CUPT 理论分析-Slinky 弹簧

Lime

2018 年 12 月 22 日

1 弹簧属性

1.1 概况

波速

$$a = \sqrt{(kx^2)/m}$$

固有频率

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

忽略完全收缩长度，则竖直时受重力后长度为

$$L = \frac{W}{2k}$$

质量分布

$$p(n) = L(n-1)^2$$

其中 $n =$ 该点上方质量/总质量 $\in [0,1]$，$p(n)$ 给出了 n 从 slinky 底部向上的位置。

1.2 Slinky 弹簧

由于弹簧太软只能拉伸不能压缩, 弹簧自由塌缩的速度快于弹性波波速时 (自由塌缩指的是始终满足胡克定律的弹簧自由振动塌缩的速度), 会出现波源运动速度比波速快的现象, 因此弹簧中会出现冲击波（激波）. 而冲击波传播到末端的时间要比自由弹性波短很多.

1.3 软度

其轴向刚度 k=0.003N/mm（compared with 1-200N/mm for others）

https://pic2.zhimg.com/v2-f46e972de8f2df71ab6753e39a60b819_b.gif

2 Euler-Bernoulli beam theory

Euler-Bernoulli 梁理论（也称为工程梁理论或经典梁理论）[1] 是线性弹性理论的简化，它提供了一种计算梁的承载和挠度特性的方法。它涵盖了仅受到横向载荷的梁的小挠度的情况。
对于动态梁，其上某一质点：

$$T = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2$$

$$V_{in} = \frac{1}{2}EI\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}\right)^2$$

$$V_{out} = -q\left(x\right)\omega\left(x,t\right)$$

有拉格朗日方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = -\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q\left(x\right)$$

当梁均匀，E, I 独立，

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q$$

其中，
曲线 $\omega\left(x\right)$ 描述了梁在 z 方向上在某个位置 x 的偏转 (回忆一下，梁被建模为一维对象)。q 是一个分布式负载，换句话说，一个单位长度的力 (类似于压力是一个单位面积的力); 它可能是 x,ω 或其他变量的函数。
E 为弹性模量，I 是梁截面面积的二阶矩。I 必须根据穿过截面质心并垂直于所应用的加载的轴来计算。式中，对于轴向为 x，荷载沿 z 方向的梁，其截面在 yz 平面上，相应的面积二阶矩为

$$I = \iint z^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

通常，乘积 EI(称为抗弯刚度) 是一个常数，所以

$$EI\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = q\left(x\right).$$

该方程描述了均匀静梁的挠度，

3 建模

3.1 数学模型

压电换能器，测量脉冲响应实验显示，其色散为低频比高频传播慢。
http://dafx10.iem.at/papers/ParkerPenttinenBilbaoAbel_DAFx10_P80.pdf
使用无量纲形式伯努利方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\kappa^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \left[-2\sigma_0\frac{\partial u}{\partial t} + 2\sigma_1\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}\right]$$

其中 u 为横向位移，x 为沿弹簧轴方向的位置，t 为时间，κ 为与密度，杨氏模量，长度有关的无量纲常数（需要用实验确定大小）。括号内为对理想杆的修正，σ 控制损失特征 [S. Bilbao，Numerical Sound Synthesis, John Wiley and Sons,2009]

3.2 实验

现假设脉冲从 $x=0$ 传导至 $x=1$，考虑理想杆模型 $(\sigma_0=\sigma_1=0)$，有特定频率

$$T_D=\frac{1}{2\sqrt{2\pi\kappa f}}$$

表达式给出了色散下第一个到达的波，通过该式可求得 κ（求出后与实验对照）。
其中需要通过 FIR 带通滤波测量频率, 且两次测到该频率的时间间隔给出该波传播花费的时间。

4 MORE

4.1 MORE1: 有限差分

有限差分可以对微分方程离散化，进行离散逼近。

4.2 MORE2：波导

4.3 MORE3: 螺旋运动矩阵

4.4 MORE4: 驻波

推导声波纵波与弹簧谐波关系-利用驻波。

5 购买

购买,21.56 元：
https://item.taobao.com/item.htm?spm=a230r.1.14.6.71d846cdb52CTO&id=560671174453&ns=1&abbucket=3#detail

6 Ref

https://www.guokr.com/question/435419/
https://www.zhihu.com/question/45066646
https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Bernoulli_beam_theory