

# STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

## Obor č. 2: Fyzika

### Mechanika rodin planetek s aplikací na rodinu Eunomia

Adam Křivka  
Jihomoravský kraj

Brno 2018

TODO: Ostatní nutné úvodní stránky pro SOČku ...

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod do nebeské mechaniky</b>	<b>5</b>
1.1	Pohybové rovnice . . . . .	5
1.1.1	Rovnice pro dvě tělesa . . . . .	6
1.1.2	Rovnice pro N těles . . . . .	10
1.2	Orbitální elementy . . . . .	12
1.2.1	Oskulační elementy . . . . .	12
1.2.2	Střední elementy . . . . .	14
1.2.3	Vlastní elementy . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Planetky ve sluneční soustavě</b>	<b>17</b>
2.1	Rezonance . . . . .	19
2.1.1	Rezonance středního pohybu . . . . .	19
2.1.2	Sekulární rezonance . . . . .	20
2.2	Rodiny planetek . . . . .	20
2.2.1	Metody identifikace rodin . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Vlastnosti rodiny Eunomia</b>	<b>22</b>
3.1	Fyzikální model pro rodinu Eunomia . . . . .	23
3.1.1	Nevratné děje při vývoji . . . . .	23
3.2	Nejistoty pozorovaných dat . . . . .	25
3.3	(Simulace orbitálního vývoje) . . . . .	26
3.4	(Porovnání modelu a pozorování) . . . . .	26

<i>OBSAH</i>	4
4 Aplikace v praxi	27
5 Budoucí možnosti výzkumu	28

# Kapitola 1

## Úvod do nebeské mechaniky

TODO: Úvod

### 1.1 Pohybové rovnice

Pohybová rovnice je matematicky zapsaný fyzikální vztah, který popisuje možné pohyby těles v daném prostředí [1]. Řešením pohybové rovnice je funkce, popisující polohu a rychlost každého zkoumaného tělesa v závislosti na čase. Přitom potřebujeme znát počáteční podmínky — polohy a rychlosti těles na začátku. Pohybová rovnice bývá ve tvaru diferenciální rovnice, což je rovnice, která vyjadřuje vztah mezi nějakou funkcí a jejími derivacemi, což je okamžitá změna hodnoty funkce při velmi malé změně argumentu, v našem případě času.

V následující části se pokusíme nalézt řešení pohybové rovnice pro tělesa ve sluneční soustavě. Zákony, jimiž se budou naše tělesa řídit, jsou Newtonův gravitační zákon a Newtonovy

pohybové zákony, které byly poprvé definovány již v roce 1687.

### 1.1.1 Rovnice pro dvě tělesa

Omezme se nyní na dvě tělesa a nalezněme řešení tzv. problému dvou těles — Keplerovy úlohy. To znamená, že se pokusíme odvodit funkci, popisující polohu a rychlost obou těles v závislosti na čase.

Nacházíme se v inerciální vztažné soustavě, což je taková vztažná soustava, kde platí první Newtonův zákon. Jako bod v klidu si zvolme těžiště soustavy. Pro síly působící na obě tělesa podle Newtonova gravitačního zákona a druhého a třetího pohybového zákona platí

$$\vec{F}_1 = +G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = m_1 \vec{a}_1 \quad (1)$$

$$\vec{F}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = m_2 \vec{a}_2, \quad (2)$$

kde  $G$  označuje gravitační konstantu,  $m_1$ ,  $m_2$  hmotnosti zkoumaných těles,  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  vektory zrychlení těles (tj. druhé derivace polohových vektorů  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  podle času) a  $\vec{r}$  vektor udávající vzájemnou polohu těles, definovanou jako  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Součtem obou rovnic dostáváme

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0. \quad (3)$$

Vektor popisující polohu těžiště soustavy je  $\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ . Jeho druhou derivací podle času dostáváme zrychlení

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2} = 0,$$

které se podle (3) rovná nule, takže se těžiště soustavy pohybuje konstantní rychlostí.

Nyní se však přesuňme do soustavy neinerciální, kde je první z těles (běžně to hmotnější) nehybné. Řekněme, že nehybné těleso má index 1, tedy nově  $\vec{r}'_1 = 0$ ,  $\vec{r}'_2 = \vec{r}$  (tedy i  $\vec{a}'_2 = \vec{a}$ ) a  $\vec{r}' = \vec{r}$ . Provedli jsme v podstatě transformaci, kdy jsme ke každému vektoru přičetli  $\vec{r}'_1$ . Rovnici (1) můžeme přepsat jako

$$\begin{aligned} \vec{a} &= Gm_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - Gm_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Často ještě definujeme gravitační paramter soustavy  $\mu = Gm_2$ .

I přesto, že tato diferenciální rovnice ještě není ve své konečné podobě vhodná k tomu, abychom z ní vyvodili následující vztah, prozradíme, že je jím funkce v polárních souřadnicích, popisující vzdálenost těles  $r \equiv |\vec{r}|$  v závislosti na úhlu  $\theta$ , který svírá přímka procházející oběma tělesy a nějaká zvolená referenční přímka:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)}. \quad (5)$$

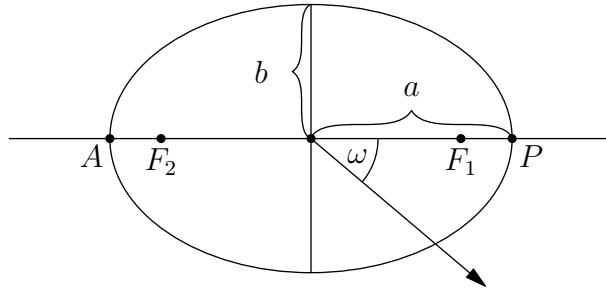
Vztah (5) je obecným předpisem kuželosečky — hyperboly, paraboly, elipsy nebo kružnice; pro naše účely se zaměříme na případ elipsy, kdy se v jednom z jejích ohnisek nachází centrální těleso.

$p$  označuje parametr elipsy, jehož velikost je určena hodnotou  $\mu$  a pro který platí vztah

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad (6)$$

kde  $a$  označuje délku hlavní poloosy, což je úsečka spojující střed elipsy s jedním z průsečíků elipsy s hlavní osou — přímkou spojující ohniska, a  $b$  označuje délku vedlejší poloosy, což je úsečka spojující střed elipsy s průsečíkem elipsy s přímkou kolmou na hlavní poloosu a procházející středem elipsy — vedlejší osou (viz obrázek 1.1).

Dále  $e$ , resp.  $\omega$  jsou integrační konstanty a nazývají se excentricita, resp. argument pericentra. Pro excentricitu platí vztah



Obrázek 1.1: Eliptická oběžná dráha vesmírného tělesa.  $a$  označuje délku hlavní poloosy,  $b$  délku vedlejší poloosy,  $F_1$  a  $F_2$  označují polohy ohnisek elipsy, přičemž centrální těleso se nachází v bodě  $F_1$ , a  $P$ , resp.  $A$  označují pericentrum, resp. apocentrum oběžné dráhy, tedy bod nejnížší, resp. nejvyšší vzdálenosti od centrálního tělesa,  $\omega$  označuje argument pericentra.

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad (7)$$

a volně řečeno udává, jak moc se elipsa liší od kružnice. Hodnota excentricity se pro eliptické dráhy nachází v intervalu  $(0,1)$ , kde krajními případy jsou  $e = 0$ : dráha má tvar kružnice, a  $e = 1$ : dráha má tvar paraboly.

Argument pericentra je úhel, který svírá hlavní osa s referenční přímkou. Platí pro něj vztah

$$\theta = \omega + f, \quad (8)$$

kde  $f$  označuje pravou anomálii, což je úhel, který svírá hlavní osa s průvodičem tělesa (viz obrázek 1.2).

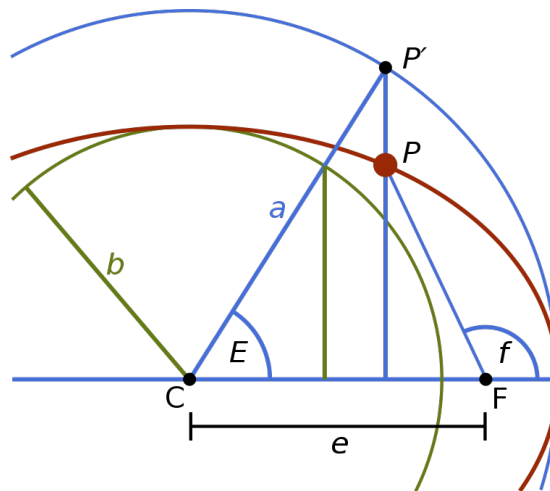
Uvědomme si, že jsme neodvodili závislost polohy tělesa na čase. Tuto závislost určuje Keplerova rovnice:

$$M = E + e \sin E \quad (9)$$

kde  $M$  označuje střední anomálii,  $E$  excentrickou anomálii (viz obrázek 1.2) a  $e$  excentricitu



May-DO: Předělat do jednotného stylu obrázků.



Obrázek 1.2: Ilustrace vztahu mezi excentrickou anomálií  $E$  a pravou anomálií  $f$ .  $a$ , resp.  $b$  značí délku hlavní, resp. vedlejší poloosy,  $P$  značí polohu tělesa na elipse,  $C$  značí střed elipsy,  $F$  značí ohnisko, ve kterém se nachází centrální těleso a  $e$  značí excentricitu (vymazat??)

elipsy. Pro  $E$  a pravou anomálií  $f$  platí vztah

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (10)$$

Anomálie mají úhlové jednotky, úhel  $M$  ale nemůžeme zkonstruovat, nicméně je významný tím, že je lineárně závislý na čase, neboť je určen vztahem

$$M = nt, \quad (11)$$

kde  $n$  označuje střední denní pohyb, jinak řečeno průměrnou úhlovou rychlost. Pokud známe  $E$ , můžeme pomocí Keplerovy rovnice snadno spočítat  $M$ . Problém spočívá v tom, že nemůžeme vyjádřit  $E$  v závislosti na  $M$  konečným výrazem, ale pouze nekonečnou řadou nebo jej můžeme aproximovat iteračními nebo numerickými metodami.

(Uvést iterační metodu, náš kód v Pythonu???)

### 1.1.2 Rovnice pro $N$ těles

Jak vidíme, už i pro dvě tělesa se musíme k získání polohy tělesa v čase uchýlit k numerickým metodám. Ukazuje se, že obecný problém  $N$  těles je analyticky neřešitelný<sup>1</sup> a jediné aplikovatelné metody jsou metody přibližné analytické nebo numerické.

Uvažujme nyní  $N$  těles — respektive hmotných bodů, které na sebe vzájemně gravitačně působí v souladu s Newtonovým gravitačním zákonem. Pro libovolné těleso, označené indexem  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , je celková síla  $F_i$ , která na něj působí, výslednicí všech gravitačních sil způsobených ostatními tělesy, jak ukazuje následující rovnice.

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (12)$$

$$\vec{a}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (13)$$

kde  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$  označuje vektor určující vzájemnou polohu těles  $i$  a  $j$ , konkrétně jde o vektor s počátkem v tělese  $j$  a vrcholem v tělese  $i$ ; ostatní veličiny jsou definované analogicky jako v předchozí části.

#### Eulerova metoda

I přesto, že se následující integrační metoda v přesných numerických výpočtech zřídka používá, uvádíme ji zde z didaktických důvodů, neboť názorně ilustruje použití numerických metod pro řešení problému  $N$  těles. Jak název napovídá, poprvé s ní v 18. století přišel švýcarský matematik Leonhard Euler.

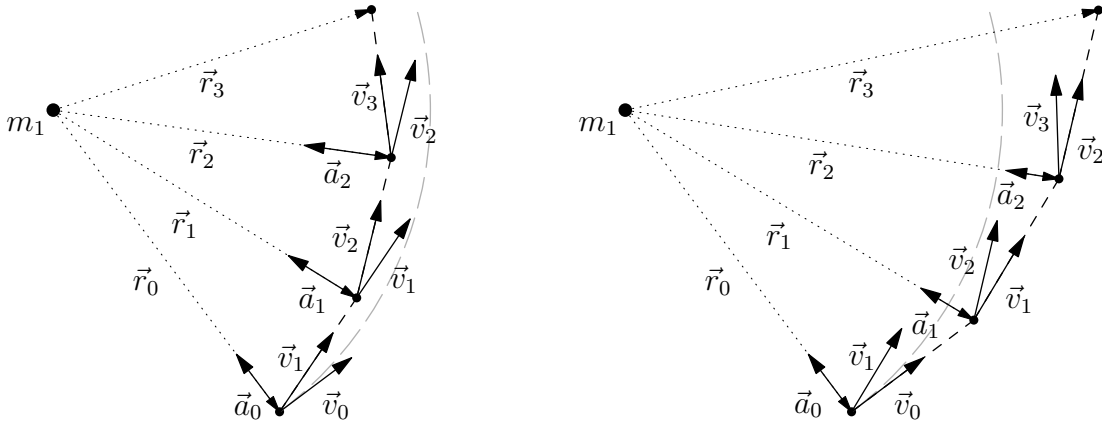
Princip algoritmu spočívá v tom, že v libovolném čase můžeme z (13) vypočítat zrychlení každého tělesa. Pak, po zvolení určitého časového kroku, odpovídajícím způsobem změníme vektor rychlosti. Následně necháme všechna tělesa po dobu časového kroku pohybovat se po přímkách konstantní rychlostí. Existují dvě verze Eulerovy metody, dopředná a zpětná, které

---

<sup>1</sup>existují ale nějaká zajímavá speciální řešení, viz [2].

se liší volbou rychlosti, se kterou necháváme pohybovat se po přímce, viz následující přesný popis obou metod a obrázek 1.3.

Mějme zmiňovaných  $N$  hmotných bodů, pro které platí (13). Zaměříme se na jeden z nich a označme jeho počáteční polohu  $\vec{r}(t_0)$  a počáteční rychlost  $\vec{v}(t_0)$ . K použití Eulerovy metody potřebujeme znát i počáteční polohy a rychlosti všech ostatních těles v systému. Dále vhodně zvolme velikost časového kroku  $h$ . V následujících třech krocích si ukážeme jednu iteraci algoritmu jak pro dopřednou, tak pro zpětnou metodu.



Obrázek 1.3: Ilustrace dopředné (vpravo) a zpětné (vlevo) Eulerovy metody pro dvě tělesa, kdy větší těleso (velká tečka vlevo nahoře) gravitačně působí na menší těleso (malé tečky vpravo). Jsou ukázány první tři iterace. Algoritmus byl doopravdy implementován, s hodnotami:  $h = 20$  dnů,  $m_1 = 2 \cdot 10^{30}$  kg,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup>kg<sup>-1</sup>s<sup>-2</sup>,  $|\vec{r}| = 1$  AU,  $v_0 = 29861$  ms<sup>-1</sup>. Vektory jsou přeškálované. Šedá křivka znázorňuje analytické řešení problému dvou těles.

1. Necht' je v čase  $t_k$  poloha zvoleného bodu  $\vec{r}(t_k)$  a rychlost  $\vec{v}(t_k)$ . Z (13) vypočítáme zrychlení  $\vec{a}(t_k)$ .
2. Položme  $t_{k+1} = t_k + h$  a vypočítejme  $\vec{v}(t_{k+1}) = \vec{v}(t_k) + h \cdot \vec{a}(t_k)$ .<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Můžeme porovnat se vzorcem pro rovnoměrný přímočarý pohyb, dobře známým ze středoškolského učiva:  $v = v_0 + at$ , podobně v kroku 3:  $s = s_0 + vt$

3. Pro dopřednou metodu vypočítejme  $\vec{r}(t_{k+1})$  jako  $\vec{r}(t_{k+1}) = \vec{r}(t_k) + h \cdot \vec{v}(t_k)$  a pro zpětnou jako  $\vec{r}(t_{k+1}) = \vec{r}(t_k) + h \cdot \vec{v}(t_{k+1})$ . Poté se vraťme ke kroku 1, tentokrát počítaje v čase  $t_{k+1}$ .

Jak můžeme vidět na obrázku 1.3, vypočtená dráha se od té analytické značně vzdaluje. To by samozřejmě řešila volba menší kroku  $h$ , ale pro velký počet těles a velkou požadovanou přesnost je algoritmus velmi pomalý.

Jedno z možných vylepšení je volně řečeno průměrování dopředné a zpětné Eulerovy metody — tzv. „leapfrog“ metoda. Spočívá v tom, že rychlost počítáme v jedné polovině časového kroku, ne na konci nebo na začátku. Další zpřesnění lze získat tak, že místo pohybu po přímce konstantní rychlostí použijeme lokální eliptickou dráhu, kterou získáme, když zanedbáme všechna ostatní tělesa a uvažíme pouze centrální těleso. Tato integrační metoda se již podobá algoritmu Wisdom–Holman Mapping, jehož ještě zlepšenou verzi využívá integrační balíček SWIFT [3], který budeme v této práci používat. Nutno dodat, že v námi užitém algoritmu ještě započítáváme negravitační jevy, jako Yarkovského jev, YORP jev a náhodné srážky, viz [4].

## 1.2 Orbitální elementy

K úspěšnému určení a zařazení oběžné dráhy nějakého vesmírného tělesa zavedeme šest elementů dráhy, které budeme v pozdějších sekcích používat k analýze rodin planetek. V sekci 1.1.1 jsme odvodili obecnou rovnici kuželosečky zapsanou v polárních souřadnicích. Ve sluneční soustavě se však s jinými, než s eliptickými dráhami nesetkáme, budeme tedy definovat elementy dráhy pouze pro dráhu eliptickou.

### 1.2.1 Oskulační elementy

Oskulační elementy popisují takovou oběžnou dráhu tělesa, po které by se pohybovalo kolem centrálního tělesa v problému dvou těles — tedy po zanedbání všech ostatních těles (planet, měsíců, ...) a negravitačních sil. Svým způsobem tedy zachycují aktuální stav tělesa v rámci

celé soustavy, je tudíž nutno s nimi uvádět i časový údaj — tzv. epochu. Neustále se mění působením perturbací, což jsou jakékoli vnější síly působící na těleso jiné, než gravitační síla centrálního tělesa — např. gravitace ostatních planet, nerovnoměrný tvar centrálního tělesa či Jarkovského efekt, neboli unášení, o kterém budeme hovořit později.

Prvními dvěma elementy jsou hlavní poloosa a excentricita, které určují tvar elipsy (viz obrázek 1.1). Hlavní poloosu značíme  $a$  a při studiu sluneční soustavy tento údaj většinou udáváme v astronomických jednotkách — AU, přičemž  $1 \text{ AU} = 149\,597\,870 \text{ km}$ , což je střední vzdálenost slunce a Země.

Dalšími dvěma elementy jsou argument pericentra a střední anomálie (viz 1.1.1), které udávají polohu tělesa v rovině oběžné dráhy. Referenční přímkou je průsečnice roviny dráhy s referenční rovinou — ekliptikou, přesněji řečeno je to polopřímka s počátečním bodem v poloze centrálního tělesa a pomocným bodem ve vzestupné uzlu, což je bod, ve kterém těleso prochází referenční rovinou „zespodu nahoru“. Střední anomálie je určena vztahem (11) a udává samotnou polohu tělesa na elipse.

Poslední dvojice elementů, sklon a délka vzestupného uzlu, udává polohu roviny oběžné dráhy v prostoru. Sklon dráhy (cizím slovem inklinace) je orientovaný úhel, který svírá rovina dráhy vzhledem k ekliptice. Znaší se  $i$  a většinou se udává ve stupních, někdy se ale uvádí  $\sin i$ , což je ekvivalentní definice, protože pro  $-90^\circ \leq i \leq 90^\circ$  je  $\sin i$  jednoznačně určen. Délka vzestupného uzlu je orientovaný úhel, který svírá spojnice centrálního tělesa s vzestupným uzlem s referenčním směrem v rovině ekliptiky, za který se ve sluneční soustavě bere směr k jarnímu bodu, což je jeden z průsečíků ekliptiky s rovinou zemského rovníku, jinak řečeno poloha slunce vzhledem k Zemi v okamžiku jarní rovnodennosti.

## Výpočet polohy tělesa z elementů dráhy

Skutečnost, že elementů je právě šest, není náhodou, existuje totiž výpočet, kterým lze z polohy a rychlosti tělesa v prostoru, tedy z údajů  $x, y, z, v_x, v_y, v_z$ , vypočítat elementy dráhy v prostoru; je tedy logické, že vzniklých údajů musí být zase šest.

Ukažme, pro účely této práce, jak z šesti elementů dráhy vypočítat polohu tělesa  $x, y, z$  vzhledem k centrálnímu tělesu.

1. Z rovnice (9) nějakou ze jmenovaných metod (aproximačních, iteračních nebo numerických) vypočítáme velikost excentrické anomálie.
2. Vztah (10) upravíme a spočteme pravou anomálii  $f$ :

$$f = 2 \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \right) \quad (14)$$

3. Pomocí vztahu

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (15)$$

vypočítáme velikost  $r$  — relativní vzdálenost těles.

4. Pomocí vztahů

$$x = r(\cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos i) \quad (16)$$

$$y = r(\sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos i) \quad (17)$$

$$z = r \sin i \sin(\omega + f) \quad (18)$$

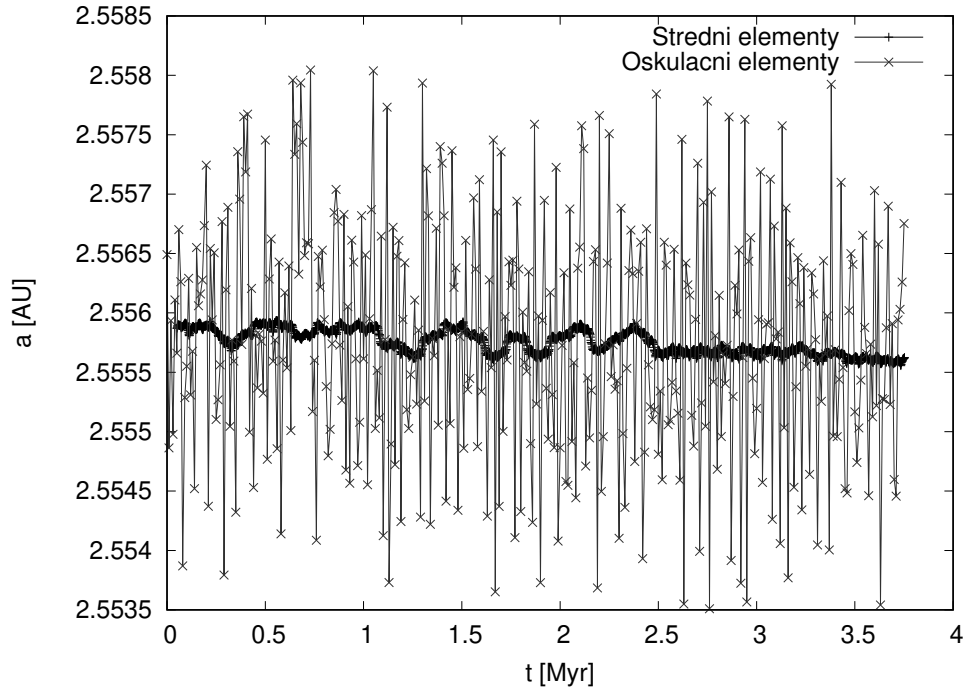
vypočítáme  $x, y, z$ .

(Uvést kód z Pythonu???)

### 1.2.2 Střední elementy

Střední elementy jsou elementy dráhy zbavené krátkých periodických perturbací, jako jsou pohyby velkých planet, např. Jupitera nebo Saturnu. Pro jejich výpočet z oskulačních elementů lze použít analytické, numerické nebo také filtrační metody, které jsme v naší práci využili.

Střední elementy odstraňují vliv tzv. rezonancí středního pohybu, což jsou oblasti vesmírného prostoru, ve kterém když se planetka nachází, tvoří poměr její periody s periodou nějaké jiné planety zlomek s nízkým čitatelem a jmenovatelem (viz ??).



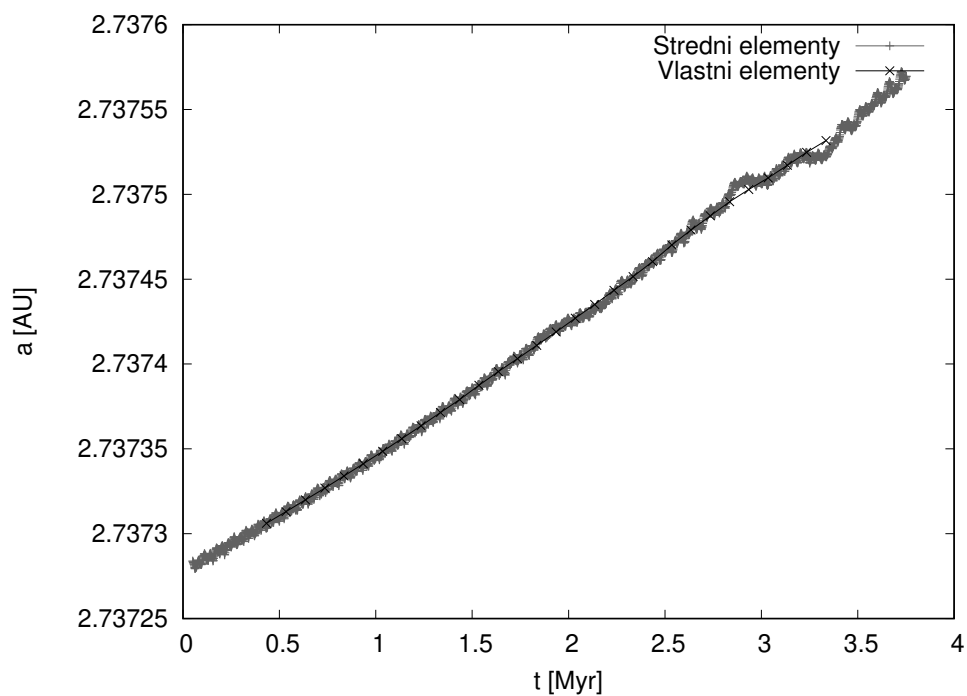
Obrázek 1.4: Porovnání oskulační a střední hlavní poloosy pro simulaci jedné planety po dobu 3,76 miliónů let.

### 1.2.3 Vlastní elementy

Vlastní elementy jsou elementy dráhy zbavené jak krátkých, tak dlouhých periodických perturbací, mezi které kromě již zmíněných patří navíc sekulární rezonance, které jsou způsobením závislostí frekvencí precese (změny) argumentu perihélia a délky vzestupného uzlu planety a nějaké jiné planety.

Vlastní elementy jsou tedy svým způsobem „průměry“ pohybu a jsou téměř neměnné ve velkém časovém úseku, ačkoliv působením negravitačních sil — hlavně Jarkovského jevu — se mohou pomale zvětšovat nebo zmenšovat.

Mezi vlastní elementy počítáme pouze vlastní hlavní poloosu —  $a_p$ , vlastní excentricitu —  $e_p$  a vlastní inklinaci —  $i_p$ . Ostatní elementy nemá cenu uvažovat, protože argument perihélia i délka vzestupného uzlu periodicky precedují a střední anomálie je lineárně závislá na čase.

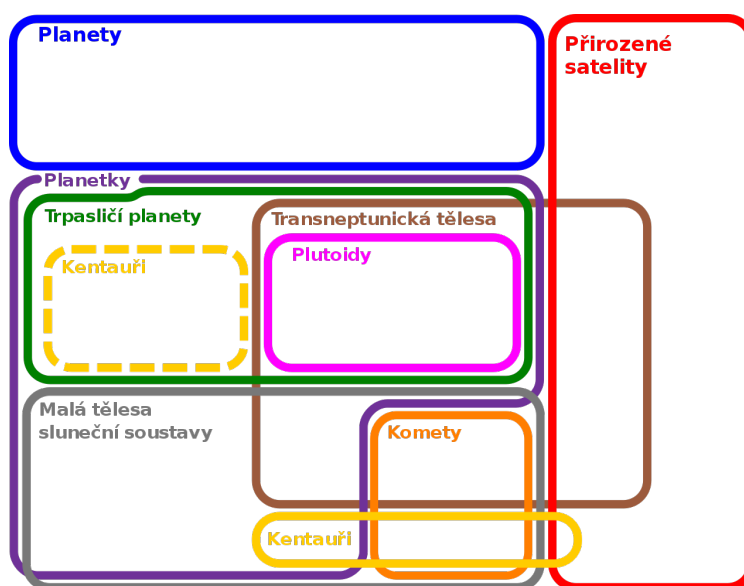


Obrázek 1.5: Porovnání střední a vlastní hlavní poloosy pro simulaci jedné planetky po dobu 3,76 miliónů let. Lze vidět, že se za tuto dobu vlastní hlavní poloosa planetky zvýšila o  $0.00022554 \text{ AU} = 33740.3 \text{ km}$ . Tento jev vysvětluje Jarkovského efekt, viz 3.1.1.



# Kapitola 2

## Planetky ve sluneční soustavě



Obrázek 2.1: Zařazení těles sluneční soustavy podle IAU (po valném shromáždění v Praze roku 2006, kde byl definován pojem planeta, čímž bylo vyřazeno Pluto z planet sluneční soustavy.) Zdroj: [5]

Podle Mezinárodní astronomické unie (IAU) se tělesa ve sluneční soustavě dělí hlavně na planety, komety, přirozené satelity a planetky. Planeta je definována jako takové těleso, které obíhá kolem Slunce, má dostatečnou hmotnost, aby si udrželo kulovitý tvar, a je „vyčistilo“

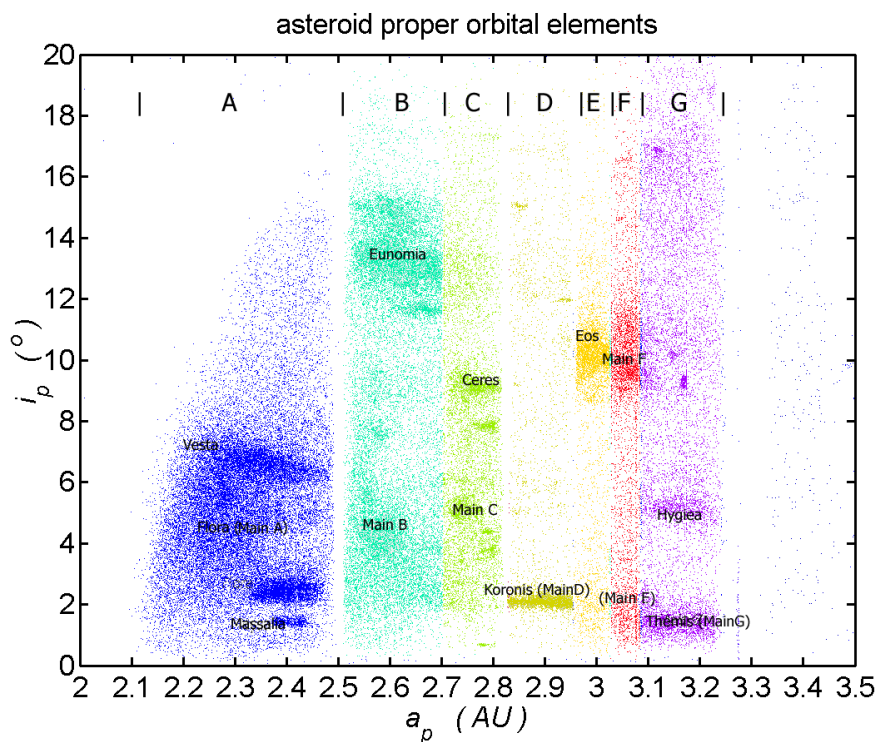
svoje okolí od ostatních těles. Kometa je těleso složené z ledu a prachu, které většinou obíhá Slunce po velmi excentrické dráze a zanechává přitom za sebou ohon, který je způsoben vypařováním ledu z komety působením slunečního záření. Dále přirozené satelity jsou tělesa obíhající nějakou planetu nebo planetku.

Konečně všechno ostatní je klasifikováno jako planetka (někdy nepřesně označováno jako asteroid) — patří sem trpasličí planety (těch je zatím pouze pět: Ceres, Pluto, Eris, Make-make, Haumea), transneptunická tělesa (tělesa, která se pohybují za oběžnou dráhou Neptunu), malá tělesa sluneční soustavy a další. Tyto skupiny se navzájem překrývají, viz 2.1. Dále můžeme planetky dělit na podle jejich oběžné dráhy na tělesa vnitřní a vnější sluneční soustavy. Většina těles vnější sluneční soustavy se nachází v Kupierově pásu, který se sahá od oběžné dráhy Neptunu až do vzdálenosti přibližně 55 AU. Tělesa vnitřní sluneční soustavy jsou přibližně omezená oběžnou dráhou Jupitera — největší populace se nachází v hlavním pásu, který se nachází mezi oběžnou dráhou Marsu (přibližně 1,5 AU) a Jupitera (přibližně 5,2 AU). Dále sem spadají také planetky, jejichž oběžná dráha protíná dráhu Marsu nebo Země — tzv. blízkozemní planetky, a planetky nacházející se v libračních centrech L4 a L5<sup>1</sup> soustav Slunce–Země, Slunce–Mars, Slunce–Jupiter — tzv. trojáni. Hildy???

Při našem studiu se budeme zaměřovat na planetky hlavního pásu, ve kterém se také nachází jediná trpasličí planeta ve vnitřní sluneční soustavě Ceres, který má střední poloměr 473 km. Ostatní planetky mají střední poloměr od 250 km po pouze několik metrů???. Největší populace se rovnoměrně rozprostírá od vzdálenosti 2,1 AU od Slunce do vzdálenosti přibližně 3,3 AU. Planetky, které vystoupí z této oblasti, se buď přiblíží Marsu a jsou jeho gravitací vymrštěny na zcela odlišnou oběžnou dráhu, nebo se podobně přiblíží Jupiteru, který ji též může odklonit od původní oběžné dráhy nebo ji může zachytit ve svém gravitačním působení, čímž se planetka stane přirozenou družicí Jupitera.

---

<sup>1</sup>To jsou takové body, v nichž se vyrovnává působení gravitační a odstředivé síly. Jde tedy o jakýsi bod rovnováhy. Body L4 a L5 se nachází na oběžné dráze většího tělesa o 60° „napřed“ nebo „za“ tělesem.



Obrázek 2.2: Planetky hlavního pásu podle vlastních elementů — osa  $x$  znázorňuje vlastní poloosu a osa  $y$  vlastní sklon. Lze vidět některé rodiny planetek, konkrétně například uprostřed nahoře Eunomia. Barevné označení znázorňuje oblasti mezi rezonancemi středního pohybu.

## 2.1 Rezonance

Struktura hlavního pásu planetek je významně ovlivněna rezonancemi, což jsou oblasti v prostoru, ve kterém když se planetka nachází, je nějaký údaj o její dráze a nějaké planety, běžně Jupitera nebo Saturnu, v jednoduchém poměru, tzn. ve zlomku s nízkým čitatelem a jmenovatelem. Pro sekulární rezonance můžeme mít i složitější vztahy, kdy spolu porovnáváme více veličin zároveň. ??????

### 2.1.1 Rezonance středního pohybu

Nástin výpočtu jejich polohy (je to jednoduché), vysvětlení vlivu na HCM

Rezonance středního pohybu jsou nejjednodušším, a zároveň také nejsilnějším typem rezonancí. Nastávají, když je oběžná doba planetky a planety v poměru s nízkými čísly, např.  $3 : 2$  — to znamená, že zatímco planetka dokončí tři celé oběhy, planeta vykoná dva a obě tělesa se znovu potkají na počáteční pozici.

Vlivem těchto rezonancí se může hlavní poloosa planetky a excentricita periodicky měnit, podobně jako je tomu při kyvadlu. Některé rezonance naopak postupně zvyšují excentricitu dráhy planetky, až se její perihélium dostane pod oběžnou dráhu nějaké vnitřní planety, např. Marsu nebo Země, což eventuelně způsobí vzájemné přiblížení, které planetku vymrští na úplně jinou oběžnou dráhu. Takto se planetka může stát blízkozemním objektem (NEO — Near–Earth object), součástí Kupierova pásu, který se nachází za orbitou Neptunu nebo může být úplně vystřelena ze sluneční soustavy. Za vhodných podmínek se perihélium planetky může snížit natolik, že překročí Rocheovu mez<sup>2</sup> a je později pohlcena hvězdou a stává se její součástí [6].

### 2.1.2 Sekulární rezonance

Nějaký hezký obrázek (třeba ze složky *secres*???), dlouhodobý vliv

Sekulární rezonance jsou mnohem mírnějšího rázu než rezonance středního pohybu, ale na dlouhodobý vývoj hlavního pásu mají velký vliv. Slovo sekulární pochází z latinského *saeculum*, což znamená století nebo generace, což ukazuje na dlouhodobý charakter sekulárních rezonancí. Veličiny, které zde dáváme do poměru, jsou rychlosti precese argumentu perihélia a délky vzestupného uzlu.

## 2.2 Rodiny planetek

Definice — katastrofická srážka, rozptýlení ve střední anomálii, podobnost pouze ve vlastních elementech, přesunout sem kapitoly o Jarkovského jevu, YORPu a náhodných srážkách???

---

<sup>2</sup>což je hraniční vzdálenost od centrálního tělesa, kterou když planetka držená pohromadě vlastní gravitací překročí, je vlivem slapových jevů roztržena na malé kousky.

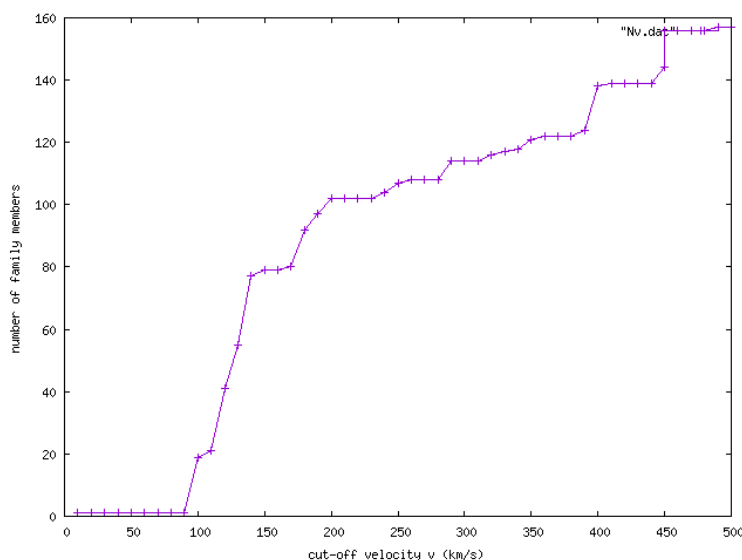
### 2.2.1 Metody identifikace rodin

Popis HCM (hierarchická shlukovací metoda),  $v_{cutoff}$ ,

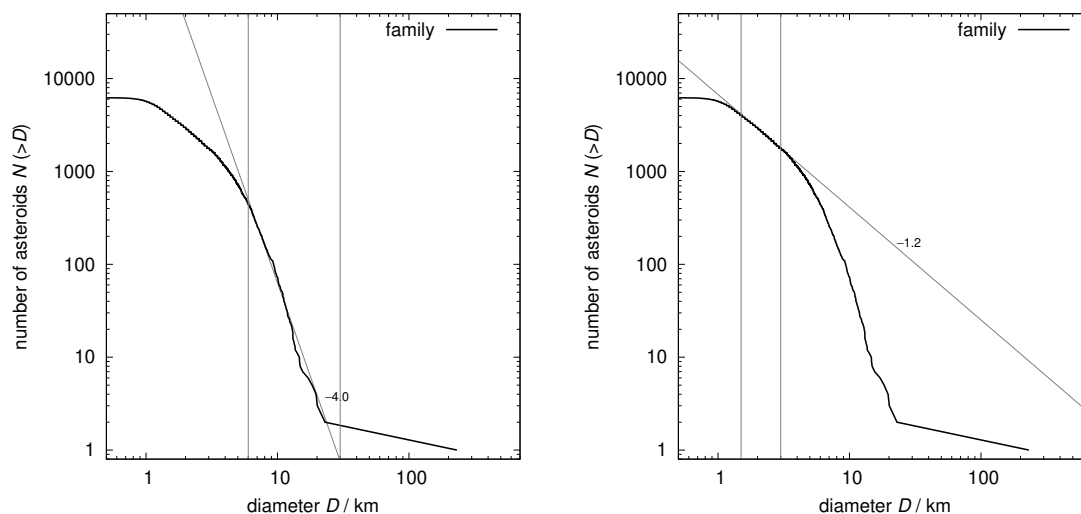
# Kapitola 3

## Vlastnosti rodiny Eunomia

Postup určování rodiny, volba  $v_{cutoff}$ , pozadí — [česky??] interlopers (ref na později), rozdělení velikostí



Obrázek 3.1: Závislost počtu členů rodiny Eunomia na zvolené hraniční rychlosti  $v_{cutoff}$ . Počet členů prudce vzroste při přechodu z rychlosti 43 m/s na 44 m/s, což je způsobené vzdáleností prvního tělesa jiného než mateřského tělesa. Dále vzroste prudce při přechodu z rychlosti 46 m/s na 47 m/s, což je způsobené splynutím s jinou rodinou.



Obrázek 3.2: Histogram četnosti velikostí planetek, kde veličina  $N(> D)$  označuje počet planetek s průměrem větším než  $D$ .???

### 3.1 Fyzikální model pro rodinu Eunomia

Rozdělení v  $ae$  a  $ai$  prostoru, vliv rezonancí J8/3 a J13/5, Gaussovy rovnice — elipsa, volba bodu rozpadu ( $f = 90^\circ$ ,  $\omega + f = 50^\circ$ ).

#### [česky] Interlopers

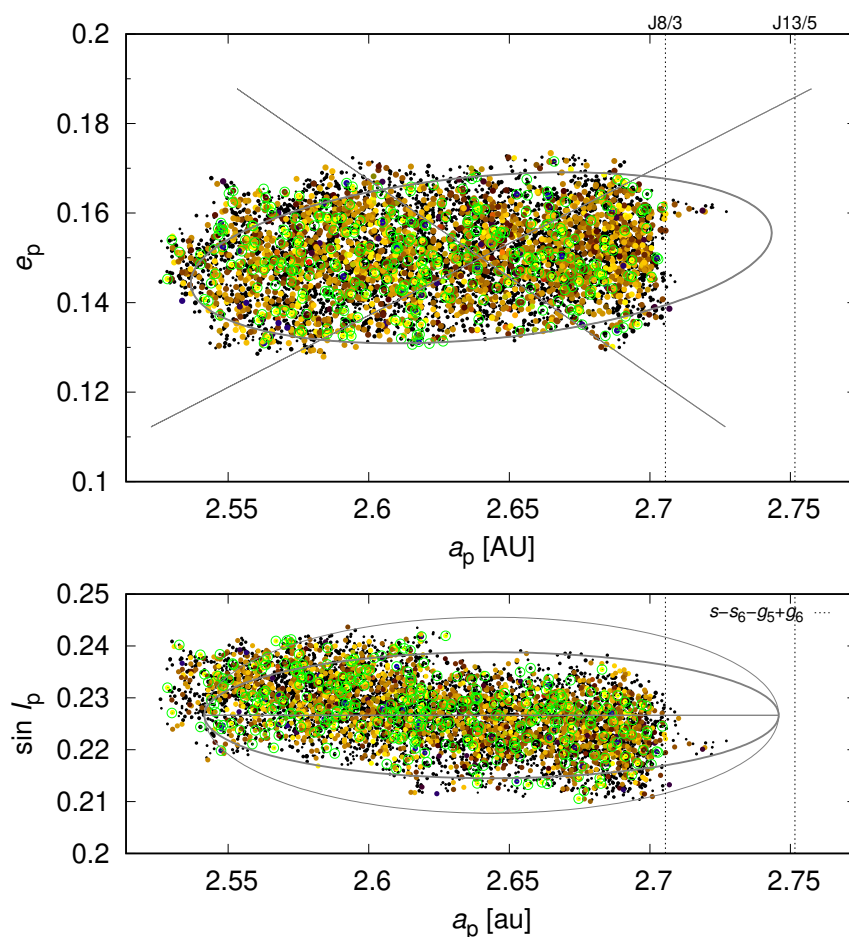
Odstranění interlopers, barevné indexy, SLOAN, WISE, ref na Nejistoty veřejných dat.

#### 3.1.1 Nevratné děje při vývoji

Disipační síly, vliv na vývoj v prostoru vlastních elementů, reference na nějaký článek o nové databázi tvarů planetek???

#### Jarkovského jev

Popis, vysvětlí obrázku aH, vliv na vlastní elementy, účinky kolem rezonancí



Obrázek 3.3: Pozorovaná rodina Eunomia v rovině vlastní hlavní poloosy  $a_p$  a vlastní excentricity  $e_p$  a v rovině vlastní hlavní poloosy  $a_p$  a vlastní inklinace  $\sin i_p$ . Barvy jsou převzaty z katalogu WISE. J8/3 a J13/5 označují rezonance středního pohybu s Jupiterem. Šedé křivky naznačují výpočet Gaussových rovnic pro hodnoty  $f = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  a  $\omega + f = 0^\circ, 50^\circ, 90^\circ$ , kde nejlepší hodnotou je  $f = 90^\circ$  a  $\omega + f = 50^\circ$ .

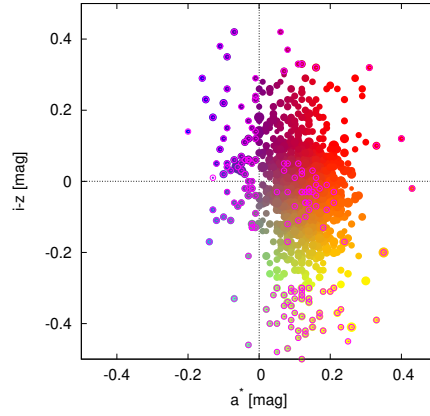
### YORP jev

Popis, zmínka o Poynting–Robertson efektu???, zesílení Jarkovského jevu

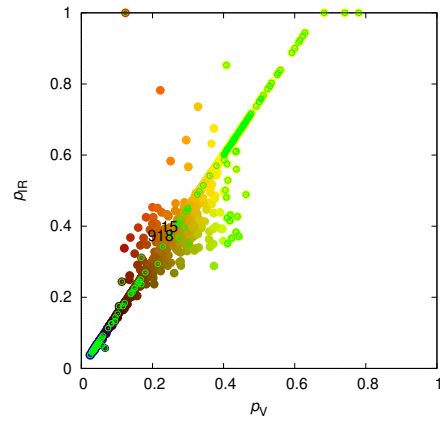
### Náhodné srážky

???





Obrázek 3.4: Barevné indexy z katalogu SLOAN (ref článek o tom). Pro vyřazení interlopers byly zvoleny krajní hodnoty  $0 \leq a^* \leq 0.3$  a  $-0.3 \leq i - z \leq 0.3$ .

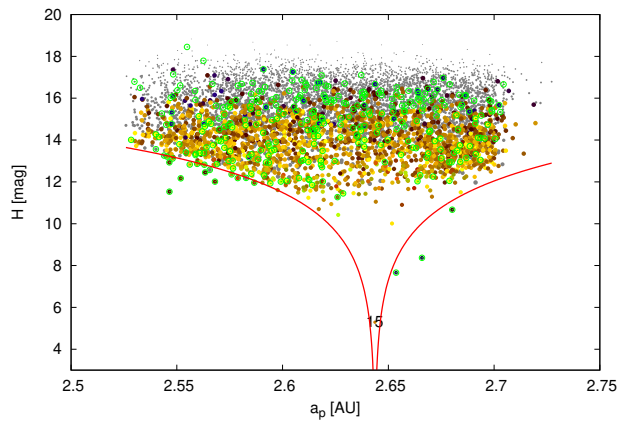


Obrázek 3.5: Barevné indexy z katalogu SLOAN (ref článek o tom). Pro vyřazení interlopers byly zvoleny krajní hodnoty  $0.05 \leq p_v \leq 0.4$ .

## 3.2 Nejistoty pozorovaných dat

???

Následující dvě kapitoly budou napsány až po doběhnutí simulace.



Obrázek 3.6: Rozdělení pozorované rodiny Eunomia v rovině vlastní hlavní poloosy  $a_p$  a absolutní hvězdné velikosti  $H$ . Lze pozorovat typický tvar  $V$ , který je způsobem počátečním rozpadem a vlivem Jarkovského jevu, který je navíc ještě zesílen vlivem YORPu, což způsobuje větší koncentraci malých planetek na okrajích rodiny.

### 3.3 (Simulace orbitálního vývoje)

Popis experimentu (údaje o výpočetní technice)

### 3.4 (Porovnání modelu a pozorování)

# Kapitola 4

## Aplikace v praxi

K čemu se to hodí: pochopení dějů ve sluneční soustavě, informace o jejím vzniku, katalog rodn planetek nám může říct něco o jejich složení — těžba asteroidů

# Kapitola 5

## Budoucí možnosti výzkumu

???

# Bibliografie

- [1] Wikipedie. *Pohybová rovnice* — *Wikipedie: Otevřená encyklopedie*. [Online; navštíveno 28. 11. 2018]. 2018. URL: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Pohybov%C3%A1\\_rovnice](https://cs.wikipedia.org/wiki/Pohybov%C3%A1_rovnice).
- [2] A. Cohan. „A Figure Eight And other Interesting Solutions to the N-Body Problem“. In: (2012). URL: [https://sites.math.washington.edu/~morrow/336\\_12/papers/adrian.pdf](https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_12/papers/adrian.pdf).
- [3] H. Levison a M.J. Duncan. *SWIFT: A solar system integration software package*. URL: <http://www.boulder.swri.edu/~hal/swift.html>.
- [4] M. Broz et al. „Did the Hilda collisional family form during the late heavy bombardment?“. In: (2011). URL: [http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/yarko-site/tmp/trojans\\_obrien/r32mig.pdf](http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/yarko-site/tmp/trojans_obrien/r32mig.pdf).
- [5] Wikimedia Commons. *File:Euler diagram of solar system bodies cs.svg* — *Wikimedia Commons, the free media repository*. [Online; accessed 25-December-2018]. 2018. URL: [https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Euler\\_diagram\\_of\\_solar\\_system\\_bodies\\_cs.svg&oldid=298057509](https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Euler_diagram_of_solar_system_bodies_cs.svg&oldid=298057509).
- [6] G Pichierri, A. Morbidelli a D. Lai. „Extreme secular excitation of eccentricity inside mean motion resonance“. In: (2017). URL: <https://arxiv.org/abs/1705.01841>.