第四章 插值与逼近

1. 当$x=1,-1,2$时，$f(x)=0,-3,4$，求$f(x)$的二次插值多项式.

2. 取节点$x_0=0, x_1=0.5, x_2=1$，估计函数$f(x)=e^{-x}$ 在区间[0, 1]上的二次插值项式的误差.

3. 根据下列数表，求 **Newton** 插值多项式.

x_i	1	1.5	2	2.5	3	3.5
$f(x_i)$	-1	0.5	2.5	5.0	8.0	11.5

4. 若$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$有 n 个不同实根$x_1,x_2,\cdots,x_n$，证明

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0, & 0\le k\le n-2,\\ a_n^{-1}, & k=n-1.\end{cases}$$

5. 函数$y=f(x)$在节点处的函数值和导数值如下表所示

x	-1	0	1
$y=f(x)$	1	0	-1
$y'=f'(x)$	0		

（1）求满足上述插值条件的插值多项式$P(x)$；（2）若$\left|f^{(4)}(x)\right|\le 1$，估计用$P(0.5)$近似$f(0.5)$的绝对误差$\left|f(0.5)-P(0.5)\right|$.

6. 已知函数$f(x)$如下数据：$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{4}, f(2)=3, f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$.（1）求满足插值条件：$P\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right), P\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right), P(2)=f(2), P'\left(\dfrac{1}{2}\right)=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 的插值多项式$P(x)$；（2）若$f(x)$不是二次函数，且在$\left[-\dfrac{1}{2},2\right]$内满足$\left|f^{(4)}(x)\right|<1$，证明：$\left|f(1)\right|<\dfrac{1}{64}$.

7. （1）根据所学知识，试给出四次样条函数的定义；（2）设函数

$$S(x)=\begin{cases}x^4+2x+1 & 0\le x\le 1\\ (x-1)^4+a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d & 1\le x\le 3\end{cases}$$

是节点$x_0=0, x_1=1, x_2=3$上的四次样条函数，求常数a,b,c,d的值.

8. 以$-1,0,1$为节点的一次样条函数类S_1定义如下：

$$S_1=\{S(x)\,|\,S(x)\in C[-1,1], S(x)\text{在}[-1,0]\text{和}[0,1]\text{上为线性函数}\},$$

设 $f(x)=e^x$.（1）求 $S(x)\in S_1$，满足：$S(-1)=f(-1),\ S(0)=f(0),\ S(1)=f(1)$；

（2）求 $f(x)$ 在 S_1 中的最佳平方逼近，即，求 $S^*(x)\in S_1$，使得

$$\left\|f(x)-S^*(x)\right\|_2^2=\min_{S(x)\in S_1}\left\|f(x)-S(x)\right\|_2^2.$$

9. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $[0,1]$ 上的最佳平方逼近多项式 $P(x)=a+bx^2$.

10. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$. 求 $x^*\in\mathrm{R}^2$ 使得

$$\left\|Ax^*-b\right\|_2=\min_{x\in\mathrm{R}^2}\left\|Ax-b\right\|_2.$$