

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 2: Fyzika

Mechanika rodn planetek s aplikací na rodnun Eunomia

Adam Křivka
Jihomoravský kraj

Brno 2018

TODO: Ostatní nutné úvodní stránky pro SOČku ...

Obsah

1 Úvod do nebeské mechaniky	5
1.1 Pohybové rovnice	5
1.1.1 Rovnice pro dvě tělesa	6
1.1.2 Rovnice pro N těles	9
1.2 Orbitální elementy	12
1.2.1 Oskulační elementy	12
1.2.2 Střední elementy	14
1.2.3 Vlastní elementy	15
2 Planetky ve Sluneční soustavě	17
2.1 Rodiny planetek	17
2.1.1 Metody identifikace rodin	17
3 Vlastnosti rodiny Eunomia	18
3.1 Nejistoty pozorovaných dat	18
3.2 Fyzikální model pro rodinu Eunomia	18
3.2.1 Jarkovského jev	18
3.2.2 YORP jev	18
3.2.3 Náhodné srážky	18
3.2.4 Nevratné děje při vývoji	18
3.3 Simulace orbitálního vývoje	18
3.4 Porovnání modelu a pozorování	18

<i>OBSAH</i>	4
4 Aplikace v praxi	22
5 Budoucí možnosti výzkumu	23

Kapitola 1

Úvod do nebeské mechaniky

TODO: Úvod

1.1 Pohybové rovnice

Pohybová rovnice je matematicky zapsaný fyzikální vztah, který popisuje možné pohyby těles v daném prostředí [1]. Řešením pohybové rovnice je funkce, popisující polohu a rychlost každého zkoumaného tělesa v závislosti na čase. Přitom potřebujeme znát počáteční podmínky — polohy a rychlosti těles na začátku. Pohybová rovnice bývá ve tvaru diferenciální rovnice, což je rovnice, která vyjadřuje vztah mezi nějakou funkcí a jejími derivacemi, což je okamžitá změna hodnoty funkce při velmi malé změně argumentu, v našem případě času.

V následující části se pokusíme nalézt řešení pohybové rovnice pro tělesa ve sluneční soustavě. Zákony, jimiž se budou naše tělesa řídit, jsou Newtonův gravitační zákon a Newtonovy

pohybové zákony, které byly poprvé definovány již v roce 1687.

1.1.1 Rovnice pro dvě tělesa

Omezme se nyní na dvě tělesa a nalezněme řešení tzv. problému dvou těles, někdy také Keplerovy úlohy. To znamená, že se pokusíme odvodit funkci, popisující polohu a rychlost obou těles v závislosti na čase.

Nacházíme se v inerciální vztažné soustavě, což je taková vztažná soustava, kde platí první Newtonův zákon. Jako bod v klidu si zvolme těžiště soustavy. Pro síly působící na obě tělesa podle Newtonova gravitačního zákona a druhého a třetího pohybového zákona platí

$$\vec{F}_1 = +G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = m_1 \vec{a}_1 \quad (1)$$

$$\vec{F}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = m_2 \vec{a}_2, \quad (2)$$

kde G označuje gravitační konstantu, m_1 , m_2 hmotnosti zkoumaných těles, \vec{a}_1 , \vec{a}_2 vektory zrychlení těles (tj. druhé derivace polohových vektorů \vec{r}_1 , \vec{r}_2 podle času) a \vec{r} vektor udávající vzájemnou polohu těles, definovanou jako $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Součtem obou rovnic dostáváme

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0. \quad (3)$$

Vektor popisující polohu těžiště soustavy je $\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$. Jeho druhou derivací podle času dostáváme zrychlení

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2} = 0,$$

které se podle (3) rovná nule, takže se těžiště soustavy pohybuje konstantní rychlostí.

Nyní se však přesuňme do soustavy neinerciální, kde je první z těles (běžně to hmotnější) nehybné. Řekněme, že nehybné těleso má index 1, tedy nově $\vec{r}'_1 = 0$, $\vec{r}'_2 = \vec{r}$ (tedy i $\vec{a}'_2 = \vec{a}$) a $\vec{r}' = \vec{r}$. Provedli jsme tedy v podstatě transformaci, kdy jsme ke každému vektoru přičetli \vec{r}_1 . Rovnici (1) můžeme přepsat jako

$$\begin{aligned} \vec{a} &= Gm_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - Gm_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Často ještě definujeme gravitační paramter soustavy $\mu = Gm_2$.

I přesto, že tato diferenciální rovnice ještě není ve své konečné podobě vhodná k tomu, abychom z ní vyvodili následující vztah, prozradíme, že je jím funkce v polárních souřadnicích, popisující vzdálenost těles $r \equiv |\vec{r}|$ v závislosti na úhlu θ , který svírá přímka procházející oběma tělesy a nějaká zvolená referenční přímka.

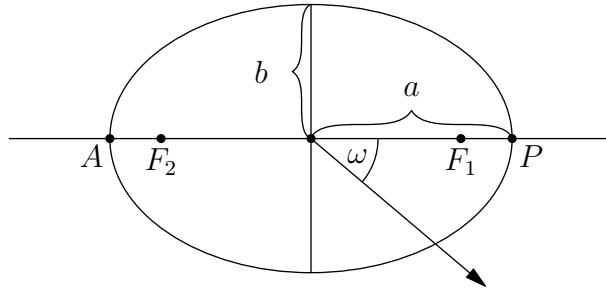
$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)} \quad (5)$$

Pro naše účely se omezme na případ elipsy, kdy se v jednom z jejích ohnisek nachází centrální těleso. p označuje parametr elipsy, jehož velikost je určena hodnotou μ a pro který platí vztah

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad (6)$$

kde a označuje délku hlavní poloosy, což je úsečka spojující střed elipsy s jedním z průsečíků elipsy s hlavní osou — přímkou spojující ohniska, a b označuje délku vedlejší poloosy, což je úsečka spojující střed elipsy s průsečíkem elipsy s přímkou kolmou na hlavní poloosu a procházející středem elipsy — vedlejší osou (viz 1.1). Dále e , resp. ω jsou integrační konstanty a nazývají se excentricita, resp. argument pericentra. Pro excentricitu platí vztah

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad (7)$$



Obrázek 1.1: Eliptická oběžná dráha vesmírného tělesa. a označuje délku hlavní poloosy, b délku vedlejší poloosy, F_1 a F_2 označují polohy ohnisek elipsy, přičemž centrální těleso se nachází v bodě F_1 , a P , resp. A označují pericentrum, resp. apocentrum oběžné dráhy, tedy bod nejnížší, resp. nejvyšší vzdálenosti od centrálního tělesa, ω označuje argument pericentra.

a volně řečeno udává, jak moc se elipsa liší od kružnice. Argument pericentra je úhel, který svírá hlavní osa s referenční přímkou. Platí pro něj vztah

$$\theta = \omega + f, \quad (8)$$

kde f označuje pravou anomálii, což je úhel, který svírá hlavní osa s průvodičem tělesa.

Uvědomme si, že jsme neodvodili závislost polohy tělesa na čase. Tuto závislost určuje Keplerova rovnice:

$$M = E + e \sin E \quad (9)$$

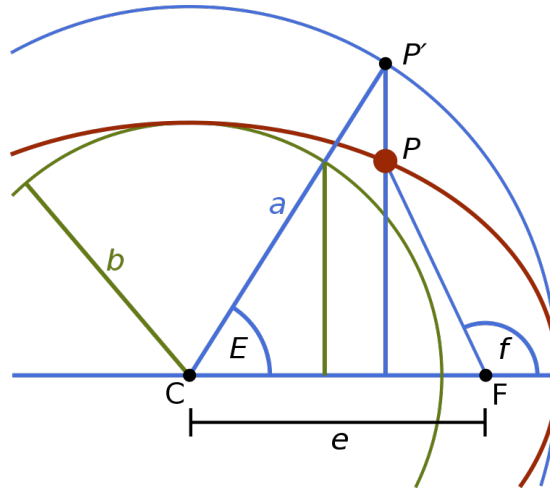
kde M označuje střední anomálii, E excentrickou anomálii a e excentricitu elipsy (viz obrázek 1.2). Mezi E a pravou anomálií f platí vztah

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (10)$$

Anomálie mají úhlové jednotky, úhel M ale nemůžeme zkonstruovat, nicméně je významný tím, že je lineárně závislý na čase. Je určen vztahem

$$M = nt, \quad (11)$$

May-DO: Předělat do jednotného stylu obrázků.



Obrázek 1.2: Ilustrace vztahu mezi excentrickou anomálií E a pravou anomálií f . a , resp. b značí délku hlavní, resp. vedlejší poloosy, P značí polohu tělesa na elipse, C značí střed elipsy, F značí ohnisko, ve kterém se nachází centrální těleso a e značí excentricitu (vymazat??)

kde n označuje střední denní pohyb, jinak řečeno průměrnou úhlovou rychlost. Pokud známe E , můžeme pomocí Keplerovy rovnice snadno spočítat M . Problém spočívá v tom, že nemůžeme vyjádřit E v závislosti na M konečným výrazem, ale pouze nekonečnou řadou nebo jej můžeme aproximovat iteračními nebo numerickými metodami.

1.1.2 Rovnice pro N těles

Jak vidíme, už i pro dvě tělesa se musíme k získání polohy tělesa v čase uchýlit k numerickým metodám. Ukazuje se, že obecný problém N těles je analyticky neřešitelný¹ a jediné aplikovatelné metody jsou metody přibližné analytické nebo numerické.

Uvažujme nyní N těles — respektive hmotných bodů, které na sebe vzájemně gravitačně působí v souladu s Newtonovým gravitačním zákonem. Pro libovolné těleso, označené indexem $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, je celková síla F_j , která na něj působí, výslednicí všech gravitačních

¹existují ale nějaká zajímavá speciální řešení, viz [2].

sil způsobených ostatními tělesy, jak ukazuje následující rovnice.

$$\vec{F}_j = m_j \vec{a}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (12)$$

$$\vec{a}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{G m_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (13)$$

kde $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ označuje vektor určující vzájemnou polohu těles i a j , konkrétně jde o vektor s počátkem v tělese j a vrcholem v tělese i ; ostatní veličiny jsou definované analogicky jako v předchozí části.

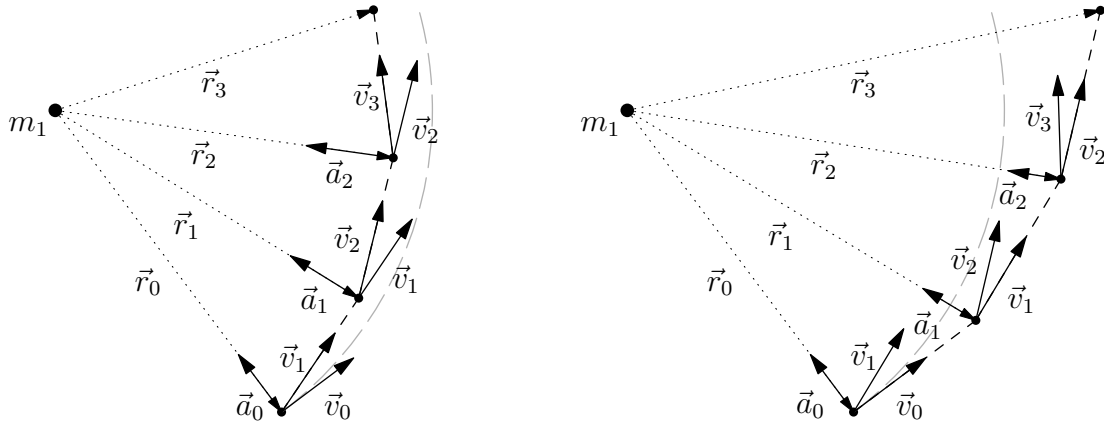
Eulerova metoda

I přesto, že se následující integrační metoda v přesných numerických výpočtech zřídka používá, uvádíme ji zde z didaktických důvodů, neboť názorně ilustruje použití numerických metod pro řešení problému N těles. Jak název napovídá, poprvé s ní v 18. století přišel švýcarský matematik Leonhard Euler.

Princip algoritmu spočívá v tom, že v libovolném čase můžeme z (13) vypočítat zrychlení každého tělesa. Pak, po zvolení určitého časového kroku, odpovídajícím způsobem změníme vektor rychlosti. Následně necháme všechna tělesa po dobu časového kroku pohybovat se po přímce konstantní rychlostí. Existují dvě verze Eulerovy metody, dopředná a zpětná, které se liší volbou rychlosti, se kterou necháváme pohybovat se po přímce, viz následující přesný popis obou metod a obrázek 1.3.

Mějme zmiňovaných N hmotných bodů, pro které platí (13). Zaměříme se na jeden z nich a označme jeho počáteční polohu $\vec{r}(t_0)$ a počáteční rychlost $\vec{v}(t_0)$. K použití Eulerovy metody potřebujeme znát i počáteční polohy a rychlosti všech ostatních těles v systému. Dále vhodně zvolme velikost časového kroku h . V následujících třech krocích si ukážeme jednu iteraci algoritmu jak pro dopřednou, tak pro zpětnou metodu.

1. Nechť je v čase t_k poloha zvoleného bodu $\vec{r}(t_k)$ a rychlost $\vec{v}(t_k)$. Z (13) vypočítáme zrychlení $\vec{a}(t_k)$.



Obrázek 1.3: Ilustrace dopředné (vpravo) a zpětné (vlevo) Eulerovy metody pro dvě tělesa, kdy větší těleso (velká tečka vlevo nahoře) gravitačně působí na menší těleso (malé tečky vpravo). Jsou ukázány první tři iterace. Algoritmus byl doopravdy implementován, s hodnotami: $h = 20$ dnů, $m_1 = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m³kg⁻¹s⁻², $|\vec{r}| = 1$ AU, $v_0 = 29861$ ms⁻¹. Vektory jsou přeškálované. Šedá křivka znázorňuje analytické řešení problému dvou těles.

2. Položme $t_{k+1} = t_k + h$ a vypočítejme $\vec{v}(t_{k+1}) = \vec{v}(t_k) + h \cdot \vec{a}(t_k)$.²
3. Pro dopřednou metodu vypočítejme $\vec{r}(t_{k+1})$ jako $\vec{r}(t_{k+1}) = \vec{r}(t_k) + h \cdot \vec{v}(t_k)$ a pro zpětnou jako $\vec{r}(t_{k+1}) = \vec{r}(t_k) + h \cdot \vec{v}(t_{k+1})$. Poté se vraťme ke kroku 1, tentokrát počítaje v čase t_{k+1} .

Jak můžeme vidět na obrázku 1.3, vypočtená dráha se od té analytické značně vzdaluje. To by samozřejmě řešila volba menší kroku h , ale pro velký počet těles a velkou požadovanou přesnost je algoritmus velmi pomalý.

Jedno z možných vylepšení je volně řečeno průměrování dopředné a zpětné Eulerovy metody — tzv. „leapfrog“ metoda. Spočívá v tom, že rychlost počítáme v jedné polovině časového kroku, ne nakonci nebo na začátku. Další zpřesnění lze získat tak, že místo pohybu po přímce konstantní rychlostí použijeme nějakou lokální eliptickou dráhu, kterou získáme,

²Můžeme porovnat se vzorcem pro rovnoměrný přímočarý pohyb, dobře známým ze středoškolského učiva: $v = v_0 + at$, podobně v kroku 3 $s = s_0 + vt$

když místo všech ostatních těles uvážíme pouze jejich těžiště, čímž situaci zredukujeme na problém dvou těles, který umíme vyřešit. Tato integrační metoda se již podobá algoritmu Wisdom–Holman Mapping, jehož ještě zlepšenou verzi využívá integrační balíček SWIFT [3], který budeme v této práci používat. Nutno dodat, že v námi užitém algoritmu ještě započítáváme negravitační jevy, jako Yarkovského jev, YORP jev a náhodné srážky, viz [4].

1.2 Orbitální elementy

K úspěšnému určení a zařazení oběžné dráhy nějakého vesmírného tělesa zavedeme šest elementů dráhy, které budeme v opzdějších sekcích používat k analýze rodin planetek. V sekci 1.1.1 jsme odvodili obecnou rovnici kuželosečky zapsanou v polárních souřadnicích. Ve sluneční soustavě se však s jinými, než s eliptickými dráhami nesetkáme, budeme tedy definovat elementy dráhy pouze pro dráhu eliptickou.

1.2.1 Oskulační elementy

Oskulační elementy popisují takovou oběžnou dráhu tělesa, po které by se pohybovalo kolem centrálního tělesa v problému dvou těles — tedy po zanedbání všech ostatních těles (planet, měsíců, ... a negravitačních sil. Svým způsobem tedy zachycují aktuální stav tělesa v rámci celé soustavy, je tudíž nutno s nimi uvádět i časový údaj — tzv. epochu). Neustále se mění působením perturbací, což jsou jakékoli vnější síly působící na těleso jiné, než gravitační síla centrálního tělesa — např. gravitace ostatních planet, nerovnoměrný tvar centrálního tělesa či Jarkovského efekt, neboli unášení, o kterém budeme hovořit později.

Skutečnost, že elementů je právě šest, není náhodou, existuje totiž výpočet, kterým lze z polohy a rychlosti tělesa v prostoru, tedy z údajů x, y, z, v_x, v_y, v_z , spočítat elementy dráhy v prostoru; je tedy logické, že vzniklých údajů musí být zase šest.

Prvními dvěma elementy jsou hlavní poloosa a excentricita, které definují tvar elipsy (viz obrázek 1.1). Hlavní poloosu značíme a a při studiu sluneční soustavy tento údaj většinou udáváme v astronomických jednotkách — AU — přičemž $1 \text{ AU} = 149\,597\,870 \text{ km}$, což je střední vzdálenost slunce a Země. Excentricita se pro eliptické dráhy nachází v intervalu

(0,1), kde krajními případy jsou $e = 0$: dráha má tvar kružnice, a $e = 1$: dráha má tvar paraboly.

Dalšími dvěma elementy jsou argument pericentra a střední anomálie (viz 1.1.1), které udávají polohu tělesa v rovině oběžné dráhy. Refereční přímkou je průsečnicí roviny dráhy s refereční rovinou — ekliptikou, přesněji řečeno je to polopřímka s počátečním bodem v poloze centrálním tělesa a pomocným bodem ve vzestupné uzlu, což je bod, ve kterém těleso prochází refereční rovinou „zespodu nahoru“. Střední anomálie je určena vztahem 11 a udává samotnou polohu tělesa na elipse.

Poslední dvojice elementů, sklon a délka vzestupného uzlu, udává polohu roviny oběžné dráhy v prostoru. Sklon dráhy (cizím slovem inklinace) je orientovaný úhel, který svírá rovina dráhy vzhledem k ekliptice. Znaší se i a většinou se udává ve stupních, někdy se ale uvádí $\sin i$, což je ekvivalentní definice, protože pro $-90^\circ \leq i \leq 90^\circ$ je $\sin i$ jednoznačně určen. Délka vzestupného uzlu je orientovaný úhel, který svírá spojnice centrálního tělesa s referenčním směrem v rovině ekliptiky, za který se ve sluneční soustavě bere směr k jarnímu bodu, což je jeden z průsečíků ekliptiky s rovinou zemského rovníku, jinak řečeno poloha slunce vzhledem k Zemi v okamžiku jarní rovnodennosti.

Výpočet polohy tělesa z elementů dráhy

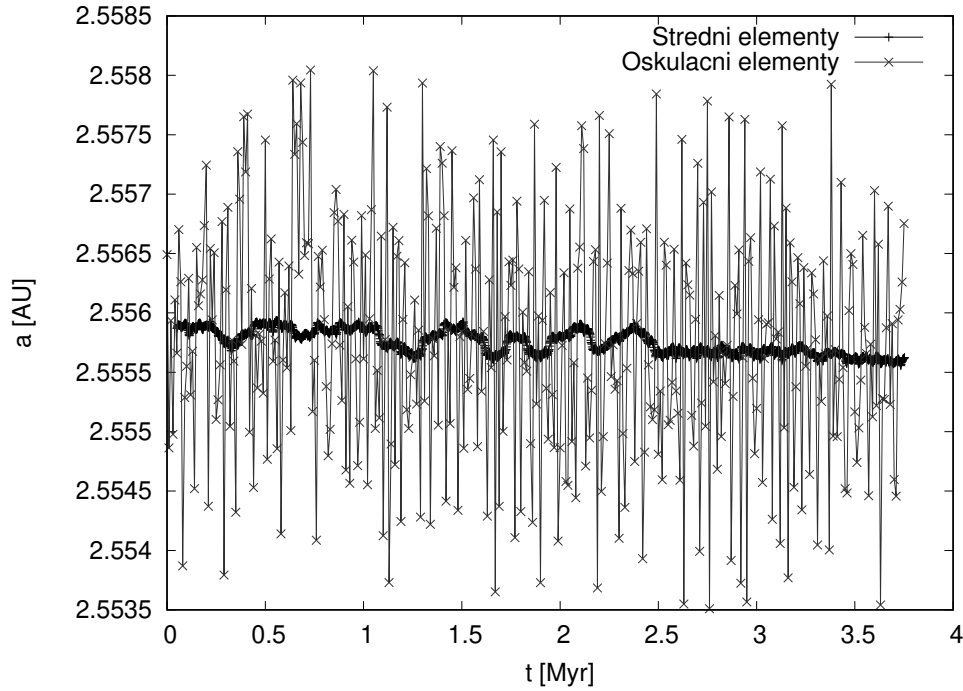
1. Z rovnice (9) nějakou ze jmenovaných metod (aproximačních, iteračních nebo numerických) vypočítáme velikost excentrické anomálie.
2. Vztah (10) upravíme a spočteme pravou anomálii f :

$$f = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \right) \quad (14)$$

3. Pomocí vztahu

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (15)$$

vypočítáme velikost r — relativní vzdálenost těles.



Obrázek 1.4: Porovnání oskulační a střední hlavní poloosy pro simulaci jedné planety po dobu 3.76 miliónů let.

4. Pomocí vztahů

$$x = r(\cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos i) \quad (16)$$

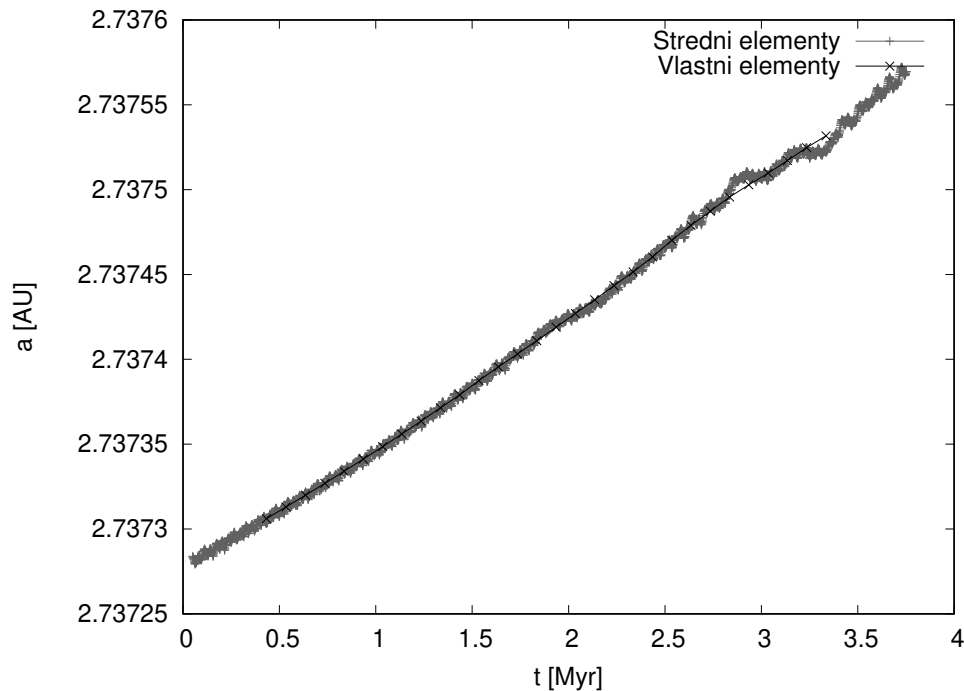
$$y = r(\sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos i) \quad (17)$$

$$z = r \sin i \sin(\omega + f) \quad (18)$$

vypočítáme x, y, z .

1.2.2 Střední elementy

Střední elementy jsou elementy dráhy zbavené krátkých periodických perturbací, jako jsou pohyby velkých planet, např. Jupitera nebo Saturnu. Pro jejich výpočet z oskulačních ele-



Obrázek 1.5: Porovnání střední a vlastní hlavní poloosy pro simulaci jedné planetky po dobu 3.76 miliónů let.

mentů lze použít analytické, numerické nebo také filtrační metody, které jsem v naší práci využili.

Střední elementy odstraňují vliv tzv. rezonancí středního pohybu, což jsou oblasti vesmírného prostoru, ve kterém když se planetka nachází, tvoří poměr její periody s periody nějaké jiné planety zlomek s nízkým čitatelem a jmenovatelem (viz ??).

1.2.3 Vlastní elementy

Vlastní elementy jsou elementy dráhy zbavené jak krátkých, tak dlouhých periodických perturbací, mezi které kromě již zmíněných patří navíc sekulární rezonance, které jsou způsobením závislostí frekvencí precese (změny) argumentu perihélia a délky vzestupného uzlu planetky a nějaké jiné planety.

Vlastní elementy jsou tedy svým způsobem „průměry“ pohybu a jsou téměř neměnné ve

velkém časovém úseku, ačkoliv působením negravitačních sil — hlavně Jarkovského jevu — se můžou pomale měnit.

Mezi vlastní elementy počítáme pouze vlastní hlavní poloosu — a_p , vlastní excentricitu — e_p a vlastní inklinaci — i_p . Ostatní elementy nemá cenu uvažovat, protože argument perihélia i délka vzestupného uzlu periodicky precedují a střední anomálie je lineárně závislá na čase.

Kapitola 2

Planetky ve Sluneční soustavě

2.1 Rodiny planetek

2.1.1 Metody identifikace rodin

Rezonance středního pohybu

Rezonance sekulární

Kapitola 3

Vlastnosti rodiny Eunomia

3.1 Nejistoty pozorovaných dat

3.2 Fyzikální model pro rodinu Eunomia

3.2.1 Jarkovského jev

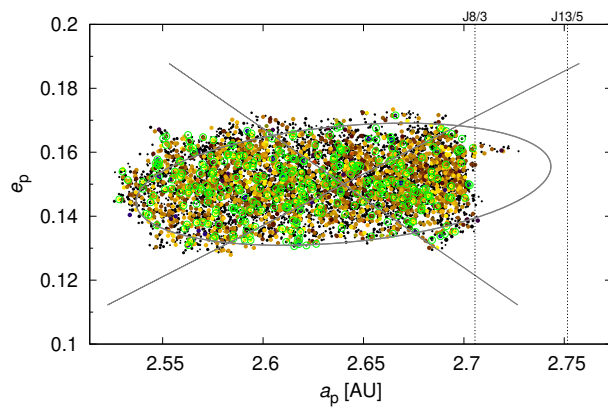
3.2.2 YORP jev

3.2.3 Náhodné srážky

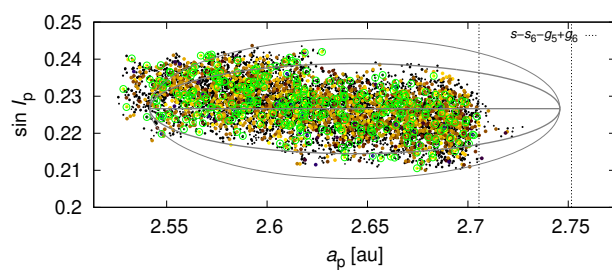
3.2.4 Nevratné děje při vývoji

3.3 Simulace orbitálního vývoje

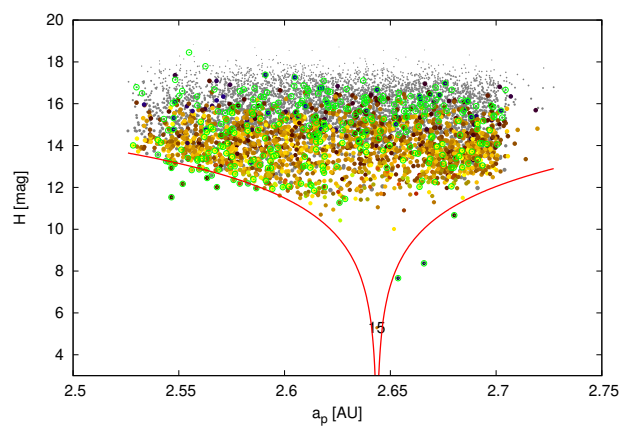
3.4 Porovnání modelu a pozorování



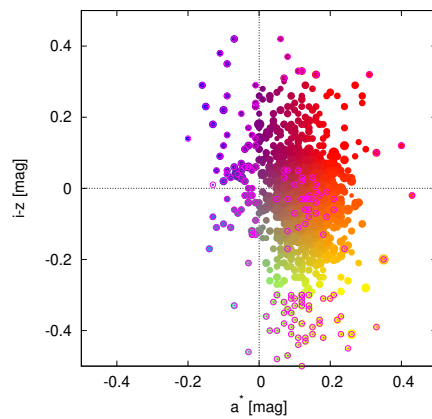
Obrázek 3.1: TODO



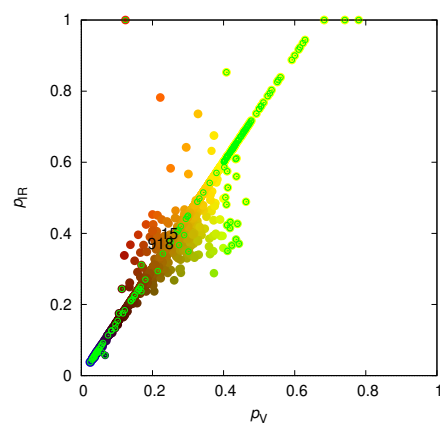
Obrázek 3.2: TODO



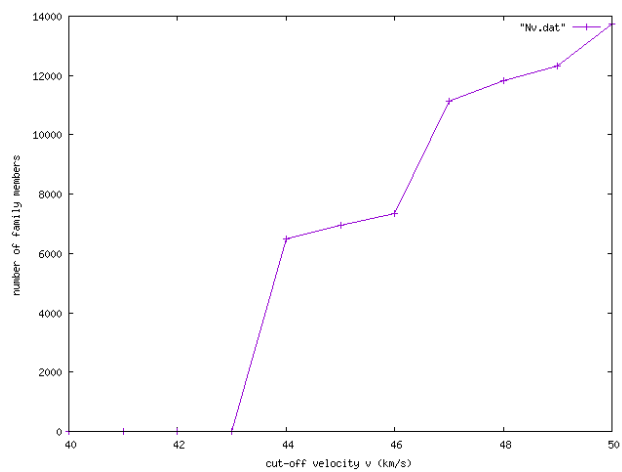
Obrázek 3.3: TODO



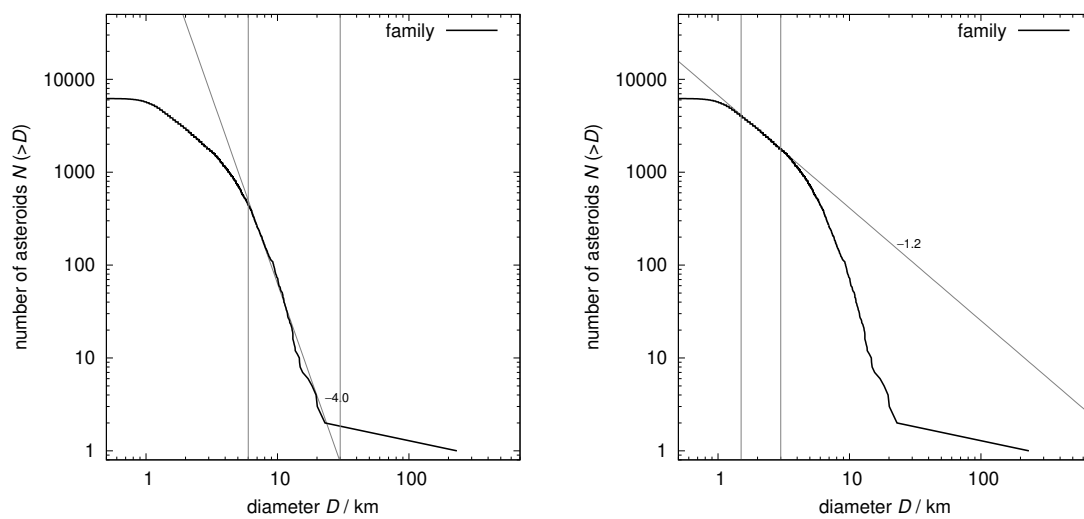
Obrázek 3.4: TODO



Obrázek 3.5: TODO



Obrázek 3.6: TODO



Obrázek 3.7: TODO

Kapitola 4

Aplikace v praxi

Kapitola 5

Budoucí možnosti výzkumu

Bibliografie

- [1] Wikipedie. *Pohybová rovnice* — *Wikipedie: Otevřená encyklopedie*. [Online; navštíveno 28. 11. 2018]. 2018. URL: https://cs.wikipedia.org/wiki/Pohybov%C3%A1_rovnice.
- [2] A. Cohan. „A Figure Eight And other Interesting Solutions to the N-Body Problem“. In: (2012). URL: https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_12/papers/adrian.pdf.
- [3] H. Levison a M.J. Duncan. *SWIFT: A solar system integration software package*. URL: <http://www.boulder.swri.edu/~hal/swift.html>.
- [4] M. Broz et al. „Did the Hilda collisional family form during the late heavy bombardment?“ In: (2011). URL: http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/yarko-site/tmp/trojans_obrien/r32mig.pdf.