Středoškolská odborná činnost

Obor č. 2: Fyzika

Mechanika rodin planetek s aplikací na rodinu Eunomia

Adam Křivka
Jihomoravský kraj

Brno 2018

TODO: Ostatní nutné úvodní stránky pro SOČku...

Obsah

Kapitola 1

Úvod do nebeské mechaniky

TODO: Úvod

1.1 Pohybové rovnice

Pohybová rovnice je matematicky zapsaný fyzikální vztah, který popisuje možné pohyby těles v daném prostředí [1]. Řešením pohybové rovnice je funkce, popisující polohu a rychlost každého zkoumaného tělesa v závislosti na čase. Přitom potřebujeme znát počáteční podmínky — polohy a rychlosti těles na začátku. Pohybová rovnice bývá ve tvaru diferenciální rovnice, což je rovnice, která vyjadřuje vztah mezi nějakou funkcí a jejími derivacemi, což je okamžitá změna hodnoty funkce při velmi malé změně argumentu, v našem případě času.

V následující části se pokusíme nalézt řešení pohybové rovnice pro tělesa ve sluneční soustavě. Zákony, jimiž se budou naše tělesa řídit, jsou Newtonův gravitační zákon a Newtonovy pohybové zákony, které byly poprvé definovány již v roce 1687.

1.1.1 Rovnice pro dvě tělesa

Omezme se nyní na dvě tělesa a nalezněme řešení tzv. problému dvou těles, někdy také Keplerovy úlohy. To znamená, že se pokusíme odvodit funkci, popisující polohu a rychlost obou těles v závisloti na čase.

Nacházíme se v inerciální vztažné soustavě, což je taková vztažná soustava, kde platí první Newtonův zákon. Jako bod v klidu si zvolme těžiště soustavy. Pro síly působící na obě tělesa podle Newtonova gravitačního zákona a druhého a třetího pohybového zákona platí

$$\vec{F}_1 = +G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3}\vec{r} = m_1\vec{a}_1 \tag{1}$$

$$\vec{F}_2 = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3}\vec{r} = m_2\vec{a}_2, \tag{2}$$

kde G označuje gravitační konstantu, m_1, m_2 hmotnosti zkoumaných těles, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ vektory zrychlení těles (tj. druhé derivace polohových vektorů $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ podle času) a $\vec{r}$ vektor udávající vzájemnou polohu těles, definovanou jako $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Součtem obou rovnic dostáváme

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m_1\vec{a_1} + m_2\vec{a_2} = 0. \tag{3}$$

Vektor popisující polohu těžiště soustavy je $\vec{R} \equiv \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$. Jeho druhou derivací podle času dostáváme zrychlení

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{m_1\vec{a_1} + m_2\vec{a_2}}{m_1+m_2} = 0,$$

které se podle (3) rovná nule, takže se těžiště soustavy pohybuje konstantní rychlostí.

Nyní se však přesuňme do soustavy neinerciální, kde je první z těles (běžně to hmotnější) nehybné. Řekněme, že nehybné těleso má index 1, tedy nově $\vec{r}_1' = 0$, $\vec{r}_2' = \vec{r}$ (tedy i $\vec{a}_2' = \vec{a}$) a $\vec{r}' = \vec{r}$. Provedli jsme tedy v podstatě transformaci, kdy jsme ke každému vektoru přičetli $\vec{r}_1$. Rovnici (1) můžeme přepsat jako

$$\vec{a} = Gm_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} - Gm_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = 0 \tag{4}$$

Často ještě definujeme gravitační paramter soustavy $\mu = Gm_2$.

I přesto, že tato diferenciální rovnice ještě není ve své konečné podobě vhodné k tomu, abychom z ní vyvodili následující vztah, prozradíme, že je jím funkce v polárních souřadnicích, popisující vzdálenost těles $r \equiv |\vec{r}|$ v závisloti na úhlu θ, který svírá přímka procházející oběma tělesy a nějaká zvolená referenční přímka.

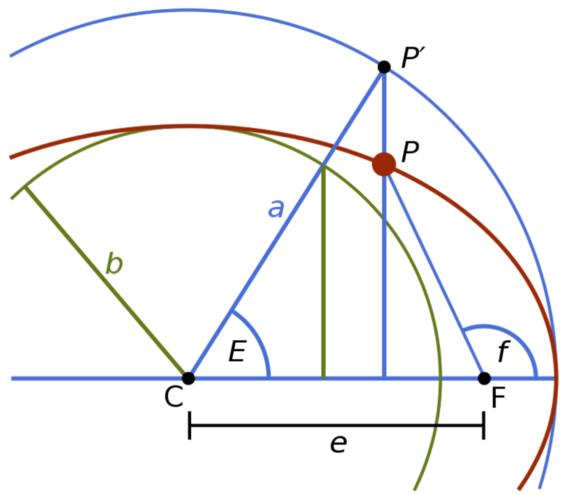
$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \omega)} \tag{5}$$

kde p se nazývá paramter elipsy, jehož velikost je určena hodnotou μ, e, resp. ω jsou integrační konstanty a nazývají se excentricita, resp. argument pericentra. K rovnici (5) a jejím důsledkům se vrátíme v sekci 1.2, zatím vězme, že jsme dostali obecnou funkci kuželosečky, z nichž nás bude nejvíce zajímat případ elipsy. Zmíněné konstanty budou určovat její tvar, rozhodně ale nestačí k úplnému popsání orientace trajektorie (orbity) tělesa v prostoru.

Uvědomme si, že jsme neodvodili závislost polohy tělesa na čase. Tuto závislost určuje Keplerova rovnice:

$$M = E + e\sin E \tag{6}$$

kde M označuje střední anomálii, E excentrickou anomálii a e excentricitu elipsy (viz obrázek 1.1). Obě anomálie mají úhlové jednotky, úhel M ale nemůžeme zkonstruovat, nicméně je významný tím, že je lineárně závislý na čase. Pokud známe E, můžeme pomocí snadno spočítat M. Problém spočívá v tom, že nemůžeme vyjádřit E v závisloti na M konečným



Obrázek 1.1: TODO

výrazem, ale pouze nekonečnou řadou nebo jej můžeme aproximovat numerickými metodami.

1.1.2 Rovnice pro N těles

Jak vidíme, už i pro dvě tělesa se musíme k získání polohy tělesa v čase uchýlit k numerickým metodám. Ukazuje se, že obecný problém N těles je analyticky neřešitelný[1] a jediné aplikovatelné metody jsou metody přibližné analytické nebo numerické.

Uvažujme nyní N těles — respektive hmotných bodů, které na sebe vzájemně gravitačně působí v souladu s Newtonovým gravitačním zákonem. Pro libovolné těleso, označené indexem $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, je celková síla F_j, která na něj působí, výslednicí všech gravitačních

[1] existují ale nějaká zajímavá speciální řešení, viz [2].

sil způsobených ostatními tělesy, jak ukazuje následující rovnice.

$$\vec{F}_j = m_j \vec{a}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{7}$$

$$\vec{a}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{G m_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{8}$$

kde $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ označuje vektor určující vzájemnou polohu těles i a j, konkrétně jde o vektor s počátkem v tělese j a vrcholem v tělese i; ostatní veličiny jsou definované analogicky jako v předchozí části.

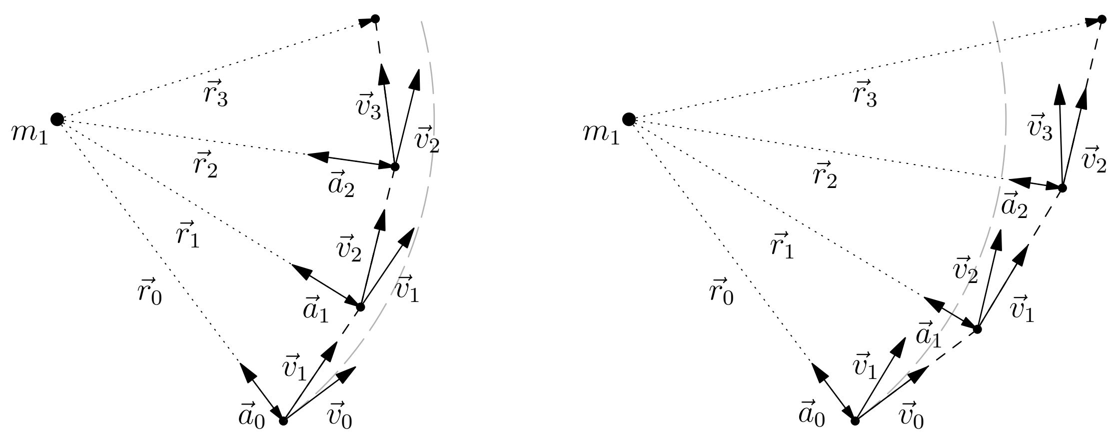
Eulerova metoda

I přesto, že se následující integrační metoda v přesných numerických výpočtech zřídka používá, uvádíme ji zde z didaktických důvodů, neboť názorně ilustruje použití numerických metod pro řešení problému N těles. Jak název napovídá, poprvé s ní v 18. století přišel švýcarský matematik Leonhard Euler.

Princip algoritmu spočívá v tom, že v libovolném čase můžeme z (8) vypočítat zrychlení každého tělesa. Pak, po zvolení určitého časového kroku, odpovídajícím způsobem změníme vektor rychlosti. Následně necháme všechna tělesa po dobu časového kroku pohybovat se po přímce konstantní rychlostí. Existují dvě verze Eulerovy metody, dopředná a zpětná, které se liší volbou rychlosti, se kterou necháváme pohybovat se po přímce, viz následující přesný popis obou metod a obrázek 1.2.

Mějme zmiňovaných N hmotných bodů, pro které platí (8). Zaměřme se na jeden z nich a označme jeho počáteční polohu $\vec{r}(t_0)$ a počáteční rychlost $\vec{v}(t_0)$. K použití Eulerovy metody potřebujeme znát i počáteční polohy a rychlosti všech ostatních těles v systému. Dále vhodně zvolme velikost časového kroku h. V následujícíh třech krocích si ukážeme jednu iteraci algoritmu jak pro dopřednou, tak pro zpětnou metodu.

1. Nechť je v čase t_k poloha zvoleného bodu $\vec{r}(t_k)$ a rychlost $\vec{v}(t_k)$. Z (8) vypočítáme zrychlení $\vec{a}(t_k)$.



Obrázek 1.2: Ilustrace dopředné (vpravo) a zpětné (vlevo) Eulerovy metody pro dvě tělesa, kdy větší těleso (velká tečka vlevo nahoře) gravitačně působí na menší těleso (malé tečky vpravo). Jsou ukázány první tři iterace. Algoritmus byl doopravdy implementován, s hodnotami: $h = 20\,\text{dnů}$, $m_1 = 2 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$, $|\vec{r}| = 1\,\text{AU}$, $v_0 = 29861\,\text{ms}^{-1}$. Vektory jsou přeškálované. Šedá křivka znázorňuje analytické řešení problému dvou těles.

2. Položme $t_{k+1} = t_k + h$ a vypočítejme $\vec{v}(t_{k+1}) = \vec{v}(t_k) + h \cdot \vec{a}(t_k)$.[2]

3. Pro dopřednou metodu vypočítejme $\vec{r}(t_{k+1})$ jako $\vec{r}(t_{k+1}) = \vec{r}(t_k) + h \cdot \vec{v}(t_k)$ a pro zpětnou jako $\vec{r}(t_{k+1}) = \vec{r}(t_k) + h \cdot \vec{v}(t_{k+1})$. Poté se vraťme ke kroku 1, tentokrát počítaje v čase t_{k+1}.

Jak můžeme vidět na obrázku 1.2, vypočtená dráha se od té analytické značně vzdaluje. To by samozřejmě řešila volba menší kroku h, ale pro velký počet těles a velkou požadovanou přesnost je algoritmus velmi pomalý.

Jedno z možných vylepšení je volně řečeno průměrování dopředné a zpětné Eulerovy metody — tzv. „leapfrog“ metoda. Spočívá v tom, že rychlost počítáme v jedné polovině časového kroku, ne nakonci nebo na začátku. Další zpřesnění lze získat tak, že místo pohybu po přímce konstantní rychlostí použijeme nějakou lokální eliptickou dráhu, kterou získáme, když místo všech ostatních těles uvážíme pouze jejich těžiště, čímž situaci zredukujeme na problém dvou těles, který umíme vyřešit. Tato integrační metoda se již podobá algoritmu Wisdom–Holman Mapping, jehož ještě zlepšenou verzi využívá integrační balíček SWIFT [3], který budeme v této práci používat. Nutno dodat, že v námi užitém algoritmu ještě započítáváme negravitační jevy, jako Yarkovského jev, YORP jev a náhodné srážky, viz [4].

1.2 Orbitální elementy

TODO: Zavedení šesti základní elementů

1.2.1 Oskulační elementy

TODO: Popis, efemeridy

[2] Můžeme porovnat se vzorcem pro rovnoměrný přímočarý pohyb, dobře známým ze středoškolského učiva: $v = v_0 + at$, podobně v kroku 3 $s = s_0 + vt$

1.2.2 Střední elementy

1.2.3 Vlastní elementy

TODO: Význam, nastínění výpočtu

Kapitola 2

Planetky ve Sluneční soustavě

2.1 Rodiny planetek

2.1.1 Metody identifikace rodin

Rezonance středního pohybu

Rezonance sekulární

Kapitola 3

Vlastnosti rodiny Eunomia

3.1 Nejistoty pozorovaných dat

3.2 Fyzikální model pro rodinu Eunomia

3.2.1 Jarkovského jev

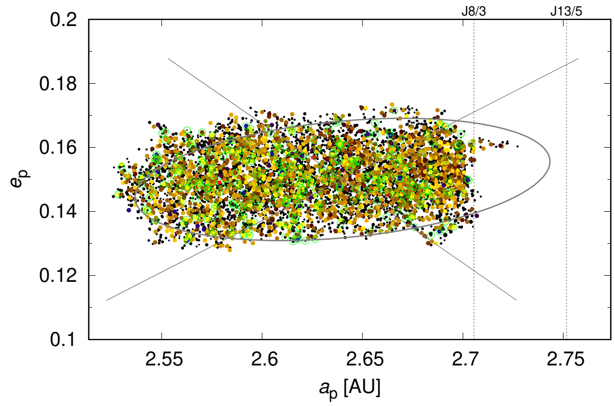
3.2.2 YORP jev

3.2.3 Náhodné srážky

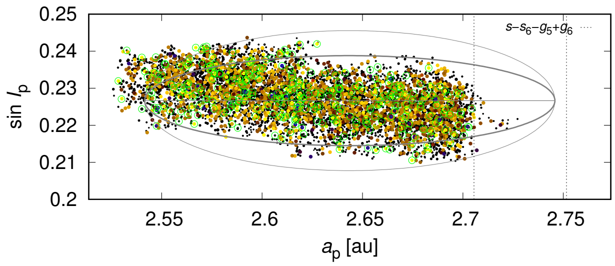
3.2.4 Nevratné děje při vývoji

3.3 Simulace orbitálního vývoje

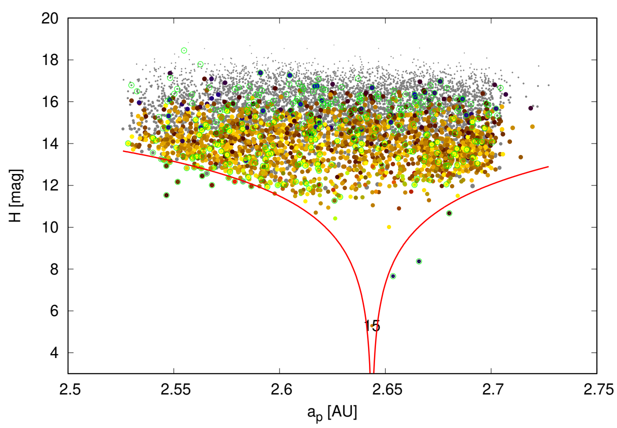
3.4 Porovnání modelu a pozorování



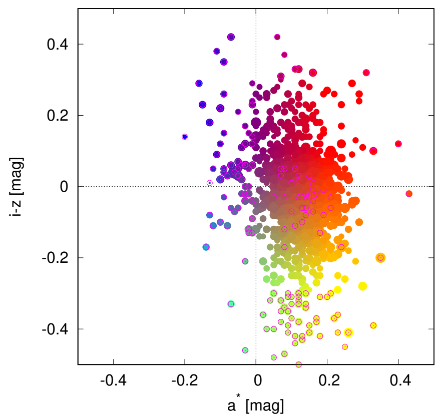
Obrázek 3.1: TODO



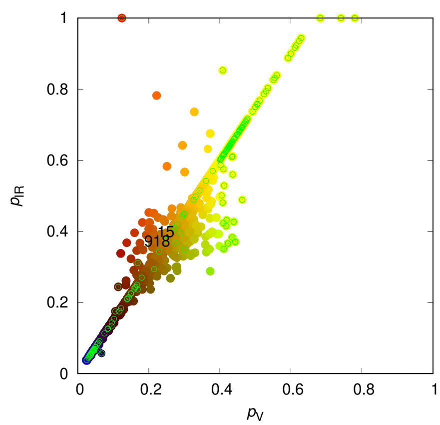
Obrázek 3.2: TODO



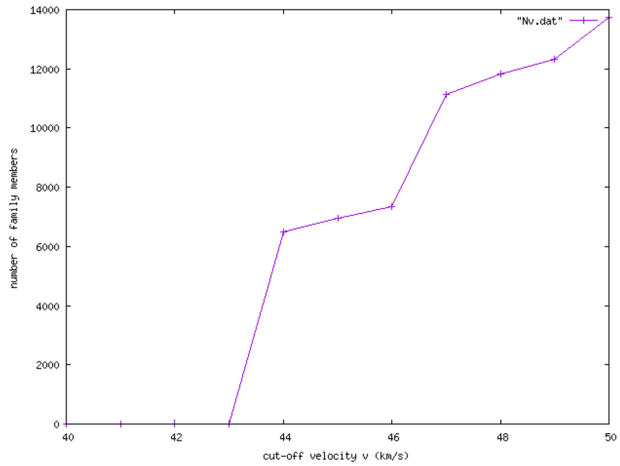
Obrázek 3.3: TODO



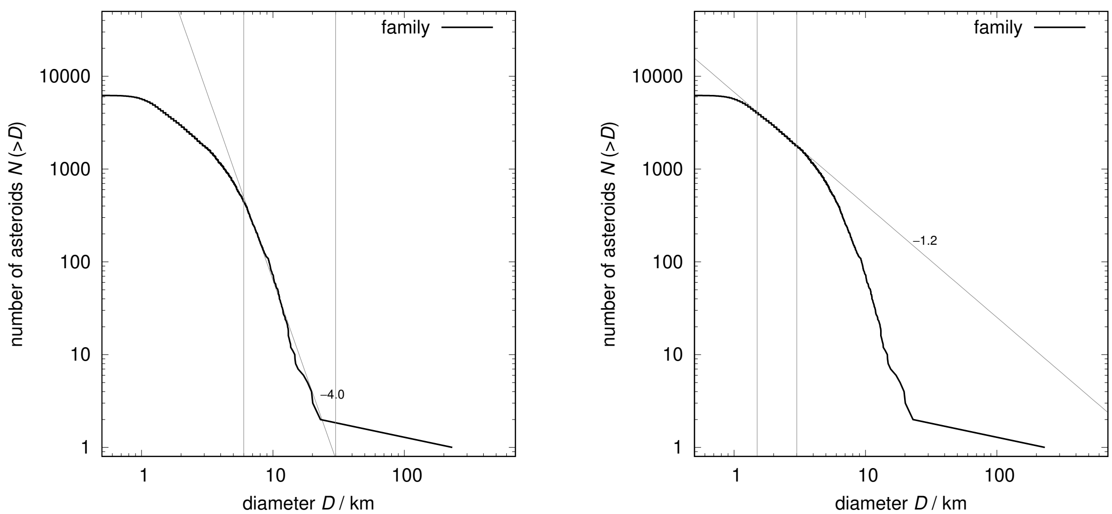
Obrázek 3.4: TODO



Obrázek 3.5: TODO



Obrázek 3.6: TODO



Obrázek 3.7: TODO

Kapitola 4

Aplikace v praxi

Kapitola 5

Budoucí možnosti výzkumu

Bibliografie

[1] Wikipedie. *Pohybová rovnice — Wikipedie: Otevřená encyklopedie*. [Online; navštíveno 28. 11. 2018]. 2018. URL: https://cs.wikipedia.org/wiki/Pohybov%C3%A1_rovnice.

[2] A. Cohan. „A Figure Eight And other Interesting Solutions to the N-Body Problem". In: (2012). URL: https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_12/papers/adrian.pdf.

[3] H. Levison a M.J. Duncan. *SWIFT: A solar system integration software package*. URL: http://www.boulder.swri.edu/~hal/swift.html.

[4] M. Broz et al. „Did the Hilda collisional family form during the late heavy bombardment?" In: (2011). URL: http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/yarko-site/tmp/trojans_obrien/r32mig.pdf.