方程

真空麦克斯韦方程

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \oint_S \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}s &= \frac{Q}{\epsilon_0}\\
\nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0 & \oint_S \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}s &= 0\\
\nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} & \oint_L \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} &= -\frac{\mathrm{d}\varphi_B}{\mathrm{d}t}\\
\nabla\times\boldsymbol{B} &= \mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} & \oint_L \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \mu_0 I+\mu_0\epsilon_0\frac{\mathrm{d}\varphi_E}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

物质内麦克斯韦方程

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \rho_f & \oint_S \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}s &= Q_f\\
\nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0 & \oint_S \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}s &= 0\\
\nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} & \oint_L \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} &= -\frac{\mathrm{d}\varphi_B}{\mathrm{d}t}\\
\nabla\times\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J}_f+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} & \oint_L \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} &= I_f+\frac{\mathrm{d}\varphi_D}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

镜像法

距半径为 R_0 的球的球心距离为 a 处有一点电荷 q, 则镜像电荷 $-\frac{R_0}{a}q$ 距球心 $\frac{R_0^2}{a}$ 远, 且在靠近 q 方向.

球谐函数解拉普拉斯方程

$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n r^n+\frac{b_n}{r^{n+1}})P_n(\cos\theta)$

$$
\begin{cases}
P_0(\cos\theta) = 1\\
P_1(cos\theta) = \cos\theta\\
P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)
\end{cases}
$$

格林函数法

$$\nabla^2 G(x,x') = -\frac{1}{\varepsilon}\delta^3(x-x')$$

(1) 无界空间中 $G(x,x')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|r-r'|}$

(2) 上半平面中 $G(x,x')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{|r-r'|}-\frac{1}{|r+r'|})$

(3) 球外空间 (R' 为电荷位置, α 为场点与电荷位置夹角,R_0 为球半径). $G(x,x')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R^2+R'^2-2RR'\cos\alpha}-\frac{1}{(\frac{RR'}{R_0})^2+R_0^2-2RR'\cos\alpha})$

给定 $\rho(x')$, 第一类边值问题的解为 (G 交换了 x,x'): $\varphi(x)=\int_V G(x',x)\rho(x')\,\mathrm{d}V'+\varepsilon_0\oint_S(G(x',x)\frac{\partial\varphi}{\partial n'}-\varphi(x')\frac{\partial G(x',x)}{\partial n'}\,\mathrm{d}S')$

若给定边界 φ, 则应使 G 在边界为 0, 若给定边界 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, 则应使 $\frac{\partial G}{\partial n}$ 在边界为 0.

泊松方程 $\nabla^2\Phi=\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$

电多极矩

$\varphi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{q}{R}+\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}{R^3}+\frac{1}{6}\sum_{i,j}\mathfrak{D}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{R}+\cdots)$

$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5}-\frac{\boldsymbol{p}}{R^3})$

$\boldsymbol{p}=\iiint_V\rho(x')x'\,\mathrm{d}^3x'$

$\mathfrak{D}=\iiint_V 3\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3x'$

保角变换 (z_1 为原来的点, a 为夹角出现的位置的横坐标, α 为边界夹角).

$\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}z_2}=C_1\prod_{i=1}^{n}(z_2-a_i)^{\frac{\alpha_i}{\pi}-1}$

面电荷		电场		磁场	
$\sigma_{polar}=$	P	$\rho_p=$	$-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$	$\rho_M=$	$-\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{M}$
$\sigma_{free}=$	D	$\rho_f=$	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}$	$\rho_f=$	0
$\sigma_{total}=$	$\epsilon_0 E$	$\rho_{tot}=$	$\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}$	$\rho_{tot}=$	$\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{H}$
		$\varepsilon_0 E=$	$D-P$	$B=$	$\mu_0(H+M)$

边界条件

$$
\begin{cases}
\varphi_1=\varphi_2\\
\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}+\sigma_f=\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\\
\sigma_{电导1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_{电导2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{1\parallel} &= H_{2\parallel} & E_{1\parallel} &= E_{2\parallel}\\
B_{1\perp} &= B_{2\perp} & D_{1\perp}+\sigma_f &= D_{2\perp}\\
& & E_{2\perp}-E_{1\perp} &= (\sigma_f+\sigma_p)/\varepsilon_0
\end{aligned}
$$

洛伦兹力:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\\
\boldsymbol{f} &= \rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

电磁场:

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

$$w=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})=\frac{1}{2}(\rho\varphi+\dots)$$

电流:

$$\nabla\cdot J=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$J=\sigma E$$

毕奥——萨伐尔定律 $B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,\mathrm{d}l\times\boldsymbol{e}_r}{r^2}$, 若 I 为直线, $B=\frac{\mu_0 Il}{4\pi r^2}$.

数学

柱坐标系 (ρ,ϕ,z)

$$\nabla\varphi=\widehat{e}_1\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\widehat{e}_2\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}+\widehat{e}_3\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_1)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\phi}+\frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$\nabla\times\vec{A}=$

$\widehat{e}_1(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\phi}-\frac{\partial A_2}{\partial z})+\widehat{e}_2(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial\rho})+\widehat{e}_3\frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_2)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_1}{\partial\phi})$

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

球坐标系 (r,θ,φ)

$$\nabla\varphi=\widehat{e}_1\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\widehat{e}_2\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\widehat{e}_3\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}q$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2A_1}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_2)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\phi}$$

$\nabla\times\vec{A}=\widehat{e}_1\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_3)-\frac{\partial A_2}{\partial\phi}\right]+$
$\widehat{e}_2\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_3)\right]+\widehat{e}_3\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_2)-\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right]$

$\nabla^2\varphi=$
$\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r})+\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}\right]$

矢量变换

$$\nabla\boldsymbol{r}=-\nabla'\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_r$$

$$\nabla\frac{1}{\boldsymbol{r}}=-\nabla'\boldsymbol{r}=-\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

$$\nabla\times\frac{1}{r^2}=\nabla\cdot\frac{1}{r}=0$$

$$\nabla\cdot\varphi\vec{A}=\varphi\nabla\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\nabla\varphi$$

$$\nabla\times\varphi\vec{A}=\varphi\nabla\times\vec{A}+\nabla\varphi\times\vec{A}$$

$\nabla\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B})=$
$(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})$

$$\nabla\cdot(F\times G)=(\nabla\times F)\cdot G-F\cdot(\nabla\times G)$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{D})]\vec{C}-[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})]\vec{D}$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=\begin{vmatrix}\vec{A}\cdot\vec{C} & \vec{A}\cdot\vec{D}\\ \vec{B}\cdot\vec{C} & \vec{B}\cdot\vec{D}\end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})+\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})+\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})=0$$

$$\varphi_1=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{R}{R_0}\right)^{2n+1}\mathrm{P}_{2n+1}(\cos\theta)\quad(R<R_0)\tag{8}$$

其中 $A_n=a_{2n+1}R_0^{2n+1}$, a_{2n+1} 由上题(9)式给出.球外区域的电势可写为

$$\varphi_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_{2n+1}}{R^{2n+2}}\mathrm{P}_{2n+1}(\cos\theta)\tag{9}$$

由 $R=R_0$ 处 $\varphi_2=\varphi_1$,可得 $b_{2n+1}=a_{2n+1}R_0^{4n+3}$,于是有

$$\varphi_2=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{R_0}{R}\right)^{2n+2}\mathrm{P}_{2n+1}(\cos\theta)\quad(R>R_0)\tag{10}$$

这与分离变量法所得的结果一致.

2.1 证明:(1) $\delta(ax)=\delta(x)/a,(a>0)$;若 $a<0$,结果如何? (2) $x\delta(x)=0$.

【提示】(1)利用 δ 函数的定义及其偶函数性质 $\delta(-ax)=\delta(ax)$;

(2) 由 $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=f(0)$,可得 $x\delta(x)=0$.

2.2 画出函数 $\mathrm{d}\delta(x)/\mathrm{d}x$ 的图,说明 $\rho=-\boldsymbol{p}\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{x})$ 是一个位于原点的电偶极子的电荷密度.

【解】δ 函数的导数是奇函数,图略.以电偶极子 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$ 的中点为坐标原点,两个点电荷 $\pm q$ 分别位于 $\boldsymbol{x}'=\pm\boldsymbol{l}/2=\pm(\Delta x'\boldsymbol{e}_x+\Delta y'\boldsymbol{e}_y+\Delta z'\boldsymbol{e}_z)/2$,于是当 $l\to0$,这体系的电荷密度为

$$
\begin{aligned}
\rho &= q\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}/2)-q\delta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{l}/2)=q\Delta\delta(\boldsymbol{x})\\
&= q\left[\frac{\partial\delta(\boldsymbol{x})}{\partial x'}\Delta x'+\frac{\partial\delta(\boldsymbol{x})}{\partial y'}\Delta y'+\frac{\partial\delta(\boldsymbol{x})}{\partial z'}\Delta z'\right]\\
&= q\boldsymbol{l}\cdot\nabla'\delta(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{p}\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

最后一步已利用了算符代换 $\nabla'\to-\nabla$.

2.3 一块介质的极化矢量为 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')$,根据电偶极子静电势的公式,极化介质所产生的静电势为

另外,根据极化电荷公式 $\rho_p=-\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')$ 及 $\sigma_p=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{P}$,极化介质产生的静电势又可表为

$$\varphi(\boldsymbol{x})=-\int_V\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}V'+\oint_S\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'}{4\pi\varepsilon_0 r}\tag{2}$$

试证明以上两表达式是等同的.

【证】由高斯定理,(2)式右边第二项面积分可化为

$$
\begin{aligned}
\oint_S\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'}{4\pi\varepsilon_0 r} &= \int_V\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}V'\\
&= \int_V\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}V'+\int_V\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathrm{d}V'
\end{aligned}\tag{3}
$$

其中已利用到 $\nabla'(1/r)=\boldsymbol{r}/r^3$,将(3)代入(2)式,即得(1)式.

2.4 证明下述结果,并熟悉面电荷和面偶极层两侧电势和电场的变化.

(1) 在面电荷两侧,电势的法向微商有跃变,而电势是连续的;

(2) 在面偶极层两侧,电势有跃变 $\varphi_2-\varphi_1=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{P}/\varepsilon_0$,而电势的法向微商是连续的.(带等量正负面电荷 $\pm\sigma$ 而靠得很近的两个面,形成面偶极层,面偶极矩密度 $\boldsymbol{P}=\lim_{\sigma\to\infty,l\to0}\sigma\boldsymbol{l}$.)

【证】(1) 设电荷面密度为 σ,其两侧无限接近的 P_1 点与 P_2 点的场强分别为 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$,法向单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 从 P_1 指向 P_2,将静电场高斯定理与环路定理

$$\oint_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\rho\mathrm{d}V,\quad\oint_L\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0\tag{1}$$

分别应用于包含着面电荷 σ 的扁平闭合面(底面积 ΔS 与界面平行,高度 $h\to0$),以及跨越界面的矩形小回路(其长边 Δl 与界面平行,短边 $h\to0$),可分别得到

$$E_{2n}-E_{1n}=\sigma/\varepsilon_0,\quad E_{2t}=E_{1t}\tag{2}$$

由 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$,这两式用电势表示为

$$-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0},\quad\varphi_2=\varphi_1\tag{3}$$

(2) 令面偶极层的法向单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 从 $-\sigma$ 指向 $+\sigma$,无限靠近 $-\sigma$ 层外侧 P_1 点的场强为 $\boldsymbol{E}_1$,无限靠近 $+\sigma$ 层外侧 P_2 点的场强为 $\boldsymbol{E}_2$,内部 P_0 点的场强为 $\boldsymbol{E}_0$,将高斯定理分别应用于包含 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ 的扁平闭合面,可得到

$$E_{2n}+E_{0n}=\sigma/\varepsilon_0,\quad -E_{0n}-E_{1n}=-\sigma/\varepsilon_0$$

$$即\ E_{2n}=E_{0n}=E_{1n}=\sigma/2\varepsilon_0\tag{4}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\tag{6}$$

设想电场将单位电荷从 P_1 点经过 P_0 点移至 P_2 点,P_1P_0 与 P_0P_2 的距离均为 l,P_2 与 P_1 两点的电势差等于这过程中电场所作的功:

$$\varphi_2-\varphi_1=E_n l+E_n l=2E_n l=\sigma\,l/\varepsilon_0\tag{7}$$

由面偶极矩密度定义 $\boldsymbol{P}=\sigma\boldsymbol{l}$,即有

$$\varphi_2-\varphi_1=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{P}/\varepsilon_0\tag{8}$$

2.5 一个半径为 R 的电介质球,极化强度为 $\boldsymbol{P}=K\boldsymbol{r}/r^2$,电容率为 ε.计算:

(1) 束缚电荷的体密度和面密度;

(2) 自由电荷体密度;

(3) 球外和球内的电势;

(4) 该带电介质球产生的静电场的总能量.

【解】从极化强度分布函数可知,这问题有球对称性.介质球内和球面束缚(极化)电荷密度分别为

$$\rho_p=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\frac{K}{r^2},\quad\sigma_p=\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{P}|_{r=R}=\frac{K}{R}$$

由线性均匀介质内 $\rho_p=-(1-\varepsilon_0/\varepsilon)\rho_f$,得自由电荷体密度:

$$\rho_f=\frac{\varepsilon K}{(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}$$

由 $\boldsymbol{D}_1=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{P}=\varepsilon\boldsymbol{E}_1$,得介质球内的电场强度:

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{\boldsymbol{P}}{\varepsilon-\varepsilon_0}=\frac{K}{\varepsilon-\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\quad(r<R)$$

极化过程遵从电荷守恒,球内与球面总的束缚电荷必定等值异号(将 ρ_p 对球体积分,将 σ_p 对球面积分,可知的确如此),且有球对称性,它们在球外的电场互相抵消,故球外电场相当于总的自由电荷

$$q_f=\int_V\rho_f\mathrm{d}V=\frac{4\pi\varepsilon KR}{\varepsilon-\varepsilon_0}$$

集中于球心时产生的电场:

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{q_f\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{\varepsilon KR}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\quad(r>R)$$

球外与球内的电势分别为

$$\varphi_2=\int_r^{\infty}\boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\varepsilon KR}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)r}$$

$$\varphi_1=\int_r^{R}\boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_R^{\infty}\boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{K}{\varepsilon-\varepsilon_0}\left(\ln\frac{R}{r}+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)$$

这带电体的总静电能为

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\varepsilon\int_{V_1}E_1^2\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_{V_2}E_2^2\mathrm{d}V\\
&= 2\pi\varepsilon R\left(1+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\left(\frac{K}{\varepsilon-\varepsilon_0}\right)^2
\end{aligned}
$$

将 $\rho_f\varphi_1/2$ 对介质球作体积分,也能得到上式的结果.

2.6 均匀外电场中置入半径为 R_0 的导体球,试用分离变量法求下列两种情况的电势:

(1) 导体球上接有电池,使球与地保持电势 Φ_0;

(2) 导体球上带总电荷量 q.

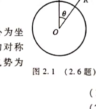

图 2.1 (2.6 题)

【解】外电场将使导体球面出现感应电荷.以球心为坐标原点,并令外电场 $\boldsymbol{E}_0=E_0\boldsymbol{e}_z$,如图 2.1.问题有 z 轴的对称性.设放入导体球之前原点电势为 φ_0.当导体球对地电势为 Φ_0,球外电势的全部定解条件为

$$\nabla^2\varphi=0\quad(R>R_0)\tag{1}$$

$$R\to\infty,\ \varphi\to-E_0R\cos\theta+\varphi_0\tag{2}$$

$$R=R_0,\quad\varphi=\Phi_0\tag{3}$$

由 z 轴的对称性及条件(2),将拉普拉斯方程(1)的解写成

$$\varphi=-E_0R\cos\theta+\varphi_0+\sum_n\frac{b_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)\tag{4}$$

将(4)代入条件(3),解出

$$b_0=(\Phi_0-\varphi_0)R_0,\quad b_1=E_0R_0^3,\quad b_n=0\quad(n\neq0,1)$$

$$\varphi=-E_0R\cos\theta+\varphi_0+\frac{(\Phi_0-\varphi_0)R_0}{R}+\frac{E_0R_0^3}{R^2}\cos\theta\tag{5}$$

第一项是原外场的电势;第二项是选择坐标原点电势所引入的常数项,它不影响电场 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$ 分布;第三项是因导体球接电池而使球面均匀带电所产生的球对称项;第四项是外场使导体球面出现感应电荷所形成的电偶极矩的电势,将此项与位于坐标原点的电偶极子 $\boldsymbol{p}=p\boldsymbol{e}_z$ 的电势

$$\varphi^{(1)}(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_0R^3}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0R^2}\cos\theta\tag{6}$$

比较,可知球面感应电荷形成的电偶极矩为

$$\boldsymbol{p}=4\pi\varepsilon_0R_0^3E_0\boldsymbol{e}_z\tag{7}$$

事实上,由 $\sigma_f=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{D}$,可得导体球面的自由电荷密度:

$$\sigma_f=-\varepsilon_0\left.\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right|_{R=R_0}=\frac{\varepsilon_0(\Phi_0-\varphi_0)}{R_0}+3\varepsilon_0E_0\cos\theta\tag{8}$$

第一项在球外产生球对称的场(即电势 φ 的第三项),第二项就是外场引起的感

应电荷密度,由电偶极矩公式(2.12),的确能计算出(7)式的结果.由于这一项电荷分布存在关于坐标原点的反对称性,由(2.13)或(2.15)式,均可看出电四极矩为零.

当导体球带有电荷 q 时,球外电势的全部定解条件为

$$\nabla^2\varphi=0\quad(R>R_0)\tag{9}$$

$$R\to\infty,\ \varphi\to-E_0R\cos\theta+\varphi_0\tag{10}$$

$$R=R_0,\ \varphi=\Phi_0(\text{未知常数,因静电导体是等势体})\tag{11}$$

但已知导体球面的总电荷量 q,即

$$R=R_0,\quad q=\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=-\varepsilon_0\oint_S\frac{\partial\varphi}{\partial R}dS\tag{12}$$

条件(9)、(10)和(11)与前面的(1)、(2)和(3)相同,故可定出球外电势 φ 形式上仍如(5)式,再将它代入条件(12),可解出

$$\Phi_0-\varphi_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R_0}\tag{13}$$

$$\varphi=-E_0R\cos\theta+\varphi_0+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R}+\frac{E_0R_0^3}{R^2}\cos\theta\tag{14}$$

各项的物理意义如前所述.从本题定解过程可看到,静电导体为等势体这个条件的重要性.

2.7 均匀介质球的中心置一点电荷 q_f,介质球的电容率为 ε,球外为真空,试用分离变量法求空间电势,把结果与使用高斯定理所得的结果比较.

【解】点电荷 q_f 的电场将使介质球极化.以球心为坐标原点并设介质球半径为 R_0,这问题有球对称性.球内外电势的全部定解条件为

$$\nabla^2\varphi_1=-q_f\delta(\boldsymbol{x})/\varepsilon\quad(R<R_0)\tag{1}$$

$$\nabla^2\varphi_2=0\quad(R>R_0)\tag{2}$$

$$R=0,\quad\varphi_1\to\infty\quad(\text{此处有点电荷})\tag{3}$$

$$R\to\infty,\quad\varphi_2\to0\tag{4}$$

$$R=R_0:\quad\varphi_1=\varphi_2,\quad\varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}=\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}\tag{5}$$

泊松方程(1)的一个特解是点电荷的电势 φ_q,由电势叠加原理,球内外的电势都应当是 $\varphi=\varphi_q+\varphi'$,$\varphi'$是极化电荷的电势并满足拉普拉斯方程.由条件(3)和(4),方程(1)和(2)的解可写成

$$\varphi_1=\varphi_q+\varphi'_1=\frac{q_f}{4\pi\varepsilon R}+a\quad(R<R_0)\tag{6}$$

$$\varphi_2=\varphi_q+\varphi'_2=\frac{q_f}{4\pi\varepsilon_0R}+\frac{b}{R}\quad(R>R_0)\tag{7}$$

[方程(2)的解当然也可写成 $\varphi_2=b'/R$]将(6)和(7)代入条件(5),可解出

$$\varphi_1=\frac{q_f}{4\pi\varepsilon R}+\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)q_f}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0R_0},\quad\varphi_2=\frac{q_f}{4\pi\varepsilon_0R}\tag{8}$$

由于各向同性线性均匀介质内极化电荷体密度 $\rho_p=-(1-\varepsilon_0/\varepsilon)\rho_f$,球心处自由点电荷 q_f(可看成很小的带电金属球)表面的介质出现"极化点电荷" $q_p=-(1-\varepsilon_0/\varepsilon)q_f$,介质球表面必定出现总电荷量为 $-q_p=(1-\varepsilon_0/\varepsilon)q_f$ 的极化面电荷,由球对称性,这两部分极化电荷在球外的电场互相抵消,因此球外电势 φ_2 是由 q_f 产生的.球内电势 φ_1 的第一项是 q_f 与极化点电荷 q_p 共同产生的,第二项为常数,此项对球内电场没有影响.

由于这问题有球对称性,由高斯定理容易得到球内、外的电场:

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\varepsilon}=\frac{q_f\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon R^3},\quad\boldsymbol{E}_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\varepsilon_0}=\frac{q_f\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_0R^3}\tag{9}$$

两区域的电势分布为

$$\varphi_2=\int_R^\infty\boldsymbol{E}_2\cdot d\boldsymbol{R}=\frac{q_f}{4\pi\varepsilon_0R}\tag{10}$$

$$\varphi_1=\int_R^{R_0}\boldsymbol{E}_1\cdot d\boldsymbol{R}+\int_{R_0}^\infty\boldsymbol{E}_2\cdot d\boldsymbol{R}=\frac{q_f}{4\pi\varepsilon R}+\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)q_f}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0R_0}\tag{11}$$

2.8 均匀介质球(电容率为 ε_1)中心置一自由电偶极子 $\boldsymbol{p}_f$,球外充满了另一种电容率为 ε_2 的介质,求空间各点的电势和极化电荷分布.

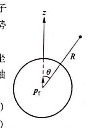

图 2.2 (2.8 题)

【解】$\boldsymbol{p}_f$ 的电场将使两种介质均被极化.以介质球心为坐标原点,球半径为 R_0,且令 $\boldsymbol{p}_f=p_f\boldsymbol{e}_z$,如图 2.2,于是问题有 z 轴对称性.介质球内外两区域电势的全部定解条件为

$$\nabla^2\varphi_1=(\boldsymbol{p}_f\cdot\nabla)\delta(\boldsymbol{x})/\varepsilon_1\quad(R<R_0)\tag{1}$$

$$\nabla^2\varphi_2=0\quad(R>R_0)\tag{2}$$

$$R=0,\quad\varphi_1\to\infty\quad(\text{此处有电偶极子})\tag{3}$$

$$R\to\infty,\quad\varphi_2\to0\tag{4}$$

$$R=R_0:\quad\varphi_1=\varphi_2,\quad\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}=\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}\tag{5}$$

$\boldsymbol{p}_f$ 的电势 φ_p 是泊松方程(1)的一个特解,球内外的电势都是 φ_p 与极化电荷的电势 φ'之叠加,φ'是拉普拉斯方程的解.由条件(3)和(4),及轴对称性,将方程(1)和(2)的解写成

$$\varphi_1=\frac{p_f\cos\theta}{4\pi\varepsilon_1R^2}+\sum_n a_nR^nP_n(\cos\theta)\quad(R<R_0)\tag{6}$$

$$\varphi_2=\frac{p_f\cos\theta}{4\pi\varepsilon_2R^2}+\sum_n\frac{b_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)\quad(R>R_0)\tag{7}$$

(φ_2 也可以不写第一项 φ_p)将(6)和(7)代入条件(5),可解出

$$a_1=\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)p_f}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R_0^3},\quad b_1=\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)p_f}{4\pi\varepsilon_2(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)}$$

$a_n=b_n=0$,当 $n\neq1$.于是得

$$\varphi_1=\frac{p_f\cos\theta}{4\pi\varepsilon_1R^2}+\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)p_f}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R_0^3}R\cos\theta\quad(R<R_0)\tag{8}$$

$$\varphi_2=\frac{3p_f\cos\theta}{4\pi(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R^2}\quad(R>R_0)\tag{9}$$

球心处 $\boldsymbol{p}_f$ 表面的介质中,出现一个与其方向相反的极化电偶极子:

$$\boldsymbol{p}_p=-(1-\varepsilon_0/\varepsilon_1)\boldsymbol{p}_f\tag{10}$$

因介质球面自由电荷面密度 $\sigma_f=0$,故由 $\sigma_p=\boldsymbol{e}_R\cdot\varepsilon_0(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)$,极化电荷面密度为

$$\sigma_p=\varepsilon_0\left(-\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}\right)_{R=R_0}=\frac{3\varepsilon_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)p_f}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R_0^3}\cos\theta\tag{11}$$

球内电势 φ_1 的第一项是 $\boldsymbol{p}_f$ 与 $\boldsymbol{p}_p$ 共同产生的偶极场,总电矩为 $\boldsymbol{p}_1=\varepsilon_0\boldsymbol{p}_f/\varepsilon_1$,第二项是介质球面上的极化电荷 σ_p 产生的均匀场;球外电势 φ_2 是 $\boldsymbol{p}_f$、$\boldsymbol{p}_p$ 及 σ_p 形成的电偶极子 $\boldsymbol{p}_\sigma$ 共同产生的偶极场,总电矩为 $\boldsymbol{p}_2=3\varepsilon_0\boldsymbol{p}_f/(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)$.

2.9 空心导体球壳的内外半径为 R_1 和 R_2,球中心置一偶极子 $\boldsymbol{p}$,球壳上带电 q,求空间各点的电势和电荷分布.

【解】$\boldsymbol{p}$ 的电场将使导体出现感应电荷分布.以球心为坐标原点,令 $\boldsymbol{p}=p\boldsymbol{e}_z$,问题就有 z 轴对称性.导体球壳的电势 φ_2 为常数,球腔内电势 φ_1,球壳外电势 φ_3,全部定解条件为

$$\nabla^2\varphi_1=(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\delta(\boldsymbol{x})/\varepsilon_0,\quad\nabla^2\varphi_3=0\tag{1}$$

$$R=0,\quad\varphi_1\to\infty;\quad R\to\infty,\quad\varphi_3\to0\tag{2}$$

$$\varphi_1|_{R=R_1}=\varphi_3|_{R=R_2}\tag{3}$$

$$R=R_2,\quad q=-\varepsilon_0\oint_S\frac{\partial\varphi_3}{\partial R}dS\tag{4}$$

由叠加原理和轴对称性,以及条件(2),将电势方程的解写成

$$\varphi_1=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0R^2}+\sum_n a_nR^nP_n(\cos\theta)\quad(R<R_1)\tag{5}$$

$$\varphi_3=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0R^2}+\sum_n\frac{b_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)\quad(R>R_2)\tag{6}$$

利用条件(3)和(4),解出

$$\varphi_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}{R^3}-\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}{R_1^3}+\frac{q}{R_2}\right],\quad\varphi_3=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R}\tag{7}$$

$$\sigma_{f1}=-\boldsymbol{e}_R\cdot\boldsymbol{D}_1=\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}=-\frac{3p}{4\pi R_1^3}\cos\theta\quad(R=R_1)\tag{8}$$

$$\sigma_{f2}=\boldsymbol{e}_R\cdot\boldsymbol{D}_3=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_3}{\partial R}=\frac{q}{4\pi R_2^2}\quad(R=R_2)\tag{9}$$

球腔内 φ_1 的第一项是球心处 $\boldsymbol{p}$ 产生的偶极场,第二项是内球面感应电荷 σ_{f1} 产生的均匀场,第三项为常数项.球心处的偶极子 $\boldsymbol{p}$ 与内球面感应电荷 σ_{f1} 在球壳外产生的偶极场互相抵消,这表明封闭导体球壳有静电屏蔽作用.故球外 φ_3 是外球面均匀分布的面电荷 σ_{f2} 产生的球对称场.若 $q=0$,则外部无电场.

2.10 在均匀外场 $\boldsymbol{E}_0$ 中置入一带均匀自由电荷密度为 ρ_f 的绝缘介质球(电容率为 ε)求空间各点的电势.

【解】自由电荷的电场和外场 $\boldsymbol{E}_0$ 将使介质球极化.设介质球半径为 R_0,以球心为坐标原点,且令 $\boldsymbol{E}_0=E_0\boldsymbol{e}_z$,定解条件为

$$\nabla^2\varphi_1=-\rho_f/\varepsilon\quad(R<R_0)\tag{1}$$

$$\nabla^2\varphi_2=0\quad(R>R_0)\tag{2}$$

$$R=0,\quad\varphi_1\text{ 有限};\quad R\to\infty,\quad\varphi_2\to-E_0R\cos\theta\tag{3}$$

$$R=R_0:\quad\varphi_1=\varphi_2,\quad\varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}=\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}\tag{4}$$

因为已假定介质球内 ρ_f 为常数,它的场及其引起的极化电荷产生的场都有球对称性,由高斯定理可求出这两个球对称场的电势 $\varphi_{1\rho}$ 和 $\varphi_{2\rho}$,进而可求出电势:

$$\varphi_{1\rho}=\frac{\rho_f(R_0^2-R^2)}{6\varepsilon}+\frac{\rho_fR_0^2}{3\varepsilon_0},\quad\varphi_{2\rho}=\frac{\rho_fR_0^3}{3\varepsilon_0R}\tag{5}$$

$\varphi_{1\rho}$是泊松方程(1)的特解.故方程(1)和(2)的解可写成

$$\varphi_1=\varphi_{1\rho}+\varphi'_1,\quad\varphi_2=\varphi_{2\rho}+\varphi'_2$$

φ'_1 和 φ'_2 均是轴对称下拉普拉斯方程的通解.由条件(3)和(4),可解出

$$\varphi_1=\frac{\rho_f(R_0^2-R^2)}{6\varepsilon}+\frac{\rho_fR_0^2}{3\varepsilon_0}-\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0R\cos\theta\tag{6}$$

$$\varphi_2=\frac{\rho_fR_0^3}{3\varepsilon_0R}-E_0R\cos\theta+\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0R_0^3}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)R^2}\cos\theta\tag{7}$$

球内 φ_1 的第三项即为 φ'_1,是原外场与介质球面极化电荷产生的均匀场之叠加;球外 φ_2 的第二项是原外场,第三项是介质球面极化电荷产生的偶极场,它们之和就是 φ'_2.其实,φ'_1 和 φ'_2 就是不带电的均匀介质球(此时球内电势方程为 $\nabla^2\varphi_1=0$)置入均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 时的解.

2.11 在一很大的电解槽中充满电导率为 σ_2 的液体,使其中流着均匀的电

流 $\boldsymbol{J}_{f0}$,今在液体中置入一个电导率为 σ_1 小球,求稳恒时电流分布和面电荷分布.讨论 $\sigma_1\gg\sigma_2$ 及 $\sigma_2\gg\sigma_1$ 两种情况下电流分布的特点.

【解】维持恒定电流的电场也是静电场,可令 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$,由电流恒定条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}_f=0$,当两种介质都是线性均匀的,据欧姆定律 $\boldsymbol{J}_f=\sigma\boldsymbol{E}$,可知球内外两区域的电势方程均为$\nabla^2\varphi=0$.以球心为坐标原点并设小球半径为 R_0,令导电液体中原电流密度 $\boldsymbol{J}_{f0}=\sigma_2\boldsymbol{E}_0=\sigma_2E_0\boldsymbol{e}_z$,问题就有 z 轴对称性.全部定解条件为

$$\nabla^2\varphi_1=0\quad(R<R_0);\quad\nabla^2\varphi_2=0\quad(R>R_0)\tag{1}$$

$$R=0,\varphi_1\text{ 有限};\quad R\to\infty,\varphi_2\to-\frac{J_{f0}}{\sigma_2}R\cos\theta\tag{2}$$

$$R=R_0:\quad\varphi_1=\varphi_2,\quad J_{1R}=J_{2R}\text{ 即 }\sigma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}=\sigma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}\tag{3}$$

由 $R=0$ 和 $R\to\infty$ 处的条件,将两区域电势方程的解写为

$$\varphi_1=\sum_n a_nR^nP_n(\cos\theta)\tag{4}$$

$$\varphi_2=\sum_n\frac{b_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)-\frac{J_{f0}}{\sigma_2}R\cos\theta\tag{5}$$

将(4)和(5)代入条件(3),解出

$$\varphi_1=\frac{-3J_{f0}}{\sigma_1+2\sigma_2}R\cos\theta\tag{6}$$

$$\varphi_2=-\frac{J_{f0}}{\sigma_2}R\cos\theta+\frac{J_{f0}(\sigma_1-\sigma_2)R_0^3}{\sigma_2(\sigma_1+2\sigma_2)R^2}\cos\theta\tag{7}$$

由 $\omega=\varepsilon_0\boldsymbol{e}_R\cdot(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)$,得球面的电荷密度为

$$\omega=\varepsilon_0\left(-\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}\right)_{R=R_0}=\frac{3(\sigma_1-\sigma_2)\varepsilon_0}{\sigma_2(\sigma_1+2\sigma_2)}J_{f0}\cos\theta\tag{8}$$

球内 φ_1 为原外场与球面电荷分布 ω 产生的均匀场之叠加;球外 φ_2 的第一项是原外场,第二项是球面电荷产生的偶极场.电流分布为

$$\boldsymbol{J}_1=\sigma_1\boldsymbol{E}_1=-\sigma_1\nabla\varphi_1=\frac{3\sigma_1\boldsymbol{J}_{f0}}{\sigma_1+2\sigma_2}\tag{9}$$

$$\boldsymbol{J}_2=\sigma_2\boldsymbol{E}_2=-\sigma_2\nabla\varphi_2$$

$$=\boldsymbol{J}_{f0}+\frac{(\sigma_1-\sigma_2)R_0^3}{\sigma_1+2\sigma_2}\left[\frac{3(\boldsymbol{J}_{f0}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5}-\frac{\boldsymbol{J}_{f0}}{R^3}\right]\tag{10}$$

当 $\sigma_1\gg\sigma_2$,$\boldsymbol{J}_1\approx3\boldsymbol{J}_{f0}$,$\boldsymbol{J}_2\approx\boldsymbol{J}_{f0}+R_0^3\left[\frac{3(\boldsymbol{J}_{f0}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5}-\frac{\boldsymbol{J}_{f0}}{R^3}\right]$

当 $\sigma_2\gg\sigma_1$,$\boldsymbol{J}_1\approx0$,$\boldsymbol{J}_2\approx\boldsymbol{J}_{f0}-\frac{R_0^3}{2}\left[\frac{3(\boldsymbol{J}_{f0}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5}-\frac{\boldsymbol{J}_{f0}}{R^3}\right]$

2.12 半径为 R_0 的导体球外充满均匀的绝缘介质 ε,导体球接地,离球心为

a 处($a>R_0$)置一点电荷 q_f,试用分离变量法求空间各点电势,证明所得结果与镜像法相同.

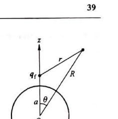

图 2.3 (2.12 题)

【解】以球心为坐标原点,令 q_f 位于$z=a$,如图 2.3.于是问题有 z 轴对称性.球外电势的全部定解条件为

$$\nabla^2\varphi=-q_f\delta(\boldsymbol{x}-a\boldsymbol{e}_z)/\varepsilon\tag{1}$$

$$R\to\infty,\varphi\to0;\quad R=R_0,\varphi=0\tag{2}$$

由 $R\to\infty$ 处的条件和 z 轴对称性,泊松方程(1)的解写为

$$\varphi=\frac{q_f}{4\pi\varepsilon r}+\sum_{n=0}^\infty\frac{b_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)\tag{3}$$

其中 r 是点电荷 q_f 到场点的距离.$1/r$ 可展开成

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{R}{a}\right)^nP_n(\cos\theta)&(R<a)\\\dfrac{1}{R}\displaystyle\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{a}{R}\right)^nP_n(\cos\theta)&(R>a)\end{cases}\tag{4}$$

因 $R_0<a$,将(4)的第一式代入(3),并由条件 $R=R_0,\varphi=0$,解出

$$b_n=\frac{-q_f}{4\pi\varepsilon}\frac{R_0^{2n+1}}{a^{n+1}}$$

$$\varphi=\frac{q_f}{4\pi\varepsilon r}-\frac{q_f}{4\pi\varepsilon}\sum_{n=0}^\infty\frac{R_0^{2n+1}}{a^{n+1}R^{n+1}}P_n(\cos\theta)\quad(R>R_0)\tag{5}$$

将(4)代入(5),便给出 $R_0\leqslant R\leqslant a$ 和 $R\geqslant a$ 两区域中电势的级数形式,仅在 $R=a,\theta=0$ 即点电荷 q_f 所在点级数发散.在 $R\geqslant a$ 区域,(5)式给出

$$\varphi=\frac{q_f}{4\pi\varepsilon}\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{R^{n+1}}\left(a^n-\frac{R_0^{2n+1}}{a^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)\tag{6}$$

它包含着这电荷体系所有各级电多极矩的电势,由

$$P_0(\cos\theta)=1,P_1(\cos\theta)=\cos\theta,P_2(\cos\theta)=(3\cos^2\theta-1)/2$$

(6)式的前三项是单极项,偶极项和四极项电势:

$$\varphi^{(0)}=\frac{q_f}{4\pi\varepsilon R}\left(1-\frac{R_0}{a}\right)\tag{7}$$

$$\varphi^{(1)}=\frac{q_f}{4\pi\varepsilon R^2}\left(a-\frac{R_0^3}{a^2}\right)\cos\theta\tag{8}$$

$$\varphi^{(2)}=\frac{q_f}{8\pi\varepsilon R^3}\left(a^2-\frac{R_0^5}{a^3}\right)(3\cos^2\theta-1)\tag{9}$$

由(8)式和(9)式,可推知这体系的电偶极矩和电四极矩.

【镜像法】以假想的像电荷代替导体球与介质分界面真实的感应电荷及极化电荷对电场的贡献,为使所得的解满足求解区域即球外的方程(1),像电荷必

须置于球内.由轴对称性,在球内 $z=b$ 处置像电荷 q',于是球外任一点的电势可写成

$$\varphi=\frac{q_f}{4\pi\varepsilon r}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon r'}\tag{10}$$

其中 r 是 q_f 到场点的距离,r'是 q'到场点的距离,即

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}$$

$$\frac{1}{r'}=\frac{1}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta}}\tag{11}$$

由 $R=R_0,\varphi=0$ 的条件,有

$$\left[\frac{q_f}{r}+\frac{q'}{r'}\right]_{R=R_0}=0,\quad\text{即}\frac{q'}{q_f}=-\frac{r'}{r}\bigg|_{R=R_0}$$

将 r 和 r'代入上式并两边平方,可解出

$$q'=-q_fR_0/a,\quad b=R_0^2/a\tag{12}$$

$$\varphi=\frac{q_f}{4\pi\varepsilon r}-\frac{q_fR_0/a}{4\pi\varepsilon r'}\tag{13}$$

此解与(5)式是一致的,它显然也满足 $R\to\infty,\varphi\to0$ 的条件.

2.13 接地的空心导体球内外半径为 R_1 和 R_2,在球内离球心为 $a(a<R_1)$处置一点电荷 q,用镜像法求电势.导体球上的感应电荷有多少?分布在内表面还是外表面?

【解】由于接地导体球壳的静电屏蔽作用,球壳及其外部空间的电势为零,求解区域为球腔内.设点电荷 q 位于 $z=a$,球腔内电势的定解条件为

$$\nabla^2\varphi=-q\delta(\boldsymbol{x}-a\boldsymbol{e}_z)/\varepsilon_0\tag{1}$$

$$R=0,\quad\varphi\text{ 有限};\quad R=R_1,\quad\varphi=0\tag{2}$$

由 z 轴对称性,将代替导体球面感应电荷的像电荷 q'置于 $z=b$ 处,且必须使 $b>R_1$,于是球腔内任一点的电势为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r}+\frac{q'}{r'}\right)\tag{3}$$

其中 r 和 r'分别是 q 与 q'到场点的距离,即

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}$$

$$\frac{1}{r'}=\frac{1}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta}}\tag{4}$$

由 $R=R_1,\varphi=0$ 的条件,解出

$$q'=-qR_1/a,\quad b=R_1^2/a\tag{5}$$

将(4)和(5)代入(3),得

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}+\frac{-qR_1/a}{\sqrt{R^2+(R_1^2/a)^2-2R(R_1^2/a)\cos\theta}}\right]\tag{6}$$

这解显然满足 $R=0,\varphi$ 值有限的条件.因球壳及球外电势为零,感应电荷只能分布于球壳内表面,设其总电荷量为 q_i,则球壳内的总电荷量为 $q+q_i$,而导体中 $\boldsymbol{D}=0$,于是由高斯定理

$$q+q_i=\oint_S\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=0,\quad\text{得 }q_i=-q\tag{7}$$

可见导体球壳内表面出现的真实的感应电荷 q_i,不等于假想的像电荷 q'.

2.14 上题的导体球壳不接地,而是带电荷量 q_0,或使其有确定电势 φ_0,试求这两种情况的电势.又问 φ_0 与 q_0 是何种关系时,两情况的解是相等的?

【解】导体球壳的电势 φ_2 为常数,球腔内电势为 φ_1,球壳外电势为 φ_3.当导体球壳带有电荷 q_0 时,定解条件为

$$\nabla^2\varphi_1=-q\delta(\boldsymbol{x}-a\boldsymbol{e}_z)/\varepsilon_0,\quad\nabla^2\varphi_3=0\tag{1}$$

$$R=0,\quad\varphi_1\text{ 有限};\quad R\to\infty,\quad\varphi_3\to0\tag{2}$$

$$\varphi_1|_{R=R_1}=\varphi_3|_{R=R_2}=\varphi_0(\text{未知常数})\tag{3}$$

$$\text{但 }R=R_2,\quad q+q_0=-\varepsilon_0\oint_S\frac{\partial\varphi_3}{\partial R}dS\tag{4}$$

因球壳外部无电荷分布,由条件(3),球壳外的电势必定是球对称的,又由条件(4),可知外部电势相当于总电荷量 $q+q_0$ 集中于球心时所产生:

$$\varphi_3=\frac{q+q_0}{4\pi\varepsilon_0R}\quad(R>R_2)\tag{5}$$

因此导体球壳的电势及外球面的电荷密度分别是

$$\varphi_0=\frac{q+q_0}{4\pi\varepsilon_0R_2},\quad\sigma_2=\frac{q+q_0}{4\pi R_2^2}\quad(R=R_2)\tag{6}$$

对于球腔内的电势,代替内球面感应电荷的像电荷 q'仍应置于$z=b$,且必须使 $b>R_1$;而外球面均匀分布的电荷在球腔内产生的电场为零,相应的电势可以是任意常数,就令其为 φ_0,于是球腔内任一点的电势可写为

$$\varphi_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r}+\frac{q'}{r'}\right]+\varphi_0\quad(R<R_1)\tag{7}$$

其中 $1/r$ 和 $1/r'$如上题(4)式.将(7)代入条件(3),解出

$$q'=-qR_1/a,\quad b=R_1^2/a\tag{8}$$

$$\varphi_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}+\frac{-qR_1/a}{\sqrt{R^2+(R_1^2/a)^2-2R(R_1^2/a)\cos\theta}}+\frac{q+q_0}{R_2}\right]\tag{9}$$

当预先给定球壳的电势 φ_0 时,定解条件(3)和(4)就是

$$\varphi_1|_{R=R_1}=\varphi_3|_{R=R_2}=\varphi_0\quad(\text{已知常数})\tag{10}$$

按同样分析,可得

$$\varphi_3=\frac{\varphi_0R_2}{R}\quad(R>R_2)\tag{11}$$

$$\varphi_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}+\frac{-qR_1/a}{\sqrt{R^2+(R_1^2/a)^2-2R(R_1^2/a)\cos\theta}}\right]+\varphi_0\quad(R<R_1)\tag{12}$$

由(9)和(12)式可知,当 $\varphi_0=(q+q_0)/4\pi\varepsilon_0R_2$ 时,两种情况下的解相等.

2.15 在接地的导体平面上有一半径为 a 的半球凸部,半球的球心在导体平面上,点电荷 q 位于系统的对称轴上,并与平面相距为 $b(b>a)$,试用镜像法求空间电势.

图 2.4 (2.15 题)

【解】以 z 轴为系统的对称轴,球心为坐标原点,如图 2.4.求解区域为导体表面上方空间,导体表面的电势为零,定解条件为

$$\nabla^2\varphi=-q\delta(x,y,z-b)/\varepsilon_0$$

$$R=a,\text{以及 }R>a\text{ 但 }z=0\text{ 处},\quad\varphi=0$$

$$R\to\infty,\quad\varphi\to0$$

要满足导体表面电势为零的条件,需在导体内设置三个假想的像电荷:在 $z=-b$ 处置$-q$,在 $z=a^2/b$ 处置$-qa/b$,在 $z=-a^2/b$处置$+qa/b$.于是导体外任一点的电势为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}+\frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+b)^2}}+\frac{-qa/b}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a^2/b)^2}}+\frac{qa/b}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a^2/b)^2}}\right]$$

此解显然也满足 $R\to\infty,\varphi\to0$.

2.16 有一点电荷 q 位于两个互相垂直的接地导体平面所围成的直角空间内,它到两个平面的距离为 a 和 b,求空间电势.

【解】设两导体平面为 $y=0$ 和 $z=0$,导体电势为零.点电荷 q 位于$(0,a,b)$,求解区域为 $y>0,z>0$ 的空间.定解条件为

$$\nabla^2\varphi=-q\delta(x,y-a,z-b)/\varepsilon_0$$

$$y=0,z=0\text{ 处},\varphi=0;\quad R\to\infty,\varphi\to0$$

要满足全部条件,需要设置三个像电荷:$(0,+a,-b)$处置$-q$,$(0,-a,-b)$处置$+q$,$(0,-a+b)$处置$-q$,于是求解区域内任一点的电势为

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-a)^2+(z-b)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-a)^2+(z+b)^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+a)^2+(z+b)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+a)^2+(z-b)^2}}\right]$$

2.17 设有两平面围成的直角形无穷容器,其内充满电导率为 σ 的液体,取该两平面为 xz 面和 yz 面,在(x_0,y_0,z_0)和$(x_0,y_0,-z_0)$两点分别置正负电极并通以电流 I,求导电液体中的电势.

【解】导电液体中电流密度 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$,连接电极的导线中 $\boldsymbol{J}'=\sigma'\boldsymbol{E}'$,设导线的电导率 $\sigma'\gg\sigma$,分别作包围正、负电极的闭合曲面,由高斯定理可求出两电极的电荷量为

$$q=\pm\varepsilon_0\oint_S\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\pm\varepsilon_0\left(\frac{1}{\sigma'}\int_{S_1}\boldsymbol{J}'\cdot d\boldsymbol{S}+\frac{1}{\sigma}\int_{S_2}\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}\right)$$

$$=\pm\varepsilon_0(-I/\sigma'+I/\sigma)\approx\pm\varepsilon_0I/\sigma$$

平面 xz 和 yz 之外是绝缘体,故求解区域为 $x>0,y>0$,定解条件为

$$\nabla^2\varphi=0\quad(\text{除正负电极所在点外})$$

$$x=0\text{ 处},\quad J_x=\sigma E_x=0,\quad\text{即}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$$

$$y=0\text{ 处},\quad J_y=\sigma E_y=0,\quad\text{即}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$$

$$R\to\infty,\quad\varphi\to0$$

对位于(x_0,y_0,z_0)的正电极$+q$,分别在$(-x_0,y_0,z_0)$,$(x_0,-y_0,z_0)$,$(-x_0,-y_0,z_0)$设置像电荷$+q$;对位于$(x_0,y_0,-z_0)$的负电极$-q$,分别在$(-x_0,y_0,-z_0)$,$(x_0,-y_0,-z_0)$,$(-x_0,-y_0,-z_0)$设置像电荷$-q$.所有这 8 个点电荷产生的电势,可满足上述全部定解条件.

2.18 一半径为 R_0 的球面,在球坐标$0<\theta<\pi/2$ 的半球面上电势为 φ_0,在 $\pi/2<\theta<\pi$ 的半球面上电势为$-\varphi_0$,求空间各点的电势.

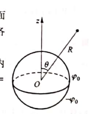

图 2.5 (2.18 题)

【解】以球心为坐标原点,对称轴为 z 轴,如图 2.5.球内电势 φ_1,球外电势 φ_2 均满足方程$\nabla^2\varphi=0$,由轴对称性及 $R=0$,φ_1 有限,$R\to\infty,\varphi_2\to0$ 的条件,有

$$\varphi_1=\sum_{n=1}^\infty a_nR^nP_n(\cos\theta),\quad\varphi_2=\sum_{n=1}^\infty\frac{b_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)\tag{1}$$

在球面即 $R=R_0$ 处

$$0<\theta<\pi/2,\quad\varphi_2=\varphi_1=\varphi_0$$

$$\pi/2<\theta<\pi,\quad\varphi_2=\varphi_1=-\varphi_0\tag{2}$$

函数 $f(x)=f(\cos\theta)$在区间$-1\leqslant x\leqslant+1$,即 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 展开为级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^\infty C_nP_n(\cos\theta)=\sum_{n=0}^\infty C_nP_n(x)\tag{3}$$

时,其系数为

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)P_n(x)dx\tag{4}$$

于是对级数 φ_1,由条件(2),有

$$a_nR_0^n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi_1(x)P_n(x)dx$$

$$=\frac{2n+1}{2}\left[\int_0^{+1}\varphi_0P_n(x)dx-\int_{-1}^0\varphi_0P_n(x)dx\right]$$

$$=(2n+1)\varphi_0\int_0^1P_n(x)dx\tag{5}$$

由勒让德多项式的递推关系

$$\frac{d}{dx}[P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)]=(2n+1)P_n(x)\tag{6}$$

$$\int_0^1P_n(x)dx=\frac{1}{2n+1}[P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)]_0^1$$

$$=\frac{1}{2n+1}[P_{n+1}(1)-P_{n+1}(0)-P_{n-1}(1)+P_{n-1}(0)]\tag{7}$$

当 n 为任意整数时 $P_n(1)=0$;当 n 为奇数时 $P_n(0)=0$,当 n 为偶数时

$$P_n(0)=(-1)^{n/2}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot n}$$

于是(5)式中的积分

$$\int_0^1P_n(x)dx=0\quad(n\text{ 为偶数})$$

$$\int_0^1P_n(x)dx=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(n-2)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(n+1)}\quad(n\text{ 为奇数})\tag{8}$$

$$\text{即 }a_n=(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2n+1)\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(n-2)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(n+1)}\frac{\varphi_0}{R_0^n}\quad(n\text{ 仅为奇数})$$

将上式的 n 改写为 $2n+1$,因而对任意整数 n,有

$$a_{2n+1}=(-1)^n(4n+3)\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}\frac{\varphi_0}{R_0^{2n+1}}\tag{9}$$

同样将(1)两式中的 n 改写为 $2n+1$,并由 $R=R_0$ 处 $\varphi_1=\varphi_2$,得 φ_2 的系数

$$b_{2n+1}=a_{2n+1}R_0^{4n+3}\tag{10}$$

最后得球内外两区域的电势:

$$\varphi_1=\sum_{n=0}^\infty A_n\left(\frac{R}{R_0}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(\cos\theta)\quad(R<R_0)\tag{11}$$

$$\varphi_2=\sum_{n=0}^\infty A_n\left(\frac{R_0}{R}\right)^{2n+2}P_{2n+1}(\cos\theta)\quad(R>R_0)\tag{12}$$

其中 $A_n=a_{2n+1}R_0^{2n+1}$,a_{2n+1} 由(9)式给出.(12)式中 $n=0$ 为偶极项,$n=1$ 为八极项……

2.19 上题能用格林函数求解吗?结果如何?

【解】这问题给定的边界条件是球面 S 的电势,故应选择第一类边值问题的格林函数,即在球面 S 上 $G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})=0$.球空间格林函数

$$G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{(RR'/R_0)^2+R_0^2-2RR'\cos\alpha}}\right]\tag{1}$$

满足 $R'=R_0$ 处 $G=0$,其中 α 是场点位矢 $\boldsymbol{x}$ 与单位点源位矢 $\boldsymbol{x}'$之间的夹角:

$$\cos\alpha=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')\tag{2}$$

(R,θ,ϕ)与(R',θ',ϕ')分别是场点和点源的坐标.因球内电荷体密度 $\rho=0$,由(2.25)式,球内任一点的电势由积分

$$\varphi(\boldsymbol{x})=-\varepsilon_0\oint_S\varphi(\boldsymbol{x}')\frac{\partial G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})}{\partial R'}dS'\tag{3}$$

给出,积分面是 $R'=R_0$ 的球面.球内任一场点到球心的距离 $R\leqslant R'$,故有 $RR'\leqslant R_0^2$,而轴对称下的球函数加法公式为

$$P_n(\cos\alpha)=P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta')=P_n(x)P_n(x')\tag{4}$$

因此格林函数(1)可展开为

$$G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^\infty\left[\frac{R^n}{R'^{n+1}}-\frac{R^2R'^2}{R_0^{2n+1}}\right]P_n(x)P_n(x')\tag{5}$$

于是有

$$\frac{\partial G}{\partial R'}\bigg|_{R'=R_0}=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^\infty(2n+1)\frac{R^n}{R_0^{n+2}}P_n(x)P_n(x')\tag{6}$$

球面元 $dS'=R_0^2\sin\theta'd\theta'd\phi'=-R_0^2dx'd\phi'$,球面 S 上给定的边值为:$0\leqslant x'\leqslant1$ 处 $\varphi=\varphi_0$,$-1\leqslant x'\leqslant0$ 处 $\varphi=-\varphi_0$,于是由(3)式,得球内任一点的电势

$$\varphi_1=2\pi\varepsilon_0R_0^2\left[\int_{+1}^0\varphi_0\frac{\partial G}{\partial R'}dx'-\int_0^{-1}\varphi_0\frac{\partial G}{\partial R'}dx'\right]$$

$$=-4\pi\varepsilon_0R_0^2\varphi_0\int_0^1\frac{\partial G}{\partial R'}dx'\tag{7}$$

$$=\varphi_0\sum_{n=0}^\infty(2n+1)\left(\frac{R}{R_0}\right)^nP_n(x)\int_0^1P_n(x')dx'$$

对 $P_n(x')$的积分已由上题(8)式给出,同样将其中的 n 改为 $2n+1$,便得到