

Construcciones Geométricas

Aidan Lorenzo

November 2024

1. Primera Construcción

1.1. Definición de la Construcción

Definición 1.1. Sea $x \in (0, \pi) = X$ un ángulo de formación en su dominio de generación.

Definición 1.2. Llamaremos *bloque fundamental* al triángulo de lados a_i, b_i y c_i , tales que

$$\forall i \in \mathbb{Z}^+, a_i = 1 \text{ y } b_1 = 1$$

y O el *centro* de la figura, que es la intersección de b_i y c_i .

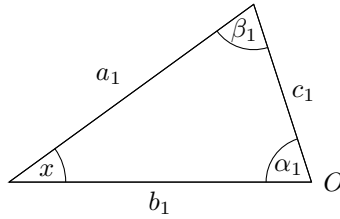


Figura 1: Triángulo Primero.

Definición 1.3. Sea T_x la figura generada por el ángulo x yuxtaponiendo bloques fundamentales mediante la siguiente regla:

$$b_i = c_{i-1}$$

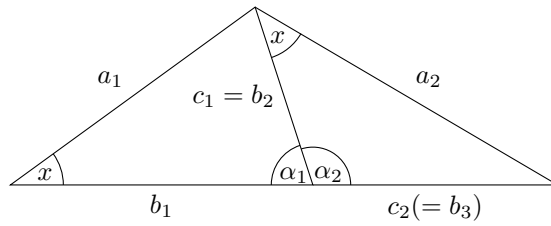


Figura 2: Los dos primeros bloques de T_{36° .

Definición 1.4. Sea $c_i(x)$ la longitud del segmento c_i de F_x .

1.2. Comportamiento de $c_i(x)$

Proposición 1.1.

$$c_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ \sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1} \cos x} & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

Demostración. Por el Teorema del Coseno y las definiciones anteriores tenemos:

$$c_i^2(x) = a_i^2 + b_i^2 - 2a_i b_i \cos x \iff c_i(x) = \sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1} \cos x}$$

La función está definida de forma recurrente, por lo que necesitamos un valor inicial de definición:

$$b_i = c_{i-1} \wedge b_1 = 1 \implies c_0 = 1$$

Queda demostrada la Proposición.

Proposición 1.2.

- i) $\lim_{i \rightarrow \infty} c_i(x) = \infty \iff \cos(x) \leq 0$
- ii) $\lim_{i \rightarrow \infty} (c_i(x) - c_{i-1}(x)) = \cos(x) \iff \cos(x) < 0$
- iii) $\lim_{i \rightarrow \infty} c_i(x) = \frac{1}{2 \cos(x)} \iff \cos(x) > 0$

Demostración. Notemos primero que, por construcción, $c_i(x) > 0$, pues refiere a la longitud de un segmento.

Probemos i). Veamos que las funciones asociadas a ángulos x con coseno negativo o nulo son monótonamente crecientes.

$$\forall i \in \mathbb{Z}^+ \forall x \in X, c_i(x) > 0 \wedge \cos(x) \leq 0 \implies c_i(x) > c_{i-1}(x)$$

ya que

$$\sqrt{1 + c_{i-1}^2 + 2c_{i-1} |\cos(x)|} > c_{i-1} \iff 2c_{i-1} |\cos(x)| > -1$$

lo cual se cumple siempre. Además, la sucesión no está acotada superiormente; entonces, diverge. Falta demostrar la convergencia de la serie para $\cos(x) > 0$

Definición 2.1 Sea $r(x) = \frac{1}{2 \cos(x)}$ la función *radio*, $\forall x \in X_1$

Definición 2.2. Llamaremos *dominio de convergencia* al intervalo $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, para el cual

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}) \iff \cos(x) > 0 \iff c_i(x) \text{ converge}$$

Definición 2.3. Análogamente, llamaremos *dominio de no convergencia* al intervalo $X_2 = [\frac{\pi}{2}, \pi)$, para el cual

$$x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \iff \cos(x) \leq 0 \iff \lim_{i \rightarrow \infty} c_i(x) = \infty$$

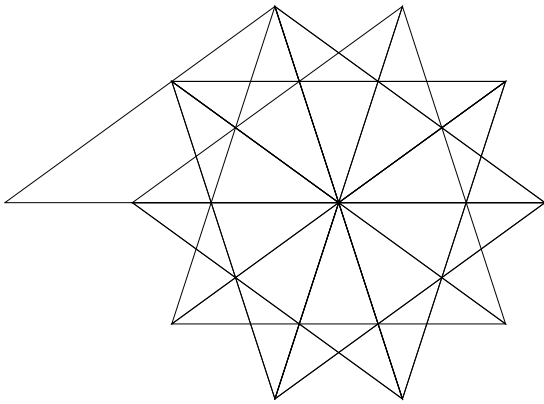


Figura 3: T_{36°

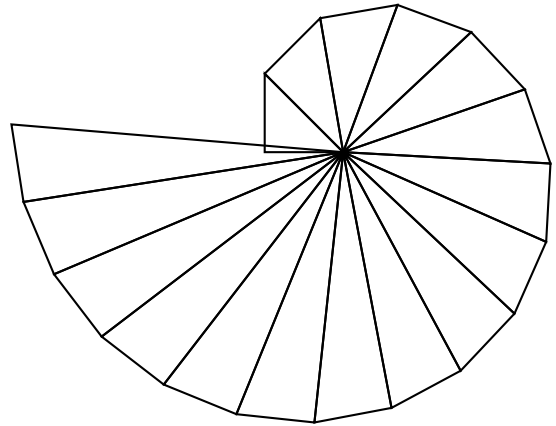


Figura 4: T_{90°

1.3. Estudio de $\{T_x : x \in X_1\}$

Definición 3.1. Sea $\varphi_n = |\{\frac{m}{n}\pi : m < n \wedge m \in \mathbb{Z}^+ \wedge \text{mcd}(m, n) = 1\}|$

Definición 3.2. Sea $\gamma_n = |\{\frac{m}{n}\pi : 2m < n \wedge m \in \mathbb{Z}^+ \wedge \text{mcd}(m, n) = 1\}|$

Definición 3.3. Sea $\chi_n = |\{\frac{m}{n}\pi : m < n \wedge m \in \mathbb{Z}^+ \wedge \text{mcd}(m, n) = 1 \wedge 2 \mid m\}|$

Definición 4.1. Sea $p : X_1 \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ la función $p(x) = |\{P \in F_x : |\overline{OP}| = r(x)\}|$.

Teorema 1.1.

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff \begin{cases} 2 \nmid n \iff p(x) = 2n \\ 4 \mid n \iff p(x) = n \\ 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \implies p(x) = \frac{1}{2}n \end{cases}$$

Demostración. Notemos primero que, si $c_i(x)$ converge, lo hace también $c_{i-1}(x)$, que por la Definición 1.3, es igual a b_i , lo que implica que los bloques serán triángulos isósceles. Siendo O el vértice que une estos dos segmentos, y $\alpha_i = \hat{O}$, vemos también que α_i converge a $\alpha = \pi - 2x$. Luego, veamos que existe un número finito de bloques para el cual la suma de todos sus ángulos α constantes suman $v \cdot 2\pi$ para algún $v \in \mathbb{Z}^+$:

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff x = \frac{m}{n}\pi \iff \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2n}{n-2m} \iff \exists k, v \in \mathbb{Z}^+ : \text{mcd}(k, v) = 1 \wedge k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi$$

Esto significa que, tras k triángulos isósceles constantes, los nuevos triángulos se dibujarán sobre otros ya existentes, al ser α constante. Ahora, para conocer el valor de k en función de x , haremos lo siguiente:

$$k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi \iff \frac{k}{v} = \frac{2n}{n-2m}$$

Para igualar k al numerador de la expresión que está en función de m y n , hay que estudiar qué valores de estos parámetros enteros implican que la fracción sea irreducible.

$$\begin{cases} 2 \nmid n \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(n, n-2m) = \text{mcd}(2n, n-2m) = 1 \\ 4 \mid n \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(n, n-2m) = \text{mcd}(2n, n-2m) = 2 \\ 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(n, n-2m) = 2 \implies \text{mcd}(2n, n-2m) = 4 \end{cases}$$

En consecuencia tenemos que

$$\begin{cases} 2 \nmid n \implies \text{mcd}(2n, n-2m) = 1 \implies k(x) = 2n \\ 4 \mid n \implies \text{mcd}(2n, n-2m) = 2 \implies \text{mcd}\left(n, \frac{n-2m}{2}\right) = 1 \implies k(x) = n \\ 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \implies \text{mcd}(2n, n-2m) = 4 \implies \text{mcd}\left(\frac{n}{2}, \frac{n-2m}{4}\right) = 1 \implies k(x) = \frac{n}{2} \end{cases}$$

Sólo nos falta ver que, en efecto, el valor $k(x)$ cuya expresión acabamos de encontrar coincide con $p(x)$, objeto de este Teorema.

i	1	2	3	4	5	6	...	$k-1$	k
$\sum_{j=1}^i p_j$	2	3	4	5	6	7	...	k	k

Habiendo notado que los bloques son triángulos isósceles, donde $c_i = b_i = r(x)$, vemos que el primer bloque aportará 2 nuevas puntas a la figura; a partir de éste, cada nuevo triángulo aportará 1 punta nueva, pues compartirá una con el bloque anterior; y, finalmente, el último bloque no añade ninguna punta más a la figura, sino que une dos puntas ya existentes cuya distancia al centro es $r(x)$: las del primer y penúltimo bloque.

Corolario 1.1.

$$\nexists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff \frac{m}{n} \notin \mathbb{Q} \iff p\left(\frac{m}{n}\pi\right) = \infty$$

Demostración. Si x no es una fracción racional de π , $\nexists k, v \in \mathbb{Z}^+ : k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi$, lo que se traduce en que nunca se llega a cerrar la figura tras un número finito de bloques.

Corolario 1.2.

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff \begin{cases} 2 \nmid n \iff v(x) = n - 2m \\ 4 \mid n \iff v(x) = \frac{n-2m}{2} \\ 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \implies v(x) = \frac{n-2m}{4} \end{cases}$$

Definición 4.2. Sea $p^{-1}(p) = \{x \in X_1 : p(x) = p\}$, $\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ el conjunto antiimagen de la aplicación explicada en la Definición 3.1, y $f(p) := |p^{-1}(p)|$ la cantidad de ángulos de formación para los cuales su número de puntas es p .

Definición 5.1. Sea $\varphi(n) = |\varphi_n|$ la función totiente de Euler.

Lema 1.

- i) $\forall n \in \mathbb{Z}_{>2}, |\varphi_n| = 2|\gamma_n|$
- ii) $\forall n \in \mathbb{Z}_{>2} : 2 \nmid n \iff \varphi(2n) = \varphi(n)$
- iii) $\forall n \in \mathbb{Z}_{>2} : 2 \mid n \iff |\varphi_n| = 2|\chi_n|$

La demostración general y contextualizada de este Lema puede hallarse en el documento *Conjuntos de Fracciones*.

Teorema 1.2.

$$\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3}, f(p) = \frac{\varphi(p)}{2}$$

Demostración. Veamos primero qué denominador n causará que la figura tenga p puntas, siguiendo el Teorema 1.1:

$$\begin{cases} 2 \nmid p \iff n = 2p \\ 4 \mid n \iff n = p \\ 2 \mid p \wedge 4 \nmid p \iff n = \frac{1}{2}p \end{cases}$$

Así, dado un número independiente p , sabemos qué denominador único da lugar a figuras que cumplen $p(x) = p$.

$$\text{Vemos ahora que } p^{-1}(p) = \gamma_n = \begin{cases} \gamma_{2p} \iff 2 \nmid p \\ \gamma_n \iff 4 \mid p \\ \gamma_{\frac{p}{2}} \iff 2 \mid p \wedge 4 \nmid p \end{cases}$$

Es decir, el conjunto de las x para las cuales $p(x) = p$ son los ángulos $x \in X_1$ con denominador entero positivo n , dependiente de la paridad de p , y numerador también entero positivo y coprimo respecto a n . Esto es lo que representa, por construcción, el conjunto introducido en la Definición 4.2.

Siguiendo el Lema 1 y la Definición 5.1:

$$p^{-1}(p) = \gamma_n \iff |p^{-1}(p)| = f(p) = |\gamma_n| = \frac{\varphi(n)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(2p) \iff 2 \nmid p \\ \frac{1}{2}\varphi(p) \iff 4 \mid p \\ \frac{1}{2}\varphi(\frac{p}{2}) \iff 2 \mid p \wedge 4 \nmid p \end{cases} = \frac{\varphi(p)}{2}$$

Así hemos podido estudiar algunos comportamientos no inyectivos de las figuras $\{F_x : x \in X_1\}$ del dominio de convergencia. Vayamos ahora a ver patrones de inyectividad en las figuras generadas por el dominio de no convergencia X_2 .

1.4. Estudio de $\{T_x : x \in X_2\}$

Definición 6.1. Sea $k : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ la función

$$k(x, y) = k \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x) + (k - \lfloor k \rfloor) \alpha_{\lfloor k \rfloor + 1}(x) = y$$

Teorema 2.1.

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 3}, \exists! x \in X : k(x, 2\pi) = k$$

Demostración. Veamos que la función $k(x, 2\pi)$ es inyectiva:

$$1. \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \implies c_i(x_1) < c_i(x_2)$$

En $i = 0$, $c_0(x_1) = c_0(x_2) = 1$. Luego:

$$x_1 < x_2 \implies c_1(x_1) = \sqrt{2(1 - \cos(x_1))} < \sqrt{2(1 - \cos(x_2))} = c_1(x_2) \iff \cos(x_1) > \cos(x_2)$$

Lo cual es cierto si y sólo si $x_1, x_2 \in (0, \pi) = X$. Para el resto de valores de i hacemos lo siguiente:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : a < b \implies \sqrt{1 + a^2 - 2a \cos(x_1)} < \sqrt{1 + b^2 - 2b \cos(x_2)} \iff a(a - 2 \cos(x_1)) < b(b - 2 \cos(x_2))$$

Por hipótesis tenemos que $a < b$, así que veamos que $a - 2 \cos(x_1) < b - 2 \cos(x_2)$. Con la misma lógica, $a < b$, así que basta ver que $2 \cos(x_1) > 2 \cos(x_2)$, lo cual acabamos de ver en el caso $i = 0$:

$$2. \forall x_1, x_2 \in X : c_i(x_1) < c_i(x_2) \implies \alpha_i(x_1) > \alpha_i(x_2)$$

$$\begin{aligned} \arccos\left(\frac{c_i(x_1)^2 + c_{i-1}(x_1)^2 - 1}{2c_i(x_1)c_{i-1}(x_1)}\right) &> \arccos\left(\frac{c_i(x_2)^2 + c_{i-1}(x_2)^2 - 1}{2c_i(x_2)c_{i-1}(x_2)}\right) \iff \\ \frac{c_i(x_1)^2 + c_{i-1}(x_1)^2 - 1}{c_i(x_1)c_{i-1}(x_1)} &< \frac{c_i(x_2)^2 + c_{i-1}(x_2)^2 - 1}{c_i(x_2)c_{i-1}(x_2)} \iff \\ \frac{(\sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1} \cos(x_1)})^2 + c_{i-1}^2 - 1}{c_i(x_1)c_{i-1}(x_1)} &< \frac{(\sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1} \cos(x_2)})^2 + c_{i-1}^2 - 1}{c_i(x_2)c_{i-1}(x_2)} \iff \\ \frac{c_{i-1}(x_1) - \cos(x_1)}{c_i(x_1)} &< \frac{c_{i-1}(x_2) - \cos(x_2)}{c_i(x_2)} \end{aligned}$$

Si consideramos la zona de convergencia:

$$c_{i-1}(x_1) = c_{i-1}(x_2) \implies \frac{c_i(x_1) - \cos(x_1)}{c_i(x_1)} < \frac{c_i(x_2) - \cos(x_2)}{c_i(x_2)} \iff$$

$$c_i(x_1)c_i(x_2) - c_i(x_2)\cos(x_1) < c_i(x_1)c_i(x_2) - c_i(x_1)\cos(x_2) \iff c_i(x_1)\cos(x_2) < c_i(x_2)\cos(x_1) \iff$$

$$\frac{c_i(x_1)}{c_i(x_2)} < 1 < \frac{\cos(x_1)}{\cos(x_2)}$$

Y si consideramos la zona de no convergencia:

$$\begin{aligned} c_i(x_1) = \cos(x_1) + c_{i-1}(x_1) &\implies \frac{c_{i-1}(x_1) - \cos(x_1)}{c_{i-1}(x_1) + \cos(x_1)} < \frac{c_{i-1}(x_2) - \cos(x_2)}{c_{i-1}(x_2) + \cos(x_2)} \iff \\ (c_{i-1}(x_2) + \cos(x_2))(c_{i-1}(x_1) - \cos(x_1)) &< (c_{i-1}(x_2) - \cos(x_2))(c_{i-1}(x_1) + \cos(x_1)) \iff \\ -\cos(x_1)c_{i-1}(x_2) + \cos(x_2)c_{i-1}(x_1) &< \cos(x_1)c_{i-1}(x_2) - \cos(x_2)c_{i-1}(x_1) \iff \\ \cos(x_2)c_{i-1}(x_1) &< \cos(x_1)c_{i-1}(x_2) \end{aligned}$$

$$3. \forall k \in \mathbb{R}^+ \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \implies \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x_1) + (k - \lfloor k \rfloor)\alpha_{\lfloor k \rfloor}(x_1) > \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x_2) + (k - \lfloor k \rfloor)\alpha_{\lfloor k \rfloor}(x_2)$$

$$4. \forall x_1, x_2 \in X \forall y \in \mathbb{R}^+ : x_1 < x_2 \implies k(x_1, y) < k(x_2, y)$$

Consideremos $k(x_2, y) = k_2 \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k_2 \rfloor} \alpha_i(x_2) + (k_2 - \lfloor k_2 \rfloor)\alpha_{\lfloor k_2 \rfloor}(x_2) = y$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{\lfloor k_2 \rfloor} \alpha_i(x_1) + (k_2 - \lfloor k_2 \rfloor)\alpha_{\lfloor k_2 \rfloor}(x_1) > y$$

Por lo que, necesariamente, $k(x_1, y) = k_1 < k_2 = k(x_2, y)$. Basándonos en este principio:

$$5. \forall x_1, x_2 \in X \forall y \in \mathbb{R}^+, \exists k \in \mathbb{Z}^+ : k(x_1, y) < k < k(x_2, y) \implies \exists! x_m \in X : x_1 < x_m < x_2 \wedge k(x_m, y) = k$$

Así, si conocemos $k(x, y)$, podemos usar su crecimiento monótono para encontrar aquellos ángulos únicos x_m tales que $k(x_m, y) \in \mathbb{Z}^+$.

Por ejemplo, en la Figura 4 se aprecian 17 bloques de la figura infinita T_{90° . Se ve que la suma de sus ángulos internos $\alpha_i(90^\circ)$ es mayor a 2π , y que la suma de los 16 primeros es menor a 2π . En consecuencia, sabemos que la parte entera de $k(90^\circ, 360^\circ) = k \in \mathbb{R}^+$, es 16. En general:

$$\lfloor k(x, y) \rfloor = n \in \mathbb{Z}^+ \iff \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) < y < \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(x)$$

Luego, aplicando la Definición 6, tenemos:

$$k(x, y) = k \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x) + (k - \lfloor k \rfloor)\alpha_{\lfloor k \rfloor+1}(x) = y \iff k = \frac{y - \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x)}{\alpha_{\lfloor k \rfloor+1}(x)} + \lfloor k \rfloor$$

Ya podemos computar con facilidad la función $k(x, y)$ para todas $(x, y) \in X \times \mathbb{R}^+$. En particular, $k(90^\circ, 360^\circ) \approx 16,649128$, y $k(91^\circ, 360^\circ) \approx 17,445935$. Apliquemos el punto 5:

$$k(90^\circ, 360^\circ) < 17 < k(91^\circ, 360^\circ) \implies \exists! x_m \in (90^\circ, 91^\circ) : k(x_m, 360^\circ) = 17$$

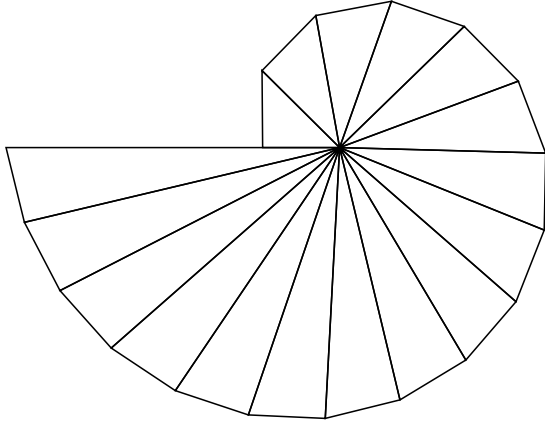


Figura 5: 17 bloques de $T_{x=90,45332215^\circ}$

$k \in \mathbb{Z}^+$	x°
3	19.019079333
6	60
9	74.15292718
12	82.2524055
16	89.13404388
17	90.45332215
18	91.65964018
19	92.76863062
20	93.79304858
21	94.74341811
60	110.8178438
450	128.8014110

Figura 6: $\{(k, x) : k(x, 2\pi) = k\}$

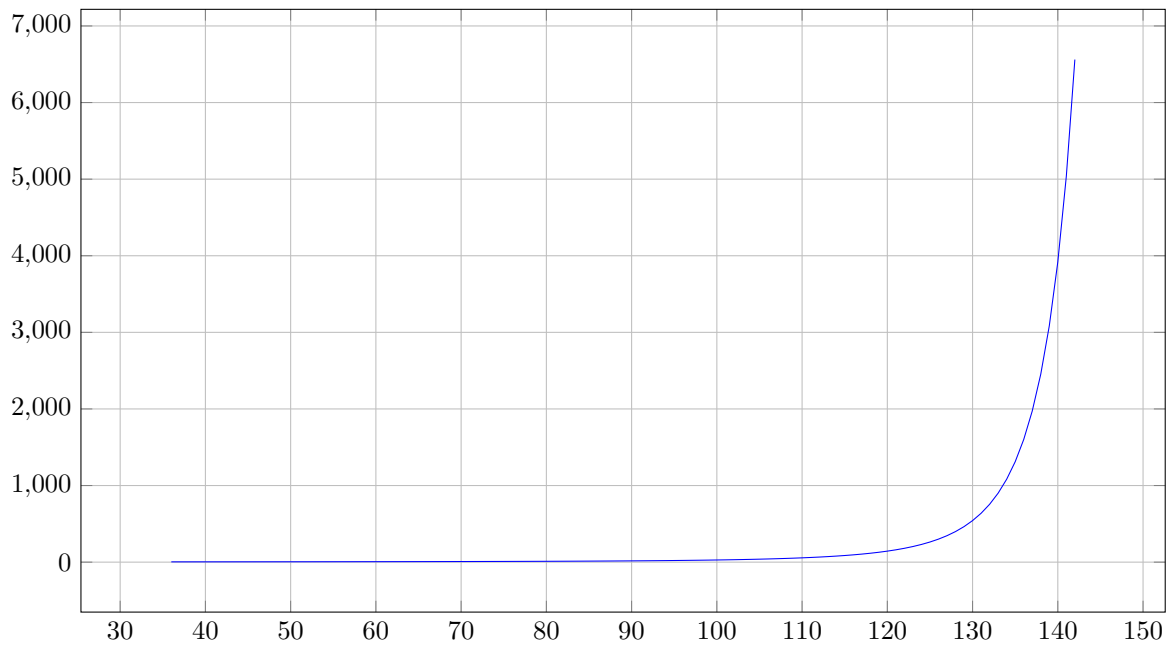


Figura 7: Gráfico de $k(x, 2\pi)$.

Corolario 2.

$$i) |\{x_1 \in X_1 : k(x_1, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+\}| = 14$$

$$ii) |\{x_2 \in X_2 : k(x_2, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+\}| = \infty$$

Es decir, que hay número finito de $x_1 \in X_1$ que exhiben este comportamiento inyectivo respecto a la aplicación $k(x, 2\pi)$, mientras que existen infinitos ángulos $x_2 \in X_2$ para los cuales $k(x_2, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+$

Conjetura 1.

$$\forall x \in X \setminus \{\frac{\pi}{3}\} : k(x, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+ \implies \nexists n : x \in \gamma_n$$

2. Segunda Construcción

2.1. Definición de la Construcción

Definición 7.1. En este caso, el *bloque fundamental* será el paralelogramo equilátero de lados a_i, b_i, c_i y d_i tales que

$$a_i = b_i = c_i = d_i = \lambda \in \mathbb{R}^+$$

y x el ángulo que se forma entre a_i y b_i (también entre c_i y d_i)

Definición 7.2. Sea P_x la figura generada yuxtaponiendo bloques mediante la misma regla que T_x , y O el centro de la figura:

$$b_i = c_{i-1}$$

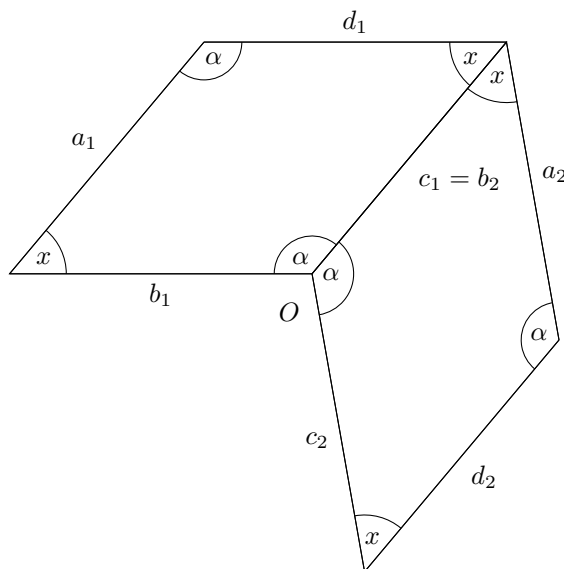


Figura 8: Dos primeros bloques de P_{50° .

Definición 7.3. Sea $r'(x) := \max(\lambda, t(x))$, donde $t(x)$ es la distancia entre los vértices opuestos cuyos ángulos son α .

2.2. Estudio de $\{P_x : x \in X\}$

Proposición 2.1.

$$r'(x) = \begin{cases} \lambda & \text{si } 0 < x \leq \frac{\pi}{3} \\ \lambda\sqrt{2(1 - \cos x)} & \text{si } \frac{\pi}{3} < x < \pi \end{cases}$$

Demostración. Por el Teorema del Coseno, tenemos que:

$$t^2(x) = a^2 + b^2 - 2ab \cos x \iff t(x) = \sqrt{2\lambda^2 - 2\lambda^2 \cos(x)} = \sqrt{2\lambda^2(1 - \cos(x))} = \lambda\sqrt{2(1 - \cos(x))}$$

Luego:

$$\begin{cases} r'(x) = \lambda \iff \max(\lambda, \lambda\sqrt{2(1 - \cos x)}) = \lambda \iff \lambda \geq \lambda\sqrt{2(1 - \cos(x))} \iff \cos x \geq \frac{1}{2} \iff x \in (0, \frac{\pi}{3}] \\ r'(x) = \lambda\sqrt{2(1 - \cos x)} \iff \lambda < \lambda\sqrt{2(1 - \cos(x))} \iff \cos x < \frac{1}{2} \iff x \in (\frac{\pi}{3}, \pi) \end{cases}$$

Por lo que vemos que todas las figuras generadas por esta segunda construcción tendrán un radio finito:

$$\forall x \in X, r'(x) \in \mathbb{R}^+$$

Definición 8.1. Sea $q : X \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ la función $q(x) = |\{S \in P_x : |\overline{OS}| = r'(x)\}|$

Teorema 3.1.

$$i) \forall n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{3\}, x \in \varphi_n \iff \begin{cases} q(x) = 2n \iff 2 \mid n \vee 2 \mid m \\ q(x) = n \iff 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \end{cases} \quad ii) q(\frac{1}{3}\pi) = 2n = 6$$

Demostración. Por la relación de ángulos de un cuadrilátero, $2\alpha + 2x = 2\pi \iff \alpha = \pi - x$. Procedamos ahora de la misma manera que en el Teorema 1.1:

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \varphi_n \iff x = \frac{m}{n}\pi \wedge m < n \iff \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2n}{n-m} \iff \exists k, v \in \mathbb{Z}^+ : \text{mcd}(k, v) = 1 \wedge k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi$$

$$k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi \iff \frac{k}{v} = \frac{2n}{n-m}$$

$$\begin{cases} (2 \mid n \vee 2 \mid m) \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(2n, n-m) = 1 \implies k(x) = 2n \\ 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(2n, n-m) = 2 \implies k(x) = n \end{cases}$$

Veamos ahora la relación entre $q(x)$ y $k(x)$:

$$\begin{cases} r'(x) = \lambda \iff x \in (0, \frac{\pi}{3}) \iff \\ r'(x) = \lambda \sqrt{2(1 - \cos(x))} \iff \\ x = \frac{\pi}{3} \iff \end{cases} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline k & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & k-1 & k \\ \hline \sum_{j=1}^i q_j & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & k & k \\ \hline k & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & k-1 & k \\ \hline \sum_{j=1}^i q_j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & k-1 & k \\ \hline k & 1 & 2 & 3 & & & & & & \\ \hline \sum_{j=1}^i q_j & 3 & 5 & 6 & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Corolario 3.1.

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, x \in \varphi_n \iff \begin{cases} (2 \mid n \vee 2 \mid m) \iff v'(x) = n - m \\ 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff v'(x) = \frac{n-m}{2} \end{cases}$$

Definición 8.2. Sea $q^{-1}(q) = \{x \in X : q(x) = q\}$ el conjunto antiimagen de la función $q(x)$, y $g(q) := |q^{-1}(q)|$

Teorema 3.2.

$$\begin{aligned} i) \forall p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \setminus \{6\}, p = q \implies f(p) = g(q) \\ ii) \forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \setminus \{6\}, f(p) + g(p) = \varphi(p) \\ iii) f(6) + g(6) = 3 \end{aligned}$$

Demostración. Por el Teorema 1.2. tenemos que $f(p) = \frac{\varphi(p)}{2}$, así que veremos

$$f(p) + g(p) = \varphi(p) \iff g(p) = \frac{\varphi(p)}{2} \iff f(p) = g(p)$$

viendo que $g(p) = \frac{\varphi(p)}{2}$. Estudiemos las condiciones de q para conocer los denominadores y numeradores m y n para los cuales $q(\frac{m}{n}\pi) = q$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \nmid n \wedge 2 \mid m \iff n = \frac{q}{2} \wedge 2 \mid m \iff 2 \mid q \wedge 4 \nmid q \\ 2 \mid n \wedge 2 \nmid m \iff n = \frac{q}{2} \wedge 2 \nmid m \iff 4 \mid q \\ 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff n = q \wedge 2 \nmid m \iff 2 \nmid q \end{array} \right. \implies q^{-1}(q) = \begin{cases} \chi_{\frac{q}{2}} \iff 2 \mid q \wedge 4 \nmid q \\ \varphi_{\frac{q}{2}} \iff 4 \mid q \\ \varphi_q \setminus \chi_q \iff 2 \nmid q \end{cases}$$

Luego, siguiendo el Lema 1 de Simetrías:

$$|q^{-1}(q)| = g(q) = \begin{cases} \varphi(q) - |\chi_q| = \frac{1}{2}\varphi(q) \iff 2 \nmid q \\ \varphi(\frac{q}{2}) \iff 4 \mid q \\ |\chi_{\frac{q}{2}}| = \frac{1}{2}\varphi(\frac{q}{2}) \iff 2 \mid q \wedge 4 \nmid q \end{cases} = \frac{\varphi(q)}{2}$$

Este Teorema nos enseña que existe el mismo número de figuras con p puntas en ambas construcciones, siendo la suma de estos dos números iguales la famosa función $\varphi(n)$ de Euler, excepto cuando $p = 6$.

Definición 9. Diremos que $T_x \sim P_x \iff p(x) = q(x) \wedge v(x) = v'(x)$

Teorema 4.

$$\forall x \in X, T_x \sim P_x \iff x = \frac{\pi}{3}$$

Demostración. Veamos por separado qué valores de $x \in X$ permiten que $p(x) = q(x)$ y $v(x) = v'(x)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \quad p(x) = q(x) = 2n \iff 2 \nmid n \wedge (2 \mid n \vee 2 \mid m) \iff 2 \mid m \wedge 2 \nmid n \iff x \in \chi_n \\ 2. \quad p(x) = q(x) = n \iff 4 \mid n \wedge (2 \nmid n \wedge 2 \nmid m) \quad \text{es una contradicción} \\ 3. \quad p\left(\frac{\pi}{3}\right) = q\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6 \end{array} \right.$$

Por tanto, $p(x) = q(x) \iff 2 \mid m \wedge 2 \nmid n$. Luego:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4. \quad v(x) = v'(x) \wedge 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff \frac{n-m}{2} = n - 2m \iff n - m = 2n - 4m \iff 3m = n \iff \frac{m}{n} = \frac{1}{3} \\ 5. \quad v(x) = v'(x) \wedge 2 \nmid n \wedge 2 \mid m \iff n - 2m = n - m \iff m = 0 \iff x = 0 \notin X \\ 6. \quad v(x) = v'(x) \wedge 4 \mid n \wedge 2 \nmid m \iff \frac{n-2m}{2} = n - m \iff n - 2m = 2n - 2m \iff n = 0 \notin \mathbb{Z}_{\geq 2} \\ 7. \quad v(x) = v'(x) \wedge 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff \frac{n-2m}{4} = n - m \iff 3n = 2m \iff \frac{m}{n} = \frac{3}{2} \iff x \notin X \end{array} \right.$$

Así vemos que $v(x) = v'(x) \iff x = \frac{\pi}{3}$. Además, y es un caso especial, $p(\frac{\pi}{3}) = q(\frac{\pi}{3})$.

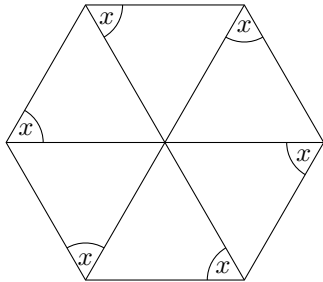


Figura 9: T_{60°

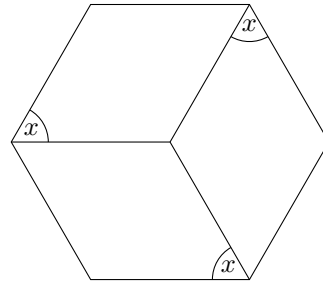


Figura 10: P_{60°

3. Apéndice

3.1. Demostraciones del Lema de Simetrías

$$i) \forall n \in \mathbb{Z}_{>2}, 2 \nmid n \implies |\varphi_n| = 2|\chi_n|$$

Demostración.

$$1. \forall n \in \mathbb{Z}^+ : \exists f_n : [1, \frac{n-1}{2}] \cap \mathbb{Z}^+ \rightarrow [\frac{n+1}{2}, n-1] \cap \mathbb{Z}^+ \text{ biyectiva}$$

Es trivial ver que el dominio y el codominio de esta función son conjuntos finitos y numerables con cardinal $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}^+ \iff 2 \nmid n$:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+ : a \leq b \implies |[a, b] \cap \mathbb{Z}^+| = b - a + 1$$

Además:

$$2 \nmid n \iff [1, \frac{n-1}{2}] \cap \mathbb{Z}^+ \cup [\frac{n+1}{2}, n-1] \cap \mathbb{Z}^+ = [1, n-1] \cap \mathbb{Z}^+ = \{m \in \mathbb{Z}^+ : m < n\}$$

En concreto vamos a considerar la regla de asignación

$$f_n(m) = n - m \iff f_n(m) + m = n$$

Por ejemplo:

m	1	2	3	4	5	6	7
$f_{15}(m)$	14	13	12	11	10	9	8

$$2. \forall n \in \mathbb{Z}^+ : 2 \nmid n \iff \forall m \in [1, \frac{n-1}{2}] \cap \mathbb{Z}^+, \begin{cases} 2 \mid m \iff 2 \nmid f_n(m) \\ 2 \nmid m \iff 2 \mid f_n(m) \end{cases}$$

Esto se da porque, por la regla de asignación de la aplicación, vemos que la suma del argumento m y su imagen $f_n(m)$ debe ser igual a n , que es un número impar; y sólo la suma de un par y un impar resultan en un número impar.

$$3. \forall m, n \in \mathbb{Z}^+ : \text{mcd}(m, n) = 1 \iff \text{mcd}(n, n - m) = 1$$

Lo cual es equivalente a decir que

$$f_n(m) \in \varphi_n \iff m \in \varphi_n$$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f_{27}(m)$	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14

Con esta información podemos ver que existirá una biyección entre los elementos pares e impares de φ_n :

$\varphi_{27} \cap \langle 2 \rangle$	2	4	8	10	14	16	20	22	26
$\varphi_{27} \setminus \langle 2 \rangle$	25	23	19	17	13	11	7	5	1

$$\forall a \in \varphi_n \cap \langle 2 \rangle, \exists! b \in \varphi_n \setminus \langle 2 \rangle : a + b = n$$

$$\forall b \in \varphi_n \setminus \langle 2 \rangle, \exists! a \in \varphi_n \cap \langle 2 \rangle : a + b = n$$