

Středoškolská odborná činnost
Obor č. 2: Fyzika

Mechanika rodn planetek
s aplikací na rodnun Eunomia

Středoškolská odborná činnost
Obor č. 2: Fyzika

Mechanika rodn planetek
s aplikací na rodn Eunomia

Asteroid families mechanics
with application to the family Eunomia

Autoři: Adam Křivka
Škola: Cyrilometodějské gymnázium a střední odborná škola pedagogická Brno,
Lerchova 63, 602 00 Brno
Kraj: Jihomoravský kraj
Konzultant: doc. Mgr. Miroslav Brož, Ph. D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci SOČ vypracoval/a samostatně a použil/a jsem pouze prameny a literaturu uvedené v seznamu bibliografických záznamů.

Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce SOČ jsou shodné.

Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších předpisů.

V Brně dne 18. února 2019

Poděkování

Jednoznačně největší díky patří mému školiteli panu docentu Brožovi, který mě svým důsledným a pečlivým přístupem naučil mnoho témat z nebeské mechaniky a fyziky sluneční soustavy a jak pracovat s daty z katalogů a simulací. Také bych mu chtěl poděkovat za nesčetné komentáře a poznámky k této práci a za poskytnutí prostorů k vytváření práce na Astronomickém ústavu Univerzity Karlovy v Praze.

Dále bych chtěl poděkovat svému gymnázium, které mi vždy vytvářelo příjemné a rodinné zámezí. Zvláště bych chtěl poděkovat mé paní profesorce matematiky Veronice Svobodové, která mě již od nižšího gymnázia vedla jak k matematice, tak k obecnému snažení, například při psaní této práce.

Tato práce vznikla pomocí sázecího programu \LaTeX , ilustrační obrázky byly vytvořeny pomocí programu vektorové grafiky *Asymptote*, k analýze dat byly použity převážně programovací jazyky *Python* a *bash* a k jejich zobrazení volně dostupný grafovací program *Gnuplot*.

Anotace

Úkolem této práce je s vybudováním nutných znalostí popsat mechaniku rodin planetek — problém N těles, gravitační a negravitační jevy ovlivňující jejich vývoj, způsoby jejich identifikace a analýzy. Hlavní částí této práce je simulace 6210 částic pomocí integračního balíčku SWIFT. Porovnáním pozorovaných dat z nejnovějších katalogů se syntetickými popíšeme dynamickou strukturu a diskutujeme stáří rodiny Eunomia.

Klíčová slova

fyzika sluneční soustavy, nebeská mechanika, dynamika, problém N těles, simulace, planetky, negravitační síly

Annotation

The goal of this work is, building the necessary knowledge, to describe the mechanics of asteroid families — N -body problem, gravitational and non-gravitational forces influencing their development, methods of identification and analysis. The main part of this work is simulating 6210 particles using the integration package SWIFT. By comparison of the observed data from the newest catalogues with synthetic ones, we describe the dynamical structure and discuss the age of the Eunomia family.

Keywords

Solar System physics, celestial mechanics, dynamics, N -body problem, simulation, asteroids, non-gravitational forces

Obsah

1	Úvod	8
1.1	Struktura práce	9
2	Nebeská mechanika	10
2.1	Pohybové rovnice	10
2.1.1	Rovnice pro dvě tělesa	11
2.1.2	Rovnice pro N těles	16
2.2	Orbitální elementy	20
2.2.1	Oskulační elementy	20
2.2.2	Střední elementy	22
2.2.3	Vlastní elementy	22
3	Planetky ve sluneční soustavě	24
3.1	Hlavní pás planetek	27
3.2	Rezonance	28
3.2.1	Rezonance středního pohybu	28
3.2.2	Sekulární rezonance	29

3.3	Rodiny planetek	30
3.3.1	Metody identifikace rodin	31
3.3.2	Nevratné děje při vývoji	31
4	Vlastnosti rodiny Eunomia	35
4.1	Identifikace členů	35
4.1.1	Přimísená tělesa	36
4.2	Fyzikální model pro rodinu Eunomia	40
4.2.1	Rozdělení velikostí (Size frequency distribution)	40
4.2.2	Rozdělení v prostorech (a, e) a $(a, \sin I)$	40
4.3	Simulace orbitálního vývoje	42
4.3.1	Dlouhodobé simulace	43
4.4	Porovnání simulace a pozorování	43
4.5	Odhad stáří	47
5	Závěr	51
	Přílohy	56
A	Ilustrace Eulerovy metody ve vektorové grafice v jazyce <i>Asymptote</i>	57
B	Výpočet Keplerovy rovnice pomocí iterační metody	61
C	Výpočet polohy tělesa z oskulačních elementů	62
D	Skripty k vytvoření obrázků výsledků simulace v prostoru (a, e)	65

Kapitola 1

Úvod

Planetky (někdy nepřesně označovány jako asteroidy) jsou nejpočetnější skupinou těles ve sluneční soustavě a svým způsobem také nejpodstatnější a nejzajímavější. První planetka byla objevena v roce 1801 italským matematikem Giuseppem Piazzim (1746–1826) [1], touto „planetkou“ byl Ceres, který je ale v dnešní době již považován za trpasličí planetu. Dnes je již známo přes půl milionu planetek (konkrétně katalog použitý v této práci citebroz18??? obsahuje 524 138 vstupů).

Pod pojmem rodina planetek rozumíme skupinu planetek vzniklou rozpadem stejného mateřského tělesa, který byl způsoben srážkou s jiným tělesem. Poprvé si těchto skupin všiml v roce 1918 japonský astronom Kiyotsugu Hirayama (1874–1943) [2], po němž jsou mimo jiné pojmenovány tzv. „Hirayamovy rodiny“, mezi které patří Themis, Koronis a Eos, později také Flora a Maria, naši rodinu Eunomia bohužel Hirayama nepozoroval.

Studiem těchto kolizních rodin můžeme zjistit mnoho informací o vzniku sluneční soustavy a její dynamické struktuře. Dále jimi můžeme podpořit teorii o *Velkém pozdním bombardování* (LHB — *Late Heavy Bombardment*), která říká, že před přibližně 4,1 až 3,8 miliardami let došlo migraci planet (Neptun se prohodil s Uranem), která způsobila difuzi těles na okraji sluneční soustavy, jenž nato začala bombardovat vnitřní sluneční soustavu (viz krátery na Měsíci).

1.1 Struktura práce

V následující kapitole 2 vybudujeme nutné matematicko–fyzikální znalosti k pochopení samotného předmětu výzkumu, který je popsán v kapitole 4. Prostřední kapitola 3 je věnována obecným informacím o planetkách a rodinách planetek ve sluneční soustavě a k jejímu pochopení není první kapitola nezbytná, ačkoliv k porozumění samotného výzkumu je nutné znát kapitoly obě. V závěru shrnujeme naše počínání včetně zmínění možností zlepšení práce či budoucího výzkumu. Na úplném konci dokumentu se nachází bibliografie a přílohy obsahující vybrané zdrojové kódy, použité k vytvoření této práce.

Kapitola 2

Nebeská mechanika

Nebeská mechanika se zabývá pohybem těles ve vesmíru a její studium je stěžejní k pochopení různých dějů ve sluneční soustavě — od vzniku prvních planet po dráhu kosmických sond. Své počátky má v astronomii, kterou se lidé zabývali už v dávných dobách, kdy se snažili vysvětlit pohyb hvězd po obloze. Největší rozvoj této disciplíny však započal až ve středověku, kdy Isaac Newton (1642–1726) v roce 1687 poprvé definoval pohybové zákony a gravitační zákon, na kterých stojí dalo by se říct celá nebeská mechanika. Další významnou událostí byl vzestup počítačů, který umožnil dlouhé simulace sluneční soustavy, čímž bylo zjištěno mnoho nových informací například o formaci planet nebo rodin planetek.

2.1 Pohybové rovnice

Pohybová rovnice je matematicky zapsaný fyzikální vztah, který popisuje možné pohyby těles v daném prostředí [3]. Řešením pohybové rovnice je funkce, popisující polohu a rychlost každého zkoumaného tělesa v závislosti na čase. Přitom potřebujeme znát počáteční podmínky — polohy a rychlosti těles na začátku. Pohybová rovnice bývá ve tvaru diferenciální rovnice, což je rovnice, která vyjadřuje vztah mezi nějakou funkcí a jejími derivacemi¹.

V následující části se pokusíme nalézt řešení pohybové rovnice pro tělesa ve sluneční sou-

¹Derivace označuje okamžitou změnu hodnoty funkce při velmi malé změně argumentu, v našem případě času.

stavě. Zákony, jimiž se budou naše tělesa řídit, jsou již zmíněné Newtonovy pohybové zákony a Newtonův gravitační zákon.

2.1.1 Rovnice pro dvě tělesa

Omezme se nyní na dvě tělesa a nalezneme řešení tzv. problému dvou těles — Keplerovy úlohy. To znamená, že se pokusíme odvodit funkci, popisující polohu a rychlost obou těles v závislosti na čase.

Nacházíme se v inerciální vztažné soustavě, což je taková vztažná soustava, kde platí první Newtonův zákon. Jako bod v klidu si zvolme těžiště soustavy. Pro síly působící na obě tělesa podle Newtonova gravitačního zákona a druhého a třetího pohybového zákona platí

$$\vec{F}_1 = +G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = m_1 \vec{a}_1, \quad (1)$$

$$\vec{F}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = m_2 \vec{a}_2, \quad (2)$$

kde G označuje gravitační konstantu, m_1, m_2 hmotnosti zkoumaných těles, \vec{a}_1, \vec{a}_2 vektory² zrychlení těles (tj. druhé derivace polohových vektorů \vec{r}_1, \vec{r}_2 podle času) a \vec{r} vektor udávající vzájemnou polohu těles, definovanou jako $\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Sečtením obou rovnic dostáváme

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = \vec{0}. \quad (3)$$

Vektor popisující polohu těžiště soustavy je $\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$. Jeho druhou derivací podle času dostáváme zrychlení

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2} = \vec{0}, \quad (4)$$

které se podle (3) rovná nule, takže se těžiště soustavy pohybuje konstantní rychlostí.

Nyní se však přesuňme do soustavy neinerciální, kde je první z těles (běžně to hmotnější) nehybné. Označme $\vec{a} \equiv \vec{a}_2 - \vec{a}_1$ zrychlení druhého tělesa vzhledem k prvnímu. Po pokračení

²Připomeňme, že vektor je veličina, která velikost i směr. Je určen souřadnicemi, které jsou v této práci podle kontextu dvourozměrné x, y nebo trojrozměrné x, y, z .

m_1 a m_2 můžeme odečíst upravenou rovnicí (1) od upravené rovnice (2), čímž dostaneme

$$\begin{aligned}\vec{a}_2 - \vec{a}_1 &= -Gm_1 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \\ \vec{a} &= -G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} &= \vec{0}.\end{aligned}\tag{5}$$

Často ještě definujeme gravitační parametr soustavy $\mu \equiv G(m_1 + m_2)$.

I přesto, že tato diferenciální rovnice ještě není ve své konečné podobě vhodná k tomu, abychom z ní odvodili následující vztah, prozradíme, že je jím funkce v polárních souřadnicích, popisující vzdálenost těles $r \equiv |\vec{r}|$ v závislosti na *pravé délce* θ , což je úhel, který svírá přímka procházející oběma tělesy a nějaká zvolená referenční přímka, přesné odvození viz [4].

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)}.\tag{6}$$

Vztah (6) je obecným předpisem kuželosečky — hyperboly, paraboly, elipsy nebo kružnice; pro naše účely se zaměříme na případ elipsy, kdy se v jednom z jejích ohnisek nachází centrální těleso.

Veličina p označuje *parametr elipsy*, jehož velikost je určena hodnotou μ a veličinou $h = |\vec{h}| \equiv \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \text{konst.}$ ³, kde \times značí vektorový součin, jako

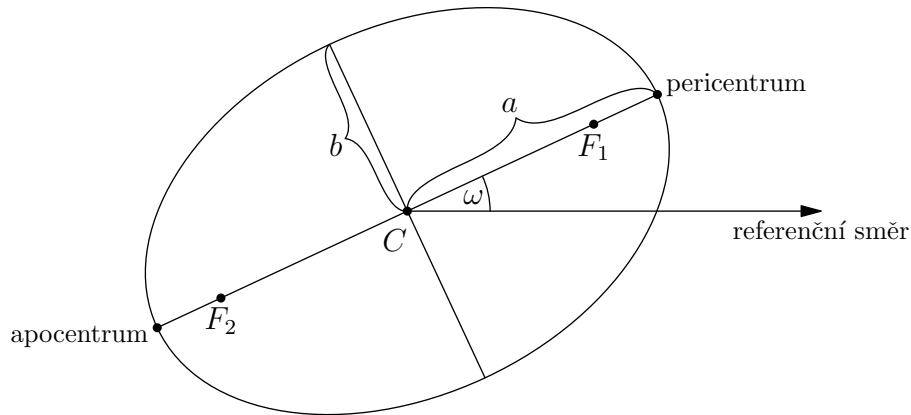
$$p = \frac{h^2}{\mu},\tag{7}$$

a pro který dále platí geometrický vztah

$$p = \frac{b^2}{a},\tag{8}$$

kde a označuje délku hlavní poloosy, což je úsečka spojující střed elipsy s jedním z průsečíků elipsy s hlavní osou — přímkou spojující ohniska, a b délku vedlejší poloosy, což je úsečka spojující střed elipsy s průsečíkem elipsy s přímkou kolmou na hlavní poloosu a procházející

³což je „něco jako“ moment hybnosti systému na jednotku hmotnosti μ . Vycházíme z předpokladu, že síly působící mezi tělesy (né nutně splňující Newtonův gravitační zákon) jsou stejně velké a působí proti sobě, tedy $\vec{r} \times \vec{a} = \vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = 0$, z čehož integrací vzhledem k času můžeme vyvodit právě $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{h}$, kde \vec{h} je vektor kolmý na rovinu obíhání těles.



Obrázek 2.1: Eliptická oběžná dráha vesmírného tělesa. Veličina a označuje délku hlavní poloosy, b délku vedlejší poloosy, ω argument pericentra, C střed elipsy, F_1 a F_2 polohy ohnisek elipsy, přičemž centrální těleso se nachází v bodě F_1 a pericentrum, resp. apocentrum označují body nejmenší, resp. největší vzdálenosti od centrálního tělesa.

středem elipsy — vedlejší osou (viz obrázek 2.1).

Dále e , resp. ω jsou integrační konstanty a nazývají se *excentricita* (česky *výstřednost*), resp. *argument pericentra*. Pro excentricitu platí vztah

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad (9)$$

a volně řečeno udává, jak moc se elipsa liší od kružnice. Hodnota excentricity se pro eliptické dráhy nachází v intervalu $(0, 1)$, kde krajními případy jsou $e = 0$: dráha má tvar kružnice, a $e = 1$: dráha má tvar úsečky.

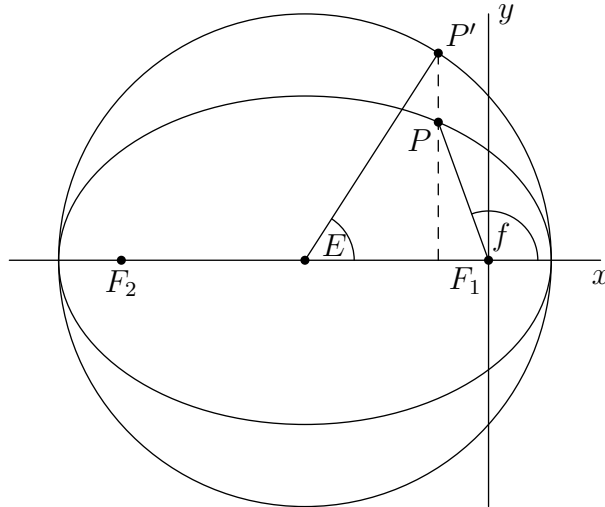
Argument pericentra ω je úhel, který svírá hlavní osa s referenční přímkou. Platí pro něj vztah

$$\theta = \omega + f, \quad (10)$$

kde f označuje *pravou anomálii*, což je úhel, který svírá hlavní osa s průvodičem tělesa (viz obrázek 2.2).

Uvědomme si, že jsme neodvodili závislost polohy tělesa na čase. Tuto závislost určuje Keplerova rovnice

$$M = E + e \sin E, \quad (11)$$



Obrázek 2.2: Ilustrace vztahu mezi excentrickou anomálií E a pravou anomálií f . Veličiny a , resp. b značí délku hlavní, resp. vedlejší poloosy, P značí polohu tělesa na elipse, P' průsečík P na kružnici opsané, C střed elipsy a F_1, F_2 ohniska elipsy

kde M označuje *střední anomálii*, E *excentrickou anomálii* (viz obrázek 2.2) a e excentricitu elipsy. Pro excentrickou anomálii E a pravou anomálii f platí vztah

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (12)$$

Anomálie mají úhlové jednotky, úhel M ale nemůžeme zkonstruovat, nicméně je významný tím, že je lineárně závislý na čase, neboť je určen vztahem

$$M = nt, \quad (13)$$

kde n označuje *střední pohyb*, jinak řečeno průměrnou úhlovou rychlost⁴, pro kterou platí

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}}, \quad (14)$$

kde T označuje *dobu oběhu*. Tento vztah lze lehce odvodit z Třetího Keplerova zákona, viz 2.1.1.

Pokud známe excentrickou anomálii E , můžeme pomocí Keplerovy rovnice snadno spočítat střední anomálii M . Problém spočívá v tom, že Keplerova rovnice je transcendentní, tedy nemůžeme vyjádřit E v závislosti na M konečným výrazem, ale pouze nekonečnou řadou

⁴ve středoškolském prostředí obvykle značenou jako ω

nebo jej můžeme aproximovat iteračními nebo numerickými metodami. Řešení Keplerovy rovnice pomocí iterační metody lze nalézt v příloze B.

Keplerovy zákony

Nemůžeme opomenout Keplerovy zákony, které empiricky dokázal Johannes Kepler (1571–1630) a z pohybových rovnic odvodil Newton (1687). Jejich úplné znění, dle [5], je

1. Keplerův zákon

Planety obíhají kolem Slunce po eliptických drahách, v jejichž jednom společném ohnisku je Slunce.

2. Keplerův zákon

Obsahy ploch opsaných průvodičem planety (tj. spojnice planety a Slunce) za stejný čas jsou stejně velké.

3. Keplerův zákon

Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je stejný jako poměr třetích mocnin jejich hlavních poloos.

Odvoďme třetí z těchto zákonů, neboť tím dokážeme vztah (14). Pro jednoduchost se omezme na kruhové oběžné dráhy a situaci, kdy je $m_1 \gg m_2$. Krom Newtonova gravitačního zákona budeme ještě potřebovat vztah pro dostředivou sílu, potřebnou pro obíhání po kružnici

$$F_d = \frac{m_2 v^2}{r}, \quad (15)$$

kde v označuje rychlost vzhledem k centrálnímu tělesu, r vzdálenost od centrálního tělesa (v případě kruhových drah tedy $r = a$, kde a označuje hlavní poloosu) a m_2 hmotnost obíhajícího tělesa. Protože dostředivá síla se zde rovná síle gravitační, platí

$$\frac{m_2 v^2}{r} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (16)$$

odkud

$$v^2 = \frac{G m_1}{r}, \quad (17)$$

kde m_1 označuje hmotnost centrálního tělesa. Dále platí vztah mezi úhlovou a obvodovou rychlostí $v = \omega r$, který můžeme z definice $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (podle označení v rovnici (14) platí $\omega = n$) dále upravit jako

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \quad (18)$$

odkud vyjádříme T a dosadíme (17), čímž dostaneme

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{Gm_1}{r}}}, \quad (19)$$

neboli

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{Gm_1}. \quad (20)$$

Dosazením $r = a$ a menší úpravou dostáváme

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_1} = \text{konst.}, \quad (21)$$

což je přibližný tvar třetího Keplerova zákona; poměr T^2/a^3 je určen pouze konstantami π a G a hmotností centrálního tělesa, je tedy pro všechna tělesa obíhající stejné centrální těleso stejně velký. Pokud bychom vyšli z přesné pohybové rovnice (5), obdrželi bychom ve jmenovateli $G(m_1 + m_2)$.

2.1.2 Rovnice pro N těles

Jak vidíme, už i pro dvě tělesa se musíme k získání polohy tělesa v čase uchýlit k numerickým metodám. Ukazuje se, že obecný problém N těles je analyticky neřešitelný⁵ a jediné aplikovatelné metody jsou metody přibližné analytické nebo numerické.

Uvažujme nyní N těles — respektive hmotných bodů, které na sebe vzájemně gravitačně působí v souladu s Newtonovým gravitačním zákonem. Pro libovolné těleso, označené indexem $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, je celková síla F_i , která na něj působí, výslednicí všech gravitačních

⁵Existují ale zajímavá speciální řešení, viz [6].

sil způsobených ostatními tělesy, jak ukazují následující rovnice

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad (22)$$

$$\vec{a}_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad \text{pro } i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (23)$$

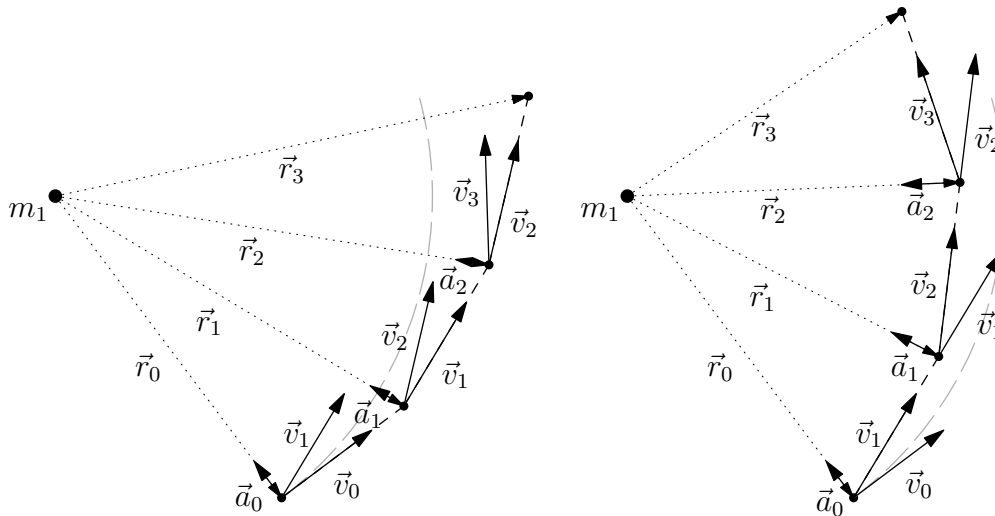
kde $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ označuje vektor určující vzájemnou polohu těles i a j , konkrétně jde o vektor s počátkem v tělese j a koncem v tělese i ; ostatní veličiny jsou definované analogicky jako v předchozí části. Dostáváme tedy soustavu N diferenciálních rovnic ve tvaru (23), kterou vyřešíme numericky.

Eulerova metoda

I přesto, že se následující integrační metoda v přesných numerických výpočtech zřídka používá, uvádíme ji zde z didaktických důvodů, neboť názorně ilustruje použití numerických metod pro řešení problému N těles. Jak název napovídá, poprvé s ní v 18. století přišel švýcarský matematik Leonhard Euler (1707–1783).

Princip algoritmu spočívá v tom, že v libovolném čase t můžeme z (23) vypočítat zrychlení každého tělesa. Pak, po zvolení určitého časového kroku h , odpovídajícím způsobem změním vektor rychlosti. Následně necháme všechna tělesa po dobu časového kroku pohybovat se po přímkách konstantní rychlostí. Existují dvě verze Eulerovy metody, dopředná a zpětná, které se liší volbou rychlosti, se kterou necháváme tělesa pohybovat se po přímkách, viz následující přesný popis obou metod a obrázek 2.3.

Mějme zmiňovaných N hmotných bodů, pro které platí (23). Zaměříme se na jeden z nich a označme jeho počáteční polohu $\vec{r}(t_0) \equiv \vec{r}_0$ a počáteční rychlost $\vec{v}(t_0) \equiv \vec{v}_0$. K použití Eulerovy metody potřebujeme znát i počáteční polohy a rychlosti všech ostatních těles v systému. Dále vhodně zvolme velikost časového kroku h . V následujících třech krocích si ukážeme jednu iteraci algoritmu jak pro dopřednou, tak pro zpětnou metodu.



Obrázek 2.3: Ilustrace dopředné (vlevo) a zpětné (vpravo) Eulerovy metody pro dvě tělesa, kdy větší těleso (velká tečka vlevo nahoře) gravitačně působí na menší těleso (malé tečky vpravo). Jsou ukázány první tři iterace. Algoritmus byl doopravdy implementován, s počátečními hodnotami: $h = 20$ dnů, $m_1 = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $|\vec{r}_0| = 1 \text{ AU}$, $v_0 = 29861 \text{ m s}^{-1}$. Vektory jsou vhodně škálované. Šedá křivka znázorňuje analytické řešení problému dvou těles. K nakreslení obrázku byl použit programovací jazyk *Asymptote*, viz příloha A.

1. Nechť je v čase t_k poloha zvoleného bodu $\vec{r}(t_k)$ a rychlost $\vec{v}(t_k)$. Z (23) vypočítáme zrychlení $\vec{a}(t_k)$.
2. Položme $t_{k+1} = t_k + h$ a vypočítejme $\vec{v}(t_{k+1}) = \vec{v}(t_k) + h \vec{a}(t_k)$.⁶
3. Pro dopřednou metodu počítejme $\vec{r}(t_{k+1})$ jako $\vec{r}(t_{k+1}) = \vec{r}(t_k) + h \vec{v}(t_k)$ a pro zpětnou jako $\vec{r}(t_{k+1}) = \vec{r}(t_k) + h \vec{v}(t_{k+1})$. Poté se vraťme ke kroku 1, tentokrát počítaje v čase t_{k+1} .

Jak můžeme vidět na obrázku 2.3, vypočtená dráha se od té analytické značně vzdaluje. To by samozřejmě řešila volba menší kroku h , ale pro velký počet těles N a velký počet kroků je algoritmus příliš pomalý.

Jedno z možných vylepšení je volně řečeno průměrování dopředné a zpětné Eulerovy metody — „leapfrog“ metoda. Spočívá v tom, že rychlost počítáme v jedné polovině časového kroku, ne na konci nebo na začátku. Další zpřesnění lze získat také tak, že místo pohybu

⁶Můžeme porovnat se vzorcem pro rovnoměrný přímočarý pohyb, dobře známým ze středoškolského učiva: $v = v_0 + at$, podobně v kroku 3: $s = s_0 + vt$.

po přímce konstantní rychlostí použijeme lokální eliptickou dráhu, kterou získáme, když zanedbáme všechna ostatní tělesa a uvažíme pouze centrální těleso, resp. uijeme Jacobiho souřadnice, viz [7]. Tato integrační metoda se již podobá algoritmu Wisdom–Holman Mapping, jehož ještě zlepšenou verzi využívá integrační balíček SWIFT [8], který budeme v této práci používat. Nutno dodat, že v námi užitém algoritmu ještě započítáváme negravitační jevy, jako Jarkovského jev, YORP jev a náhodné srážky, viz [9].

2.2 Orbitální elementy

Pro popis oběžné dráhy určitého tělesa zavedeme šest keplerovských elementů dráhy, které budeme v pozdějších sekcích používat při analýze rodin planetek. V kap. 2.1.1 jsme odvodili obecnou rovnici kuželosečky zapsanou v polárních souřadnicích. Ve sluneční soustavě se však s jinými, než s eliptickými dráhami setkáme jen výjimečně⁷, budeme tedy definovat elementy dráhy pouze pro dráhu eliptickou.

2.2.1 Oskulační elementy

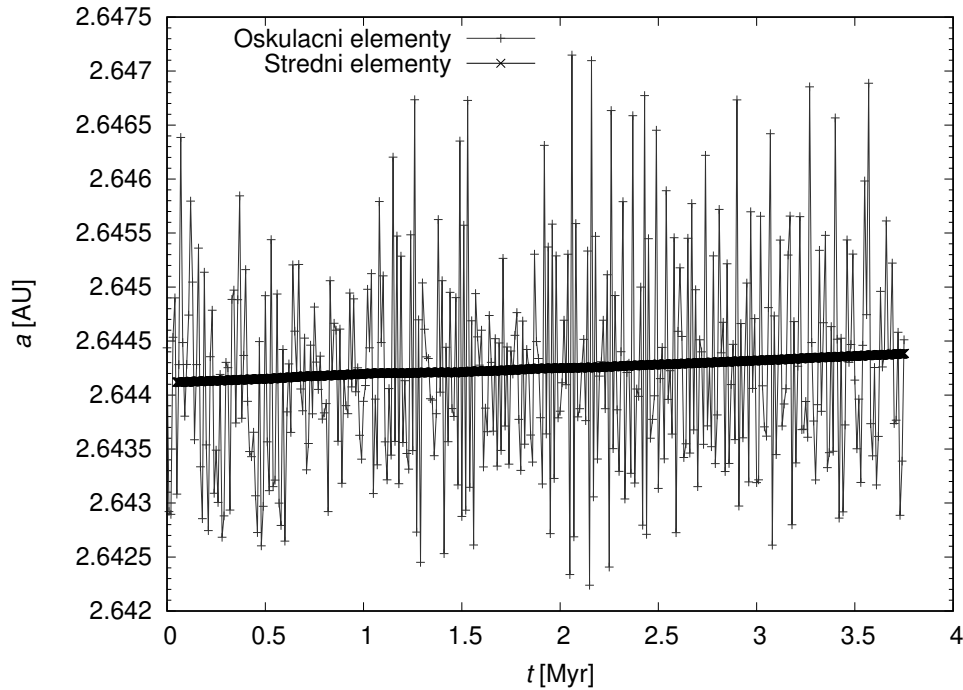
Oskulační elementy popisují takovou oběžnou dráhu tělesa, po které by se pohybovalo kolem centrálního tělesa v problému dvou těles — tedy po zanedbání všech ostatních těles (planet, měsíců, ...) i negravitačních sil. Svým způsobem tedy zachycují momentální stav tělesa v rámci celé soustavy, je tudíž nutno s nimi uvádět i příslušný časový údaj — epochu. Neustále se mění působením perturbací, což jsou jakékoli vnější síly působící na těleso, jiné než gravitační síla centrálního tělesa — např. gravitace ostatních planet, sférický tvar centrálního tělesa či Jarkovského jev (viz 3.3.2).

Prvními dvěma elementy jsou hlavní poloosa a excentricita, které určují základní tvar elipsy (viz obrázek 2.1). Hlavní poloosu značíme a a při studiu sluneční soustavy tento údaj většinou udáváme v astronomických jednotkách — AU, přičemž $1 \text{ AU} = 149\,597\,870 \text{ km}$, což odpovídá přibližně střední vzdálenosti Slunce a Země. Excentricita udává „výstřednost“ elipsy; již jsme si ji definovali v 2.1.1.

Dalšími dvěma elementy jsou argument pericentra ω a střední anomálie M (viz 2.1.1), které udávají polohu tělesa v rovině oběžné dráhy. Referenční polopřímku je průsečnice roviny dráhy s referenční rovinou — ekliptikou, přesněji řečeno je to polopřímka s počátečním bodem v poloze centrálního tělesa a pomocným bodem ve vzestupném uzlu, což je bod, ve kterém těleso prochází referenční rovinou „zespodu nahoru“. Střední anomálie je určena vztahem (13) a udává samotnou polohu tělesa na elipse.

Poslední dvojice elementů, sklon i a délka vzestupného uzlu Ω , udává polohu roviny oběžné dráhy v prostoru. Sklon dráhy (též inklinace) je orientovaný úhel, který svírá rovina dráhy

⁷Např. sondy Pioneer, Voyager, New Horizons mají hyperbolické oběžné dráhy (opouštějí sluneční soustavu).



Obrázek 2.4: Porovnání hlavní poloosy oskulační a_o a střední a_m pro simulaci jedné planety po dobu 3,76 miliónů let. Pro oskulační elementy je zde vidět problém *aliasingu* — vzorkovací frekvence oskulačních elementů je menší než frekvence, se kterou se oskulační elementy mění, což může na grafu způsobit zdánlivý periodický vývoj s delším periodou než v realitě.

vzhledem k ekliptice. Většinou se udává ve stupních (nebo v radiánech), někdy se ale uvádí $\sin i$, což je ekvivalentní definice, protože pro interval $-90^\circ \leq i \leq 90^\circ$ je $\sin i$ jednoznačně určen. Délka vzestupného uzlu je orientovaný úhel, který svírá spojnice centrálního tělesa s vzestupným uzlem s referenčním směrem v rovině ekliptiky, za který se ve sluneční soustavě bere směr k jarnímu bodu, což je jeden z průsečíků ekliptiky s rovinou zemského rovníku, jinak řečeno poloha Slunce vzhledem k Zemi v okamžiku jarní rovnodennosti.

Skutečnost, že elementů je právě šest, není náhoda, existuje totiž výpočet, kterým lze z polohy a rychlosti tělesa v prostoru, tedy z údajů x, y, z, v_x, v_y, v_z , vypočítat elementy dráhy; je tedy logické, že vzniklých údajů musí být zase šest. Pro účely této práce můžete nalézt v příloze C výpočet polohy tělesa x, y, z vzhledem k centrálnímu tělesu z elementů dráhy $a, e, i, \omega, \Omega, M$.

2.2.2 Střední elementy

Střední elementy jsou elementy dráhy zbavené krátkých periodických perturbací, způsobené oběžnými pohyby planet, zejména Jupitera a Saturnu. Pro jejich výpočet z oskulačních elementů lze použít analytické nebo numerické metody, kterými se provádí filtrace a které jsme v naší práci využili.

Střední elementy bývají ovlivněny vlivem rezonancí středního pohybu, což jsou oblasti prostoru, ve kterém když se planetka nachází, tvoří poměr její periody s periodou nějaké jiné planety zlomek s nízkým čitatelem a jmenovatelem (viz 3.2.1).

Pro jejich výpočet nejprve vzorkujeme oskulační elementy po jednom roce, čímž vzhledem k tomu, že oběžná doba zkoumaných planetek je přibližně pět let, nezanedbáváme krátkoperiodické perturbace. Dále použijeme konvoluční filtr, kterým tyto perturbace odstraníme; v balíčku SWIFT je použito Kaiserovo okno [10].

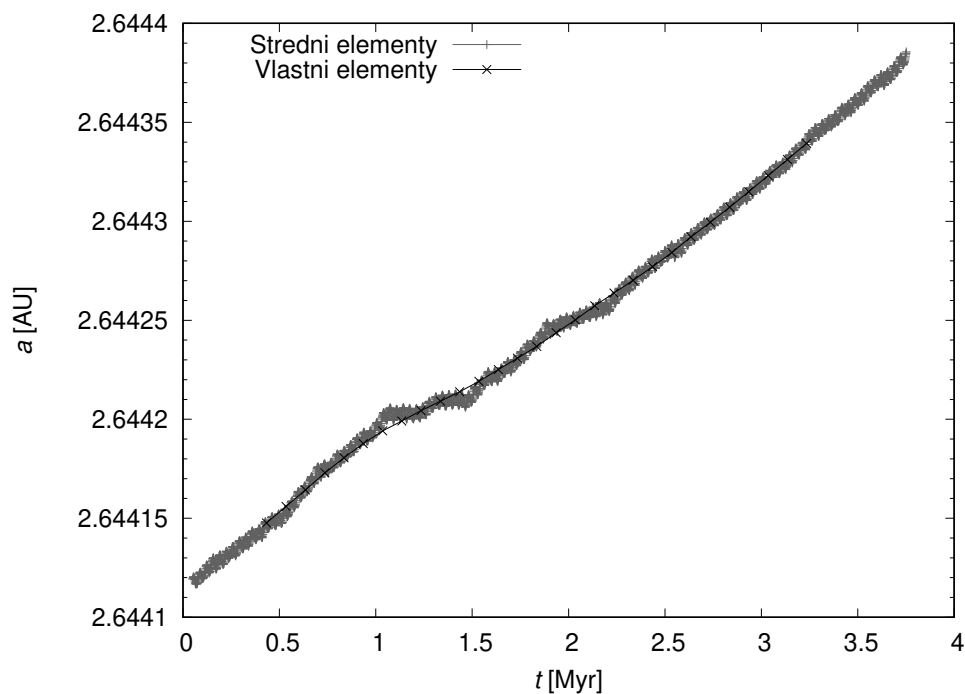
2.2.3 Vlastní elementy

Vlastní elementy jsou elementy dráhy zbavené jak krátkých, tak dlouhých periodických perturbací, mezi které kromě již zmíněných patří navíc sekulární rezonance, které jsou způsobené závislostí frekvencí precese (změny) argumentu perihélia a délky vzestupného uzlu planetky a některé jiné planety nebo i vícero planet.

Vlastní elementy jsou tedy svým způsobem aritmetickými „průměry“ pohybu a jsou téměř neměnné na dlouhém časovém úseku, ačkoliv působením negravitačních sil — především zmiňovaného Jarkovského jevu — se můžou pomalu zvětšovat nebo zmenšovat.

Mezi vlastní elementy počítáme pouze vlastní hlavní poloosu a_p , vlastní excentricitu e_p a vlastní inklinaci i_p . Ostatní elementy nemá cenu uvažovat, protože argument perihélia i délka vzestupného uzlu periodicky precedují (mění se v intervalu 0° až 360°) a střední anomálie je také přibližně lineárně závislá na čase (a to rychleji).

Výpočet vlastních se provádí pomocí Fourierovy analýzy, viz [11].



Obrázek 2.5: Porovnání střední hlavní poloosy a_m a vlastní a_p pro simulaci jedné planetky po dobu 3,76 miliónů let. Lze vidět, že se za tuto dobu vlastní hlavní poloosa planetky zvýšila o $\Delta a \doteq 0.0002 \text{ AU} \doteq 30000 \text{ km}$. Tento vývoj je způsoben Jarkovského jevem (viz 3.3.2), lze z grafu vyvodit, že tato planetka měla *prográdní* rotaci, neboť se její hlavní poloosa zvětšila.

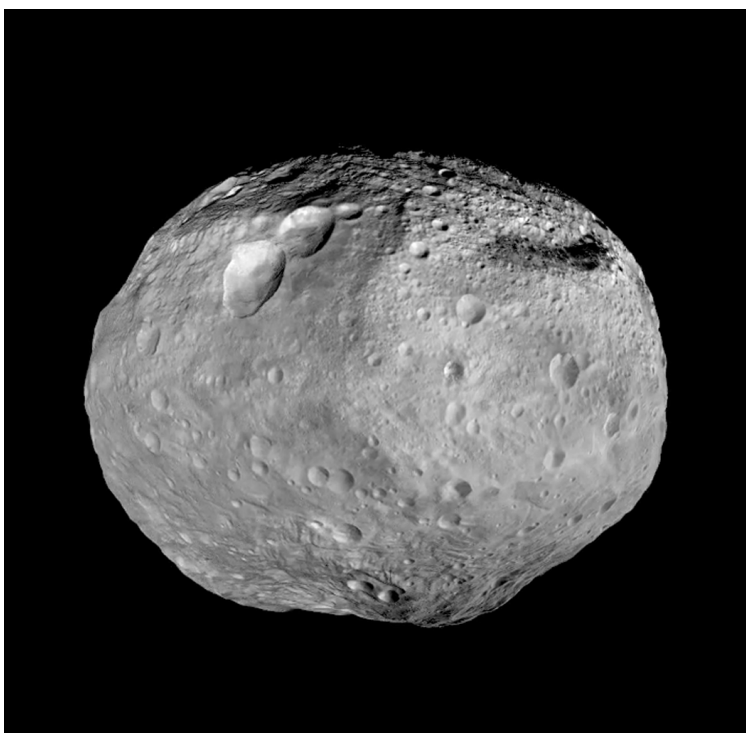
Kapitola 3

Planetky ve sluneční soustavě

Podle Mezinárodní astronomické unie (IAU) se tělesa ve sluneční soustavě dělí především na planety, trpasličí planety, planetky, komety, přirozené satelity. Planeta je definována jako takové těleso, které obíhá kolem Slunce, není měsíc a má dostatečnou hmotnost, aby se ustavil přibližně kulovitý tvar, a „vyčišťovalo“ svoje okolí od ostatních těles. Kometa je pak těleso složené z ledu a prachu, které většinou obíhá Slunce po excentrické dráze, vyhazuje *komu* (atmosféru) a zanechává za sebou *ohon*, což je způsobeno sublimací ledu z komety a strháváním prachu působením slunečního záření. Další skupinou jsou trpasličí planety, kam v tuto chvíli patří pouze pět těles: Ceres, Pluto, Eris, Makemake, Haumea. Dále přirozené satelity jsou tělesa obíhající nějakou jiné těleso, různé od Slunce.

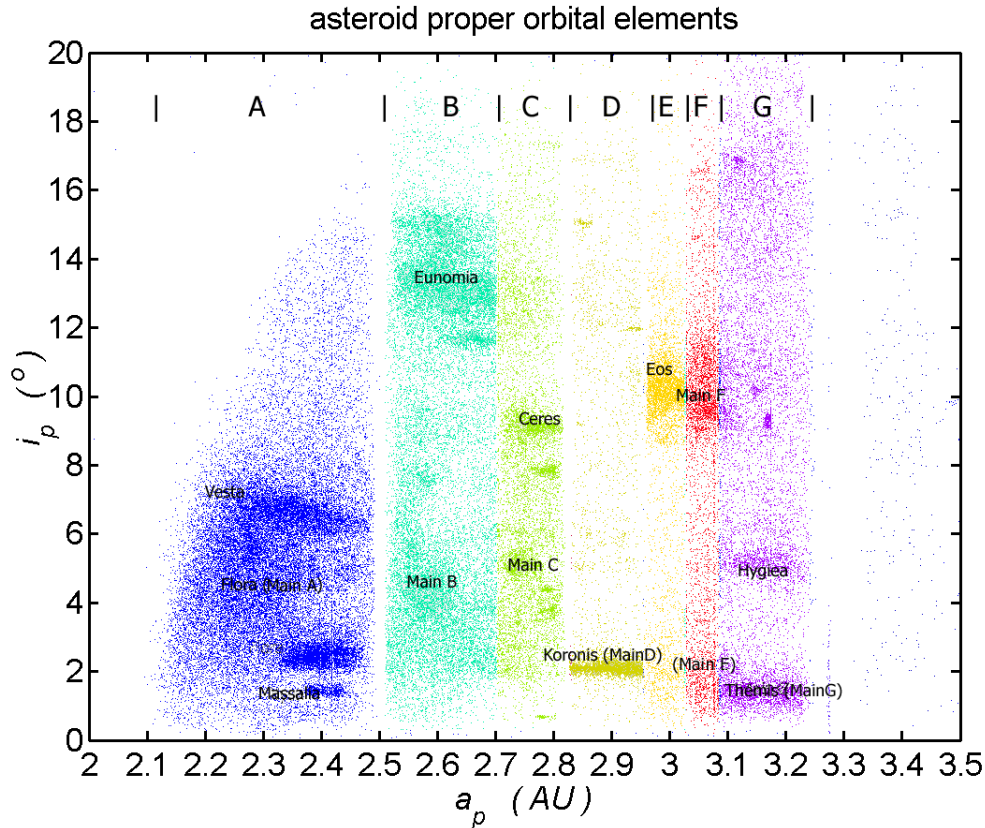
Zbývající skupinou jsou planetky, kam patří transneptunická tělesa (tj. obecný název tělesa, která se pohybují za oběžnou dráhou Neptunu), tělesa hlavního pásu planetek a jiná malá tělesa sluneční soustavy. Planetky můžeme dělit na podle jejich oběžné dráhy na tělesa vnitřní a vnější sluneční soustavy vzhledem k Jupiteru. Největší populace těles vnitřní soustavy se nachází v hlavním pásu, který se nachází přibližně mezi 2,1 AU a 3,3 AU (viz obrázek 3.2. Dále sem spadají také planetky, jejichž oběžná dráha protíná dráhu Marsu nebo Země — blízkozemní planetky, a planetky nacházející se v libračních bodech L4 a L5¹ soustav Slunce–Země, Slunce–Mars, Slunce–Jupiter — tj. příslušní Trojáné. Jako Hildy se označují planetky v rezonanci 3 : 2 s Jupiterem. Dále se předpokládá existence Oortova oblaku, který se má nacházet za hranicí 1 000 AU až do 100 000 AU a který má být zdrojem dlouhoperiodických komet. Žádné těleso z této oblasti však ještě nebylo pozorováno.

¹To jsou takové body, v nichž se vyrovnává působení gravitační a odstředivé síly. Jde tedy o jakýsi bod rovnováhy. Body L4 a L5 se nacházejí na oběžné dráze většího tělesa o 60° „napřed“ nebo „za“ tělesem.



Obrázek 3.1: Planetka (4) Vesta, která je po trpasličí planetě (1) Ceres druhým největším a nehmotnějším tělesem hlavního pásu planetek. Na jižní hemisféře lze pozorovat kráter Rheasylvia, který je jedním z největších ve sluneční soustavě. Fotografie byla pořízena sondou *Dawn*, jejíž cílem bylo i těleso (1) Ceres. Převzato z [12].

Většina těles vnější sluneční soustavy se nachází v Kuiperově pásu, který se sahá od oběžné dráhy Neptunu až do vzdálenosti přibližně 55 AU. V nedávné době bylo americkou sondou *New Horizons* zblízka prozkoumáno jedno z těles této oblasti, *Ultima Thule*, které je v tuto chvíli nejvzdálenějším prozkoumaným objektem sluneční soustavy. Jedná se o dvojité kontaktní těleso (tj. má dvě pevně spojené kulovité části), které se zformovalo pravděpodobně při vzniku sluneční soustavy. [13]



Obrázek 3.2: Planetky hlavního pásu podle vlastních elementů — osa x znázorňuje vlastní hlavní poloosu a osa y vlastní sklon. Lze vidět některé rodiny planetek, konkrétně uprostřed nahoře se nachází rodina Eunomia. Barevné označení znázorňuje oblasti mezi hlavními rezonancemi středního pohybu. Převzato z [14].

3.1 Hlavní pás planetek

Při našem studiu se budeme zaměřovat na planetky hlavního pásu, ve kterém se také nachází jediná trpasličí planeta ve vnitřní sluneční soustavě, Ceres, mající střední poloměr 473 km. Ostatní pozorované planetky mají střední poloměr od 250 km po několik desítek metrů. Největší populace se rovnoměrně rozprostírá od vzdálenosti 2,1 AU od Slunce do vzdálenosti přibližně 3,3 AU a většina planetek má excentricitu menší než 0,4 a sklon dráhy menší než 30° . Planetky, které vystoupí z této oblasti (ať už zmenšením hlavní poloosy a nebo zvětšením excentricity e), se buď přiblíží Marsu, Zemi nebo Venuši a jsou jejich gravitací vymrštěny na zcela odlišnou oběžnou dráhu, nebo se obdobně přiblíží Jupiteru, který též může výrazně změnit jejich původní oběžnou dráhu nebo může způsobit rozpad tělesa vlivem slapových jevů.

3.2 Rezonance

Struktura hlavního pásu planetek je významně ovlivněna rezonancemi, což jsou oblasti v prostoru, ve kterém když se planetka nachází, je nějaký údaj o její dráze a nějaké planety, běžně Jupitera nebo Saturnu, v jednoduchém poměru, tedy ve zlomku s nízkým čitatelem a jmenovatelem. Pro polohy sekulárních rezonancí jsou vztahy podstatně složitější, neboť závisejí na polohách a hmotnostech vícero planet.

3.2.1 Rezonance středního pohybu

Rezonance středního pohybu jsou nejjednodušším a obvykle také nejsilnějším typem rezonancí. Nastávají, když je oběžná doba planetky a planety v poměru nízkých celých čísel, např. $3 : 2$ — to znamená, že zatímco planetka dokončí tři celé oběhy, planeta vykoná dva a obě tělesa se znovu potkají na počáteční pozici.

Vlivem těchto rezonancí se může hlavní poloosa planetky a excentricita periodicky měnit, podobně jako je tomu u kyvadla. Některé rezonance, resp. překryvy rezonancí postupně zvyšují excentricitu dráhy planetky, až se její perihélium dostane pod oběžnou dráhu nějaké vnitřní planety, např. Marsu nebo Země, což eventuálně způsobí vzájemné blízké přiblížení, které planetku vymrští na jinou oběžnou dráhu. Takto může planetka úplně opustit sluneční soustavu. Za určitých podmínek se perihélium planetky může snížit natolik, že překročí Rocheovu mez², rozpadne se a úlomky jsou pohlceny hvězdou a stávají se její součástí [15].

Výpočet umístění rezonance středního pohybu, tedy vzdálenosti od Slunce, je poměrně jednoduchý, uvádíme proto postup pro rezonanci ovlivňující rodinu Eunomia, kterou je rezonance $8 : 3$ s Jupiterem. Vzpomeňme na Třetí Keplerův zákon, který říká

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad (24)$$

kde T_1 , T_2 označují oběžné dvou tělesa a a_1 , a_2 jejich hlavní poloosy. Předpokládejme, že v námi hledané rezonanci $8 : 3$ se nachází nějaká planetka a vypočítejme délku její hlavní

²což je hraniční vzdálenost od centrálního tělesa, kterou když planetka držená pohromadě pouze vlastní gravitací překročí, je vlivem slapové síly (rozdílu gravitačních sil) roztržena na malé kousky, které jsou soudržné díky elektromagnetickým silám.

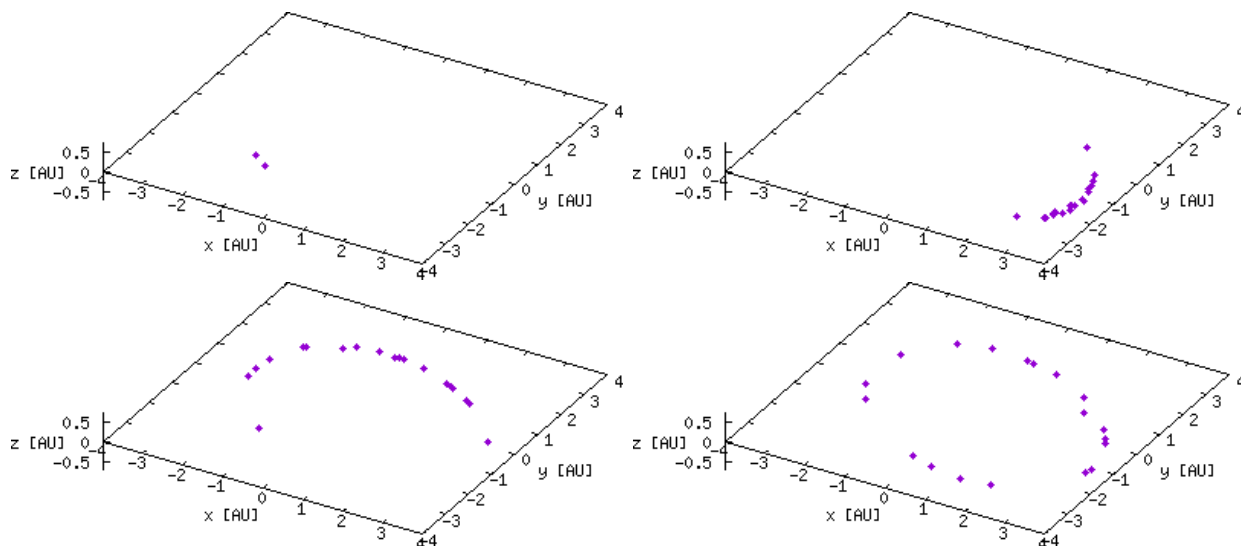
poloosy, a to úpravou rovnice (24) jako

$$a_2 = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{2}{3}} a_1, \quad (25)$$

kde T_1 , resp. T_2 zde značí oběžnou dobu Jupitera, resp. planetky, a a_1 , resp. a_2 délku hlavní poloosy Jupitera, resp. planetky. Oběžná doba Jupitera je přibližně 4332,59 dnů a délka jeho hlavní poloosy přibližně 5,203 AU. Protože hledáme rezonanci 8 : 3, musí platit $\frac{T_2}{T_1} = \frac{3}{8}$. Po dosazení do rovnice (25) dostáváme $a_2 = 2,706$ AU, což lze dobře ověřit na obrázku 4.6 rozdělení rodiny Eunomia v prostoru hlavní poloosy a excentricity.

3.2.2 Sekulární rezonance

Sekulární rezonance jsou sice obvykle mírnějšího rázu než rezonance středního pohybu, ale na dlouhodobý vývoj hlavního pásu mají značný vliv. Slovo sekulární pochází z latinského *saeculum*, což znamená století nebo generace, což odkazuje na dlouhodobý charakter sekulárních rezonancí. Veličiny, které zde dáváme do poměru, jsou rychlosti precese argumentu perihélia ω' a rychlosti precese délky vzestupného uzlu Ω' , které ovšem závisejí na hlavní poloose planetky a jejich vzdálenostech od všech planet. Proto pro jejich polohu neexistuje jednoduchý předpis (viz kap. 7 v [4]).



Obrázek 3.3: Trojrozměrné polohy x, y, z několika těles ($N = 20$) ze simulované rodiny Eunomia rušené čtyřmi planetami (Jupiterem, Saturnem, Uranem a Neptunem) v časech $t = 0, 10\,000, 20\,000, 50\,000$ let po úvodním izotropním³rozpadu V čase $t = 0$ měla všechna tělesa stejnou polohu x, y, z , ale různé rychlosti v_x, v_y, v_z , tedy i různé elementy dráhy, především hlavní poloosu, díky čemuž se lišily i jejich oběžné doby, které se pohybují kolem 4,27 let. Po 50 000 letech lze pozorovat rozprostření podél dráhy ve střední anomálii M , což je element, který je nejsnáze měněn perturbacemi.

3.3 Rodiny planetek

Rodiny planetek jsou skupiny těles, mající podobné charakteristiky, předně podobné vlastní elementy dráhy. Při jejich identifikaci musíme ale přihlížet i k ostatním veličinám, jako jsou albedo, barevné indexy, nebo reflexní spektrum.

Rodiny vznikají srážkou dvou planetek, čemuž v závislosti na poměru velikosti mateřského tělesa a projektilu říkáme buď *katastrofický rozpad* („na malé úlomky“), *reakumulační rozpad* (úlomky se působením gravitace „slepí“ zpátky) nebo *kráterování*. Může se zdát, že srážky jsou v tak rozlehlém prostoru jako je sluneční soustava velmi málo pravděpodobné, ale v dlouhém časovém úseku — 4,5 miliardy let od vzniku naší sluneční soustavy — k srážkám dochází, a mají nejenom vliv na vznik rodin, ale také na jejich následný vývoj (vzniklé fragmenty se spolu nadále srážejí).

Rodiny planetek, které již prošly dlouhodobým vývojem, se samozřejmě na obloze nejeví jako skupina společně letících planetek, kvůli rozdílné hlavní poloose a , resp. oběžné době T

³To je takový rozpad, při kterém se tělesa rozletí rovnoměrně do všech směrů.

se totiž záhy rozptýlí ve střední anomálii M , jak lze vidět na obrázku 3.3.

3.3.1 Metody identifikace rodin

Nejpoužívanější metodou pro identifikaci rodin planetek je *hierarchická shlukovací metoda* (HCM) [16]. Spočívá v tom, že si v trojrozměrném prostoru vlastních elementů (a_p, e_p, i_p) zvolíme metriku — veličinu, kterou budeme popisovat vzdálenost dvou těles, a poté, pomocí zvolené hraniční *vzájemné* vzdálenosti, určíme, která tělesa patří do rodiny. Tato metrika má přitom jednotku rychlosti, aby ji bylo možné porovnávat s rychlostmi výhozu fragmentů. Je určena vztahem

$$v = na_p \sqrt{C_a \left(\frac{\Delta a_p}{a_p} \right)^2 + C_e (\Delta e_p)^2 + C_i (\Delta \sin i_p)^2}, \quad (26)$$

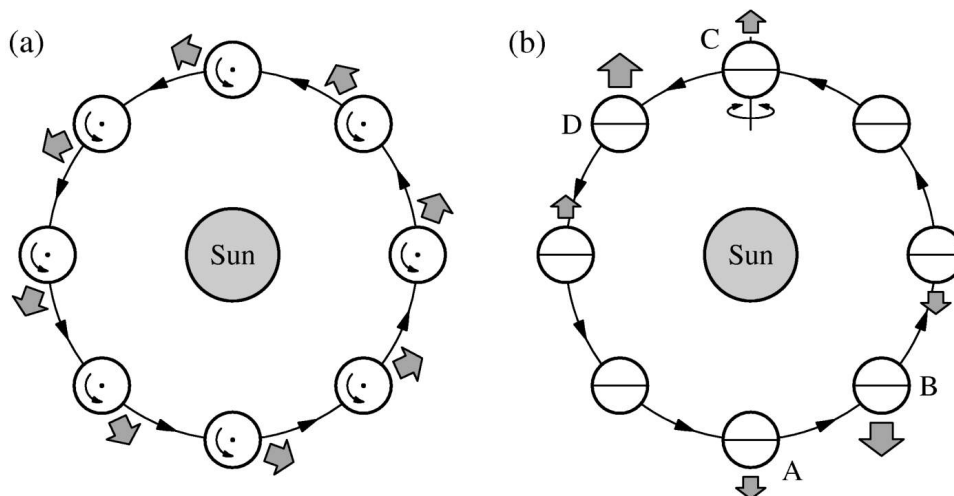
kde n značí střední pohyb, dále pokud označíme 1 a 2 tělesa, mezi kterými vzdálenost počítáme, platí $a_p = (a_{p1} + a_{p2})/2$ (kvůli symetrii) a $\Delta a_p = a_{p1} - a_{p2}$, $\Delta e_p = e_{p1} - e_{p2}$ a $\Delta \sin i_p = \sin i_{p1} - \sin i_{p2}$; C_a, C_e, C_i jsou váhy, které přiřazujeme jednotlivým elementům, přičemž možnou a i v této práci použitou volbou je $C_a = 5/4$, $C_e = 2$, $C_i = 2$ [16].

Samotný průběh tohoto algoritmu je jednoduchý: zvolíme nějakou hraniční rychlost v_{cutoff} a poté, většinou počínaje největším tělesem, např. (15) Eunomia, hledáme dvojice těles, pro které je $v < v_{\text{cutoff}}$; vždy když nějakou nalezneme, přidáme si ji do seznamu zkoumané rodiny a postup opakujeme, dokud nám nepřibývají žádní noví členové. Výsledný počet členů je samozřejmě závislý na volbě v_{cutoff} , což lze vidět na obrázku 4.1.

Jak ukážeme později v této práci (kap. 4.1.1), tato metoda samotná nestačí ke kompletní identifikaci rodiny, neboť musíme odstranit *přimísená tělesa* (angl. interlopers), např. porovnáním albed (viz obrázek 4.3), barevných indexů (viz obrázek 4.4), grafu závislosti hlavní poloosy a hvězdné velikosti, případně dalšími metodami závisujícími na konkrétní situaci v okolí rodiny.

3.3.2 Nevratné děje při vývoji

Doted' jsme se zabývali pouze silami, které vznikají vzájemným gravitačním působením těles, nejenom ve sluneční soustavě ale působí i několik dalších sil, týkajících se zejména emise tepla.



Obrázek 3.4: Denní a roční varianta Jarkovského jevu. Šedivé šipky označují zbytkovou sílu, která působí na těleso. (a) Denní Jarkovského jevu, když se těleso otáčí kolem osy kolmé k oběžné dráze. V tomto případě se těleso natočí teplejší stranou vždy „za sebe“, tepelná emisí pak vzniká zbytková síla, jejíž jedna složka působí ve směru pohybu tělesa, hlavní poloosa se tedy bude zvětšovat. (b) Roční Jarkovského jevu, s rotační osou ležící v orbitální rovině. Ohřívání přivrácené polokoule, zejména v bodech A a C, a opožděná emise tepelného záření, zvláště v bodech B a D, způsobují zbytkovou sílu, jejíž jedna složka směřuje proti pohybu tělesa, tudíž hlavní poloosa se bude zmenšovat. Převzato z [18].

Společně s náhodnými srážkami a chaotickou difuzí tvoří tyto jevy nevratné děje při vývoji planetek a komet, se kterými je při jejich studiu nutno počítat.

Jarkovského jevu

Jarkovského jevu, který je pojmenován po Ivanu Ospichovi Jarkovskému⁴ (1844–1902), je nejdůležitější negravitační silou, která ovlivňuje strukturu hlavního pásu planetek. Jejím působením se totiž tělesa posouvají v hlavní poloose, čímž se dostávají do oblastí rezonancí, které pak mohou jejich pohyb nadále ovlivnit.

Rozlišujeme dvě varianty Jarkovského jevu — denní a roční. Jejich rozdíl je popsán v 3.4. Výsledná změna hlavní poloosa je samozřejmě důsledkem kombinace obou variant, pro tělesa s hodnotou šikmosti (obliquity)⁵ blízko 0° nebo 180° dominuje denní varianta, zatímco pro

⁴Jarkovský ale tento jevu nepopsal úplně stejně, jako ho chápeme teď; v tehdejší době byla ještě populární teorie o éteru — všudypřítomném médiu — a právě této látce Jarkovský připisoval ono zpomalování nebo zrychlování těles. Tím „správným“ způsobem popsali tento jevu nezávisle Ernst Julius Öpik (1893–1985) a Vladimir Vyacheslavovich Radzievskii (1911–2003) [17].

⁵Obliquita je úhel mezi rotační osou tělesa a kolmicí k dráze, obliquita 0° a 180° značí rotační osu kolmou

obliquitu kolem 90° je roční varianta silnější. Dále pro tělesa s rychlejší rotační periodou (řádově menší než oběžná doba) je silnější denní varianta, a pro tělesa s delší rotační periodou roční varianta.

Jarkovského jev byl poprvé pomocí radarů změřen v roce 2003 při zkoumání pohybu blízkozemní planety (6489) Golevka. [19]

YORP jev

Yarkovsky–O’Keefe–Radzievskii–Paddack jev je stejně jako Jarkovského jev důsledkem nerovnoměrného rozložení a emise tepla tělesa, YORP však funguje pouze pro nesférická tělesa. Jeho účinkem je zvětšování úhlové rychlosti rotace ω a zmenšování obliquity θ a je způsoben nepravidelným povrchem planety, který vyzařuje teplo nerovnoměrně. V dlouhém časovém měřítku YORP „táhne“ úhlovou rychlost buď k 0, nebo k nekonečnu a obliquitu buď ke 0° nebo ke 180° . Protože Jarkovského jev je nejsilnější právě pro tyto hodnoty obliquity, funguje YORP jako takový „zesilovač“ Jarkovského jevu.

Jak YORP, tak Jarkovského jev je silnější pro menší tělesa. Na ty úplně nejmenší tělesa, prachové částice, působí *Poynting-Robertsonův efekt*⁶, který způsobuje postupné zpomalování částice až dojde ke kolizi se Sluncem samotným.

Náhodné srážky

Po úvodní srážce se tělesa zpět reakumulují do větších kusů, které nadále letí po heliocentrických drahách, a je zřejmé, že v dlouhém časovém úseku se některá z nich srazí s nějakým jiným tělesem. Tím vznikají další menší tělesa, jejichž rotační osa a doba je navíc různá od původního tělesa, což má vliv na Jarkovského a YORP jev.

na ekliptiku, přičemž 0° je tzv. progradní rotace (těleso vlivem Jarkovského efektu zrychluje) a 180° tzv. retrogradní rotace (těleso zpomaluje)

⁶Vzájemný pohyb částice a Slunce způsobuje, že sluneční záření dopadá na částici pod úhlem jiným než 90° vzhledem k pohybu částice, čímž částici zpomaluje.

Chaotická difuze

Je známo, že dvojitě (i vícenásobně) kyvadlo se chová chaoticky, tedy jeho stav je velmi náchylný k drobným změnám počátečních podmínek. To ale neznamená, že jeho vývoj nemůžeme simulovat, jedná se totiž o *deterministický chaos*. Jak jsme zmiňovali v 3.2.1, dráhové rezonance se chovají podobně jako kyvadlo, a proto, když se rodina nachází blízko překryvu dvou nebo více rezonancí, můžou někteří její členové tuto oblast chaoticky opustit. Tento děj je v podstatě nevratný, protože takový chaotický systém nelze rozumně zpětně integrovat.

Kapitola 4

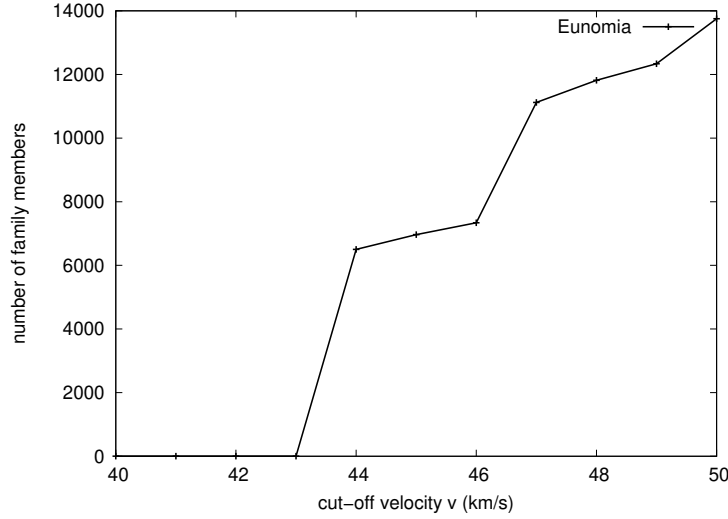
Vlastnosti rodiny Eunomia

Rodina Eunomia se nachází se v centrálním pásu planetek — mezi 2,5 AU a 2,82 AU a patří mezi nejpočetnější rodiny vůbec. Její členové včetně největšího tělesa jsou taxonomického typu S, což znamená, že se převážně skládají z křemičitanů. Existují ale i návrhy, že původní mateřské těleso nebylo homogenní [20], ale částečně diferenciované, což by mohlo způsobit zvýšení počtu členů této rodiny.

V rámci ucelené analýzy rodiny Eunomia jsme nejprve pomocí algoritmu HCM znovu identifikovali její členy a poté určili pravděpodobné místo rozpadu (tzn. hodnoty f a $\omega + f$). Následně jsme vytvořili izotropní rychlostní pole rozpadu, ze kterého jsme v kombinaci s pozorovanými průměry a hmotnostmi planetek vytvořili syntetickou populaci 6210 testovacích částic, které jsme pak simulovali po dobu jedné miliardy let a výsledky pak porovnali s pozorovanou rodinou.

4.1 Identifikace členů

Jak již bylo naznačeno, v této práci jsme k identifikaci členů rodiny Eunomia použili *hierarchickou shlukovací metodu*, popsanou v části 3.3.1. Závislost počtu členů rodiny na hraniční rychlosti lze vidět na obrázku 4.1. Můžeme pozorovat, že rodina Eunomia je dobře oddělená od ostatních rodin — jedinou blízkou rodinou je rodina Adeona, jejíž planetky ale nejsou součástí rodiny Eunomia. K dalším výpočtům jsme použili hodnotu $v_{\text{cutoff}} = 44 \text{ m/s}$, při které počet členů rodiny před odstraněním přimísených těles činil 6503.



Obrázek 4.1: Závislost počtu členů rodiny Eunomia na zvolené hraniční rychlosti v_{cutoff} při výpočtu HCM. Počet členů prudce vzroste při přechodu z rychlosti 43 m/s na 44 m/s, což je způsobené poměrně velkou vzdáleností prvního nejbližšího tělesa od mateřského (15) Eunomia. Dále vzroste prudce při přechodu z rychlosti 46 m/s na 47 m/s, což je způsobené splynutím s rodinou Adeona.

4.1.1 Přimísená tělesa

Prvním mechanismem k odstranění přimísených těles je závislost unášení ve vlastní hlavní poloose Δa_p a *absolutní hvězdné velikosti* H^1 (obrázek 4.2), způsobená vlivem Jarkovského jevu a YORPu. Platí, že unášení v hlavní poloose je větší pro menší tělesa, protože obsah povrchu planety, kterému je úměrná síla Jarkovského jevu, roste s druhou mocninou poloměru, zatímco objem, kterému je úměrná hmotnost, roste s třetí mocninou poloměru.

¹ *Absolutní hvězdná velikost* neboli *magnituda* H je taková *zjevná hvězdná velikost*, kterou by těleso mělo, kdyby bylo vzdálené 10 parseků (jeden parsek je vzdálenost, z níž má 1 astronomická jednotka úhlovou velikost 1 vteřiny), neboli přibližně 32,6 světelných let. Obecně pro hvězdné velikosti platí Pogsonova rovnice

$$M_2 - M_1 = -2,5 \log \left(\frac{L_2}{L_1} \right),$$

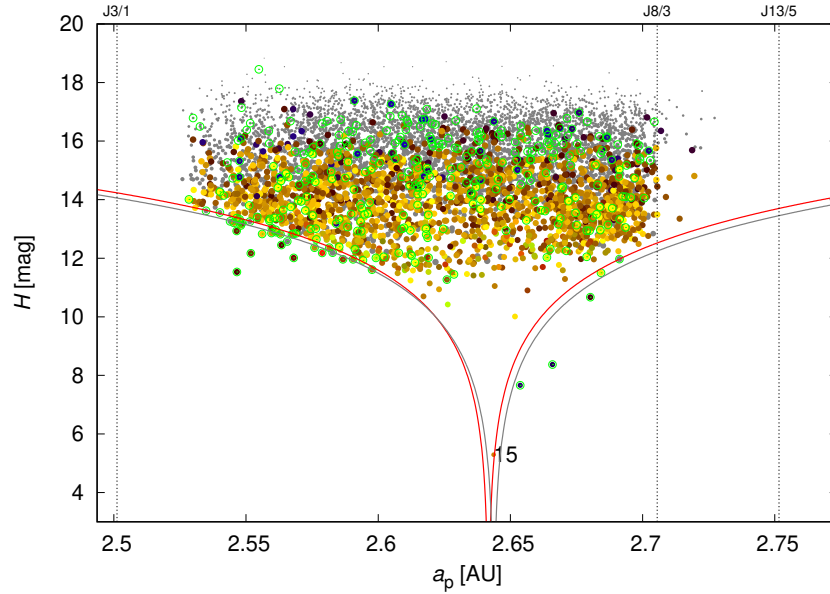
kde L_1 a L_2 označují zářivé výkony těles. Podle definice se bere, že hvězda s $L_0 = 3,055 \cdot 10^{28}$ W má $M = 0$, tedy absolutní hvězdná velikost H se spočte jako

$$H = 0 - 2,5 \log \left(\frac{L}{L_0} \right),$$

přičemž zjevnou hvězdnou velikost m můžeme vypočítat jako

$$m = 5(\log d - 1) - 2,5 \log \left(\frac{L}{L_0} \right),$$

kde d označuje vzdálenost tělesa od pozorovatele v parsecích. [18]



Obrázek 4.2: Rozdělení pozorované rodiny Eunomia v rovině vlastní hlavní poloosy a_p a absolutní hvězdné velikosti H . Barevná škála byla převzata z katalogu WISE. Šedá křivka označuje funkci s parametry $C = 2,2 \cdot 10^{-4}$ a $a_c = 2,643666$ AU a červená křivka označuje posunutou funkci s parametry $C = 2 \cdot 10^{-4}$ a $a_c = 2,641666$ AU. K odstranění jsme zvolili červenou funkci. Lze pozorovat typický tvar „V“, který je způsobem počátečním rychlostním polem a Jarkovského jevem, jenž je navíc ještě zesílen vlivem YORPu, což způsobuje zvýšenou koncentraci malých planetek na okrajích rodiny.

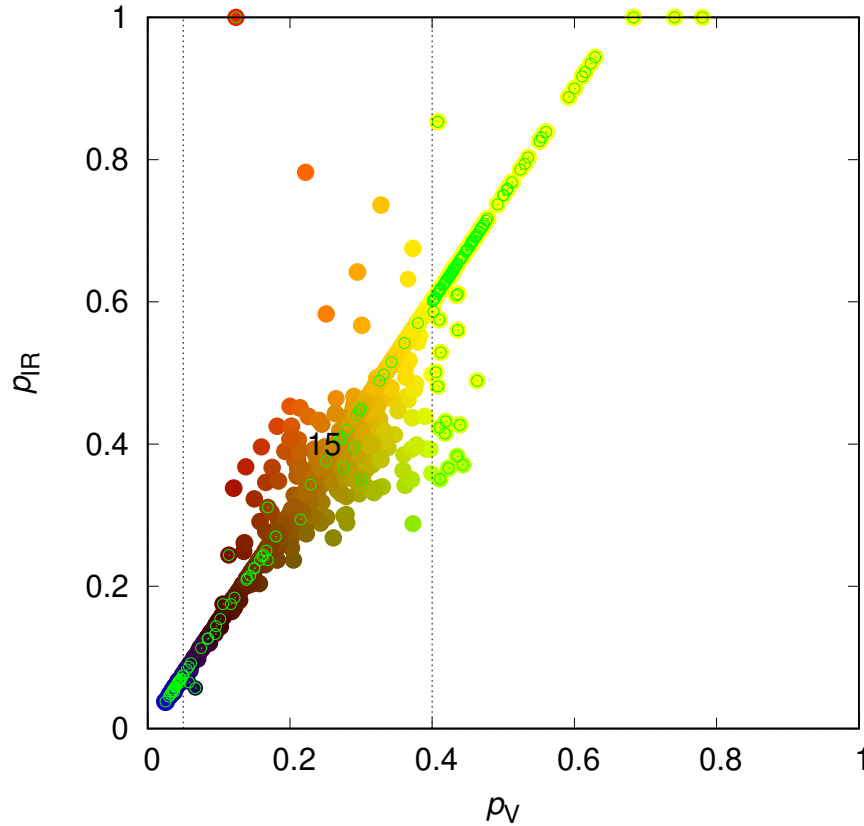
Tím lze odstranit tělesa, která se vzhledem k jejich hvězdné velikosti nemohla po původním rozpadu dostat na grafu (a_p, H) tam, kde jsou. Tuto závislost lze modelovat funkcí

$$H = 5 \log \left(\frac{\Delta a_p}{C} \right), \quad (27)$$

kde H označuje absolutní magnitudu, Δa_p vzdálenost v hlavní poloose od středu rodiny a C parametr, který záleží na naší volbě. Běžně se jako střed rodiny bere největší těleso, v našem případě jsme ale byli nuceni celou funkci o něco posunout, aby lépe seděla na ostatní pozorované objekty. Zvolené hodnoty můžete najít v popisku obrázku 4.2.

Další metodou k odstranění přimísených těles jsou metody spektroskopické, tedy zkoumající světelné charakteristiky těles. První z nich je graf závislosti albed² p_V , resp. p_{IR} ve viditelném, resp. infračerveném spektru. Pokud uvažujeme, že původní těleso bylo homogenní, měly by všechny vzniklé úlomky mít podobná albeda, čímž lze vyřadit tělesa, která očividně nemohla

²Geometrické albedo je poměr zářivosti tělesa ku zářivosti ideálního bezztrátového disku o stejném průřezu. [18]

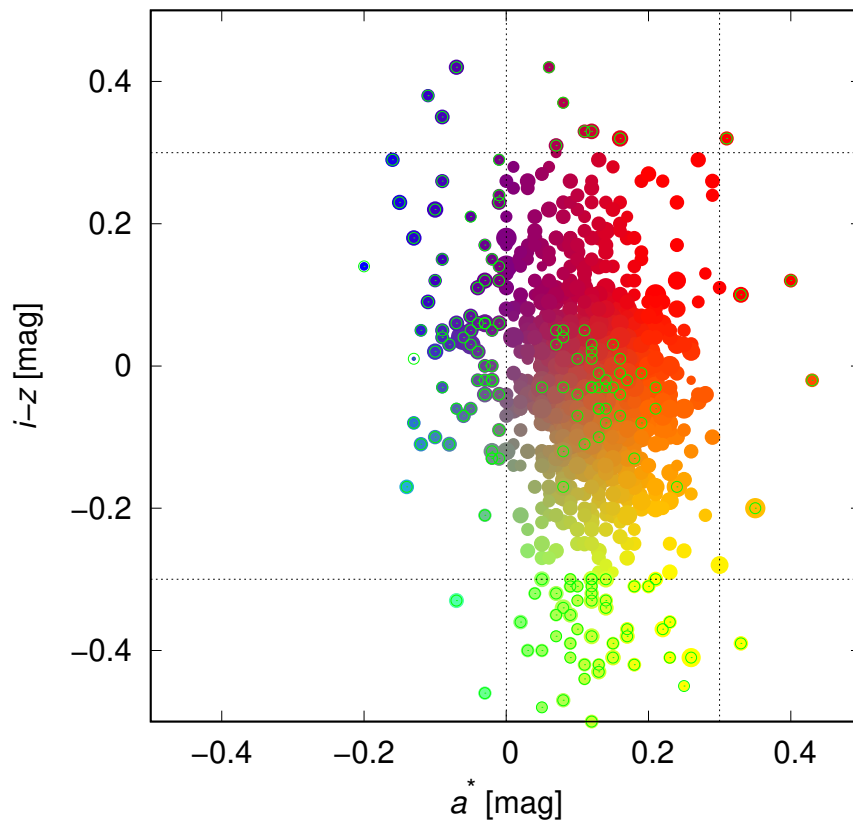


Obrázek 4.3: Albedo p_V (ve viditelném spektru) a p_{IR} (v infračerveném spektru) z katalogu WISE [21]. Barevná škála byla taktéž převzata z katalogu WISE, barvy neodpovídají reálnému zbarvení. Zelené kroužky označují přimísená tělesa vyřazená jakoukoliv z použitých metod. Pro vyřazení přimísených těles touto metodou byly zvoleny hraniční hodnoty $0,05 \leq p_V \leq 0,4$.

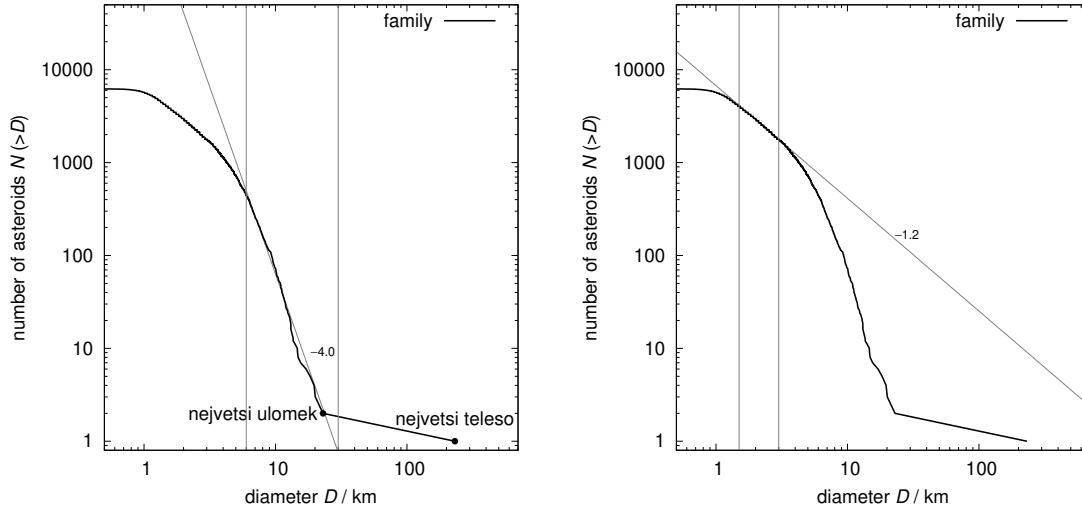
vzniknout ze stejné mateřské planetky. Závislost (p_V, p_{IR}) lze vidět na obrázku 4.3, v jehož popisku lze také najít krajní hodnoty, které jsme zvolili pouze pro albedo p_V , protože albedo p_{IR} je mu přímo úměrné.

Podobně můžeme identifikovat přimísená tělesa pomocí jejich barevných indexů a^* a $i - z$ tentokrát z katalogu SDSS (Sloan Digital Sky Survey), který používá fotometrický systém skládající se z pěti filtrů u, g, r, i, z , přičemž každý z nich propouští světlo o dané vlnové délce. Zmíněné veličiny u, g, r, i, z pak označují intenzitu světla o této vlnové délce. Veličina a^* je definována vztahem [22]

$$a^* = 0,89(g - r) + 0,45(r - i) - 0,57. \quad (28)$$



Obrázek 4.4: Barevné indexy a^* a $i - z$ z katalogu Sloan [22]. Barevná škála byla taktéž převzata z katalogu Sloan, barvy neodpovídají reálnému zbarvení. Zelené kroužky označují přimíšená tělesa vyřazená jakoukoliv z použitých metod. Pro vyřazení přimíšených těles byly zvoleny hraniční hodnoty $0 \leq a^* \leq 0,3$ a $-0,3 \leq i - z \leq 0,3$.



Obrázek 4.5: Histogram četnosti velikostí planetek rodiny Eunomia pro $v_{\text{cutoff}} = 44$ m/s, kde veličina $N(>D)$ označuje počet planetek s průměrem větším než D . Jedná se o logaritmický graf ($\log D$, $\log N(>D)$), na kterém lze vztah mezi danými veličinami aproximovat přímkou, což znamená, že vztah mezi veličinami D a $N(>D)$ je mocninný. Změna sklonu přímky prvního intervalu D (vlevo) na druhý interval D (vpravo) je důsledkem impaktního procesu po úvodním rozpadu. Vodorovná částí úplně vlevo je způsobená observační nedostatečností.

4.2 Fyzikální model pro rodinu Eunomia

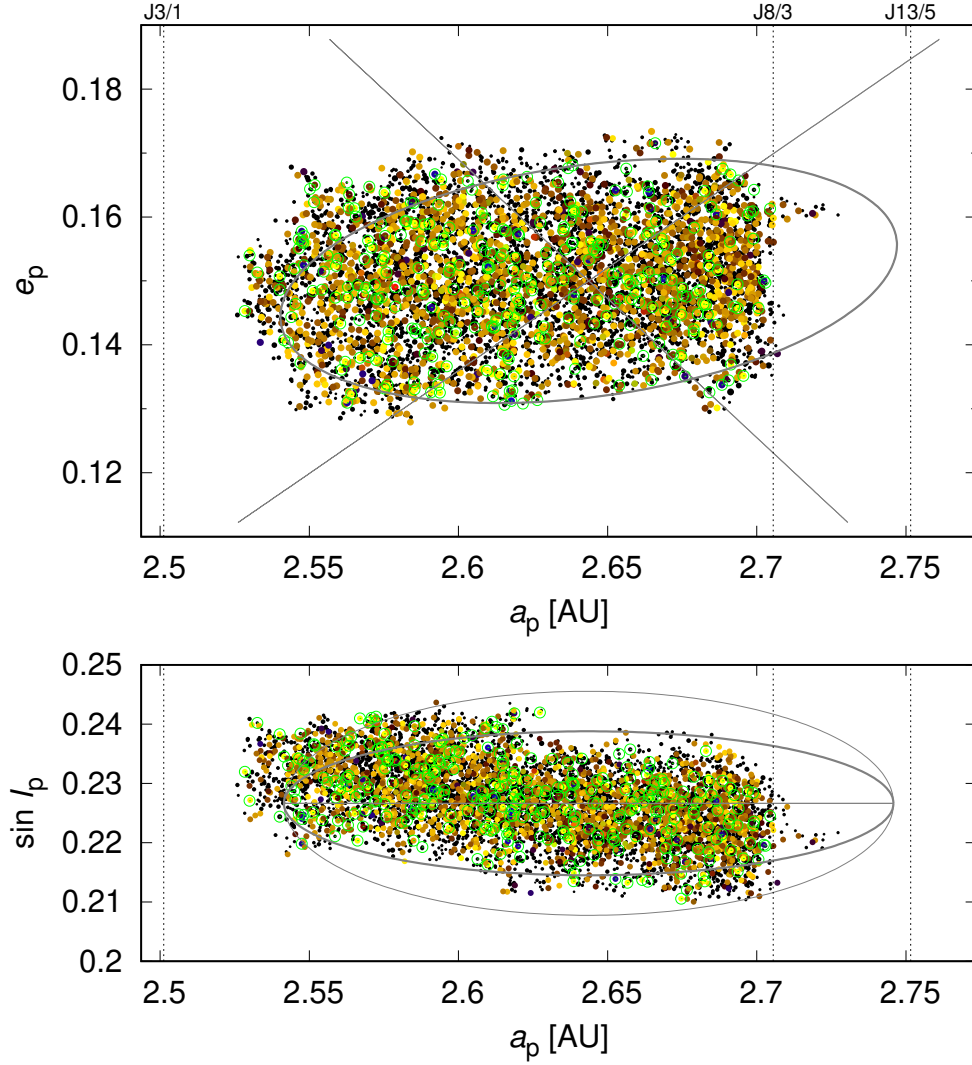
4.2.1 Rozdělení velikostí (Size frequency distribution)

Jednou ze základních charakteristik rodiny planetek je její rozdělení velikostí, pro rodinu Eunomia jej můžete vidět na obrázku 4.5. Takové rozdělení velikostí se mění s časem — tělesa se nadále srážejí, vytvářejí menší tělesa, která mnohem snáze opouštějí rodinu (např. působením rezonancí nebo Poynting-Robertsonovým efektem).

Při vytváření syntetické populace planetek je nutné toto rozdělení velikostí dodržet, při přiřazování průměrů simulovaným částicím jsme tedy použili přímo rozdělení velikostí pozorované rodiny Eunomia.

4.2.2 Rozdělení v prostorech (a, e) a $(a, \sin I)$

Jedním z nejdůležitějších úkonů, které je nutno provést před spuštěním simulace orbitálního vývoje, je správně určit, kde nastal úvodní rozpad (zvolit hodnoty f a $\omega + f$), to totiž může



Obrázek 4.6: Pozorovaná rodina Eunomia pro $v_{\text{cutoff}} = 44$ m/s v rovině vlastní hlavní poloosy a_p a vlastní excentricity e_p (nahore) a v rovině vlastní hlavní poloosy a_p a vlastního sklonu $\sin I_p$ (dole). Barevná škála odpovídá albedu p_V a p_{IR} z katalogu WISE. Nápis J8/3 a J13/5 označují polohu rezonancí středního pohybu s Jupiterem. Šedé elipsy a úsečky (zdegenerované elipsy) naznačují výpočet Gaussových rovnic pro hodnoty pravé anomálie $f = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ (nahore) a $\omega + f = 0^\circ, 50^\circ, 90^\circ$ (dole), kde zvolenou tučnější elipsou je elipsa pro hodnoty $f = 90^\circ$ a $\omega + f = 50^\circ$.

významně ovlivnit rozdělení rodiny na grafech vlastní hlavní poloosy a_p versus vlastní excentricita e_p (prostor (a, e)) nebo versus vlastní sklon $\sin I$ (prostor $(a, \sin I_p)$). Na obrázku 4.6 můžete vidět pozorovanou rodinu Eunomia společně s elipsami, které korespondují s rozdělením rodiny při rozpadu na různých místech. Tyto elipsy jsou určeny Gaussovými rovnicemi: pokud na těleso na začátku působí zrychlení $\vec{a} = (R, T, W)$, kde R označuje radiální složku (podél spojnice s centrálním tělesem), T transversální složku (podél tečny k oběžné dráze po směru oběhu) a W normálovou složku (kolmou na rovinu oběhu), budou se elementy dráhy tělesa měnit jako

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} [T + e(T \cos f + R \sin f)] , \quad (29)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [R \sin f + T(\cos f + \cos E)] , \quad (30)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{W}{na\sqrt{1-e^2}} \frac{r}{a} \cos(\omega + f) , \quad (31)$$

kde a označuje hlavní poloosu, e excentricitu, I sklon, n střední pohyb, f pravou anomálii, E excentrickou anomálii (viz obrázek 2.2), ω argument pericentra (viz obrázek 2.1) a r vzdálenost od centrálního tělesa. Převzato z [18].

Jak můžeme vidět jak v Gaussových rovnicích, tak na obrázku 4.6, na hlavní poloosu a excentricitu má vliv pouze hodnota f , zatímco na sklon má vliv pouze hodnota $\omega + f$. Vizualní kontrolou s pozorovanou rodinou v prostorech (a, e) a $(a, \sin I_p)$ jsme zvolili hodnoty $f = 90^\circ$ a $\omega + f = 50^\circ$.

4.3 Simulace orbitálního vývoje

Konečně se dostáváme k části, kde budeme vlastní rodinu Eunomia simulovat po mnoho miliónů let. Krátkodobý výpočet problému N těles byl proveden k vytvoření obrázku 3.3, nicméně takový výpočet nám neříká nic zajímavého o dynamické struktuře rodiny Eunomia a o jejím stáří. K těmto účelům se musí rodina simulovat po několik, přesněji čtyři, miliardy let a posléze analyzovat její vzhled v prostorech (a, e) a (a, i) a její rozdělení velikostí. V našem případě jsme se omezili na simulaci rodiny pouze po jednu miliardu let.

4.3.1 Dlouhodobé simulace

Pro dlouhodobou simulaci používáme upravený balíček SWIFT [8], s přidanými výpočty pro denní i roční Jarkovského jev, YORP efekt, náhodné srážky (kolizní reorientace os), úbytek hmoty způsobený otáčením tělesa a filtry k výpočtu středních a vlastních elementů (viz kap. 2.2). Úpravy jsou popsány v [9].

Simulace byla spuštěna na výpočetním clusteru Astronomického ústavu Univerzity Karlovy V Holešovičkách 747/2. ??? Údaje o počtu procesorů a tak?

Bohužel jsme byli nuceni některé skupiny částic simulace restartovat po výpadku proudu, což způsobuje úbytek částic kolem 500 milionů let milionů let. I tak jsme ale získali velmi hodnotná data, která nám například můžou říct, zda-li nelze rodinu Eunomia vysvětlit jako mladou rodinu.

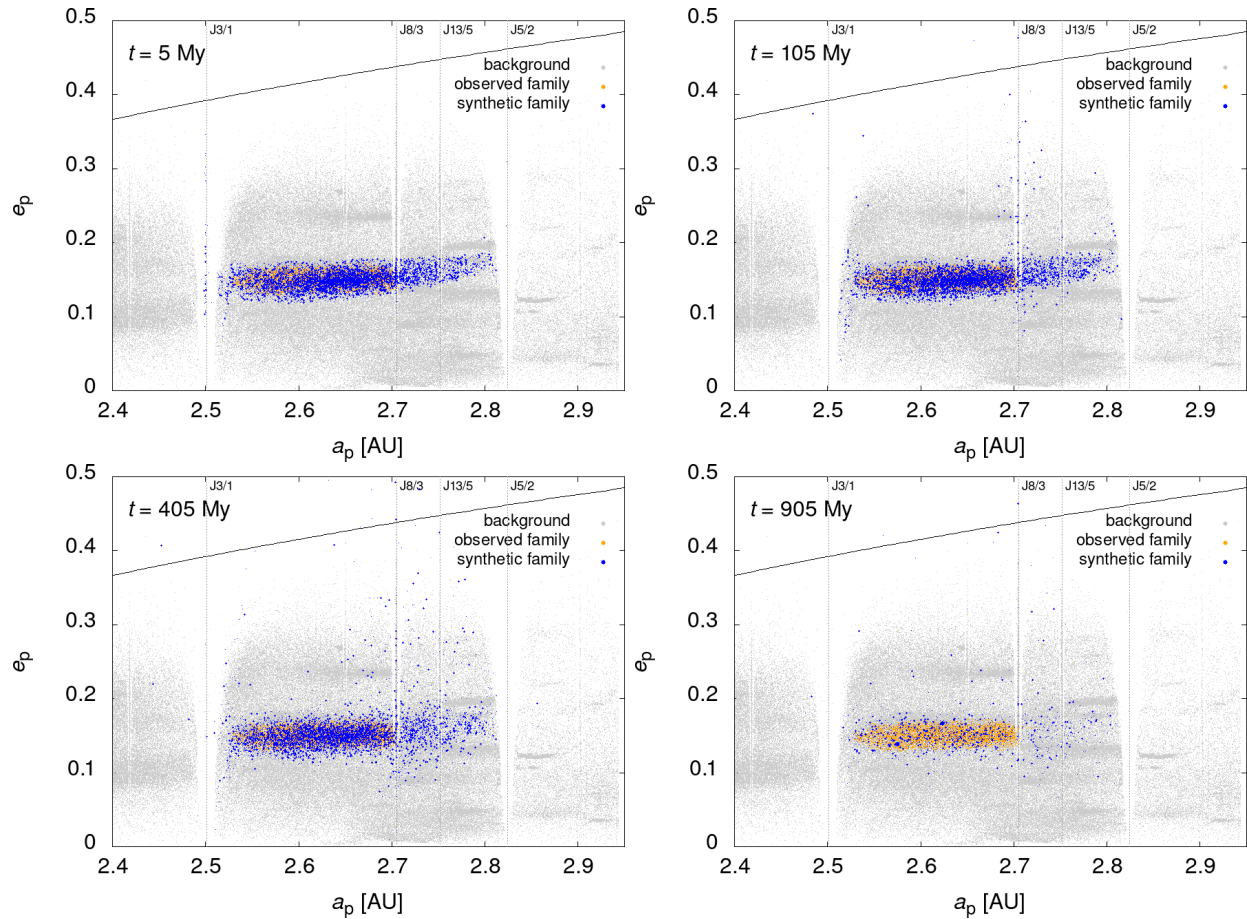
4.4 Porovnání simulace a pozorování

Na následujících několika obrázcích můžete vidět simulovanou rodinu Eunomia v porovnání s rodinou pozorovanou a pozadím v prostorech (a_p, e_p) , $(a_p, \sin I_p)$ a $(e_p, \sin I_p)$ v časech postupně 5, 105, 405 a 905 miliónů let. Z důvodu velkého počtu dat byly výstupní soubory „zprůměrovány“ po 10 milionech let metodou klouzavého okna³.

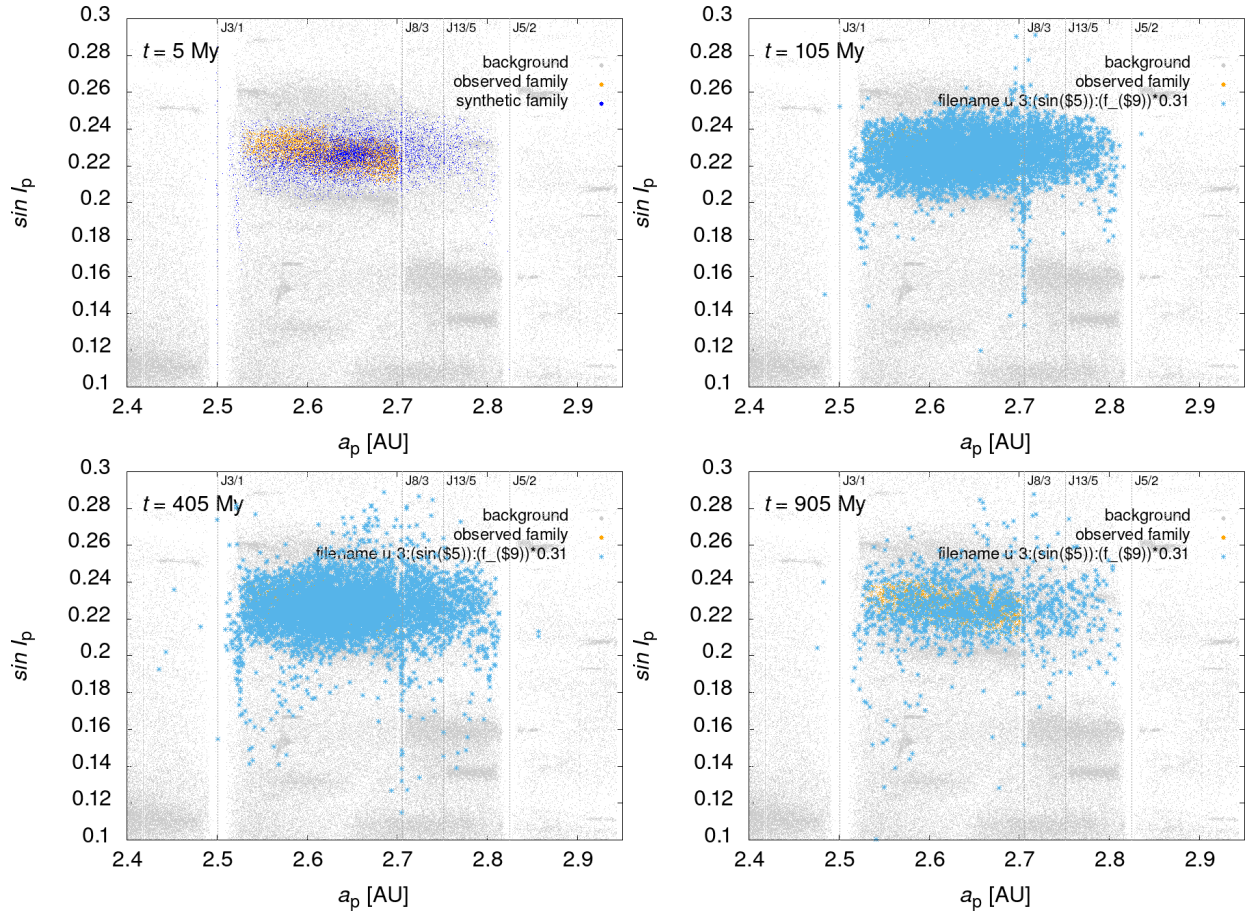
Úvodní rozpad v simulaci byl izotropní, ale kvůli specifickému výpočtu vlastních elementů dráhy z únikových rychlostí pomocí Gaussových rovnic můžeme v čase $t = 5 \text{ My}$ pozorovat mírně nesymetrický tvar simulované rodiny. Dále si můžeme všimnout, že počáteční rodina je o něco větší než rodina pozorovaná, což nám ale nevadí, protože vždy můžeme vybrat pouze podmnožinu planetek (neinteragují spolu).

Můžeme pozorovat vliv rezonancí — u těch nejsilnější (J3/1 a J5/2) se planetky nejvíce vychylují, když se nachází v oblasti tzv. separatrixy (šikmá hranice „před“ a „za“ rezonancí), načež se jejich excentricity začnou zvyšovat, čímž se dostanou do oblasti, kde kříží dráhy Marsu nebo Jupitera, což znamená, že se planetka dřív nebo později některé z těchto planet

³Jednoduše řečeno se pro každou planetku v nepřekrývajících časových intervalech o délce 10 miliónů let spočítal aritmetický průměr hodnot elementů dráhy a tyto průměry byly uloženy do nového souboru s časovým údajem v půlce intervalu (proto začínáme na 5 miliónech let a ne na 0).



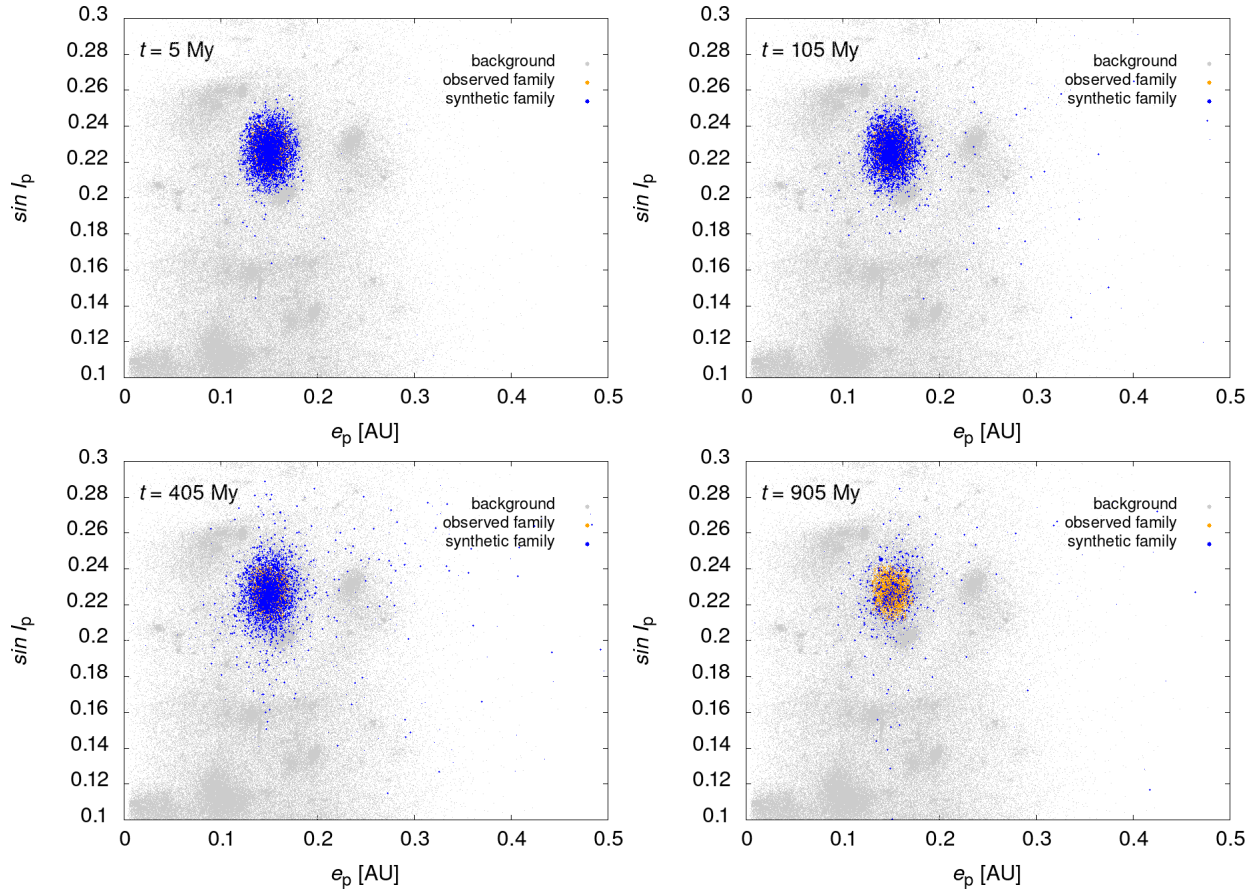
Obrázek 4.7: Výsledky simulace v prostoru (a_p, e_p) v časech postupně $t = 5, 105, 405, 905$ miliónů let. Modré body označují simulovanou rodinu, žluté pozorovanou rodinu identifikovanou HCM a šedé pozadí a jiné okolní rodiny. Jsou také značeny nejvýznamnější rezonance s Jupiterem J3/1, J8/3, J13/5 a J5/2. Černá křivka nahoře označuje hranici oblasti, kde je hlavní poloosa a excentricita tělesa taková, že dráha kříží dráhu Marsu. Podobná hranice existuje i pro Jupiter, ale ta se nachází mimo tyto grafy (přibližně kolem $e = 0,65$). Skripty k vytvoření těchto grafů můžete nalézt v příloze D



Obrázek 4.8: Výsledky simulace v prostoru $(a_p, \sin I_p)$ v časech postupně $t = 5, 105, 405, 905$ miliónů let.

přiblíží a je prudce vychýlena ze své dráhy. U rezonance J3/1 lze vidět u některých těles naopak pokles excentricity, to ale může být znovu důsledek specifického výpočtu vlastních elementů dráhy (neexistuje žádný fyzikální význam).

Kromě těchto dvou rezonancí lze také vidět vliv rezonancí vyšších řádů — J8/3 a J13/5 jasně rozdělují planety simulované rodiny Eunomia do oblastí mezi rezonancemi, ze kterých planety zřídka kdy vystupují. Vzhledem k tomu, že na prvním obrázku jsou zprůměrovaná data z prvních 10 miliónů let, můžeme vidět, že se planety, které se zřejmě počátečně nacházely v blízkosti rezonancí J3/1, J8/3 a J13/5, stihly rozptýlit a narušily tak jinak zatím pravidelný tvar rodiny. Dále se potvrzuje, že rezonance J8/3 je silnější než rezonance J13/5, protože se planety v její blízkosti v čase $t = 105$ miliónů let rozšířily do pásu o velikosti $0,05 < e_p < 0,5$, zatímco v blízkosti rezonance J13/5 pouze do pásu o velikosti $0,1 < e_p < 0,23$.



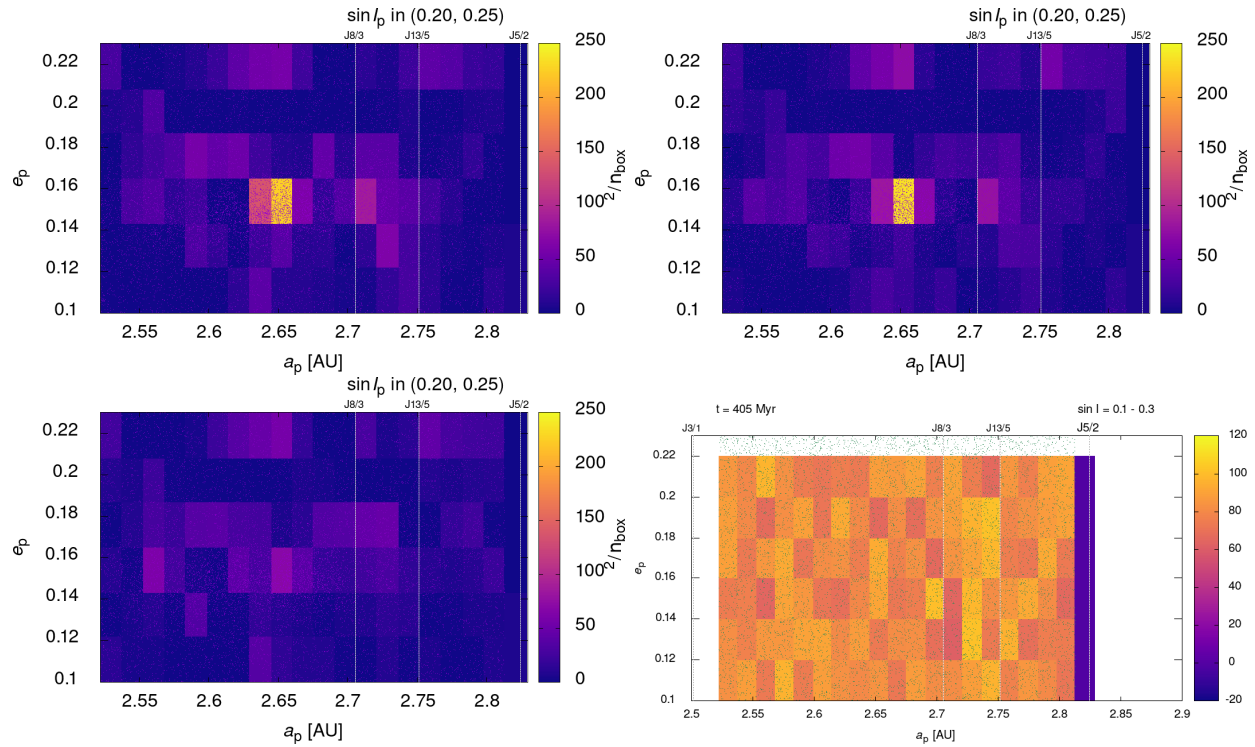
Obrázek 4.9: Výsledky simulace v prostoru $(e_p, \sin I_p)$ v časech postupně 5, 105, 405 a 905 miliónů let.

V populaci pozadí lze také vidět velice slabé rezonance na $a \approx 2,62$ AU a $a \approx 2,66$ AU — jejich působení na simulované rodině nemůžeme pozorovat na obrázcích v této práci, lze ale jejich velmi nepatrný vliv vidět při procházení všech obrázků z celé simulace.

Jednou z nezodpovězených otázek týkajících se této rodiny je, zda-li nepokračuje za rezonanci J5/2 [23]. Tento návrh můžeme ale i z této částečné simulace s jistotou vyvrátit, protože planetky rezonanci J5/2 až na výjimky (viz obrázek 4.7 $t = 405$ My) nepřeskakují, ale jsou jí vychylovány do oblastí křížení drah Marsu nebo Jupitera.

Na obrázcích $(a, \sin I_p)$ lze znovu pozorovat působení rezonancí, tentokrát s účinkem zvyšování sklonů. Ačkoliv jádro simulované rodiny se zdá v souladu s pozorovanou rodinou, můžeme pozorovat mírné „naklonění“ pozorované rodiny, čehož si na rodině simulované všimnout zatím nemůžeme, tento jev se nám tedy nepodařilo vysvětlit.

Obrázek prostoru (a_p, e_p) je hlavně zajímavý tím, že na něm lze jasně vidět okolní rodiny

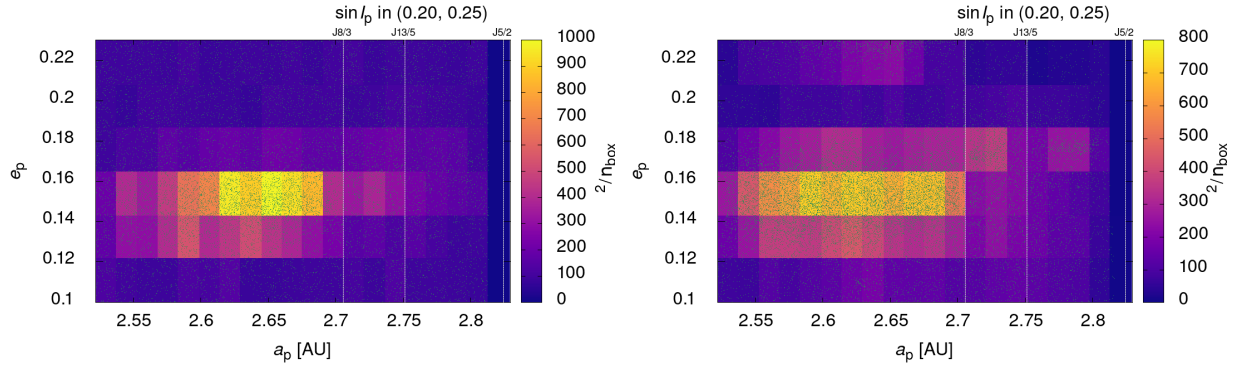


Obrázek 4.10: Hodnota chi kvadrátu χ^2 pro každý box v prostoru (a, e) . Na prvních třech obrázcích lze vidět rozdělení chi kvadrátu pro $t = 5, 105, 405$ milionů let, na posledním obrázku lze vidět rozdělení chi kvadrátu při vygenerování pouze pozadí bez použití částic simulované rodiny. Barevná škála je pro všechny až na poslední obrázek stejná. Zelené tečky označují simulovanou populaci i s přidáním pozadím. J8/3, J13/5 a J5/2 označují rezonance středního pohybu s Jupiterem.

a jak dochází ke kontaminaci jejich členů s členy rodiny Eunomia. Také proto byl tento obrázek použit k vybrání vzorku populace pozadí pro výpočty na odhad stáří v následující kapitole.

4.5 Odhad stáří

K odhadu stáří rodiny jsme použili metodu *blackbox* popsanou v [24], která funguje na principu rozdělení planetek jak pozorované, tak simulované rodiny do „boxů“ v prostoru $(a_p, e_p, \sin I_p)$ a následném porovnání počtů pozorovaných a simulovaných planetek v jednotlivých boxech. Na tento jednoduchý princip je pak použita standardní statistická metoda



Obrázek 4.11: Graf (a_p, e_p) pro simulovanou (vlevo) a pozorovanou (vpravo) rodinu Eunomia v čase $t = 455$ miliónů let, kdy byla hodnota chi kvadrátu nejlepší. Tentokrát barevná škála označuje počet těles v daném boxu. Lze porovnat s podobným grafem chi kvadrátu — problémové oblasti jsou přímo v centru rodiny (simulovaná populace je moc kompaktní) a potom v oblasti $a_p \in (2,55 \text{ AU}; 2,5 \text{ AU})$ a $e_p \in (0,14; 0,16)$, kam se naopak částice simulované populace nestihly rozšířit.

rozdělení chi kvadrátu χ^2 — pro každý box vypočteme jeho příspěvek k chi kvadrátu χ^2 jako

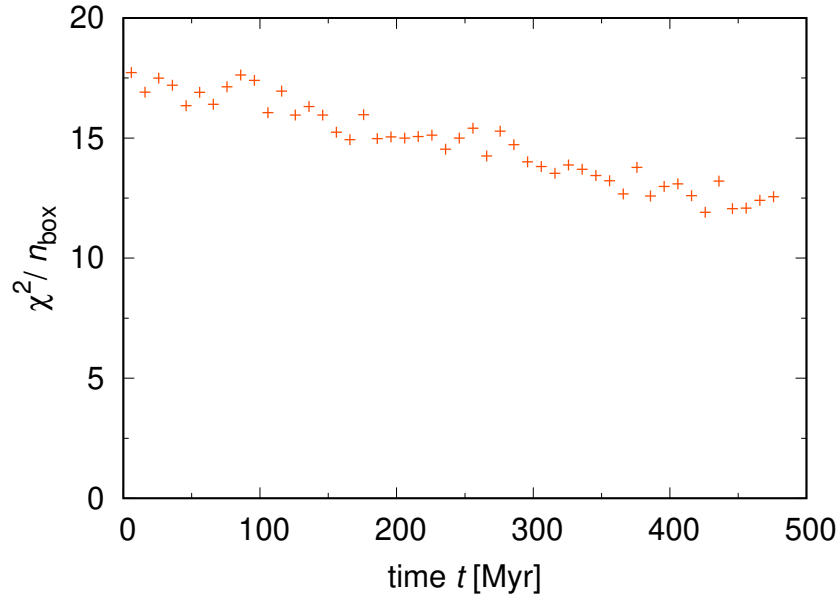
$$\frac{(N_{\text{sim}} - N_{\text{obs}})^2}{N_{\text{sim}} + N_{\text{obs}}}, \quad (32)$$

kde N_{sim} , resp. N_{obs} označuje počet simulovaných, resp. pozorovaných těles v daném boxu. Dělení výrazem $N_{\text{sim}} + N_{\text{obs}}$ zabraňuje extrémním příspěvkům boxů, kde se $N_{\text{obs}} \rightarrow 0$. Výslednou hodnotu chi kvadrátu χ^2 potom dostaneme pouze sečtením všech n_{box} příspěvků.

Prvním krokem k provedení této metody je určení samotných boxů. Protože se oblast mezi rezonancemi J8/3 a J13/5 zdá pro stáří rodiny velmi významná, zvolili jsme boxy tak, aby se v hlavní poloose mezi tyto rezonance vešly přesně tři. Dále jsme přidali 12 boxů nalevo a 5 napravo, to znamená, že spodní hranice celé oblasti je přibližně před rezonancí J3/1 a horní přibližně před rezonancí J5/2. V ostatních elementech jsme hranice zvolili tak, aby nenastala kontaminace planetkami okolních rodin. Celkově jsme tedy boxy definovali takto:

	Spodní mez	Horní mez	Velikost
Vlastní hlavní poloosa a_p	2,522 AU	2,844 AU	0,0153 AU
Vlastní excentricita e_p	0,1	0,23	0,0217
Vlastní sklon $\sin I_p$	0,2	0,25	0,05

Kvůli kontaminaci rodinou Adeona byly její členové ze vzorku pozorované populace ručně



Obrázek 4.12: Závislost redukovaného chi kvadrátu χ^2/n_{box} na čase t . Lze vidět, že se jeho hodnota snižuje, tudíž můžeme předpokládat, že bychom delší integrací dostali lepší a lepší hodnoty, až bychom mohli přesně určit stáří rodiny Eunomia.

odebrání, čímž se výrazně zlepšily naše výsledky.

Dalším krokem je zvolení populace pozadí, kterou vybereme z pozorovaných dat a „smícháme“ ji se simulovanou rodinou tak, aby byl celkový počet planetek srovnatelný s celkovým počtem pozorovaných planetek. Jako populaci pozadí jsme po konzultaci obrázku 4.9 vybrali populaci z $2,5 < a_p < 2,7$, $0,19 < e_p < 0,22$, $0,2 < \sin I_p < 0,25$. Princip „smíchání“ je takový, že vezmeme pouze rozdělení velikostí planetek z vybraného boxu a ve stejném poměru náhodně vybereme planetky z tohoto rozdělení vždy, když potřebujeme „doplnit“ simulovanou rodinu o tělesa pozadí tak, aby se celkový počet vyrovnal počtu pozorovaných planetek o dané velikost. V blízkosti rezonance J5/2 jsme žádná tělesa pozadí nevybírali, protože v realitě je tento prostor víceméně prázdný, kvůli působení rezonance, takže rovnoměrné rozprostírání těles pozadí do toho prostoru by nedávalo smysl.

Na obrázku 4.11 můžete vidět simulovanou a pozorovanou rodinu Eunomia v okamžiku, kdy jsme dostali nejmenší hodnotu chi kvadrátu $\chi^2 = 11,9$, tedy naše data se nejvíce přibližovala realitě. Stále lze ale pozorovat nějaké nedostatky, kromě těch zmíněných v popisku obrázku můžeme poukázat na oblast $a_p \in (2,7 \text{ AU}; 2,75 \text{ AU})$, $e_p \in (0,16; 0,18)$, kde se nachází velmi malá rodina příslušná planetce (53546)2000_BY6 [25], se kterou jsme v naší simulaci, stejně jako s ostatními menšími rodinami, nepočítali.

Simulovaná rodina se očividně vyvíjí správným směrem (chi kvadrát χ^2 klesá) a lze čekat, že při delší simulaci bychom dostali nějakou minimální hodnotu chi kvadrátu χ^2 , díky které bychom mohli přesněji určit stáří této rodiny, nicméně prozatím můžeme jen říct, že rodina Eunomia je pravděpodobně starší než půl miliardy let.

Kapitola 5

Závěr

V této práci byl nejprve podán nutný základ znalostí k pochopení samotného výzkumu — ob-
jem informací je dostačující, ale rozhodně se nedá považovat za kompletní. Zaujatému čtenáři
doporučujeme další studium témat, např. ze zdrojů [4] nebo [18]. Dále jsme představili kon-
cept rodin planetek a popsali základní metody k jejich identifikaci a analýze — některé z nich
společně s dalšími pokročilejšími metodami jsme poté aplikovali na početnou a významnou
rodinu středního pásu Eunomia.

Hlavním bodem naše zkoumání rodiny Eunomia byla její simulace v N částicovém integrátoru
SWIFT, který se k tomuto účelu běžně používá. V této práci jsme se omezili pouze na
možnost vysvětlení rodiny Eunomia jako mladou rodinu — simulovali jsme tedy po dobu
1 miliardy let přesně 6210 částic, což je srovnatelné se stávajícím počtem členů pozorované
rodiny Eunomia. Protože data v časovém úseku 500 až 1000 miliónů let nebyly kompletní
kvůli výpadku proudu, zaměřili jsme se na úsek 0 a 500 miliónů let a provedli jsme analýzu
stáří této rodiny pomocí statistické veličiny chi kvadrátu χ^2 .

K jejímu výpočtu jsme nejprve vybrali vhodnou oblast pro vzorek pozadí v této oblasti hlavní
pásu planetek, který jsme pak rovnoměrně „smíchali“ se simulovanou částicemi a vytvořili
tím syntetickou populaci, početně srovnatelnou s pozorovanými daty ve zvolené oblasti. Lze
s jistotou tvrdit, že N částicová simulace byla nastavena správně a naše získaná data se
zdají věrohodná. Vysvětlili jsme několik překážek, které jsme museli při našich výpočtech
překonat, jako například kontaminace ostatními rodinami. Takto se nám podařilo vysvětlit
téměř většinu jevů, které lze na našich grafech pozorovat, jediné, co zůstává nevysvětlené, je
kompaktnost jádra simulované rodiny a absence částic ve oblasti „nalevo“ od středu rodiny

na grafu (a_p, e_p) . Tyto jevy tedy bohužel musíme připisat nedostatečně dlouhému časovému úseku, po kterém jsme rodinu Eunomia simulovali — velice pravděpodobně tedy rodina Eunomia není mladší než 500 miliónů let.

Na grafu chi kvadrátu χ^2 bylo ovšem možné pozorovat klesající trend, což znamená, že pokud bychom v budoucnu simulovali rodinu Eunomia po celé 4 miliardy let, téměř jistě bychom dostali nějakou minimální hodnotu chi kvadrátu χ^2 , čímž bychom přesněji určili její stáří. Další možnosti výzkumu jsou analýzy okolních rodin, zejména rodiny Adeona, která naši rodinu Eunomia značně kontaminuje. Přesné určení jejích členů a stáří by nám velmi pomohlo v analýze rodiny Eunomia (mohli bychom například v momentu rozpadu rodiny Adeona její částice přidat do simulace).

Bibliografie

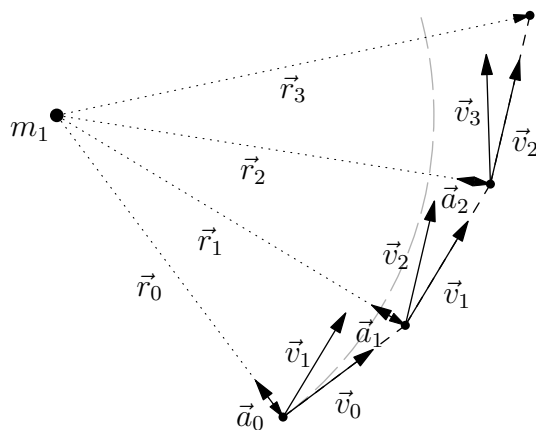
- [1] Wikipedia contributors. *Giuseppe Piazzi* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 16-February-2019]. 2019. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Giuseppe_Piazzi&oldid=881971175.
- [2] Wikipedia contributors. *Kiyotsugu Hirayama* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 16-February-2019]. 2019. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kiyotsugu_Hirayama&oldid=880898798.
- [3] Wikipedie. *Pohybová rovnice* — *Wikipedie: Otevřená encyklopedie*. [Online; navštíveno 28. 11. 2018]. 2018. URL: https://cs.wikipedia.org/wiki/Pohybov%C3%A1_rovnice.
- [4] C. D. Murray a S. F. Dermott. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 2000. DOI: [10.1017/CB09781139174817](https://doi.org/10.1017/CB09781139174817).
- [5] Wikipedie. *Keplerovy zákony* — *Wikipedie: Otevřená encyklopedie*. [Online; navštíveno 5. 1. 2019]. 2018. URL: https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Keplerovy_z%C3%A1kony&oldid=16794961.
- [6] A. Cohan. „A Figure Eight And other Interesting Solutions to the N-Body Problem“. In: (2012). URL: https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_12/papers/adrian.pdf.
- [7] J. Wisdom a M. Holman. „Symplectic maps for the n-body problem“. In: *Astron. J.* 102 (říj. 1991), s. 1528–1538. DOI: [10.1086/115978](https://doi.org/10.1086/115978).
- [8] H. F. Levison a M. J. Duncan. „The long-term dynamical behavior of short-period comets“. In: *Icarus* 108 (břez. 1994), s. 18–36. DOI: [10.1006/icar.1994.1039](https://doi.org/10.1006/icar.1994.1039).
- [9] M. Brož et al. „Did the Hilda collisional family form during the late heavy bombardment?“ In: *MNRAS* 414 (čvc 2011), s. 2716–2727. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2011.18587.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.18587.x). arXiv: [1109.1114](https://arxiv.org/abs/1109.1114) [astro-ph.EP].

- [10] T. R. Quinn, S. Tremaine a M. Duncan. „A three million year integration of the earth's orbit“. In: *Astron. J.* 101 (červ. 1991), s. 2287–2305. DOI: <10.1086/115850>.
- [11] Šidlichovský, M. and Nesvorný, D. „Frequency modified fourier transform and its application to asteroids“. In: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 65.1 (břez. 1996), s. 137–148. ISSN: 1572-9478. DOI: <10.1007/BF00048443>. URL: <<https://doi.org/10.1007/BF00048443>>.
- [12] NASA/JPL-Caltech/UCLA/MPS/DLR/IDA. *Full View of Vesta*. 2012. URL: <<https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA15678>>.
- [13] Ultima Thule Flyby - Press Briefing: Science Results & First Clear Photos. In: *You-Tube* [online]. 3. 1. 2019. [cit. 2019-1-9]. Dostupné z: <https://youtu.be/wvVvnqxqFVxM>. Kanál: JHU Applied Physics Laboratory.
- [14] Wikimedia Commons. *File:AsteroidIncAu.png* — *Wikimedia Commons, the free media repository*. [Online; navštíveno 25. 12. 2018]. 2017. URL: <<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:AsteroidIncAu.png&oldid=247505564>>.
- [15] G. Pichierri, A. Morbidelli a D. Lai. „Extreme secular excitation of eccentricity inside mean motion resonance. Small bodies driven into star-grazing orbits by planetary perturbations“. In: *A&A* 605, A23 (zář. 2017), A23. DOI: <10.1051/0004-6361/201730936>.
- [16] V. Zappala et al. „Asteroid families. I - Identification by hierarchical clustering and reliability assessment“. In: *Astron. J.* 100 (pros. 1990), s. 2030–2046. DOI: <10.1086/115658>.
- [17] M. Brož. „Yarkovsky effect and the dynamics of the Solar System“. Dostupné z: <http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/mira/mp/phdth/>. Dis. Praha: Astronomický ústav Univerzity Karlovy, 2006.
- [18] Brož M. a M. Šolc. *Fyzika sluneční soustavy*. ISBN: 9788073782368. Matfyzpress, 2013.
- [19] S. R. Chesley et al. „Direct Detection of the Yarkovsky Effect by Radar Ranging to Asteroid 6489 Golevka“. In: *Science* 302 (pros. 2003), s. 1739–1742. DOI: <10.1126/science.1091452>.
- [20] A. Nathues et al. „Spectral study of the Eunomia asteroid family. I. Eunomia“. In: *Icarus* 175 (červ. 2005), s. 452–463. DOI: <10.1016/j.icarus.2004.12.013>.

- [21] C. R. Nugent et al. „NEOWISE Reactivation Mission Year One: Preliminary Asteroid Diameters and Albedos“. In: *Astrophys. J.* 814, 117 (pros. 2015), s. 117. DOI: <10.1088/0004-637X/814/2/117>. arXiv: <1509.02522> [astro-ph.EP].
- [22] Ž. Ivezić et al. „Solar System Objects Observed in the Sloan Digital Sky Survey Commissioning Data“. In: *Astron. J.* 122 (lis. 2001), s. 2749–2784. DOI: <10.1086/323452>. eprint: <astro-ph/0105511>.
- [23] D. Nesvorný, M. Brož a V. Carruba. „Identification and Dynamical Properties of Asteroid Families“. In: *Asteroids IV*. Ed. P. Michel, F. E. DeMeo a W. F. Bottke. 2015, s. 297–321. DOI: <10.2458/azu_uapress_9780816532131-ch016>.
- [24] M. Brož a A. Morbidelli. „A study of 3-dimensional shapes of asteroid families with an application to Eos“. In: *Icarus* 317 (led. 2019), s. 434–441. DOI: <10.1016/j.icarus.2018.08.022>. arXiv: <1810.04113> [astro-ph.EP].
- [25] A. Milani et al. „Asteroid families classification: Exploiting very large datasets“. In: *Icarus* 239 (zář. 2014), s. 46–73. DOI: <10.1016/j.icarus.2014.05.039>. arXiv: <1312.7702> [astro-ph.EP].

Příloha A

Ilustrace Eulerovy metody ve vektorové grafice v jazyce *Asymptote*



```
// Zajisteni spravné velikosti obrazku  
size(8cm,8cm);
```

```
// Definovani stylu tecek a car  
marker mark1 = marker(scale(circlescale*2)*unitcircle, Fill);  
marker mark2 = marker(scale(circlescale*3)*unitcircle, Fill);  
pen pen1 = linetype(new real[] {1,6})+linewidth(0.4);
```

```
// Konstanty  
real au = 149597870700; // Astronomicka jednotka  
pair G = 6.67*pow10(-11); // Gravitacni konstanta
```

```

// Pocatecni hodnoty
pair R = (0,0); // Pocatecni poloha centralniho telesa
pair m1 = 2*pow10(30); // Hmotnost centralniho telesa (cca hmotnost Slunce)
pair r0 = (3/5*au,-4/5*au); // Pocatecni poloha telesa (Pozn.: (3/5*au)
    ^2+(4/5*au)^2=au)
real h = 23.5*24*60*60; // Casovy krok 23.5 dnu

// Skalovani vektoru
real vscale = 1.0*au*pow10(-5);
real ascale = vscale*h;

// Neviditelny ramecek obrazku
draw((-1/5*au,-5/5*au)--(7/5*au,-5/5*au)--(7/5*au,2/5*au)--(-1/5*au,2/5*au)--
    cycle, invisible);

// Vykresleni centralniho telesa a analytického reseni
draw(R, marker=mark2);
label("m_1", shift(-0.05,-0.05)*R, SW);
draw(arc(R,length(R-r0), -53, 15), longdashed+gray(0.7));

// Vykresleni pocatecni polohy
draw(R-r0, arrow=EndArrow, pen1);
draw(r0, marker=mark1);
label("$\vec{r}_0$", shift(R)*scale(0.5)*r0,SW);

// Prvni iterace
pair a0 = (G*m1/(length(R-r0)**2))*unit(R-r0);
draw(r0—shift(r0)*scale(ascale)*a0, arrow=EndArrow);
label("$\vec{a}_0$", shift(r0)*scale(0.5)*scale(ascale)*a0, 0.6*SW);

pair v0 = rotate(-90)*unit(a0)*sqrt(G*m1/(length(R-r0)));
draw(r0—shift(r0)*scale(vscale)*v0, arrow=EndArrow);
label("$\vec{v}_0$", shift(r0)*scale(0.5)*scale(vscale)*v0, SE);

pair v1 = v0+h*a0;
draw(r0—shift(r0)*scale(vscale)*v1, arrow=EndArrow);
label("$\vec{v}_1$", shift(r0)*scale(0.4)*scale(vscale)*v1, NNW);

pair r1 = r0 + h*v0;
draw(r0—r1, dashed);

```

```

draw(R—r1, arrow=EndArrow, pen1);
draw(r1, marker=mark1);
label("$\vec{r}_1$", shift(R)*scale(0.5)*r1,SW);

// Druha iterace
pair a1 = (G*m1/(length(R-r1)**2))*unit(R-r1);
draw(r1—shift(r1)*scale(asc)*a1, arrow=EndArrow);
label("$\vec{a}_1$", shift(r1)*scale(0.5)*scale(asc)*a1, 0.6*SW);

// pair v1 z prvni iterace
draw(r1—shift(r1)*scale(vscale)*v1, arrow=EndArrow);
label("$\vec{v}_1$", shift(r1)*scale(0.5)*scale(vscale)*v1, SE);

pair v2 = v1+h*a1;
draw(r1—shift(r1)*scale(vscale)*v2, arrow=EndArrow);
label("$\vec{v}_2$", shift(r1)*scale(0.4)*scale(vscale)*v2, NW);

pair r2 = r1 + h*v1;
draw(r1—r2, dashed);

draw(R—r2, arrow=EndArrow, pen1);
draw(r2, marker=mark1);
label("$\vec{r}_2$", shift(R)*scale(0.5)*r2,SW);

// Treti iterace
pair a2 = (G*m1/(length(R-r2)**2))*unit(R-r2);
draw(r2—shift(r2)*scale(asc)*a2, arrow=EndArrow);
label("$\vec{a}_2$", shift(r2)*scale(0.5)*scale(asc)*a2, 0.6*SW);

// pair v2 z druhe iterace
draw(r2—shift(r2)*scale(vscale)*v2, arrow=EndArrow);
label("$\vec{v}_2$", shift(r2)*scale(0.5)*scale(vscale)*v2, SE);

pair v3 = v2+h*a2;
draw(r2—shift(r2)*scale(vscale)*v3, arrow=EndArrow);
label("$\vec{v}_3$", shift(r2)*scale(0.4)*scale(vscale)*v3, NW);

pair r3 = r2 + h*v2;
draw(r2—r3, dashed);

```

PŘÍLOHA A. ILUSTRACE EULEROVY METODY VE VEKTOROVÉ GRAFICE V JAZYCE ASYMP

```
draw(R—r3, arrow=EndArrow, pen1);  
draw(r3, marker=mark1);  
label("$\vec{r}_3$", shift(R)*scale(0.5)*r3,S);
```

Příloha B

Výpočet Keplerovy rovnice pomocí iterační metody

Kód na výpočet Keplerovy rovnice, viz (11), v programovacím jazyce Python pomocí iterační metody, jejímž předpisem je

$$E_{i+1} = M + e \sin E_i, \quad \text{pro } i = 0, 1, 2, \dots$$

kde bereme první odhad $E_0 = M$. Algoritmus ukončíme, když dosáhneme přesnosti $\text{eps} < 10^{-13}$, což odpovídá dvojitě přesnosti reálných čísel v dnešních standardních programovacích jazycích.

Tato metoda konverguje k řešení pouze pro excentricity $e < 0,6627434$, pro vyšší excentricity je nutné využít jiné numerické metody.

```
from math import sin

def kepler(M, e):
    """Solution of Kepler align"""
    eps = 1E-13
    E2 = M + e*sin(M)
    while True:
        E1 = E2
        E2 = M + e*sin(E1)
        if abs(E2 - E1) < eps:
            break
    return E2
```

Příloha C

Výpočet polohy tělesa z oskulačních elementů

1. Z Keplerovy rovnice (11) některou ze jmenovaných metod (aproximační, iterační nebo numerickou) vypočítáme velikost excentrické anomálie E ze střední anomálie M .
2. Vztah (12) upravíme a spočteme pravou anomálii f

$$f = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \right). \quad (33)$$

3. Pomocí vztahu

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (34)$$

vypočítáme velikost r — relativní vzdálenost tělesa od Slunce.

4. Pomocí vztahů

$$x = r [\cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos i], \quad (35)$$

$$y = r [\sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos i], \quad (36)$$

$$z = r \sin i \sin(\omega + f), \quad (37)$$

vypočítáme x, y, z .

Dále můžete nalézt kód na tento výpočet v jazyce *Python*, který byl použit například na vy-

generování obrázku krátkodobé simulace 3.3. Vstupním souborem je *bin.out*, což je výstupní soubor integrátoru SWIFT (nutno však nejprve použít program *follow2* na získání dat z binárního souboru *bin.dat*), který má formát prostého textu, kde jsou jednotlivé sloupce oddělené tabulátory. Výstup programu je ve formátu $t[\text{Yr}] \ x[\text{AU}] \ y[\text{AU}] \ z[\text{AU}]$ a lze ho použít pro vygenerování animace jako v 3.3 pomocí nějakého grafovacího programu, např. *Gnuplotu*.

```
from math import *
```

```
def el2xyz(path):
    """Conversion from orbital elements to xyz positions (from text file bin.
        out by program follow2)"""
    binout = open(path, 'r')
    for line in binout.readlines():
        l = line.split()
        id = int(l[0])
        if id > 0:
            t = float(l[1])
            a~ = float(l[2])
            e = float(l[3])
            inc = radians(float(l[4]))
            capom = radians(float(l[5]))
            omega = radians(float(l[6]))
            M = radians(float(l[7]))

            # Note: The approximation by 3 terms was not sufficient
            #  $E = M + (e - \text{pow}(e, 3.0)/8.0) * \sin(M) + \text{pow}(e, 2)/2.0 * \sin(2.0 * M) +$ 
            #  $\text{pow}(e, 3) * 3.0/8.0 * \sin(3.0 * M)$ 
            E = kepler(M, e)
            f = 2.0 * atan(sqrt((1.0 + e)/(1.0 - e)) * tan(E/2.0))
            r = a * (1 - e * cos(E))
            x = r * (cos(capom) * cos(omega + f) - sin(capom) * sin(omega + f) * cos(inc))
            y = r * (sin(capom) * cos(omega + f) + cos(capom) * sin(omega + f) * cos(inc))
            z~ = r * sin(inc) * sin(omega + f)
            print (t + " " + str(x) + " " + str(y) + " " + str(z))

def main():
    if (len(sys.argv) >= 2):
        el2xyz(sys.argv[1])
    else:
        print "Usage: el2xyz.py infile"
```

```
if __name__ == "__main__":  
    main()
```


Příloha D

Skripty k vytvoření obrázků výsledků simulace v prostoru (a, e)

K vytvoření jednotlivých souborů pro vytvoření grafů je neprve potřeba seřadit data z integrátoru podle času — počátečně jsou totiž seřazeny podle jednotlivých skupin po 200 částicích. Následující skript v jazyce *Python* má jako vstup již sloučený a po 10 miliónech let zprůměrovaný soubor *bin.proper10My.out* a jeho výstupem jsou rozdělené soubory podle časových okamžiků ve složce *split/* ve tvaru *bin.proper10My.out_time_sorted[n]*.

```
#!/usr/bin/env python
# Roztridit data z integratoru SWIFT podle cau
__author__ = "Adam_Krivka"

import operator

# Nacteni dat
fin = open("bin.proper10My.out", "r")
data = fin.readlines()
ddat = open("D.dat", "r") # prumery castic
genvel = open("genvel3.out_v", "r") # rychlosti castic po rozpadu

# definice promennych
ids = {}
times = {}
d = dict(enumerate(ddat.readlines(), 1))
v = dict(enumerate(genvel.readlines(), 1))
```

```

id_offset = 0
t_prev = 0

# nacteni dat do promennych (dictionary)
for i, line in enumerate(data):
    iid = int(line.strip().split()[0])
    t = float(line.strip().split()[1])

    if t < t_prev:
        id_offset += 200
    t_prev = t

    times[i] = int(t) # zaokrouhlujeme
    ids[i] = iid+id_offset

n = 1
prev_id = 2
fout_time = open("split/bin.proper10My.out_time_sorted" + str(n), "w")

# samotne setrizeni
for i, t in sorted(times.items(), key=operator.itemgetter(1)):
    if ids[i] < prev_id:
        fout_time.close()
        fout_time = open("split/bin.proper10My.out_time_sorted" + str(n), "w")
        n += 1
    prev_id = ids[i]

# ukladani dat vjetne prumeru a rychlosti
out = data[i].replace(data[i].strip().split()[0], str(ids[i]), 1).strip()
    + "___" + d[ids[i]].strip() + " " + v[ids[i]].strip()
    fout_time.write(out.strip() + "\n")

fin.close()

```

K vytvoření samotného obrázku (a ostatně i většiny grafů v této práci) jsme použili volně dostupný grafovací program *Gnuplot*. Následující skript vytváří obrázek 4.7 v prostoru (a, e) a externě jsou mu vkládány hodnoty proměnných $amin$, $amax$, $emin$, $emax$ a $filename$, přičemž poslední z nich je cesta k souborům ve tvaru *bin.proper10My.out_time_sorted[n]*, vytvořené předešlým skriptem v *Pythonu*. Ostatní proměnné a jiné grafické prvky jsou načteny ze souboru *preamble.plt*.

```
#!/usr/bin/gnuplot
```

```
load 'preamble.plt'
```

```
set xlabel "{/Helvetica-Oblique}_p_[AU]"
```

```
set ylabel "{/Helvetica-Oblique}_e_p"
```

```
set xrange [amin:amax]
```

```
set yrange [emin:emax]
```

```
e(a,q)=abs((q-a)/a)
```

```
plot "check_BOX.dat" using 36:37:(f_(D($35,p-V))*0.3) with point linestyle
1 pointsize variable linecolor rgb "0xc00000" title "background",\
    "eunomia_family.list" using 36:37:(f_(D($35,p-V))*0.3) with points
    linestyle 2 pointsize variable title "observed_family",\
    filename using 3:4:(f_($9)*0.31) with points title "synthetic_family"
    linestyle 3 pointsize variable,\
    e(x,1.52) not linetype 8 linewidth 1
```

```
quit
```