Linear Algebra

Lime

2018 年 11 月 23 日

1 Words

subtract	减
parenthesis/ parentheses	括号
reverse	反向
pivot	主元
span	张成
basis	基
dimension	维数
entry	项
components	分量
elimination	消元
principal diagonal	主对角线
inverse/ invertible	逆
the Identity	单位矩阵
singular	奇异的，无逆矩阵
determinant	行列式
augmented matrix	增广矩阵
reduced row echelon	简化阶梯形矩阵
transpose	转置
colinear	共线
dependent	线性相关
orthogonal	正交
symmetric	对称
equivalent	等价

construct	求出解
the nullspace	零空间，齐次解构成的空间
factorization-	
of a matrix	矩阵分解
permutation	置换
the origin	原点
pivot column	主列
sovlable	有解
full rank	满秩
Algebra cofactor	代数余子式
general solution	通解
particular solution	特解
orthogonal basis	正交基
orthonormal basis	标准正交基

forall	$\forall$
there exists	$\exists$
perpendicular	$\perp$

I	Identity, 单位矩阵
F	free, 自由变量解矩阵
L	lower triangular, 下三角矩阵
D	diagonal, 对角矩阵
U/R	upper triangular，上三角矩阵
E	elimination, 消元矩阵
P	permutation, 置换矩阵
P	projection, 投影矩阵
R	rectangualr, 长方阵
Q	orthogonal, 正交矩阵
N	nullspace, 零空间矩阵, (Ax=0 的通解) $\begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$
R	reff form, 简化阶梯形矩阵 $\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2 Matrix

- 矩阵的逆：

1. 用可逆矩阵与任意 A 相乘，不改变 A 的秩。
2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
3. 上三角阵的逆仍为上三角阵。
4. 任何方阵可以表示为上三角阵和下三角阵的乘积。

$$\begin{bmatrix} a\, b \\ c\, d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a\, b\, c \\ d\, e\, f \\ g\, h\, i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} ei-hf & -(bi-hc) & bf-ce \\ fg-id & -(cg-ia) & cd-af \\ dh-ge & -(ah-gb) & ae-bd \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1\, 0 \\ c\, 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1\, 0\, 0 \\ d\, 1\, 0 \\ g\, h\, 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -d & 1 & 0 \\ dh-g & -h & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_1\, A_3 \\ 0\ \ A_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_3A_2^{-1} \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}$$

- 对于正交矩阵（例如置换矩阵 P）：

$$P^{-1} = \frac{P^T}{|P|}$$

- Schwavz inequality:

$$|u \cdot v| \leq ||u|| \cdot ||v||$$

- $x_{complete} = x_{particular} + cx_{special}$，解空间由零空间 $cx_{special}$ 平移 $x_{particular}$ 后得到。

- 对线性无关的方程组/矩阵 $A_{j\times r} = \boldsymbol{a}_{j1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{jr}$：

$$\begin{aligned} &\dim\langle \boldsymbol{a}_{j1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{jr} \rangle \\ =&\text{rank}(A_{j\times r}) \\ =&\text{最大非零子式阶数} R(A_{j\times r}) \end{aligned}$$

- 想求零空间（x 的解），只需要把 A 变为由 I 和自由列组成的最简行阶梯形式，然后特解会由 I 和-F 构成。

- AB 可由 A, B 线性表出，且
  $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$

- Sylvester 秩不等式：设 $A_{s\times n}$，$B_{n\times m}$, 则

$$\mathrm{rank}(AB) \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - n$$

- 分块矩阵

  (i) 初等行变换 - 左乘 P: $\left(\begin{smallmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{smallmatrix}\right) \Longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} A_1 & A_2 \\ PA_1+A_3 & PA_2+A_4 \end{smallmatrix}\right)$

  (ii) 初等列变换 - 右乘 P: $\left(\begin{smallmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{smallmatrix}\right) \Longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} A_1 & A_1P+A_2 \\ A_3 & A_3P+A_4 \end{smallmatrix}\right)$

- 对矩阵 A, B, C，有：

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$$

3 Determinant

- $|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$

- 逆矩阵公式

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}C^T$$

- 范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq j<i\leq n}(a_i - a_j)$$

- $|AB| = |A| \cdot |B| = |BA|$

- Binet-Cauchy 公式：设 $A = (a_{ij})_{s\times n}, B = (b_{ij})_{n\times s}$。

  1. $s > n$, 那么 $|AB| = 0$

  2. $s \leq n$，那么

$$|AB| = \sum_{1\leq v_1<\cdots<v_s\leq n} A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & s \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_s \end{smallmatrix}\right) \cdot B\left(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_s \\ 1 & 2 & \cdots & s \end{smallmatrix}\right)$$

- Cramer's rule

  求解 $Ax = b$ 时，用 b 代替 A 的第 i 列得到 B_i，则

$$x_i = \frac{|B_i|}{|A|}$$

4 Vector Space K^n

- 替换定理：
  如果 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{c} = b_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + b_s\boldsymbol{a}_s$，使用 $\boldsymbol{c}$ 替换 $\boldsymbol{a}_i$，那么 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 也线性无关。
  $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性无关 $\iff$ $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s\} = s$

- 设 n 元齐次线性方程组解空间为 W，则：
$$\dim\ W = n - \operatorname{rank}(A)$$

- 若 n 元非齐次方程式有解，称其解集为 U，其导出组的解集为 W，则：
$$U = \{\boldsymbol{\gamma}_0 + \boldsymbol{\eta} | \boldsymbol{\eta} \in W\} = \boldsymbol{\gamma}_0 + \boldsymbol{\eta}$$
  $\boldsymbol{\gamma}_0$ 称为 **特解**,$\boldsymbol{\gamma}_0 + \boldsymbol{\eta}$ 称为一个 W 型的 **线性流形**

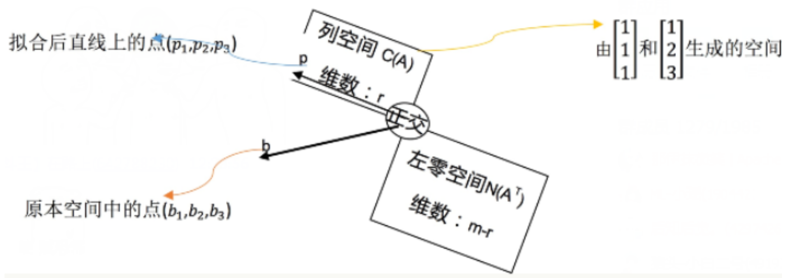
- 子空间维数公式
$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

- 矩阵的秩在乘以一个非奇异矩阵时是不变的 ($\dim N(A) = 0 \implies \operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(B)$)，乘以奇异矩阵可以改变秩，下面的公式准确地显示了发生了多少变化：
  If A is $m \times n$ and B is $n \times p$, then
$$\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(B) - \dim N(A) \cap R(B)$$
  求 $N(A) \cap R(B)$ 的方法：
$$\begin{aligned} &\text{Find a basis } \{x_1, x_2, \ldots, x_r\} \text{ for } R(B) \\ &\text{Set } X_{n\times r} = (x_1\,|x_2|\cdots|x_r) \\ &\text{Find a basis } \{v_1, v_2, \ldots, v_s\} \text{ for } N(AX) \\ \mathcal{B} = &\{Xv_1, Xv_2, \ldots, Xv_s\} \text{ is a basis for } N(A) \cap R(B) \end{aligned}$$
  当 $\dim N(A) \cap R(B)$ 不易求出，仍有以下推论：
$$\operatorname{rank}(\mathbf{AB}) \le \min\{\operatorname{rank}(\mathbf{A}), \operatorname{rank}(\mathbf{B})\}$$
$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) + \operatorname{rank}(\mathbf{B}) - n \le rank(\mathbf{AB})$$

5 正交矩阵

- 矢量 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 标准正交 (orthonormal) 如果
$$q_i^T q_j = \delta_{i,j}$$

- 行空间与零空间正交，列空间与左零空间正交



- 对于标准正交矩阵 A，设 A 的行向量为 $\boldsymbol{\gamma}_n$, 列向量为 $\boldsymbol{\alpha}_n$, 有：

  (i) $AA^T = I$

  (ii) $A^{-1} = A^T$

  (iii) $\|Qx\|^2 = \|x\|^2$

  (iv) $|A| = \pm 1$

  (v) $\boldsymbol{\gamma}_i \boldsymbol{\gamma}_j^T = \delta_{i,j}$

  (vi) $\boldsymbol{\alpha}_i \boldsymbol{\alpha}_j^T = \delta_{i,j}$

  (vii) A, B 均正交, 则 AB 正交

- 投影矩阵：

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T$$

- 施密特正交化过程：设线性无关组 $\boldsymbol{a}_s$, 令

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1 &= \boldsymbol{a}_1 \\
\boldsymbol{b}_2 &= \boldsymbol{a}_2 - \tfrac{\boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_1} \boldsymbol{b}_1 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{b}_s &= \boldsymbol{a}_s - \textstyle\sum_{j=1}^{s-1} \tfrac{\boldsymbol{a}_s \boldsymbol{b}_j}{\boldsymbol{b}_j \boldsymbol{b}_j} \boldsymbol{b}_j
\end{aligned}$$

  则可得到正交组 $\boldsymbol{b}_s$

- 马尔科夫矩阵

  1 每个元素非负

  2 每列元素和为 1

  3 特征值的模均小于 1

- A 的 QR 分解

  Every matrix $A_{m \times n}$ with linearly independent columns can be uniquely factored as $A = QR$

  $R = Q^T A$ is upper triangular because later q_i's are orthogonal to earlier a's. The lengths of A, B and C are on the diagonals of R.

  可用 QR 分解解决最小二乘问题

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T \mathbf{b}$$

  该方法不需要求 $A^T A$，但当需要求解 $A^T A$ 时，只需利用 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$ 计算即可 (Cholesky factorization)。

6 最小二乘法

- example 1

  拟合 n 个点 (a_n, b_n) 到直线 $y = k\widehat{x} + b$ 上：

  设 $\widehat{x} = (k, b)^T$

  则

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} = ([a_n], [1])$$

$$b = (b_1, \cdots, b_n)^T$$

  此时有

$$A^T A\widehat{x} = A^T b$$

  b 在 A 的列向量的投影：

$$p = A\widehat{x}$$

- example 2

  将矢量 b 投影到 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 张成的空间中，设投影得到的向量为 c，求 c：

  也即，我们考虑存在一个 $c = \widehat{x}_1\mathbf{a}_1 + \widehat{x}_2\mathbf{a}_2 + \widehat{x_n}\mathbf{a_3}$ 最接近 $\boldsymbol{b}$，此时 c 即为 b 的投影.

  设 $A = (a_1, a_2, a_3)\,, c = Ax = \widehat{x}_1\mathbf{a}_1 + \widehat{x}_2\mathbf{a}_2 + \widehat{x_n}\mathbf{a_3}$，此时 $\widehat{x}$ 为 c 在基 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 下的坐标，那么 a_1, a_2, a_3 的线性组合可以被写作 $A\widehat{x}$。

  则

$$Ax = c = Pb = A(A^T A)^{-1} A^T b$$

$$A^T Ax = A^T b$$

  注意到，我们所需的 A 矩阵即为以投影空间为列空间的矩阵，所需的 b 则为需要投影的向量，c 即为目标向量。

  从 P 的计算式可以知道：P 为对称矩阵。

- Proof: $x \in N(A) \iff x \in N(A^T A)$

  1. Suppose $\mathbf{x} \in N(A)$.Then$\mathbf{x} \in N\left(A^T A\right)$. This is because $A\mathbf{x} = 0 \Rightarrow A^T A\mathbf{x} = 0$

  2. Conversely, let $x \in N\left(A^T A\right)$. Then $A^T Ax = 0 \implies x^T A^T Ax = 0 \implies \|Ax\|^2 = 0$. since the length of Ax is zero, we have $Ax = 0$. Therefore $x \in N(A)$.

- 特别地，当 $A = Q$

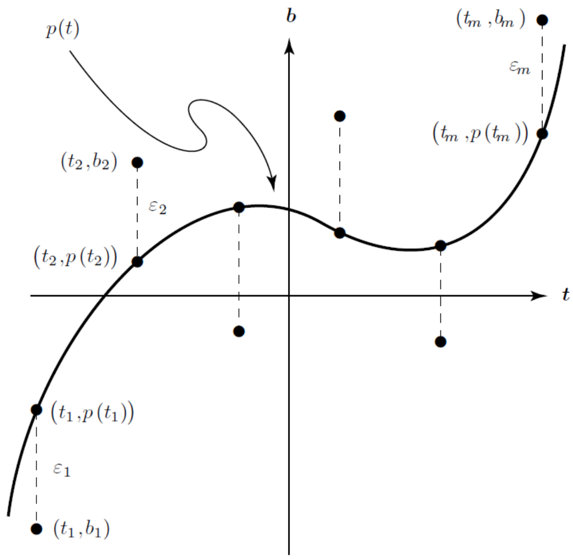
$$p = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T b \implies p = QQ^T b$$

- 一般地，当拟合函数非线性时，例如，以 t 为横坐标，b 为纵坐标，

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_{n-1} t^{n-1}$$

在平面上有 m 个点：

$$\mathcal{D} = \{(t_1, b_1), \quad (t_2, b_2), \ldots, (t_m, b_m)\}$$



则取

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

7 Norms

- P-Norms

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad (p > 1)$$