vec{n}\times\vec{E}$

其平均值为$|\overline{\vec{S}}|=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^*\times\vec{H})=\frac{\beta}{2\omega\mu}E_0^2$

在导体内部，：$\vec{J}=\sigma\vec{E}=\sigma\vec{E}_0e^{-\alpha z}e^{i(\beta z-\omega t)}$

所以金属导体单位面积那消耗的焦耳热的平均值为：

$dQ=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{J}^*\times\vec{E})=\frac{1}{2}\sigma E_0^2e^{-2\alpha z}$

作积分：$Q=\frac{1}{2}\sigma E_0^2\int_0^\infty e^{-2\alpha z}dz=\frac{\sigma}{4\alpha}E_0^2$ 即得单位面积对应的导体中消耗的平均焦耳热。

又$\because\alpha\beta=\frac{\omega\mu\sigma}{2}$

$\therefore Q=\frac{\sigma}{4\alpha}E_0^2=\frac{\beta}{2\omega\mu}E_0^2$ 原题得证.

7．已知海水的$\mu_r=1,\sigma=1S\cdot m^{-1}$，试计算频率$\nu$为$50,10^6$和$10^9$ Hz 的三种电磁波在海水中的透入深度。

解：取电磁波以垂直于海水表面的方式入射，

透射深度 $\delta=\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$

$\because\mu_r=1$

$\therefore\mu=\mu_0\mu_r=\mu_0=4\pi\times10^{-7}$

$\therefore1>\nu=50Hz$时$:\delta_1=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}=\sqrt{\frac{2}{2\pi\times50\times4\pi\times10^{-7}\times1}}=72m$

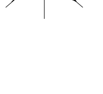
$2>\nu=10^6Hz$时：$\delta_2=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}=\sqrt{\frac{2}{2\pi\times10^6\times4\pi\times10^{-7}\times1}}\approx0.5m$

$3>\nu=10^9Hz$时$:\delta_3=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}=\sqrt{\frac{2}{2\pi\times10^9\times4\pi\times10^{-7}\times1}}\approx16mm$

8．平面电磁波由真空倾斜入射到导电介质表面上，入射角为$\theta_1$，求导电介质中电磁波的相速度和衰减长度。若导电介质为金属，结果如何？

提示：导电介质中的波矢量$\vec{k}=\vec{\beta}+i\vec{\alpha},\vec{\alpha}$只有 z 分量（为什么？）。

解：根据题意，如图所示，入射平面是 xz 平面




导体中的电磁波表示为：$\vec{E}=\vec{E}_0e^{-\vec{\alpha}\cdot\vec{x}}e^{i(\vec{\beta}\cdot\vec{x}-\omega t)}$

$\vec{k}''=\vec{\beta}+i\vec{\alpha}$

与介质中的有关公式比较可得：

$$\begin{cases}\beta^2-\alpha^2=\omega^2\mu\varepsilon\\\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma\end{cases}$$

根据边界条件得：$k_x''=\beta_x+i\alpha_x=$实数$,\therefore\alpha_x=0$

又$k_x''=k_x=k\sin\theta_1=\frac{\omega}{c}\sin\theta_1$

$\therefore\beta_x=\frac{\omega}{c}\sin\theta_1$

而入射面是 xz 平面，故$\vec{k},\vec{k}''$无 y 分量。 $\therefore\alpha_y=0,\beta_y=0$

$\therefore\vec{\alpha}$只有$\alpha_z$存在，$\vec{\beta}$有$\beta_x$与$\beta_z$，其中$\beta_x=\frac{\omega}{c}\sin\theta_1$

$$\therefore有\begin{cases}(\frac{\omega}{c}\sin\theta_1)^2+\beta_z^2-\alpha_z^2=\omega^2\mu\varepsilon\\\alpha_z\beta_z=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma\end{cases}$$

解得：

$$\beta_z^2=\frac{1}{2}(\mu\varepsilon\omega^2-\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1)+\frac{1}{2}[(\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1-\omega^2\mu\varepsilon)^2+\omega^2\mu^2\sigma^2]^{1/2}$$

$$\alpha_z^2=-\frac{1}{2}(\mu\varepsilon\omega^2-\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1)+\frac{1}{2}[(\omega^2\mu\varepsilon-\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1)^2+\omega^2\mu^2\sigma^2]^{1/2}$$

其相速度为：$v=\frac{\omega}{\beta}$， 衰减深度为$1/\alpha$

$$如果是良导体，则：\begin{cases}\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1+\beta_z^2-\alpha_z^2=0\\\alpha_z\beta_z=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma\end{cases}$$

$$\therefore\beta_z^2=-\frac{\omega^2}{2c^2}\sin2\theta_1+\frac{1}{2}[\frac{\omega^4}{c^4}\sin^4\theta_1+\omega^2\mu^2\sigma^2]^{1/2}$$

$$\alpha_z^2=\frac{\omega^2}{2c^2}\sin^2\theta_1+\frac{1}{2}[\frac{\omega^4}{c^2}\sin^4\theta_1+\omega^2\mu^2\sigma^2]^{1/2}$$

9．无限长的矩形波导管，在在 z=0 处被一块垂直地插入地理想导体平板完全封闭，求在$z=-\infty$到 z=0 这段管内可能存在的波模。

解：在此中结构得波导管中，电磁波的传播依旧满足亥姆霍兹方程

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\\\nabla\cdot\vec{E}=0\end{cases}$$

方程的通解为：

$E(x,y,z)=(C_1\sin k_xx+D_1\cos k_xx)\cdot(C_2\sin k_yy+D_2\cos k_yy)\cdot(C_3\sin k_zz+D_3\cos k_zz)$

根据边界条件有：

$E_y=E_z=0,(x=0,a)$， $E_x=E_z=0,(y=0,b)$

$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0,(x=0,a)$， $\frac{\partial E_y}{\partial y}=0,(y=0,b)$， $\frac{\partial E_z}{\partial z}=0,(z=0)$

$$故：\begin{cases}E_x=A_1\cos k_xx\sin k_yy\sin k_zz\\E_y=A_2\sin k_xx\cos k_yy\sin k_zz\\E_z=A_3\sin k_xx\sin k_yy\cos k_zz\end{cases}$$

其中， $k_x=\frac{m\pi}{a},m=0,1,2\cdots$
$k_y=\frac{n\pi}{b},n=0,1,2\cdots$

$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\omega^2\varepsilon_0\mu_0=\frac{\omega^2}{c^2}$ 且 $A_1\frac{m\pi}{a}+A_2\frac{n\pi}{b}+A_3k_z=0$

综上，即得此种波导管种所有可能电磁波的解。

10．电磁波$\vec{E}(x,y,z,t)=\vec{E}(x,y)e^{i(k_zz-\omega t)}$在波导管中沿 z 方向传播，试使用$\nabla\times\vec{E}=i\omega\mu_0\vec{H}$及$\nabla\times\vec{H}=-i\omega\varepsilon_0\vec{E}$证明电磁场所有分量都可用$E_x(x,y)$和$H_z(x,y)$这两个分量表示。

证明：沿 z 轴传播的电磁波其电场和磁场可写作：

$\vec{E}(x,y,z,t)=\vec{E}(x,y)e^{i(k_zz-\omega t)}$， $\vec{H}(x,y,z,t)=\vec{H}(x,y)e^{i(k_zz-\omega t)}$

由麦氏方程组得 $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=i\omega\mu_0\vec{H}$
$\nabla\times\vec{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=-i\omega\varepsilon_0\vec{E}$

写成分量式： $\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=\frac{\partial E_z}{\partial y}-ik_zE_y=i\omega\mu_0H_x$ （1）

$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=ik_zE_x-\frac{\partial E_z}{\partial x}=i\omega\mu_0H_y$ （2）

$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=i\omega\mu_0H_z$

$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{\partial H_z}{\partial y}-ik_zH_y=-i\omega\varepsilon_0E_x$ （3）

$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=ik_zH_x-\frac{\partial H_z}{\partial x}=-i\omega\varepsilon_0E_y$ （4）

$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=-i\omega\varepsilon_0E_z$

由（2）（3）消去 $H_y$ 得 $E_x=\frac{1}{i(\frac{\omega^2}{c^2}-k_z^2)}(-\omega\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial y}-k_z\frac{\partial E_z}{\partial x})$

由（1）（4）消去 $H_x$ 得 $E_y=\frac{1}{i(\frac{\omega^2}{c^2}-k_z^2)}(\omega\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial x}-k_z\frac{\partial E_z}{\partial y})$

由（1）（4）消去 $E_y$ 得 $H_x=\frac{1}{i(\frac{\omega^2}{c^2}-k_z^2)}(-k_z\frac{\partial H_z}{\partial x}+\omega\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial y})$

由（2）（3）消去 $E_x$ 得 $H_y=\frac{1}{i(\frac{\omega^2}{c^2}-k_z^2)}(-k_z\frac{\partial H_z}{\partial y}-\omega\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial x})$

11．写出矩形波导管内磁场$\vec{H}$满足的方程及边界条件。

解：对于定态波，磁场为$\vec{H}(\vec{x},t)=\vec{H}(\vec{x})e^{-i\omega t}$

$$由麦氏方程组\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=-i\omega\varepsilon\vec{E}\\\nabla\cdot\vec{H}=0\end{cases}$$

得 $\nabla\times(\nabla\times\vec{H})=\nabla(\nabla\cdot\vec{H})-\nabla^2\vec{H}=-\nabla^2\vec{H}=-i\omega\varepsilon\nabla\times\vec{E}$

又$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=i\omega\mu\vec{H}$

$\therefore-i\omega\varepsilon\nabla\times\vec{E}=\omega^2\mu\varepsilon\vec{H}=-\nabla^2\vec{H}$

$$\therefore\begin{cases}(\nabla^2+k^2)\vec{H}=0,k^2=\omega^2\varepsilon\mu\\\nabla\cdot\vec{H}=0\end{cases}$$ 即为矩形波导管内磁场$\vec{H}$满足的方程。

由$\vec{n}\cdot\vec{B}=0$得 $\vec{n}\cdot\vec{H}=0$， $H_n=0$

利用$\nabla\times\vec{E}=i\omega\mu\vec{H}$和电场的边界条件可得： $\frac{\partial H_t}{\partial n}=0$

$$\therefore\ 边界条件为\begin{cases}H_n=0\\\frac{\partial H_t}{\partial n}\end{cases}$$

12．论证矩形波导管内不存在 $TM_{m0}$ 或 $TM_{0n}$ 波。

证明：已求得波导管中的电场$\vec{E}$满足：

$$\begin{cases}E_x=A_1\cos k_xx\sin k_yye^{ik_zz}\\E_y=A_2\sin k_xx\cos k_yye^{ik_zz}\\E_z=A_3\sin k_xx\sin k_yye^{ik_zz}\end{cases}$$

由$\vec{H}=-\frac{i}{\omega\mu}\nabla\times\vec{E}$可求得波导管中的磁场为：

$$\begin{cases}H_x=-\frac{i}{\omega\mu}(A_3k_y-iA_2k_z)\sin k_xx\cos k_yye^{ik_zz}\\H_y=-\frac{i}{\omega\mu}(iA_1k_z-A_3k_x)\cos k_xx\sin k_yye^{ik_zz}\\H_z=-\frac{i}{\omega\mu}(A_2k_x-A_1k_y)\cos k_xx\cos k_yye^{ik_zz}\end{cases}$$

本题讨论 TM 波，故 $H_z$=0，即：$A_2k_x-A_1k_y=0$

故：1）若$n=0,$则$k_y=\frac{n\pi}{b}=0,A_2k_x=0$
又$k_x=\frac{m\pi}{a}\neq0,$那么$A_2=0$
$\therefore H_x=H_y=0$

2）若$m=0,$则$k_x=\frac{m\pi}{a}=0,A_1k_y=0$
又$k_y=\frac{n\pi}{b}\neq0,$那么$A_1=0$
$\therefore H_x=H_y=0$

$\therefore$波导中不可能存在 $TM_{m0}$ 和 $TM_{0n}$ 两种模式的波

13．频率为$30\times10^9$ Hz 的微波，在$0.7cm\times0.4cm$的矩形波导管中能以什么波模传播？在$0.7cm\times0.6cm$的矩形波导管中能以什么波模传播？

解：1）$\nu=30\times10^9Hz$，波导为$0.7cm\times0.4cm$

由 $v=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{c}{2}\sqrt{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2}$

当 $a=0.7\times10^{-2}m$, $b=0.4\times10^{-2}m$ 时

$m=1,n=1$ 时，$v=4.3\times10^{10}Hz$
$m=1,n=0$ 时，$v=2.1\times10^{10}Hz$
$m=0,n=1$ 时，$v=3.7\times10^{10}Hz$

$\therefore$ 此波可以 $TM_{10}$ 波在其中传播。

2）$v=30\times10^9Hz$，波导为 $0.7cm\times0.6cm$

$m=1,n=1$ 时，$v=2.1\times10^{10}Hz$
$m=1,n=0$ 时，$v=2.5\times10^{10}Hz$
$m=0,n=1$ 时，$v=3.3\times10^{10}Hz$

$\therefore$ 此波可以 $TE_{10}$ 和 $TE_{01}$ 两种波模传播。

14. 一对无限大的平行理想导体板，相距为 b，电磁波沿平行与板面的 z 方向传播，设波在 x 方向是均匀的，求可能传播的波模和每种波模的截止频率。

解：在导体板之间传播的电磁波满足亥姆霍兹方程：

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\\\nabla\cdot\vec{E}=0\end{cases}$$

令 U（x，y，z）是 $\vec{E}$ 的任意一直角分量，由于 $\vec{E}$ 在 x 方向上是均匀的

$$\therefore U(x,y,z)=U(y,z)=Y(y)Z(z)$$

又在 y 方向由于有金属板作为边界，是取驻波解；在 z 方向是无界空间，取行波解

$\therefore$ 解得通解：$U(x,y,z)=(C_1\sin k_yy+D_1\cos k_yy)e^{ik_zz}$

由边界条件：$\vec{n}\times\vec{E}=0$，和 $\frac{\partial E}{\partial n}=0$ 定解

$$E_x=A_1\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{i(k_zz-\omega t)}$$
$$E_y=A_2\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{i(k_zz-\omega t)}\ 且\ k^2=\frac{\omega^2}{c^2}=(\frac{n\pi}{b})^2+k_z^2,n=0,1,2\cdots$$
$$E_z=A_3\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{i(k_zz-\omega t)}$$

又由 $\nabla\cdot\vec{E}=0$ 得：$A_1$ 独立，与 $A_2,A_3$ 无关，$\frac{n\pi}{b}A_2=ik_zA_z$

令 $k_z=0$ 得截止频率：$\omega_c=\frac{n\pi c}{b}$

15. 证明整个谐振腔内的电场能量和磁场能量对时间的平均值总相等。

证明：在谐振腔中，电场 $\vec{E}$ 的分布为：

$$\begin{cases}E_x=A_1\cos k_xx\sin k_yy\sin k_zze^{-i\omega t}\\E_y=A_2\sin k_xx\cos k_yy\sin k_zze^{-i\omega t}\\E_z=A_3\sin k_xx\sin k_yy\cos k_zze^{-i\omega t}\end{cases}$$

由 $\vec{H}=-\frac{i}{\omega\mu}\nabla\times\vec{E}$ 可求得波导管中的磁场为：

$$\begin{cases}H_x=-\frac{i}{\omega\mu}(A_3k_y-A_2k_z)\sin k_xx\cos k_yy\cos k_zze^{-i\omega t}\\H_y=-\frac{i}{\omega\mu}(A_1k_z-A_3k_x)\cos k_xx\sin k_yy\cos k_zze^{-i\omega t}\\H_z=-\frac{i}{\omega\mu}(A_2k_x-A_1k_y)\cos k_xx\cos k_yy\sin k_zze^{-i\omega t}\end{cases}$$

由 $\omega=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})$，得谐振腔中：

1）电场能流密度

$$\omega_E=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$$
$$\therefore\bar{\omega}_E=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^*\cdot\vec{D})]=\frac{1}{4}\mathrm{Re}(\vec{E}^*\cdot\vec{D})$$
$$=\frac{\varepsilon}{4}[A_1^2\cos^2k_xx\sin^2k_yy\sin^2k_zz+A_2^2\sin^2k_xx\cos^2k_yy\sin^2k_zz+A_3^2\sin^2k_xx\sin^2k_yy\cos^2k_zz]$$

2）磁场能流密度

$$\omega_B=\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$$
$$\bar{\omega}_B=\frac{1}{4}\mathrm{Re}(\vec{H}^*\cdot\vec{B})$$
$$=\frac{1}{4\mu\omega^2}[(A_3k_y-A_2k_z)^2\sin^2k_xx\cos^2k_yy\cos^2k_zz+$$
$$+(A_1k_z-A_3k_x)^2\cos^2k_xx\sin^2k_yy\cos^2k_zz+$$
$$+(A_2k_x-A_1k_y)^2\cos^2k_xx\cos^2k_yy\sin^2k_zz]$$

有：$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\omega^2\mu\varepsilon$ 且 $A_1k_x+A_2k_y+A_3k_z=0$

其中：$k_x=\frac{m\pi}{a},k_y=\frac{n\pi}{b},k_z=\frac{p\pi}{c},m,n,p=0,1,2\cdots$

a，b，c 是谐振腔的线度，不妨令 x：0~a，y：0~b，z：0~c

于是谐振腔中电场能量对时间的平均值为：

$$\overline{W}_E=\int\bar{\omega}_EdV=\frac{\varepsilon}{4}\int_0^a\int_0^b\int_0^c(A_1^2\cos^2k_xx\sin^2k_yy\sin^2k_zz+A_2^2\sin^2k_xx\cos^2k_yy\sin^2k_zz+A_3^2\sin^2k_xx\sin^2k_yy\cos^2k_zz)dxdydz$$
$$=\frac{abc\varepsilon}{32}(A_1^2+A_2^2+A_3^2)$$

谐振腔中磁场能量的时间平均值为：

$$\overline{W}_B=\int\bar{\omega}_BdV=\frac{1}{4\mu\omega^2}\cdot\frac{abc}{8}[(A_3k_y-A_2k_z)^2+(A_1k_z-A_3k_x)^2+(A_2k_x-A_1k_y)^2]$$

$$\because A_1k_x+A_2k_y+A_3k_z=0$$

$$\therefore(A_1k_x+A_2k_y+A_3k_z)^2=A_1^2k_1^2+A_2^2k_2^2+A_3^2k_3^2+2A_1A_2k_xk_y+2A_1A_3k_xk_z+2A_2A_3k_yk_z=0$$

$$\therefore\overline{W}_B=\frac{abc}{32\mu\omega^2}[(A_1^2+A_2^2+A_3^2)(k_x^2+k_y^2+k_z^2)]$$
$$=\frac{abck^2}{32\mu\omega^2}(A_1^2+A_2^2+A_3^2)=\frac{abc\varepsilon}{32}(A_1^2+A_2^2+A_3^2)$$

$$\therefore\overline{W}_E=\overline{W}_B$$

1.若把麦克斯韦方程组的所有矢量都分解为无旋的(纵场)和无散的(横场)两部分，写出 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 的这两部分在真空所满足的方程式，并证明电场的无旋部分对应于库仑场。

解：在真空中的麦克斯韦方程组是：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$
$$\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0,\nabla\cdot\vec{B}=0$$

如果把此方程组中所有的矢量都分解为：无旋的纵场——用角标 L 表示，无散的横场——用角标 T 表示。

那么：　$\vec{E}=\vec{E}_L+\vec{E}_T$，且 $\nabla\times\vec{E}_L=0$，$\nabla\cdot\vec{E}_T=0$；

$\vec{J}=\vec{J}_L+\vec{J}_T$，

$\vec{B}=\vec{B}_L+\vec{B}_T$；由于 $\nabla\cdot\vec{B}=0$，即 $\vec{B}$ 无源场，不存在纵场分量，亦是说 $\vec{B}_L=0$，则 $\vec{B}=\vec{B}_T$

代入上面麦氏方程组：

1>$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$$\nabla\times(\vec{E}_L+\vec{E}_T)=\nabla\times\vec{E}_L+\nabla\times\vec{E}_T=\nabla\times\vec{E}_T=-\frac{\partial\vec{B}_T}{\partial t}$$

2>$\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$：　$\nabla\cdot(\vec{E}_L+\vec{E}_T)=\nabla\cdot\vec{E}_L+\nabla\cdot\vec{E}_T=\nabla\cdot\vec{E}_L=\rho/\varepsilon_0$

3>$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$：　$\nabla\times\vec{B}_T=\mu_0(\vec{J}_L+\vec{J}_T)+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}_L+\vec{E}_T)$

$$=(\mu_0J_T+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_T}{\partial t})+(\mu_0J_L+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_L}{\partial t})$$

若两边同时取散度，　$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}_T)=0$

$$\nabla\cdot(\mu_0\vec{J}_T+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_T}{\partial t})=0$$

$\therefore$ 当且仅当 $\mu_0\vec{J}_L+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_L}{\partial t}=0$ 时，上式方成立。

综上，得麦氏方程的新表示方法：

$$\nabla\times\vec{E}_T=-\frac{\partial\vec{B}_T}{\partial t};\quad\nabla\cdot\vec{E}_L=\rho/\varepsilon_0$$
$$\nabla\times\vec{B}_T=\mu_0\vec{J}_T+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_T}{\partial t};\quad\mu_0\vec{J}_L+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_L}{\partial t}=0;\quad\vec{B}_L=0$$

证明电场的无旋部分对应库仑场：

电场的无旋部分表达式为：$\nabla\cdot\vec{E}_L=\rho/\varepsilon_0$

引入 $\vec{E}_L=-\nabla\varphi$　于是有：$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$　此泊松方程的解，即是静止电荷在真空中产生的电势分布，那么 $\vec{E}_L$ 即对应静止电荷产生的库仑场。

2. 证明在线性各向同性均匀非导电介质中，若 $\rho=0,\vec{J}=0$，则 E 和 B 可完全由矢势 A 决定，若取 $\varphi=0$，这时 A 满足哪两个方程？

解：在线性各向同性均匀非导电介质中，如果令，$\vec{J}=0,\rho=0$，麦氏方程表示为：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};\quad\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t};\quad\nabla\cdot\vec{D}=0;\quad\nabla\cdot\vec{B}=0$$

其中　$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu}$

由：$\nabla\cdot\vec{B}=0$　引入矢势 $\vec{A}$，使 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

则　$\nabla\cdot\vec{B}=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$　故，$\vec{B}$ 由矢势 $\vec{A}$ 完全决定。

把 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$　代入 $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$，有：

$\nabla\times(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})=0$　令 $\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$　　则：$\nabla\times(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})=\nabla\times(-\nabla\varphi)=0$

则：　$\vec{E}=-\partial\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$　　故 $\vec{E}$ 有标势 $\vec{A}$ 完全决定。

如果取 $\varphi=0$，有：$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$　　代入方程　$\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\qquad\qquad \nabla\cdot\vec{D}=0$$

有：1>$\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$；　$\nabla\times\vec{B}=\varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$$\Rightarrow\ \nabla\times(\nabla\times\vec{A})=-\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})$$

$$\Rightarrow\ \nabla\times(\nabla\times\vec{A})+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0$$

2>$\nabla\cdot\vec{D}=0$：　$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A})=0$

由于取 $\varphi=0$，库仑规范 $\nabla\cdot\vec{A}=0$，与洛伦兹规范 $\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ 相同

$\therefore$ 由 1>2>得：$\vec{A}$ 满足的方程有：

$$\nabla\cdot\vec{A}=0$$

$$\nabla^2\vec{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0$$

3. 证明沿 z 轴方向传播的平面电磁波可用矢势 $\vec{A}(\omega\tau)$ 表示，其中 $\tau=t-z/c$，A 垂直于 z 轴方向。

证：对于沿 z 轴传播的任意一平面电磁波 $\vec{E},\vec{B}$，可写作：

$$\vec{E}=E_0\vec{e}_x e^{i(kz-\omega t)}$$
$$\vec{B}=B_0\vec{e}_y e^{i(kz-\omega t)}$$

满足：1）$\vec{E},\vec{B}$ 均垂直于传播方向 $\vec{e}_z$

2）$\vec{E},\vec{B}$ 相互垂直，$\vec{E}\times\vec{B}$ 沿 $\vec{k}$ 方向

3）$\vec{E},\vec{B}$ 同相，振幅比为 $\upsilon$（真空中为 c）

故，不妨取 $\vec{A}=A_0\vec{e}_x e^{-i\omega(t-\frac{z}{c})}=A_0\vec{e}_x e^{i(kz-\omega t)}$，　　$k=\frac{\omega}{c}$

$$\therefore\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial z}\vec{e}_y=ikA_0\vec{e}_y e^{i(kz-\omega t)}\qquad(1)$$

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=i\omega A_0\vec{e}_x e^{i(kz-\omega t)}\qquad(2)$$

可见，如果令 $kA_0=B_0,\omega A_0=E_0$，表达式（1）（2）可表示的波正是符合条件的平面波，所以命题得证。

4. 设真空中矢势 $\vec{A}(\vec{x},t)$ 可用复数傅立叶展开为 $\vec{A}(\vec{x},t)=\sum_k[a_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+a_k^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$，其中 $\vec{a}_k^*$ 是 $\vec{a}_k$ 的复共轭。

（1）证明 $\vec{a}_k$ 满足谐振子方程 $\frac{d^2\vec{a}_k(t)}{dt^2}+k^2c^2\vec{a}_k(t)=0$。

（2）当选取规范 $\nabla\cdot\vec{A}=0,\varphi=0$ 时，证明 $\vec{k}\cdot\vec{a}_k=0$。

（3）把 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 用 $\vec{a}_k$ 和 $\vec{a}_k^*$ 表示出来。

解：（1）证明：$\because\vec{A}(\vec{x},t)=\sum_k[\vec{a}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\vec{a}_k^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$

$\therefore$ 根据傅立叶级数得正交性，必有：

$$\vec{a}_k(t)=\int\vec{A}(\vec{x},t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d\vec{x}$$

$$\therefore\frac{d^2a_k(t)}{dt^2}=\int\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d\vec{x}\qquad(1)$$

而洛仑兹变换时，矢势 $\vec{A}$ 满足方程 $\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$

在真空中，$\vec{J}=0$，故，$\nabla^2\vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$

$\therefore$（1）式化为 $\frac{d^2\vec{a}_k(t)}{dt^2}=\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}(c^2\nabla^2\vec{A})d\vec{x}$

而 $k^2c^2\vec{a}_k(t)=\int k^2c^2\vec{A}(\vec{x},t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d\vec{x}$

于是：$\frac{d^2\vec{a}_k(t)}{dt^2}+k^2c^2\vec{a}_k(t)=\int[c^2\nabla^2\vec{A}(\vec{x},t)+k^2c^2\vec{A}(\vec{x},t)]e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d\vec{x}$　　(2)

$\because\vec{A}(\vec{x},t)=\sum_k[\vec{a}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\vec{a}_k^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$

$$\therefore\nabla^2\vec{A}(\vec{x},t)=-k^2\vec{A}(\vec{x},t)$$

$\therefore$（2）式右边的积分式中，被积函数为 0，积分为 0。

$\therefore\ \frac{d^2\vec{a}_k(t)}{dt^2}+k^2c^2\vec{a}_k(t)=0$，亦即 $\vec{a}_k$ 满足谐振子方程。

2）选取规范 $\nabla\cdot\vec{A}=0,\varphi=0$，于是有

$$\nabla\cdot\vec{A}=\nabla\cdot\sum_k[\vec{a}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\vec{a}_k(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]=\sum_k[\vec{a}_k(t)\nabla\cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\vec{a}_k^*(t)\nabla\cdot e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$$
$$=\sum_k[\vec{k}\cdot\vec{a}_k(t)\cdot ie^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}-\vec{k}\cdot\vec{a}_k^*(t)\cdot ie^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]=0$$

$\because\vec{a}_k(t),\vec{a}_k^*(t)$ 是线性无关的正交组

$\therefore$ 要使上式成立，仅当 $\vec{k}\cdot\vec{a}_k=\vec{k}\cdot\vec{a}_k^*=0$ 时

$\therefore$ 故，证得当取 $\nabla\cdot\vec{A}=0,\varphi=0$ 时，$\vec{k}\cdot\vec{a}_k=0$

3）已知 $\vec{A}(\vec{x},t)=\sum_k[\vec{a}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\vec{a}_k^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$

$$\therefore\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\sum_k[i\vec{k}\vec{a}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}-ik\vec{a}_k^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$$

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\sum_k[\frac{d\vec{a}_k(t)}{dt}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\frac{d\vec{a}_k^*(t)}{dt}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]\quad（取规范 \nabla\cdot\vec{A}=0,\varphi=0）$$

5. 设 $\vec{A}$ 和 $\varphi$ 是满足洛伦兹规范的矢势和标势。

（1）引入一矢量函数 $\vec{Z}(\vec{x},t)$（赫兹矢量），若令 $\varphi=\nabla\cdot\vec{Z}$，证明 $\vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}$。

（2）若令 $\rho=-\nabla\cdot\vec{P}$ 证明 $\vec{Z}$ 满足方程 $\nabla^2\vec{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}=-c^2\mu_0\vec{P}$，写出在真空中的推迟解。

（3）证明 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 可通过 $\vec{Z}$ 用下列公式表出，$\vec{E}=\nabla\times(\nabla\times\vec{Z})-c^2\mu_0\vec{P},\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{Z}$

解：1）证明：$\vec{A}$ 与 $\varphi$ 满足洛仑兹规范，故有 $\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$

$\because\varphi=-\nabla\cdot\vec{Z}$ 代入洛仑兹规范，有：

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\cdot\vec{Z})=0，即\ \nabla\cdot\vec{A}=\nabla\cdot(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t})$$

$$\therefore\vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}$$

2）证明：$\because$ 标势 $\varphi$ 在满足洛仑兹规范得条件下有方程：$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

而 $\varphi=-\nabla\cdot\vec{Z}$，故：$\nabla^2\varphi=\nabla^2(-\nabla\cdot\vec{Z})=-\nabla\cdot(\nabla^2\vec{Z})$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\nabla\cdot\vec{Z})=-\nabla\cdot(\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2})$$

代入原方程：

$$-[\nabla\cdot(\nabla^2\vec{Z})-\frac{1}{c^2}\nabla\cdot(\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2})]=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

令 $\rho=-\nabla\cdot\vec{P}$，则上式化为：

$$\nabla\cdot(\nabla^2\vec{Z})-\frac{1}{c^2}\nabla\cdot(\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\cdot\vec{P}$$

$$即：\nabla^2\vec{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}=-c^2\mu_0\vec{P}\qquad(2)$$

由于矢势 $\vec{A}$：$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$ 在真空中的推迟势为：

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}dV'$$

故，可类比得出，方程（2）在真空中的推迟势解为：

$$\vec{Z}(\vec{x},t)=\frac{c^2\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{P}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}dV'$$

3）$\because\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$，代入 $\varphi=-\nabla\cdot\vec{Z},\vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}$ 有：

$$\vec{E}=\nabla(\nabla\cdot\vec{Z})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}=\nabla\times(\nabla\times\vec{Z})+\nabla^2\vec{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}=\nabla\times(\nabla\times\vec{Z})-c^2\mu_0\vec{P}$$

同理：$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{Z}$

$$\therefore\vec{E}=\nabla\times(\nabla\times\vec{Z})-c^2\mu_0\vec{P}$$
$$\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{Z}$$

6. 两个质量，电荷都相同的粒子相向而行发生碰撞，证明电偶极辐射和磁偶极辐射都不会发生。

证明：电偶极矩与磁偶极矩产生的辐射场分别是：

1>由电偶极矩产生的辐射场：
$$\vec{E}=\frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0c^2R}(\ddot{\vec{p}}\times\vec{n})\times\vec{n}$$
$$\vec{B}=\frac{\mu_0e^{ikR}}{4\pi R}ik\vec{n}\times\ddot{\vec{p}}$$

2>由磁偶极矩产生的辐射场：
$$\vec{E}=-\frac{\mu_0e^{ikR}}{4\pi cR}(\ddot{\vec{m}}\times\vec{n})$$
$$\vec{B}=\frac{\mu_0e^{ikR}}{4\pi c^2R}(\ddot{\vec{m}}\times\vec{n})\times\vec{n}$$

现有两个质量，电荷都相同的粒子相向而行，发生碰撞，在此过程中，取两个电荷的连线为 x 轴，于是，此系统的电偶极矩是：

$$\vec{p}=q\vec{x}_1+q\vec{x}_2=q(\vec{x}_1+\vec{x}_2)$$

由此可发现：　$\ddot{\vec{p}}=\frac{d^2}{dt^2}[q(\vec{x}_1+\vec{x}_2)]=q(\ddot{\vec{x}}_1+\ddot{\vec{x}}_2)$

由于两个粒子质量相同，电量也相同，故当其运动时　$\ddot{\vec{x}}_1=-\ddot{\vec{x}}_2$（牛顿第二定律）

即：$\ddot{\vec{p}}=0$

于是，系统的电偶极矩辐射场为 0

又由于，此系统的磁偶极矩　$\vec{m}=0$，　于是，系统的磁偶极矩辐射场为 0。

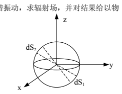
综上，两个质量，电荷都相同的粒子同向而行发生碰撞，不会发生电偶极辐射和磁偶极辐射。

7. 设有一个球对称的电荷分布，以频率 $\omega$ 沿径向做简谐振动，求辐射场，并对结果给以物理解释。

解：

设球面上均匀分布了总电量为 Q 的电荷，此假设满足题目中的球对称分布，于是，球面电荷密度与球面半径的关系是：

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi R^2}$$




取如图相对的两块小面元 $dS_1,dS_2$，由于两块小面元对应相同的立体角，故有相同的面积

$dS_1=dS_2$，

于是　$\Delta Q_1=\sigma dS_1=\frac{Q}{4\pi R^2}dS_1=\frac{Q}{4\pi R^2}dS_2=\sigma dS_2=\Delta Q_2$

考虑到两电荷元 $\Delta Q_1,\Delta Q_2$，由于是球对称，又以相同的频率 $\omega$ 作沿径向的简谐振动

$$\therefore\ \vec{p}=\Delta Q_1\cdot R\cdot\vec{e}_r+\Delta Q_1\cdot R\cdot(-\vec{e}_r)=0$$

$$\vec{m}=I\cdot\Delta\vec{S}=0$$

故，此两电荷元的振动不能产生辐射场。

根据场的叠加原理，整个球对称分布的电荷体系沿径向的简谐振荡是不能产生辐射场的振动，辐射场为 0。

8. 一飞轮半径为 R，并有电荷均匀分布在其边缘上，总电量为 Q。设此飞轮以恒定角速度 $\omega$ 旋转，求辐射场。

解：

设飞轮边缘的厚度为 d,于是，边缘上的电荷面密度 $\sigma=\frac{Q}{2\pi Rd}$

体系的电偶极矩为：　$\vec{p}=\oint\frac{Q}{2\pi Rd}\cdot d\cdot dl\cdot\vec{x}=\frac{Q}{2\pi R}\oint\vec{x}\cdot dl$

$$=\frac{Q}{2\pi}[\int_0^{2\pi}\sin\theta\cdot d\theta\cdot\vec{e}_x+\int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot d\theta\cdot\vec{e}_y]=0$$

体系的此偶极矩：$\vec{m}=I\cdot\Delta\vec{S}=\frac{Q\omega}{2\pi}\cdot\pi R^2\cdot\vec{e}_z=\frac{Q\omega R^2}{2}\vec{e}_z$

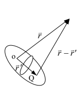
由此得：$\ddot{\vec{p}}=0\quad\ddot{\vec{m}}=0$

故，辐射场为 0。

9. 利用电荷守恒定律，验证 $\vec{A}$ 和 $\varphi$ 的推迟势满足洛伦兹条件。

证明：如右图所示，O 是坐标原点，Q 是源点，P 是场点

于是，$\vec{A}$ 与 $\varphi$ 的推迟势可写作：




$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V}\frac{\rho(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{V}$，其中，$t'=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$

因为在空间中有一个固定点，有 $\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t'}$，故：

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial}{\partial t'}\rho(\vec{r}',t')dV'$$

而 $\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla\cdot[\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}]dV'$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\vec{J}\cdot(\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|})dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla\cdot\vec{J}dV'\qquad(*)$$

当算符 $\nabla$ 作用于 $|\vec{r}-\vec{r}'|$ 的 n 次幂时，可写作：

$$\nabla|\vec{r}-\vec{r}'|^n=-\nabla'|\vec{r}-\vec{r}'|^n$$

其中 $\nabla'$ 只作用于 $\vec{r}'$，因为 $\vec{J}(\vec{r}',t')$ 中的变量 $t'=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$，其中含有 $\vec{r}$，故：

$$\nabla\cdot\vec{J}=\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}\cdot(\nabla t')=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}\cdot(\nabla|\vec{r}-\vec{r}'|)=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}\cdot(\nabla'|\vec{r}-\vec{r}'|)$$

另一方面，有：$\nabla'\cdot\vec{J}=(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}\cdot(\nabla'|\vec{r}-\vec{r}'|)$

对此上两式，有：$\nabla'\cdot\vec{J}=(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}-\nabla\cdot\vec{J}$

即：$\nabla\cdot\vec{J}=(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}-\nabla'\cdot\vec{J}$

代入*式，有：

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\vec{J}\cdot(\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|})dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}-\nabla'\cdot\vec{J})dV'$$
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\vec{J}\cdot(\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|})dV'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla'\cdot\vec{J}dV'+$$
$$+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const})dV'$$
$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla'\cdot[\frac{\vec{J}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}]dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}dV'$$

因为　$\int_{V'}\nabla'\cdot[\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}]dV'=\oint_{S'}\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{S}'$

只要把 $V'$ 取得足够大，就可以使 $\vec{J}(\vec{r}',t')$ 在 $V'$ 的边界面上处处为零，结果上式便为零。

于是　$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}dV'$

$$\therefore\nabla\cdot\vec{A}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}[(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}+\frac{\partial\rho}{\partial t'}]dV'$$

由电荷守恒定律有：

$(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}+\frac{\partial\rho}{\partial t'}=0$，　式中 $t'$ 是 $\vec{r}'$ 点的局域时间，由以上两式有：

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

由此可见，只要电荷守恒定律成立，则推迟势 $\vec{A}$ 和 $\varphi$ 就满足洛仑兹规范。

10. 半径为 $R_0$ 的均匀永磁体，磁化强度为 $\vec{M}_0$，求以恒定角速度 $\omega$ 绕通过球心而垂直于 $\vec{M}_0$ 的轴旋转，设 $R_0\omega$<<c，求辐射场和能流。

解：

本题相当于一个位于原点的磁偶子的旋转振荡，此磁偶极子为：

$$\vec{M}=\frac{4}{3}\pi R_0^2\vec{M}_0$$

其振荡可分解为 x，y 方向上相位差为 $\pi/2$ 的简谐振荡的合成。

$$\vec{M}_x=\frac{4}{3}\pi R_0^3M_0\cos(\omega t)\vec{e}_x$$
$$\vec{M}_y=\frac{4}{3}\pi R_0^3M_0\sin(\omega t)\vec{e}_y=\frac{4}{3}\pi R_0^3M_0\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})\vec{e}_y$$

用复数形式表达为：
$$\vec{M}_x=\frac{4}{3}\pi R_0^3M_0e^{-i(\omega t)}\vec{e}_x$$
$$\vec{M}_y=\frac{4}{3}\pi R_0^3M_0ie^{-i(\omega t)}\vec{e}_y$$

$$\vec{E}=-\frac{\mu_0e^{ikR}}{4\pi cR}(\ddot{\vec{m}}\times\vec{n})$$

根据磁偶极矩辐射场公式：$\vec{B}=\frac{\mu_0e^{ikR}}{4\pi c^2R}(\ddot{\vec{m}}\times\vec{n})\times\vec{n}$

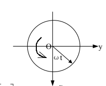
$$\vec{S}=\frac{\mu_0\omega^4|\vec{m}|^2}{32\pi^2c^3R^2}\sin^2\theta\vec{n}$$

1>求 $\vec{B}$

在 x 方向作简谐振荡的分量，

$$\vec{B}_x=\frac{\mu_0}{4\pi c^2R}\cdot e^{ikR}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3M_0\omega^2e^{-i\omega t}(\vec{e}_x\times\vec{e}_r)\times\vec{e}_r$$
$$=\frac{\mu_0\omega^2R_0^3M_0}{3c^2R}(\vec{e}_x\times\vec{e}_r)\times\vec{e}_r\cdot e^{i(kR-\omega t)}$$

在 y 方向的分量，




$$\vec{B}_y=\frac{\mu_0\omega^2R_0^3M_0}{3c^2R}(\vec{e}_y\times\vec{e}_r)\times\vec{e}_r\cdot e^{i(kR-\omega t)}$$

根据：$\begin{bmatrix}\vec{e}_x\\\vec{e}_y\\\vec{e}_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi&\cos\theta\cos\phi&-\sin\phi\\\sin\theta\sin\phi&\cos\theta\sin\phi&\cos\phi\\\cos\theta&-\sin\phi&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{e}_R\\\vec{e}_\theta\\\vec{e}_\phi\end{bmatrix}$

得：　$\vec{B}=\frac{\mu_0\omega^2R_0^3M_0}{3cR}(\vec{e}_\theta\cos\theta+i\vec{e}_\phi)e^{i(kR-\omega t+\phi)}$

同理可得：$\vec{E}=\frac{\mu_0\omega^2R_0^3M_0}{3cR}(i\vec{e}_\theta-\vec{e}_\phi\cos\theta)e^{i(kR-\omega t+\phi)}$

$$\vec{S}=\frac{\mu_0\omega^4R_0^6M_0^2}{18c^3R^2}(1+\cos^2\theta)\vec{e}_r$$

11. 带电粒子 e 作半径为 a 的非相对论性圆周运动，回旋频率为 $\omega$。求远处的辐射电磁场和辐射能流。

解：由题意，得右图

本题所研究的系统的磁偶极矩 $\vec{m}$ 是一个常量，因此不产生电磁辐射，但此系统的电偶极矩是一旋转的变化量

$$\vec{p}=ea\vec{e}_r$$

同 10 题的解法，把此旋转量分解到 x，y 方向上的两个简谐振荡是：

$$\vec{p}_x=ea\cos\omega t\vec{e}_x=eae^{-i\omega t}\vec{e}_x$$
$$\vec{p}_y=ea\cos(\omega t-\pi/2)\vec{e}_y=eae^{-i(\omega t+\frac{\pi}{2})}\vec{e}_y$$
$$=-eaie^{-i\omega t}\vec{e}_y$$

根据公式：$\vec{B}=\frac{i\mu_0k}{4\pi R}e^{ikR}(\vec{n}\times\dot{\vec{p}})$

$$\vec{E}=\frac{i\mu_0kc}{4\pi R}e^{ikR}(\vec{n}\times\dot{\vec{p}})\times\vec{n}$$

$$\vec{S}=\frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0c^3R^2}\sin\theta\vec{n}$$

有：　$\dot{\vec{p}}_x=-i\omega eae^{-i\omega t}\vec{e}_x,\ddot{\vec{p}}_x=\omega^2eae^{-i\omega t}\vec{e}_x$

$$\dot{\vec{p}}_y=i\omega eaie^{-i\omega t}\vec{e}_y,\ddot{\vec{p}}_y=-\omega^2eaie^{-i\omega t}\vec{e}_y$$

分别代入上式，可得：

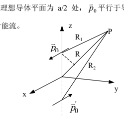
$$\vec{B}=\frac{\mu_0\omega^2ea}{4\pi cR}(\vec{e}_\phi\cos\theta-i\vec{e}_\theta)e^{i(kR-\omega t+\phi)}$$

$$\vec{E}=\frac{\mu_0\omega^2ea}{4\pi R}(\vec{e}_\theta\cos\theta+i\vec{e}_\phi)e^{i(kR-\omega t+\phi)}$$

$$\vec{S}=\frac{\mu_0\omega^4e^2a^2}{32\pi^2cR^2}(1+\cos^2\theta)\vec{e}_r$$

12. 设有一电矩振幅为 $\vec{p}_0$，频率为 $\omega$ 的电偶极子距理想导体平面为 a/2 处，$\vec{p}_0$ 平行于导体平面。设 $a<<\lambda$，求在 $R>>\lambda$ 处电磁场及辐射能流。

解：由题，如图所示，设平面 xoy 式导体平面，利用镜像法，构造图中的像电偶极子。




由图：$\vec{p}_0=p_0e^{-i\omega t}\vec{e}_x$
$\vec{p}_o'=-\vec{p}_0=-p_0e^{-i\omega t}\vec{e}_x$

分别计算它们在场点 P 处产生的辐射场 $\vec{B}$

1）$\ddot{\vec{p}}_0=-\omega^2p_0e^{-i\omega t}\vec{e}_x$

$$\vec{B}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^3R}e^{ik(R-\frac{a}{2}\cos\theta)}\cdot\ddot{\vec{p}}_0\times\vec{e}_r=-e^{-i\frac{ka\cos\theta}{2}}\cdot\frac{\omega^2p_0}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\cdot\vec{e}_x\times\vec{e}_r\cdot d^{i(kR-\omega t)}$$

2）$\ddot{\vec{p}}_0'=\omega^2p_0e^{-i\omega t}\vec{e}_x$

$$\vec{B}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\cdot e^{ik(R+\frac{a}{2}\cos\theta)}\cdot\ddot{\vec{p}}_0'\times\vec{e}_r=e^{i\frac{ka\cos\theta}{2}}\cdot\frac{\omega_2p_0}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\cdot\vec{e}_x\times\vec{e}_r\cdot d^{i(kR-\omega t)}$$

故：$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2$

$$=\frac{\omega^2p_0}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\cdot\vec{e}_x\times\vec{e}_r\cdot e^{i(kR-\omega t)}\cdot[e^{i\frac{ka\cos\theta}{2}}-e^{-i\frac{ka\cos\theta}{2}}]$$

$$\approx\frac{ika\omega^2p_0}{4\pi\varepsilon_0c^3R}e^{i(kR-\omega t)}\cdot\cos\theta(-\cos\theta\cos\phi\vec{e}_\phi-\sin\phi\vec{e}_\theta)$$

$$=-\frac{i\mu_0\omega^3p_0a}{4\pi c^3}\cdot\frac{e^{i(kR-\omega t)}}{R}(\cos\theta\sin\phi\vec{e}_\theta+\cos^2\theta\cos\phi\vec{e}_\phi)$$

$$\therefore\vec{B}(\vec{R},t)=-\frac{i\mu_0\omega^3p_0a}{4\pi c^2}\cdot\frac{e^{i(kR-\omega t)}}{R}(\cos\theta\sin\phi\vec{e}_\theta+\cos^2\theta\cos\phi\vec{e}_\phi)$$

$$\vec{E}(\vec{R},t)=c\vec{B}\times\vec{e}_r=\frac{i\mu_0\omega^3p_0a}{4\pi c}\cdot\frac{e^{i(kR-\omega t)}}{R}(\cos\theta\sin\phi\vec{e}_\phi-\cos^2\theta\cos\phi\vec{e}_\theta)$$

$$\vec{S}=\frac{c}{2\mu_0}|\vec{B}|^2\vec{n}=\frac{\mu_0\omega^6p_0^2a^2}{32\pi^2c^3R^2}(\cos^2\theta\sin^2\phi+\cos^4\theta\cos^2\phi)\vec{e}_r$$

13. 设线偏振平面波 $\vec{E}=\vec{E}_0e^{i(kx-\omega t)}$ 照射到一个绝缘介质球上（$\vec{E}_0$ 在 z 方向），引起介质球极化，极化矢量 $\vec{P}$ 是随时间变化的，因而产生辐射。设平面波的波长 $2\pi/k$ 远大于球半径 $R_0$，求介质球所产生的辐射场和能流。

解：本题相当于电偶极矩

$$\vec{p}=\frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}R_0^3E_0e^{-i\omega t}\ 的辐射。$$

$$\therefore\ddot{\vec{p}}=-\frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\omega^2R_0^3E_0e^{-i\omega t}\vec{e}_z$$

$\therefore$ 介质球产生的辐射场是：

$$\vec{B}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\cdot e^{ikR}\cdot\frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}R_0^3E_0\omega^2e^{-i\omega t}(-\vec{e}_z)\times\vec{e}_r$$
$$=-\frac{\omega^2R_0^3E_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)c^3R}\sin\theta e^{i(kR-\omega t)}\vec{e}_\phi$$

$$\vec{E}=c\vec{B}\times\vec{e}_r=-\frac{\omega^2R_0^3E_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\mu_0(\varepsilon+2\varepsilon_0)c^2R}\sin^2\theta\vec{e}_\theta$$

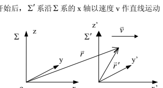
$$\vec{S}=\frac{1}{2\mu_0}c|\vec{B}|^2\vec{e}_r=\frac{\omega^4R_0^6E_0^2(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{2\mu_0(\varepsilon+2\varepsilon_0)^2c^3R^2}\sin^2\theta\vec{e}_r$$

1. 证明牛顿定律在伽利略交换下是协变的，麦克斯韦方程在伽利略变换下不是协变的。

证明：根据题意，不妨取如下两个参考系，并取分别固着于两参考系的直角坐标系，且令 t=0 时，两坐标系对应轴重合，计时开始后，Σ' 系沿 Σ 系的 x 轴以速度 v 作直线运动

根据伽利略变换，有：

$$\begin{cases}x'=x-vt\\y'=y\\z'=z\\t'=t\end{cases}$$




1）牛顿定律在伽利略变换下是协变的：

以牛顿第二定律为例，$\vec{F}=m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$

在 Σ 系下，$\vec{F}=m\frac{d\vec{x}}{dt^2}$

$$\because x'=x-vt,y'=y,z'=z,t'=t$$

$$\therefore\vec{F}=m\frac{d^2[x'+vt,y',z']}{dt'^2}=m'\frac{d^2\vec{x}'}{dt'^2}=\vec{F}'$$

可见，在 Σ' 系中，牛顿定律有相同的形式，$\vec{F}'=m'\frac{d^2\vec{x}'}{dt'^2}$

所以，牛顿定律在伽利略变换下是协变的。

2）麦克斯韦方程在伽利略变换下不是协变的

以真空中的麦氏方程 $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ 为例，设有一正电荷 q 位于 O' 点，并随 Σ' 系运动，在 Σ' 中，q 是静止的，故：$\vec{E}'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r'^2}\vec{e}_{r'}$，$\vec{B}'=0$

于是，方程 $\nabla'\times\vec{E}'=-\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t'}$ 成立。

将 $\vec{E}'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r'^2}\vec{e}_{r'}$ 写成直角分量形式：

$$\vec{E}'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{x'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}\vec{e}_{x'}+\frac{y'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}\vec{e}_{y'}+\frac{z'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}\vec{e}_{z'}]$$

由伽利略变换关系有：

在 Σ 中，

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\{\frac{x-vt}{[(x-vt)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\vec{e}_x+\frac{y}{[(x-vt)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\vec{e}_y+\frac{z}{[(x-vt)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\vec{e}_z\}$$

$$\therefore\nabla\times\vec{E}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{[(x-vt)^2+y^2+z^2]^{5/2}}\{(y-z)\vec{e}_x+(z-x+vt)\vec{e}_y+(x-vt-y)\vec{e}_z\}$$

可见 $\nabla\times\vec{E}$ 不恒为零。

又在 Σ 系中观察，q 以速度 $v\vec{e}_x$ 运动，故产生电流 $\vec{J}=qv\vec{e}_x$

于是有磁场 $\vec{B}=\frac{\mu_0qv}{2\pi R}$　（R 是场点到 x 轴的距离）

此时　有 $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$

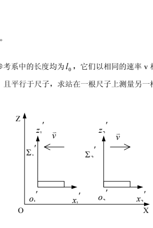
于是　$\nabla\times\vec{E}\neq-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

故麦克斯韦方程在伽利略变换下不是协变的。

2. 设有两根互相平行的尺，在各自静止的参考系中的长度均为 $l_0$，它们以相同的速率 v 相对于某一参考系运动，但运动方向相反，且平行于尺子，求站在一根尺子上测量另一根尺子的长度。

解：根据相对论速度交换公式，可得 $\Sigma_2'$ 系相对于 $\Sigma_1'$ 的速度大小是：

$$v'=\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$




$\therefore$ 在 $\Sigma_1'$ 系中测量 $\Sigma_2'$ 系中静长为 $l_0$ 的尺子的长度为：

$$l=l_0\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\qquad 代入\ v'=\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$

即得 $l=l_0\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}$，此即是在 $\Sigma_1'$ 系中观测到的相对于 $\Sigma_2'$ 静止的尺子的长度。

3、静止长度为 $l_0$ 的车厢，以速度 v 相对于地面 s 运行，车厢的后壁以速度 $u_0$ 向前推出一个小球，求地面观察者看到小球从后壁到前壁的运动时间。

解：根据题意，取地面为参考系 S，车厢为参考系 S'

于是相对于地面参考系 S，

车长：$l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$　　车速：v　　球速：$u=\frac{u_0+v}{1+\frac{u_0v}{c^2}}$

故在地面参考系 S 中观察，小球由车后壁到车前壁

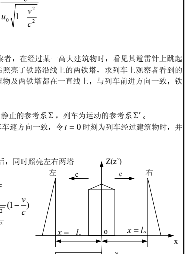
$$\Delta t=\frac{l}{u-v}=\frac{l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\frac{u_0+v}{1+\frac{u_0v}{c^2}}-v}=\frac{l_0(1+\frac{u_0v}{c^2})}{u_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

4. 一辆以速度 v 运动的列车上的观察者，在经过某一高大建筑物时，看见其避雷针上跳起一脉冲电火花，电光迅速传播，先后照亮了铁路沿线上的两铁塔，求列车上观察者看到的两铁塔被电光照亮的时间差。设建筑物及两铁塔都在一直线上，与列车前进方向一致，铁塔到建筑物的地面距离已知都是 $l_0$。

解：由题意，得右示意图，取地面为静止的参考系 Σ，列车为运动的参考系 Σ'。

取 x 轴与 x' 轴平行同向，与列车车速方向一致，令 t=0 时刻为列车经过建筑物时，并令此处为 Σ 系与 Σ' 系的原点，如图。

在 Σ 系中，光经过 $t=\frac{l_0}{c}$ 的时间后，同时照亮左右两塔




但在 Σ' 系中，观察两塔的位置为：

$$x'_{右}=l_0v-\beta vl_0=\frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(1-\frac{v}{c})$$

$$x'_{左}=-l_0v-\beta vl_0=-\frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(1+\frac{v}{c})$$

$$\therefore d'_{右}=|x'_{右}-o'|=\frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(1-\frac{v}{c})$$

$$d'_{左}=|x'_{左}-o'|=\frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(1+\frac{v}{c})$$

时间差为：

$$\Delta t=\frac{d'_{左}}{c}-\frac{d'_{右}}{c}=\frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{1}{c}[(1+\frac{v}{c})-(1-\frac{v}{c})]=\frac{2vl_0}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

5. 有一光源 S 与接收器 R 相对静止，距离为 l，S—R 装置浸在均匀无限的液体介质（静止折射率 n）中，试对下列三种情况计算光源发出讯号到接收器收到讯号所经历的时间。

（1）液体介质相对于 S—R 装置静止
（2）液体沿着 S—R 连线方向以速度 v 流动
（3）液体垂直于 S—R 连线方向以速度 v 流动

解：1）液体介质相对于 S—R 装置静止时：

$$\Delta t_1=\frac{nl_0}{c}$$

2）液体沿着 S—R 连线方向以速度 v 流动：

同样取固着于介质的参考系 Σ'，Σ' 系沿 x 轴以速度 v 运动，在 Σ' 系中测得光速在各个方向上均是 $\frac{c}{n}$

由速度变换关系得在 Σ 系中，沿介质运动方向的光速：

$$\frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{v}{cn}}$$

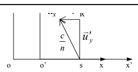
$\therefore$ R 接收到讯号的时间为　$\Delta t_2=\frac{(1+\frac{v}{cn})l_0}{\frac{c}{n}+v}$

3）液体垂直于 S—R 连线方向以速度 v 流动

同（2）中取相对于 S-R 装置静止的参考系为 Σ 系，相对于介质静止的参考系为 Σ' 系，如下建立坐标；

可见，$u_x' = -v$

$u_y' = \sqrt{\frac{c^2}{n^2} - v^2}$



∴在Σ中，测得 y 方向上的速度：

$$u_y = \frac{u_y'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{u_x' v}{c}} = \frac{\sqrt{\frac{c^2}{n^2}-v^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{(-v)\cdot v}{c}} = \frac{\sqrt{\frac{c^2}{n^2}-v^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\therefore \Delta t_2 = \frac{l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{\frac{c^2}{n^2}-v^2}}$$

6. 在坐标系Σ中有两个物体都以速度 u 沿 x 轴运动，在Σ系看来，它们一直保持距离 l 不变。今有一观察者以速度 v 沿 x 轴运动，他看到这两个物体的距离是多少？

解：根据题意，取固着于观察者上的参考系为Σ'

又取固着于 A，B 两物体的参考系为Σ''

在Σ中，A,B 以速度 u 沿 x 轴运动，相距为 l，在Σ''系中，A，B 静止相距为 $l_0$，有：

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$\therefore l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

又Σ'系相对于Σ以速度 v 沿 x 轴运动，Σ''系相对于Σ系以速度 u 沿 x 轴运动

由速度合成公式，Σ''系相对于Σ'系以速度

$$v' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$$ 沿 x 轴运动

∴在Σ'系中看到两物体相距：

$$l' = l_0\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}} = \frac{l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

7. 一把直尺相对于Σ系静止，直尺与 x 轴交角θ，今有一观察者以速度 v 沿 x 轴运动，他看到直尺与 x 轴交角θ'有何变化？

解：取固着于观察者上的参考系为Σ'

在Σ系中：$l_x = l\cos\theta$，$l_y = l\sin\theta$

在Σ'系中：$l_x' = l_x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = l\cos\theta\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

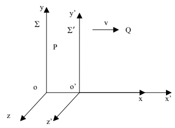
$l_y' = l_y = l\sin\theta$

$$\therefore tg\theta' = \frac{l_y'}{l_x'} = \frac{tg\theta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

8. 两个惯性系Σ和Σ'中各放置若干时钟，同一惯性系的诸时钟同步。Σ'相对于Σ以速度 v 沿 x 轴运动，设两系原点相遇时，$t_0 = t_0' = 0$，问处于Σ系中某点（x，y，z）处的时钟与Σ'系中何处时钟相遇时，指示的时刻相同？读数是多少？

解：根据变换关系，得：

$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdots\cdots(1)\\ y'=y\cdots\cdots(2)\\ z'=z\cdots\cdots(3)\\ t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdots\cdots(4)\end{cases}$$



设Σ系中 $P(x,y,z,t)$ 处的时钟与Σ'系中 $Q(x',y',z',t')$ 处时钟相遇时，指示时间相同：

∴在（4）式中，有 $t=t'$，解得：$x = \frac{c^2}{v}t\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$ 代入（1）式，

得：$x' = -\frac{c^2}{v}t\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = -x$

相遇时：$t = t' = \frac{x}{\frac{c^2}{v}\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)} = \frac{x}{v}\left(1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$

即为时钟指示的时刻。

9. 火箭由静止状态加速到 $v=\sqrt{0.9999}c$，设瞬时惯性系上加速度为 $|\dot{v}| = 20m\cdot s^{-2}$，问按照静止系的时钟和按火箭内的时钟加速火箭各需要多少时间？

解：1）在静止系中，加速火箭

令静止系为Σ系，瞬时惯性系为Σ'系，且其相对于Σ系的速度为 u，可知 $\vec v, \vec u$ 同向，并令此方向为 x 轴方向

由 x 轴向上的速度合成有：

$$v = \frac{v'+u}{1+\frac{uv'}{c^2}}$$ （$v'$ 是火箭相对于Σ'系的速度）

∴在Σ系中，加速度为 $a = \frac{dv}{dt} = (1-\frac{u^2}{c^2})^{3/2}\frac{a'}{(1+\frac{uv'}{c^2})^3}$ （$a' = \frac{dv'}{dt'}$）

本题中 $a' = 20m\cdot s^{-2}$，而Σ'系相对于火箭瞬时静止，∴ $u = v, v' = 0$

$$\therefore a = \frac{dv}{dt} = a'(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}$$

$$\therefore \int_0^{\sqrt{0.9999}c}\frac{dv}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}} = \int_0^t a'dt$$

得：$t = \frac{100\sqrt{0.9999}c}{a'} = 47.5$ 年

10. 一平面镜以速度 v 自左向右运动，一束频率为 $\omega_0$，与水平线成 $\theta_0$ 夹角的平面光波自左向右入射到镜面上，求反射光波的频率ω及反射角θ，垂直入射的情况如何？

解：1）平面镜垂直于运动方向放置，取相对于平面镜静止的参考系为Σ'系，取静止系为Σ系，并令入射光线在平面 xoy 内

在Σ系中，有：

入射光线：$k_{ix} = k\cos\theta_0, k_{iy} = k\sin\theta_0, k_{iz} = 0, \omega_i = \omega_0$

由变换关系，得Σ'系中的入射光线：

$$\begin{cases}k_{ix}' = \gamma(k\cos\theta_0 - \frac{v}{c^2}\omega_0)\\ k_{iy}' = -k\sin\theta_0\\ k_{iz}' = 0\\ \omega_i' = \gamma(\omega_0 - vk\cos\theta_0)\end{cases}$$

在Σ'系中，平面镜静止，由反射定律可得，反射光线满足：

$k_{rx}' = \gamma(k\cos\theta_0 - \frac{v}{c^2}\omega_0); k_{ry}' = k\sin\theta_0$

$k_{rz}' = 0; \omega_r' = \gamma(\omega_0 - vk\cos\theta_0)$

代入逆变换关系，得Σ系中的反射光线满足：

$k_{rx} = \gamma[\gamma(k\cos\theta_0 - \frac{v}{c^2}\omega_0) + \frac{v}{c^2}\gamma(\omega_0 - vk\cos\theta_0)] = k\cos\theta_0$

$k_{ry} = k\sin\theta_0$

$k_{rz} = 0$

$\omega_r = \gamma[\gamma v(k\cos\theta_0 - \frac{v}{c^2}\omega_0) + \gamma(\omega_0 - vk\cos\theta_0)] = \omega_0$

∴在Σ系中观察到：入射角 $\theta_i = \frac{\pi}{2} - \theta_0$ = 反射角，$\omega_i = \omega_r = \omega_0$

若垂直入射，$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$，以上结论不变。

3）镜面垂直于运动方向放置，同 1）选择参考系，并建立相应坐标系

在Σ系中，入射光线满足：$k_{ix} = -k\cos\theta_0, k_{iy} = -k\sin\theta_0, k_{iz} = 0, \omega_i = \omega_0$

由变换关系，得Σ'系中的入射光线：

$$\begin{cases}k_{ix}' = \gamma(-k\cos\theta_0 - \frac{v}{c^2}\omega_0)\\ k_{iy}' = -k\sin\theta_0\\ k_{iz}' = 0\\ \omega_i' = \gamma[\omega_0 - v(-k\cos\theta_0)] = \gamma(\omega_0 + vk\cos\theta_0)\end{cases}$$

在Σ'系中，平面镜静止，由反射定律可得，反射光线满足：

$k_{rx}' = -\gamma(-k\cos\theta_0 - \frac{v}{c^2}\omega_0) = \gamma(k\cos\theta_0 + \frac{v}{c^2}\omega_0); k_{ry}' = -k\sin\theta_0$

$k_{rz}' = 0; \omega_r' = \gamma(\omega_0 + vk\cos\theta_0)$

代入逆变换关系，得Σ系中的反射光线满足：

$k_{rx} = \gamma[\gamma(k\cos\theta_0 + \frac{v}{c^2}\omega_0) + \frac{v}{c^2}\gamma(\omega_0 + vk\cos\theta_0)]$

$k_{ry} = -k\sin\theta_0$

$k_{rz} = 0$

$\omega_r = \gamma[\gamma v(k\cos\theta_0 + \frac{v}{c^2}\omega_0) + \gamma(\omega_0 + vk\cos\theta_0)]$

其中，$k = \frac{\omega_0}{c}$，并令 $\beta = \frac{v}{c}$

∴反射光线：反射角：$tg\theta = \left|\frac{k_{ry}}{k_{rx}}\right| = \frac{\sin\theta_0}{\gamma^2[(\beta+\cos\theta_0)+\beta(1+\beta\cos\theta_0)]}$

反射光频率：$\omega = \gamma^2\omega_0[(1+\beta\cos\theta_0)+\beta(\beta+\cos\theta_0)]$

如果垂直入射，$\theta_0 = 0$，于是，Σ系中会观察到：$\theta_i = \theta_r = 0$

反射光频率：$\omega = \gamma^2\omega_0(1+\beta)^2$

11. 在洛仑兹变换中，若定义快度 y 为 $\tanh y = \beta$

1）证明洛仑兹变换矩阵可写为：

$$a_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} chy & 0 & 0 & ishy\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ -ishy&0&0&chy\end{bmatrix}$$

2）对应的速度合成公式 $\beta = \frac{\beta'+\beta''}{1+\beta'\beta''}$ 可用快度表示为 $y = y' + y''$

证明：1）$a_{\mu\nu} = \begin{bmatrix}\gamma&0&0&i\beta\gamma\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ -i\beta\gamma&0&0&\gamma\end{bmatrix}$

其中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(thy)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{shy}{chy})^2}} = \frac{chy}{\sqrt{(chy)^2-(shy)^2}}$

$$\because (chy)^2 - (shy)^2 = \left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)^2 = 1$$

$\therefore \gamma = chy$

又 $\beta\gamma = thy\cdot chy = shy$

$$\therefore a_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} chy & 0 & 0 & ishy\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ -ishy&0&0&chy\end{bmatrix}$$

2）速度合成公式：$\beta = \frac{\beta'+\beta''}{1+\beta'\beta''}$ 可写为：$thy = \frac{thy'+thy''}{1+thy'thy''}$

由定义 $thy' = \frac{e^{2y'}-1}{e^{2y'}+1}, thy'' = \frac{e^{2y''}-1}{e^{2y''}+1}$

得 $\frac{thy'+thy''}{1+thy'thy''} = \frac{e^{2(y'+y'')}-1}{e^{2(y'+y'')}+1} = th(y'+y'')$

$\therefore thy = th(y'+y''), y = y'+y''$

12. 电偶极子 $\vec P_0$ 以速度 $\vec v$ 作匀速运动，求它产生得电磁势和场 $\varphi, \vec A, \vec E, \vec B$

解：选随动坐标系Σ'，$\vec P_0 \perp \vec v$

在Σ'系中，$\vec P_0$ 产生的电磁势 $\varphi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec P_0\cdot\tilde{\vec R}}{\tilde R^3}, \vec A = 0$

电磁场 $\vec E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{3(\vec P_0\cdot\tilde{\vec R})\tilde{\vec R}}{\tilde R^5} - \frac{\vec P_0}{\tilde R^3}], \vec B' = 0$

四维势 $A_\mu = (\vec A, \frac{i}{c}\varphi)$，由变换 $A_\mu = a_{\mu\nu}A_\nu'$

得：
$$\begin{pmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\\ \frac{i}{c}\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma&0&0&-i\beta\gamma\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ i\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \frac{i}{c}\varphi'\end{pmatrix}$$

Σ 系中，电磁势 $\varphi = \gamma\varphi' = \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec P_0\cdot\tilde{\vec R}}{\tilde R^3}$

$\vec A = A_x\vec e_x = \frac{\beta\gamma}{c}\varphi'\vec e_x = \frac{v}{c^2}\gamma\varphi'\vec e_x = \frac{\vec v}{c^2}\varphi$

电磁场 $\vec E_{平行} = \vec E'_{平行}$，$\vec E_\perp = \gamma(\vec E' - \vec v\times\vec B')_\perp = \gamma\vec E'_\perp$

$\vec B_{平行} = \vec B'_{平行} = 0$，$\vec B_\perp = \gamma(\vec B' + \frac{\vec v}{c^2}\times\vec E')_\perp = \gamma(\frac{\vec v}{c^2}\times\vec E')_\perp = \frac{\vec v}{c^2}\times\vec E_\perp$

由坐标变换，$x_\mu' = a_{\mu\nu}x_\nu$ 得

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\\ ict'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma&0&0&i\beta\gamma\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ -i\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ ict\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}x' = \gamma x - v\gamma t\\ y' = y\\ z' = z\end{cases}$$

取 t=0 得 $\begin{cases}x' = \gamma x\\ y' = y\\ z' = z\end{cases}$，$\therefore \tilde{\vec R} = (x',y',z') = (\gamma x, y., z)$

13. 设在参考系Σ内，$\vec E \perp \vec B$，Σ'系沿 $\vec E\times\vec B$ 的方向运动，问Σ'系应以什么样的速度相对于Σ系运动才能使其中只有电场或只有磁场？

解：如图，Σ'系以 $\vec v$ 沿 x 轴方向相对于Σ系运动

由电磁场变换公式：

$\vec E'_{平行} = \vec E_{平行} = 0$，$\vec E_\perp' = \gamma(\vec E + \vec v\times\vec B)_\perp = \gamma(\vec E + \vec v\times\vec B)$

$\vec B'_{平行} = \vec B_{平行} = 0$，$\vec B_\perp' = \gamma(\vec B - \frac{\vec v}{c^2}\times\vec E)_\perp = \gamma(\vec B - \frac{\vec v}{c^2}\times\vec E)$

令 $\vec E_\perp' = 0$，则 $\vec E + \vec v\times\vec B = 0$

两边同时叉乘 $\vec B$ 并利用矢量分析公式，得：

$\vec v = \frac{1}{B^2}(\vec E\times\vec B)$，取模 $v = \frac{E}{B} = \frac{|\vec E|}{|\vec B|}$

$\because v < c$  $\therefore |\vec E| < c|\vec B|$

即若 $|\vec E| < |\vec B|$，则当 $\vec v = \frac{1}{B^2}(\vec E\times\vec B)$ 时，$\vec E' = 0$

同理，令 $\vec B_\perp' = 0$，则 $\vec B - \frac{\vec v}{c^2}\times\vec E = 0$

两边同时叉乘 $\vec E$ 并利用矢量分析公式，得：

$\vec v = \frac{c^2}{E^2}(\vec E\times\vec B)$，取模 $v = \frac{c^2}{E}B = c^2\frac{|\vec B|}{|\vec E|}$

$\because v < c$  $\therefore |\vec E| > c|\vec B|$

即若 $|\vec E| > c|\vec B|$，则当 $\vec v = \frac{c^2}{E^2}(\vec E\times\vec B)$ 时，$\vec B' = 0$

14. 做匀速运动的点电荷所产生的电场在运动方向上发生"压缩"，这时在电荷的运动方向上电场 $\vec E$ 与库仑场相比较会发生减弱，如何理解这一减弱与变换公式 $E_{平行} = E'_{平行}$ 的关系。

解：设点电荷 e 以速度 $\vec v$ 沿Σ系 x 轴方向运动，选Σ'系为 e 的随动系

在Σ'系中，$E'_{平行} = \frac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}$ 为库仑场。

由变换 $E_{平行} = E'_{平行}$，得 $E_{平行} = \frac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}$，此场在Σ系中并非静电库仑场。

由坐标变换：$\begin{cases}x' = x\gamma\\ y' = y\\ z' = z\end{cases}$

得 $E_{平行} = (1-\frac{v^2}{c^2})\frac{ex}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} = (1-\frac{v^2}{c^2})E_0$，$E_0$ 为Σ系中库仑场

当 $v\approx c$ 时，$E_{平行} << E_0$（压缩）

15. 有一沿 z 轴方向螺旋进动的静磁场 $\vec B = \vec B_0(\cos k_m z\vec e_x + \sin k_m z\vec e_y)$，其中 $k_m = 2\pi/\lambda_m$，$\lambda_m$ 为磁场周期长度，现有一沿 z 轴以速度 $v = \beta c$ 运动的惯性系，求在该惯性系中观察到的电磁场。证明当 $\beta\approx 1$ 时，该电磁场类似于一列频率为 $\gamma\cdot\beta ck_m$ 的圆偏振电磁波。

解：由电磁场变换式，在Σ'系中：

$\vec E'_{平行} = \vec E_{平行} = 0$，

$\vec E_\perp' = \gamma(\vec E + \vec v\times\vec B)_\perp = \gamma\vec v\times\vec B = \gamma\beta c\vec e_z\times\vec B_0(\cos k_m z\vec e_x + \sin k_m z\vec e_y)$

$= \gamma\beta cB_0(-\sin k_m z\vec e_x + \cos k_m z\vec e_y)$

$\vec B'_{平行} = \vec B_{平行} = 0$，

$\vec B_\perp' = \gamma(\vec B - \frac{\vec v}{c^2}\times\vec E)_\perp = \gamma\vec B = \gamma\vec B_0(\cos k_m z\vec e_x + \sin k_m z\vec e_y)$

∴在该惯性系中观察到的电磁场为：

$\vec E' = \gamma\beta cB_0(-\sin k_m z\vec e_x + \cos k_m z\vec e_y)$

$= \gamma\beta cB_0[\cos(k_m z + \frac{\pi}{2})\vec e_x + \sin(k_m z + \frac{\pi}{2})\vec e_y]$

$\vec B' = \gamma\vec B_0(\cos k_m z\vec e_x + \sin k_m z\vec e_y)$

当 $\beta\approx 1$ 时，$v\approx c$，$\because \vec E'\perp(-\vec e_z), \vec B'\perp(-\vec e_z), \vec E'\perp\vec B', \frac{|\vec E'|}{|\vec B'|} = \beta c = v\approx c$

∴该电磁场类似于一列真空中的圆偏振平面电磁波。

由四维矢量 $k_\mu = (\vec k, i\frac{\omega}{c})$ 的变换关系得：$k_\mu' = a_{\mu\nu}k_\nu$

$k_z' = \gamma(k_z - \frac{v}{c^2}\omega) = \gamma k_m, k_x' = k_x = 0, k_y' = k_y = 0, \omega' = \gamma(\omega - vk_z) = -\beta ck_m$

∴该偏振电磁波的频率为 $\gamma\cdot\beta ck_m$

16. 有一无限长均匀带电直线，在其静止参考系中线电荷密度为λ，该线电荷以速度 $v = \beta c$ 沿自身长度匀速移动，在与直线相距为 d 的地方有一以同样速度平行于直线运动的点电荷 e，分别用下列两种方法求出作用在电荷上的力：

(a) 在直线静止系中确定力，然后用四维力变换公式

(b) 直接计算线电荷和线电流作用在运动电荷上的电磁力。

解：(a) 在直线静止系中，由高斯定理，d 处的电场强度为 $\vec E' = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\vec e_r$（取 $\vec e_r = \vec e_z$），

磁场 $\vec B' = 0$，e 受力为 $\vec F' = e(\vec E' + \vec v'\times\vec B') = e\vec E' = \frac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\vec e_r$

由四维矢量，e 受到的四维力为 $K_\mu' = (\vec K', \frac{i}{c}\vec F'\cdot\vec v') = (\gamma'\vec F', \frac{i}{c}\gamma'\vec F'\cdot\vec v')$，其中 $\vec v' = 0$，

$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = 1$（v' 为 e 相对于直线静止的速度）

$\therefore k_\mu' = (\vec F', 0) = (0,0,\frac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d},0)$

根据四维力矢量的变换关系 $k_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu'$ 得：

$$\begin{pmatrix}k_x\\ k_y\\ k_z\\ k_w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma&0&0&-i\beta\gamma\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ i\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\\ 0\end{pmatrix}$$

$\therefore k_x = k_y = k_w = 0, k_z = \frac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}, \vec K = \frac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\vec e_r$

∴e 受力 $\vec F = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\vec K = \frac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d\gamma}\vec e_r$

(b) 在直线静止系中，电流密度四维矢量 $J_\mu' = (\vec J', ic\rho')$

$\vec J' = 0$，设直线截面面积为 S（设不变），则 $\rho' = \frac{\lambda}{S}$

$J_\mu' = (0,0,0,ic\frac{\lambda}{S})$，由变换公式 $J_\mu = a_{\mu\nu}J_\nu'$ 得：

$$\begin{pmatrix}J_x\\ J_y\\ J_z\\ ic\rho\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma&0&0&-i\beta\gamma\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ i\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix}$$

$\therefore J_x = \beta c\gamma\frac{\pi}{S}, J_y = J_z = 0, \rho = \gamma\frac{\lambda}{S}$

$\therefore J_\mu = (\beta c\gamma\frac{\lambda}{S}, 0, 0, \gamma\frac{\lambda}{S})$

在 o−xyz 系中，线电荷密度为 $\gamma\lambda$，电流为 $I = \beta c\gamma\lambda$，流向沿 x 轴方向。

由高斯定理，e 处场强为 $\vec E = \frac{\gamma\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\vec e_r$（取 $\vec e_r = \vec e_z$）

由安培环路定律得，e 处磁感应强度为 $\vec B = -\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec e_y$

∴e 所受的洛仑兹力为 $\vec F = e(\vec E + \vec v\times\vec B) = \frac{e\gamma\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\vec e_r - \frac{ev\mu_0 I}{2\pi d}\vec e_r$

$$= \frac{e\gamma\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}(1-\frac{v^2}{c^2})\vec e_r = \frac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d\gamma}\vec e_r$$

17. 质量为 M 得静止粒子衰变为两个粒子 $m_1$ 和 $m_2$，求粒子 $m_1$ 的动量和能量。

解：衰变前粒子的动量为 $\vec p = 0$，能量为 $w = Mc^2$。衰变后设两粒子动量为 $\vec p_1, \vec p_2$，能量分别为 $w_1 = \sqrt{p_1^2c^2 + m_1^2c^4}, w_2 = \sqrt{p_2^2c^2 + m_2^2c^4}$

由动量守恒和能量守恒得：

$\vec p_1 + \vec p_2 = \vec p = 0$  （1）

$\sqrt{p_1^2c^2 + m_1^2c^4} + \sqrt{p_2^2c^2 + m_2^2c^4} = Mc^2$  （2）

由（1）得 $|\vec p_1| = |\vec p_2| = p$ 代入（2）解得

$$p_1 = p_2 = p = \frac{c}{2M}\sqrt{[M^2 - (m_1+m_2)^2][M^2 - (m_1-m_2)^2]}$$

粒子 $m_1$ 的能量为 $E_1 = \sqrt{p_1^2c^2 + m_1^2c^4} = \frac{c^2}{2M}[M^2 + m_1^2 - m_2^2]$

18. 已知某一粒子 m 衰变成质量为 $m_1$ 和 $m_2$，动量为 $p_1$ 和 $p_2$（两者方向夹角为θ）的两个粒子，求该粒子的质量 m。

解：由 $\vec p_1 + \vec p_2 = \vec p$ 动量守恒得：

$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta$  （1）$\vec p$ 为 m 的动量

由能量守恒 $\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = \sqrt{p_1^2c^2 + m_1^2c^4} + \sqrt{p_2^2c^2 + m_2^2c^4}$  （2）

（1）代入（2）得：

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2}{c^2}[\sqrt{(p_1^2 + m_1^2c^2)(p_2^2 + m_2^2c^2)} - p_1p_2\cos\theta]$$

19. （1）设 E 和 $\vec p$ 是粒子体系在实验室参考系Σ中的总能量和总动量（$\vec p$ 与 x 轴方向夹角为θ），证明在另一参考系Σ'（相对于Σ以速度 v 沿 x 轴方向运动）中的粒子体系总能量和总动量满足：

$$p_x' = \gamma(p_x - \beta E/c),\quad E' = \gamma(E - c\beta p_x),\quad tg\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta E/cp)}$$

（2）某光源发出的光束在两个惯性系中与 x 轴的夹角分别为θ和θ'，证明

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta},\quad \sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}$$

（3）考虑在Σ系内立体角为 $d\Omega = d\cos\theta d\phi$ 的光束，证明当变换到另一惯性系Σ'时，立体角变为 $d\Omega' = \frac{d\Omega}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}$

证明：（1）

四维动量矢量 $p_\mu = (\vec p, \frac{i}{c}E)$，满足洛仑兹变换：

$$\begin{cases}p_x' = \frac{p_x - v\frac{E}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma(p_x - \beta\frac{E}{c})\\ p_y' = p_y\\ p_x' = p_x\\ E' = \gamma(E - vp_x) = \gamma(E - c\beta p_x)\end{cases}$$

在Σ'系中，$\vec p'$ 与 x 轴的夹角θ'满足：

$$tg\theta' = \frac{p_y'}{p_x'} = \frac{p\sin\theta}{\gamma(p\cos\theta - \beta\frac{E}{c})} = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta E/cp)}$$

（2）四维波矢量 $k_\mu = (\vec k, i\frac{\omega}{c})$

对沿 x 轴方向的特殊洛仑兹变换有

$$\begin{cases}k_1' = \gamma(k_1 - \frac{v}{c^2}\omega)\\ k_2' = k_2\\ k_3' = k_3\\ \omega' = \gamma(\omega - vk)\end{cases}\quad (*)$$

在两个惯性系中有：

$k_1 = \frac{\omega}{c}\cos\theta$，$k_1' = \frac{\omega'}{c}\cos\theta'$

代入（*）式得：

$$\omega' = \omega\gamma(1-\frac{v}{c}\cos\theta), \cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta} = \frac{\cos\theta - \beta}{1-\beta\cos\theta}$$

$$\sin\theta' = \sqrt{1-\cos'^2} = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}\sin\theta}{1-\frac{v}{c}\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}$$

（3）在另一个惯性系中，$d\Omega' = d\cos\theta' d\phi'$

对沿 x 轴方向得特殊洛仑兹变换有：$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1-\beta\cos\theta}$，（2）中已证，且

$$d\phi' = d\phi \therefore d\cos\theta' = d(\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}) = \frac{(1-\beta^2)d\cos\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2} = \frac{d\cos\theta}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}$$

$$\therefore d\Omega' = d\cos\theta' d\phi' = \frac{d\Omega}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}$$

20. 考虑一个质量为 $m_1$，能量为 $E_1$ 的粒子射向另一质量为 $m_2$ 的静止粒子的体系，通常在高能物理中，选择质心参考系有许多方便之处，在该参考系中，总动量为零。

（1）求质心系相对于实验室系的速度 $\beta_c$

（2）求质心系中每个粒子的动量，能量和总能量；

（3）已知电子静止质量 $m_ec^2 = 0.511MeV$。北京正负电子对撞机（BEPC）的设计能量为 2×2.2GeV(1GeV=10³MeV).估计一下若用单束电子入射于静止靶，要用多大的能量才能达到与对撞机相同的相对运动能量？

解：(1)设质心系中两粒子动量分别为 $\vec p_1', \vec p_2'$，且 $\vec p_1' + \vec p_2' = 0$

能量为 $E_1'^2 = p_1'^2c^2 + m_1^2c^4, E_2'^2 = p_2'^2c^2 + m_2^2c^4$

实验室系中：$p_2 = 0, p_1 \neq 0$

$$E_1^2 = p_1^2c^2 + m_1^2c^4, E_2^2 = m_2^2c^4$$

由特殊洛仑兹变换得：

$$p_1 = \frac{p_1' + \frac{\beta_c}{c^2}E_1'}{\sqrt{1-\beta_c^2/c^2}}\ (1);\quad E_1 = \frac{E_1' + \beta_c p_1'}{\sqrt{1-\beta_c^2/c^2}}\ (2);$$

$$p_2 = \frac{p_2' + \frac{\beta_c}{c^2}E_2'}{\sqrt{1-\beta_c^2/c^2}}\ (3);\quad E_2 = \frac{E_2' + \beta_c p_2'}{\sqrt{1-\beta_c^2/c^2}}\ (4)$$

（1）＋（3）得：$p_1 = \gamma\frac{\beta_c}{c^2}(E_1' + E_2')$

（2）＋（4）得 $E_1 + E_2 = \gamma(E_1' + E_2')$

$\therefore p_1 = \frac{\beta_c}{c^2}(E_1 + E_2)$

$\therefore \beta_c = \frac{p_1c^2}{E_1 + E_2} = \frac{\sqrt{E_1^2 + m_1^2c^4}}{E_1 + m_2c^2}c$ 为质心系相对于实验室系的速度 $\beta_c$。

2）$|\vec p_1'| = \frac{m_2\sqrt{E_1^2 - m_1^2c^4}}{Mc}$，$|\vec p_2'| = |\vec p_1'|$

$\therefore E_1' = \sqrt{p_1'^2c^2 + m_1^2c^4} = \frac{m_1^2c^2 + m_2E_1}{M}$，$E_2' = \sqrt{p_2'^2c^2 + m_2^2c^4} = \frac{m_2E_1 + m_2^2c^2}{M}$

总能量 $E' = E_1' + E_2' = \frac{(m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2m_2E_1}{M}$，其中 $M^2c^4 = m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + 2m_2E_1c^2$

4）实验室系中：

$p_\mu = [\vec p_1 + \vec p_2, \frac{i}{c}(E_1 + E_2)] = (\vec p, \frac{i}{c}(E_1 + E_2))$

质心系中 $p_\nu' = [\vec p_1' + \vec p_2', \frac{i}{c}(E_1' + E_2')] = [0, \frac{i}{c}2E_1']$

由不变量 $p_\mu p_\mu' = p_\nu p_\nu'$

得：$-2m_eE_1 = -\frac{1}{c^2}4E_1'^2$

$\therefore E_1 = \frac{2E_1'^2}{m_ec^2} = 1.9\times10^4 GeV$

21. 电荷为 e，质量为 m 的粒子在均匀电场 $\vec E$ 内运动，初速度为零，试确定粒子的运动轨迹与时间的关系，并研究非相对论情况。

解：1）相对论情况

力学方程为 $\frac{d\vec P}{dt} = e\vec E, \vec P = \frac{m\vec v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

分量式为 $\frac{dP_x}{dt} = 0, \frac{dP_y}{dt} = 0, \frac{dP_z}{dt} = eE$

由题意，$P_x = P_y = 0$，当 $t = 0$ 时，$P_z = 0$，$\therefore P_z = eEt$

粒子能量 $w = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{P^2c^2 + m^2c^4} = \sqrt{P_z^2c^2 + m^2c^4} = \sqrt{e^2E^2c^2 + m^2c^4}$

由 $\frac{dP_z}{dt} = \frac{P_z}{m/\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{P_z}{w/c^2} = \frac{eEc^2t}{\sqrt{e^2E^2c^2 + m^2c^4}}$

设粒子从 z=0 运动，则：

$$z = \int_0^t\frac{eEc^2tdt}{\sqrt{e^2E^2c^2 + m^2c^4}} = \frac{1}{eE}[\sqrt{e^2E^2c^2 + m^2c^4} - mc^2]$$

$$= \frac{mc^2}{eE}[\sqrt{1 + (\frac{eE}{mc}t)^2} - 1]$$

2）非相对论情况

力学方程 $e\vec E = \frac{d\vec P}{dt}, \vec P = m\vec v$

分量式 $\frac{dP_x}{dt} = 0, \frac{dP_y}{dt} = 0, \frac{dP_z}{dt} = eE$

由题意，$P_x = P_y = 0$，当 $t = 0$ 时，$P_z = 0$，$\therefore P_z = eEt$

由 $\frac{dP_z}{dt} = \frac{P_z}{m} = \frac{eEt}{m}$，设粒子从 z=0 运动，则：$z = \frac{eE}{m}\int_0^t tdt = \frac{eE}{2m}t^2$

22.利用洛仑兹变换，试确定粒子在互相垂直的均匀电场 $E\vec e_x$ 和磁场 $B\vec e_y\ (E > cB)$ 内的运动规律，设粒子初速度为零。

解：设Σ'系 $o' - x'y'z'$ 以 $\vec u$ 沿 z 轴运动，t=0 时，$o', o$ 重合。

$\because E > cB$

$\therefore$ 当 $\vec u = \frac{c^2}{E^2}\vec E\times\vec B$ 时，在Σ'内 $\vec B' = 0$

此时，$\vec E'_{平行} = \vec E_{平行} = 0$，$\vec E_\perp' = \gamma_u(\vec E + \vec u\times\vec B)_\perp = \gamma_u(\vec E + \vec u\times\vec B)$

$$= \gamma_u(\vec E - c^2\frac{B^2}{E^2}\vec E) = \gamma_u\vec E(1-\frac{u^2}{c^2}) = \frac{\vec E}{\gamma_u}$$

即：$\vec E' = \frac{\vec E}{\gamma_u}$

由 21 题结果，粒子 e 在Σ'系中的运动轨迹与时间的关系为：

$$x' = \frac{mc^2}{eE'}[\sqrt{1 + (\frac{eE'}{mc}t')^2} - 1], y' = 0, z' = 0$$

由洛仑兹变换 $\begin{pmatrix}z\\ x\\ y\\ ict\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_u&0&0&-i\beta\gamma_u\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ i\beta\gamma_u&0&0&\gamma_u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z'\\ x'\\ y'\\ ict'\end{pmatrix}$ 得：

$$\begin{cases}z = \gamma_u z' + \beta c\gamma_u t' = ut\\ x = x'\\ y = y' = 0\\ t = \gamma_u t'\end{cases}$$

∴e 在互相垂直得均匀电磁场中的运动规律为

$$x = \frac{mc^2\gamma_u}{eE}[\sqrt{1 + (\frac{eE}{\gamma_u^2 mc}t)^2} - 1], y = 0, z = ut,\ 其中\ u = \frac{c^2}{E}B, \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

23. 已知 t=0 时点电荷 $q_1$ 位于原点，$q_2$ 静止于 y 轴 $(0, y_0, 0)$ 上，$q_1$ 以速度 v 沿 x 轴匀速运动，试分别求出 $q_1$，$q_2$ 各自所受的力，如何解释两力不是等值反向？

解：选参考系Σ'固定在粒子 $q_1$ 上，在Σ'系观察时，粒子静止，只有静电场，电磁场强度为 $\vec E_1' = \frac{e\vec x'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \vec B_1' = 0$

在Σ系中观察，$q_1$ 以速度 $\vec v$ 沿 x 轴方向运动，由速度变换关系得：

$$E_{1x} = \frac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3},\quad E_{1y} = \gamma\frac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3},\quad E_{1z} = \gamma\frac{ez'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}$$

$$B_{1x} = 0,\quad B_{1y} = -\gamma\frac{v}{c^2}\frac{ez'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3},\quad B_{1z} = \gamma\frac{v}{c^2}\frac{ey'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}$$

$$\therefore \vec E_1 = (1-\gamma^2)\frac{e\vec x}{4\pi\varepsilon_0[(1-\beta^2)r^2 + (\frac{\vec v\cdot\vec x}{c})^2]^{\frac{3}{2}}},\quad \vec B_1 = \frac{\vec v\times\vec E_1}{c}$$

在 $q_2$ 处，$\vec E_1 = \frac{q_1\vec e_y}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}y_0^2}, \vec B_1 = \frac{\vec v\times\vec E_1}{c^2}$

$q_2$ 受力 $\vec F_{12} = q_2(\vec E_1 + \vec 0\times\vec B_1) = \frac{q_1q_2\vec e_y}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}y_0^2}$

同理，$q_2$ 产生场 $\vec E_2 = \frac{q_2\vec x}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \vec B_2 = 0$

在 $q_1$ 处，$\vec E_2 = -\frac{q_2\vec e_y}{4\pi\varepsilon_0 y_0^2}, \vec B_2 = 0$

$\therefore q_1$ 受力 $\vec F_{21} = q_1(\vec E_2 + \vec v\times\vec B) = -\frac{q_1q_2\vec e_y}{4\pi\varepsilon_0 y_0^2}$

24. 试比较下列两种情况下两个电荷的相互作用力：（1）两个静止电荷 q 位于 y 轴上相距为 l；（2）两个电荷都以相同的速度 $\vec v$ 平行于 x 轴匀速运动。

解：（1）此属于静电场情况，两电荷之间的静电库仑为

$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$，为排斥力。

由上题求得，原点处 q 在 y=l 处产生的电磁场为

$$\vec E = \frac{q\vec e_y}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}l^2},\quad \vec B = \frac{\vec v\times\vec E}{c^2} = \frac{1}{c^2}vE\vec e_z$$

y=l 处 q 受洛仑兹力为

$$\vec F = q(\vec E + \vec v\times\vec B) = q\vec E + \frac{q}{c^2}vE\vec v\times\vec e_z = q(1-\beta^2)\vec E = \frac{q^2\sqrt{1-\beta^2}\vec e_y}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

$$|\vec F| < \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

25. 频率为ω的光子（能量为 $\hbar\omega$，动量为 $\hbar\vec k$）碰在静止的电子上，试证明：

（1）电子不可能吸收光子，否则能量和动量守恒定律不能满足；

（2）电子可以散射这个光子，散射后光子频率ω'比散射前光子频率ω小（不同于经典理论中散射光频率不变的结论）

证明：1）设电子可以吸收这个光子，反应后它的动量为 $\vec p$，反应前光子能量 $\hbar\omega$，电子能量 $m_ec^2$，反应后能量为 $\sqrt{m_e^2c^4 + p^2c^2}$

由动量守恒 $\hbar\vec k = \vec p$  $\therefore \hbar k = p$  （1）

能量守恒 $\hbar\omega + m_ec^2 = \sqrt{m_e^2c^4 + p^2c^2}$  （2）

（1）式代入（2）式得：

$$\hbar\omega + m_ec^2 = \sqrt{m_e^2c^4 + (\hbar kc)^2} = \sqrt{m_e^2c^4 + (\hbar\omega)^2}$$

$\therefore 2\hbar\omega m_ec^2 = 0$，显然此式不成立，所以电子不可能吸收光子，否则能量和动量守恒定律不能满足

2) 电子可散射这个光子，散射后的频率为ω'，电子的动量变为 $\vec p$

由动量守恒定律得 $\hbar\vec k = \hbar\vec k' + \vec p$

$\therefore p^2 = (\hbar k)^2 + (\hbar k')^2 - 2\hbar^2kk'\cos\theta$

由能量守恒定律得 $\hbar\omega + m_ec^2 = \sqrt{m_e^2c^4 + p^2c^2} + \hbar\omega'$

$\therefore \hbar(\omega - \omega') = \sqrt{m_e^2c^4 + p^2c^2} - m_ec^2$

$\because p > 0$  $\therefore \hbar(\omega - \omega') > 0$，即 $\omega > \omega'$，散射后频率降低。

26. 动量为 $\hbar\vec k$，能量为 $\hbar\omega$ 的光子撞在静止的电子上，散射到与入射方向夹角为θ的方向上，证明散射光子的频率变换量为 $\omega - \omega' = \frac{2\hbar}{m_0c^2}\omega\omega'\sin^2\frac{\theta}{2}$。亦即散射光波长 $\lambda' = \lambda + \frac{4\pi\hbar}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}$，λ为散射前光子波长 $2\pi/k$，$m_0$ 为电子的静止质量。

解：设碰撞后，光子动量变为 $\hbar\vec k'$，能量变为 $\hbar\omega'$，电子碰撞后动量为 $\vec p$，能量为 $w = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$，四维动量 $p_\mu = (\vec p, \frac{i}{c}\omega)$

由碰撞前后动量守恒得 $p_{\mu1} = p_{\mu2}$

$$\begin{cases}\hbar\vec k = \hbar\vec k' + \vec p, (1)\\ \hbar\omega + m_0c^2 = \hbar\omega' + \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}, (2)\end{cases}$$

对（1）式，由余弦定理，$p^2 = (\hbar k)^2 + (\hbar k')^2 - 2\hbar^2kk'\cos\theta$

$$= \frac{\hbar\omega^2}{c^2} + \frac{\hbar^2\omega^2}{c^2} - 2\hbar^2\frac{\omega\omega'}{c^2}\cos\theta$$

代入（2）式得 $\hbar\omega - \hbar\omega' = \sqrt{(\hbar\omega)^2 + (\hbar\omega')^2 - 2\hbar^2\omega\omega'\cos\theta + m_0^2c^4} - m_0c^2$

平方整理得：

$$\omega - \omega' = \frac{2\hbar\omega\omega'}{m_0c^2}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

代入 $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \omega' = \frac{2\pi c}{\lambda'}$ 得 $\lambda' = \lambda + \frac{4\pi\hbar}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}$

27. 一个总质量为 $M_0$ 的激发原子，对所选定的坐标系静止，它在跃迁到能量比之低 $\Delta w$ 的基态时，发射一个光子（能量为 $\hbar\omega$，动量为 $\hbar\vec k$），同时受到光子的反冲，因此光子的频率不能正好是 $\nu = \frac{\Delta w}{h}$，而要略小一些，证明这个频率 $\nu = \frac{\Delta w}{h}(1 - \frac{\Delta w}{2M_0c^2})$

证明：设基态原子静止质量为 $M_1$，跃迁后基态原子反冲动量为 $\vec p$

跃迁前四维动量为 $p_{\mu1} = (0, M_0c^2)$

跃迁后四维动量为 $p_{\mu2} = (\vec p + \hbar\vec k, \hbar\omega + \sqrt{p^2c^2 + M_1^2c^4})$

由四维动量守恒：$\begin{cases}\vec p + \hbar\vec k = 0, (1)\\ M_0c^2 = \hbar\omega + \sqrt{p^2c^2 + M_1^2c^4}, (2)\end{cases}$

由（1）得 $p = \hbar k = \hbar\frac{\omega}{c}$  $\therefore p^2c^2 = \hbar^2\omega^2$  （3）

又 $M_0c^2 - M_1c^2 = \Delta w$  $\therefore M_1^2c^4 = (M_0c^2 - \Delta w)^2$  （4）

（3）(4)代入（2）得 $(M_0c^2 - \hbar\omega)^2 = \hbar^2\omega^2 + (M_0c^2 - \Delta w)^2$

整理得 $2M_0c^2\hbar\omega = 2M_0c^2h\nu = 2M_0c^2\Delta w - \Delta w^2$

$\therefore$ 光子频率 $\nu = \frac{\Delta w}{h}(1 - \frac{\Delta w}{2M_0c^2})$

28. 一个处于基态的原子，吸收能量为 $h\nu$ 的光子跃迁到激发态，基态能量比激发态能量低 $\Delta w$，求光子的频率。

解：设原子基态静止质量为 $M_1$，激发态静止质量为 $M_0$，光子能量为 $h\nu = \hbar\omega$，动量为 $\hbar\vec k$，原子吸收光子后动量为 $\vec p$，设原子基态时静止。

吸收前四维动量为 $p_{\mu1} = (\hbar\vec k, M_1c^2 + \hbar\omega)$

吸收后四维动量为 $p_{\mu2} = (\vec p, \sqrt{p^2c^2 + M_0^2c^4})$

由四维动量守恒：$\begin{cases}\vec p = \hbar\vec k, (1)\\ M_1c^2 + \hbar\omega = \sqrt{p^2c^2 + M_1^2c^4}, (2)\end{cases}$

由（1）得 $p = \hbar k = \hbar\frac{\omega}{c}$，得 $p^2c^2 = \hbar^2\omega^2$  （3）

又 $M_0c^2 - M_1c^2 = \Delta w$  得 $M_0^2c^4 = (M_1c^2 + \Delta w)^2$  （4）

（3）(4)代入（2）得 $(M_1c^2 + \hbar\omega)^2 = \hbar^2\omega^2 + (M_1c^2 + \Delta w)^2$

整理得 $2M_1c^2\hbar\omega = 2M_1c^2h\nu = 2M_1c^2\Delta w + \Delta w^2$

$\therefore$ 光子频率 $\nu = \frac{\Delta w}{h}(1 + \frac{\Delta w}{2M_1c^2})$