

数值分析第四次作业

肖涵薄 31360164

2019 年 3 月 27 日

计算题目部分

1

$$\begin{aligned}l_2 &= \frac{x-1}{-2} \frac{x-2}{-3} = \frac{(x-1)(x-2)}{6} \\l_3 &= \frac{x-1}{1} \frac{x+1}{3} = \frac{(x-1)(x+1)}{3} \\ \Rightarrow L &= -\frac{(x-1)(x-2)}{2} + \frac{4(x-1)(x+1)}{3}\end{aligned}$$

2

$e^0 = 1, \quad e^{0.5} = 1.65, \quad e^1 = 1.71828$. $R_2(x) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \omega_3(x) \leq \frac{e}{6} \omega_3(x)$. 取 $x = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ 时 $\omega_3(x)$ 最大为 0.48. 则 $R_2(x) < 0.22$

数值实验部分

1

需求解的方程组为

$$L_h u^h = h^2 f^h, \quad h = 0.1$$

此时 $N = 1/h = 10$. 取初始 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

	是否收敛	迭代次数	与精确解误差 (两者之差的无穷范数)
Jacobi	是	217	0.0082
Seidel	是	15	0.9759
SOR 1.2	是	25	0.9759
SOR 1.3	是	32	0.9759
SOR 1.9	是	309	0.9759
SOR 0.9	是	12	0.9759

2

N	h	迭代次数	与真值误差
3	0.3333333333333333	20	0.0724662490584273
4	0.2500000000000000	38	0.0530272790515429
5	0.2000000000000000	59	0.0303503805496695
6	0.1666666666666667	84	0.0231571309052523
7	0.142857142857143	111	0.0161068074513148
8	0.1250000000000000	144	0.0129394175506303
9	0.1111111111111111	178	0.00989279695986134

3

第一题中, 所有迭代方法均收敛, Jacobi 迭代法收敛较慢, 这是因为 Jacobi 矩阵谱半径 $\rho_J = 0.9511$, 接近 1. 而 Seidel 方法的谱半径 $\rho_S = 0.5$. 收敛速度之比为 $\ln(0.9511)/\ln(0.5) = 0.07 \approx$

15/217. 在 SOR 方法中, $\omega = 0.9$ 处收敛最快.

第二题中, 所取的几种情况 Jacobi 迭代法均收敛, 且随着 h 减小迭代次数增加. 这是因为当 $h = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \approx 0.45$ 时谱半径为 0, 收敛的最快, 随着 h 减小, 谱半径增大, 收敛变慢, 但谱半径总是小于 1 的, 因此总是收敛.