

Una Doble Generalización de la Espiral de Teodoro

Aidan Lorenzo

Noviembre 2024

1. Introducción

En este trabajo desarrollamos una doble generalización de la Espiral de Teodoro: por una parte, el ángulo de formación de nuevos triángulos; en la mencionada Espiral, el ángulo empleado es 90° , y por el Teorema de Pitágoras la distancia del centro a cada nuevo punto de la espiral es \sqrt{n} . Por otra parte, ampliamos esta construcción a bloques no triangulares y describimos la relación entre ambas construcciones geométricas iterativas. Conectamos, además, nociones de Teoría de Números, al introducir la función totiente de Euler y demostrar algunas simetrías que rigen y sirven de Le-ma.

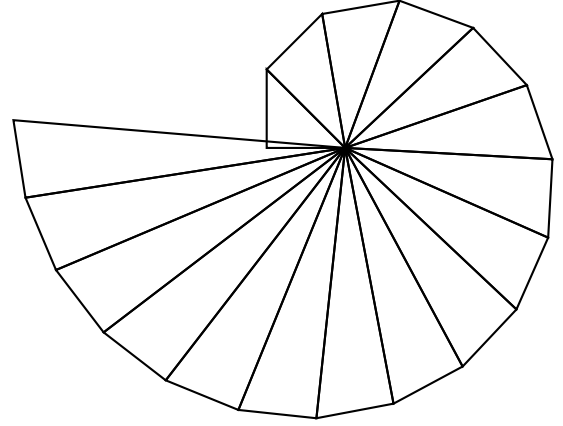


Figura 1: Espiral de Teodoro (T_{90°)

2. Primera Construcción

2.1. Definición de la Construcción

Definición 1.1. Sea $x \in (0, \pi) = X$ un ángulo de formación en su dominio de generación.

Definición 1.2. Llamaremos *bloque fundamental* al triángulo de lados a_i, b_i y c_i , tales que

$$\forall i \in \mathbb{Z}^+, a_i = 1 \text{ y } b_1 = 1$$

y O el *centro* de la figura, que es la intersección de b_i y c_i . x es el ángulo que separa a_i y b_i .

Definición 1.3. Sea T_x la figura generada por el ángulo x yuxtaponiendo bloques fundamentales triangulares mediante la *regla de iteración*:

$$b_i = c_{i-1}$$

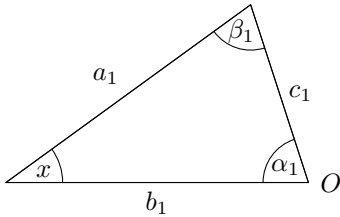


Figura 2: Triángulo Primero.

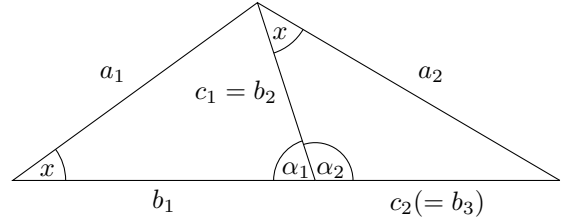


Figura 3: Dos primeros bloques de T_{36° .

Definición 1.4. Sea $c_i(x)$ la longitud del segmento c_i de T_x .

2.2. Una Familia de Sucesiones Recurrentes: $c_i(x)$

Proposición 1.1.

$$c_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ \sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1} \cos x} & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

Demostración. Por el Teorema del Coseno y las Definiciones anteriores tenemos:

$$c_i^2(x) = a_i^2 + b_i^2 - 2a_i b_i \cos x \iff c_i(x) = \sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1} \cos x}$$

La función está definida de forma recurrente, por lo que necesitamos un valor inicial de definición:

$$b_i = c_{i-1} \wedge b_1 = 1 \implies c_0 = 1$$

Lema 1.

$$\forall x_1, x_2 \in X, \cos x_1 \geq 0 > \cos x_2 \implies \forall i \in \mathbb{Z}^+ : c_i(x_1) < c_i(x_2)$$

Demostración. En $i = 0$, $c_0(x_1) = c_0(x_2) = 1$. Luego, por inducción:

$$c_1(x_1) = \sqrt{2(1 - \cos(x_1))} < \sqrt{2(1 - \cos(x_2))} = c_1(x_2) \iff \cos(x_1) > \cos(x_2)$$

Lo cual es cierto se cumple por nuestra hipótesis de implicación ($\cos x_1 \geq 0 \wedge \cos x_2 < 0$). Vamos al paso inductivo:

$$\begin{aligned} c_{i-1}(x_1) < c_{i-1}(x_2) &\implies c_i(x_1) < c_i(x_2) \\ \sqrt{c_{i-1}^2(x_1) - 2c_{i-1}(x_1) \cos x_1 + 1} &< \sqrt{c_{i-1}^2(x_2) - 2c_{i-1}(x_2) \cos x_2 + 1} \\ c_{i-1}(x_1)(c_{i-1}(x_1) - 2 \cos x_1) &< c_{i-1}(x_2)(c_{i-1}(x_2) - 2 \cos x_2) \\ \frac{c_{i-1}(x_1) - 2 \cos x_1}{c_{i-1}(x_2)} &< \frac{c_{i-1}(x_2) - 2 \cos x_2}{c_{i-1}(x_1)} \end{aligned}$$

Encontraremos una condición suficiente para que se satisfaga la desigualdad viendo que

$$\frac{c_{i-1}(x_1) - 2 \cos x_1}{c_{i-1}(x_2)} \leq 1 < \frac{c_{i-1}(x_2) - 2 \cos x_2}{c_{i-1}(x_1)}$$

1. $c_{i-1}(x_1) - 2 \cos x_1 \leq c_{i-1}(x_2) \implies c_{i-1}(x_1) - c_{i-1}(x_2) < 0 \leq 2 \cos x_1 \iff \cos x_1 \geq 0$
2. $c_{i-1}(x_2) - 2 \cos x_2 > c_{i-1}(x_1) \implies c_{i-1}(x_2) - c_{i-1}(x_1) > 0 > 2 \cos x_2 \iff \cos x_2 < 0$

Proposición 1.2. Dominio de No Convergencia

$$i) \lim_{i \rightarrow \infty} c_i(x) = \infty \iff \cos(x) \leq 0 \iff x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$$

$$ii) \lim_{i \rightarrow \infty} (c_i(x) - c_{i-1}(x)) = |\cos(x)| \iff \cos(x) < 0 \iff x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$$

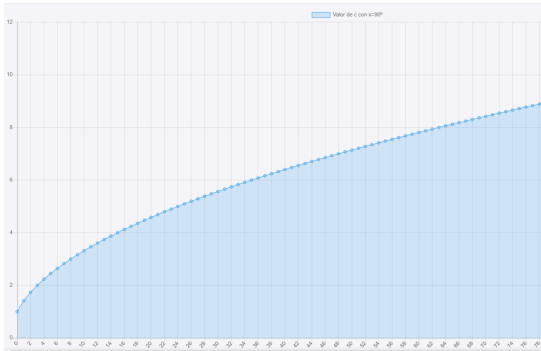


Figura 4: $c_i(\frac{\pi}{2})$

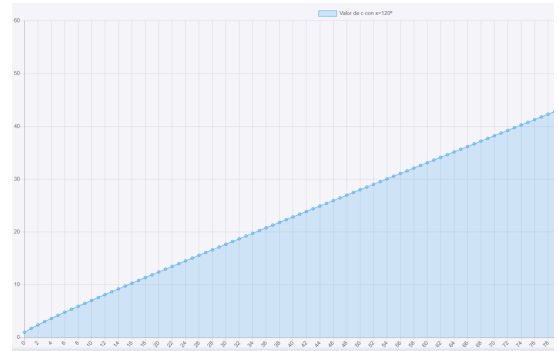


Figura 5: $c_i(\frac{2}{3}\pi)$

Demostración. i). Separemos primero el caso $x = \frac{\pi}{2}$. Aquí, $c_i(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{i+1}$, ya que como $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ se anula el sumando y se simplifica la expresión. Veámoslo inductivamente:

$$1. c_i(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{c_{i-1}^2(\frac{\pi}{2}) - 2c_{i-1}(\frac{\pi}{2}) \cos \frac{\pi}{2} + 1} = \sqrt{c_{i-1}^2(\frac{\pi}{2}) + 1}$$

$$2. c_1(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{1^2 + 1} = \sqrt{2} = \sqrt{i+1}$$

$$3. c_i(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{i+1} \implies c_{i+1}(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{i+2} \iff \sqrt{c_i^2(\frac{\pi}{2}) + 1} = \sqrt{i+2} \iff \sqrt{i+1+1} = \sqrt{i+2}$$

Sabemos que $c_i(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{i+1}$ es una función que no converge a ningún valor:

$$4. \lim_{i \rightarrow \infty} c_i(\frac{\pi}{2}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt{i+1} = \infty$$

Ahora, por el Lema 1 tenemos que

$$5. \forall x \in X : x > \frac{\pi}{2} \implies \forall i \in \mathbb{Z}^+ : c_i(x) > c_i(\frac{\pi}{2})$$

$$6. \forall x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) : \lim_{i \rightarrow \infty} c_i(x) = \infty$$

Proposición 1.3. Dominio de Convergencia

$$\lim_{i \rightarrow \infty} c_i(x) = \frac{1}{2 \cos(x)} \iff \cos(x) > 0 \iff x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Demostración. Notemos que $c_i(\frac{\pi}{3}) = 1 = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{3}}, \forall i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, por lo que es constante:

$$c_1(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{2 - 2 \cos(\frac{\pi}{3})} = \sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1$$

y cada vez que sea evaluada dará 1. Esto es equivalente a decir que los bloques serán triángulos equiláteros, pues $a_i = b_i = c_i = 1, \forall i \in \mathbb{Z}^+$.

Tramo Decreciente: $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$

Para demostrar la convergencia en este tramo, veremos que la sucesión es monótonamente decreciente y que está acotada inferiormente, ya que el Teorema de Convergencia Monótona aseguraría la convergencia. Por inducción simple sobre i :

$$\text{Paso base: } c_0(x) \geq c_1(x) \iff 1 \geq \sqrt{2(1 - \cos x)}$$

$$\iff \cos x \geq \frac{1}{2} \iff x \in (0, \frac{\pi}{3}]$$

$$\text{Paso inductivo: } c_{i-1}(x) \geq c_i(x) \implies c_i(x) \geq c_{i+1}(x)$$

$$c_{i-1}(x) \geq \sqrt{c_{i-1}^2 - 2c_{i-1} \cos x + 1} \implies c_i(x) \geq \sqrt{c_i^2 - 2c_i \cos x + 1}$$

$$\left(c_{i-1}(x) \geq \frac{1}{2 \cos x} \implies c_i(x) \geq \frac{1}{2 \cos x} \right) \iff \left(c_{i-1}(x) \geq \frac{1}{2 \cos x} \implies \sqrt{c_{i-1}^2 - 2c_{i-1} \cos x + 1} \geq \frac{1}{2 \cos x} \right)$$

$$c_{i-1}(x) \geq \frac{1}{2 \cos x} \implies c_{i-1}^2 - 2c_{i-1} \cos x + 1 - \frac{1}{4 \cos^2 x} \geq 0$$

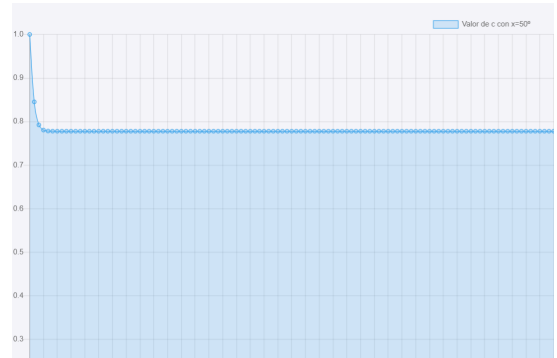


Figura 6: Comportamiento Decreciente en $c_i(x)$

Consideremos la función

$$f_x(y) = y^2 - 2y \cos x + 1 - \frac{1}{4 \cos^2 x}$$

$$f'_x(y) = 2y - 2 \cos x = 2(y - \cos x)$$

donde

$$\frac{1}{2 \cos x} \leq y$$

Los valores de x candidatos a tener decrecimiento monótono en $c_i(x)$ son $0 < x \leq \frac{\pi}{3}$, pues son los únicos para los que se da la condición base. Ergo $\frac{1}{2} \leq \cos x < 1$.

$$f_x\left(\frac{1}{2 \cos x}\right) = 0 \wedge f'_x(\cos x) = 0$$

$$\cos x \leq \frac{1}{2 \cos x} \wedge f'_x\left(\frac{1}{2 \cos x}\right) \geq 0 \iff 0 < \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

El dominio de x que satisface ambas condiciones es $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$. Si el valor mínimo de y anula la función cuadrática, y sabemos que tendrá pendiente positiva en este punto si $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, al ser inyectiva para y tal que $f'_x(y) > 0$, tendremos que la inecuación se satisface para todas $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$.

Finalmente, hemos visto que todos los valores de esta subfamilia de sucesiones monótonamente decrecientes están acotados inferiormente por $\frac{1}{2 \cos x}$:

$$L = \sqrt{L^2 - 2L \cos x + 1} \iff L = \frac{1}{2 \cos x}$$

Tramo Creciente: $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

Es el caso recíproco del tramo decreciente. Aplicando la misma inducción queda que

$$c_0(x) < c_1(x) \iff 1 < \sqrt{2(1 - \cos x)}$$

$$\iff \cos x < \frac{1}{2} \iff x \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$$

$$c_{i-1}(x) \leq \frac{1}{2 \cos x} \implies c_i(x) \leq \frac{1}{2 \cos x}$$

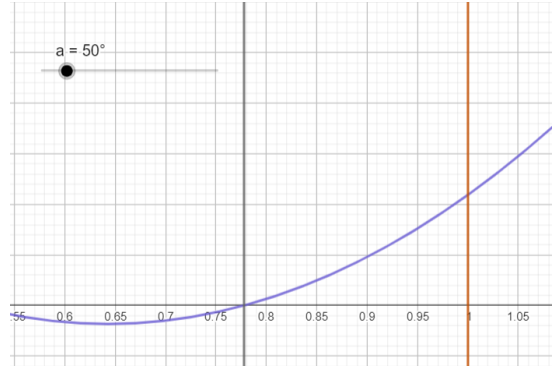


Figura 7: $f_{50^\circ}(y)$.

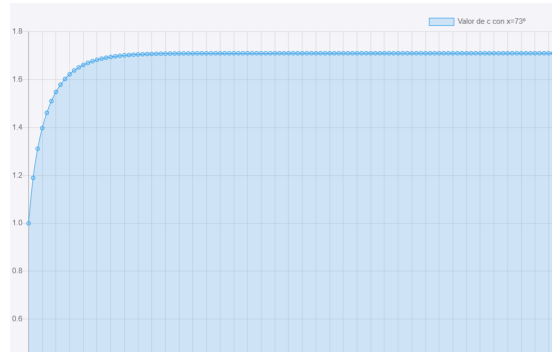


Figura 8: Comportamiento Creciente en $c_i(x)$

Es decir, que todos los términos de la sucesión estarán acotados superiormente por el valor $\frac{1}{2 \cos x}$. Ampliando $c_i(x)$, nos queda la inecuación recíproca a la del tramo anterior, por lo que queremos ver

$$f_x(y) = y^2 - 2y \cos x + 1 - \frac{1}{4 \cos x} \leq 0, \text{ donde } 0 < y \leq \frac{1}{2 \cos x}$$

Ya sabemos que

$$f_x\left(\frac{1}{2 \cos x}\right) = 0 \wedge f'_x(\cos x) = 0$$

Como $\cos x < 1 < \frac{1}{2 \cos x}$ y $f'_x\left(\frac{1}{2 \cos x}\right) \geq 0$, tenemos que se satisface la inecuación para el intervalo $1 \leq y \leq \frac{1}{2 \cos x}$. Por lo tanto, el límite en este tramo es el mismo: $\frac{1}{2 \cos x}$

Tramo Oscilante : $x \in (0, \frac{\pi}{4})$

Veamos primero que la sucesión presenta una oscilación equilibrada respecto al valor límite.

$$c_{i-1}(x) \geq c_i(x) \iff c_{i-1} \geq \frac{1}{2 \cos x}$$

Paso Base:

$$c_0 \geq \frac{1}{2 \cos x} \wedge c_1 \leq \frac{1}{2 \cos x} \wedge c_2 \geq \frac{1}{2 \cos x}$$

$$\begin{aligned} 1. \ c_1 \leq \frac{1}{2 \cos x} &\iff 2 - 2 \cos x \leq \frac{1}{4 \cos^2 x} \\ &\iff 8 \cos^2 x \cdot (1 - \cos x) - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

Se cumple para $x \in (0, \frac{\pi}{5})$. Es decir, que la oscilación empezará en el primer término c_0 , mientras que en $(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4})$ empieza en c_1

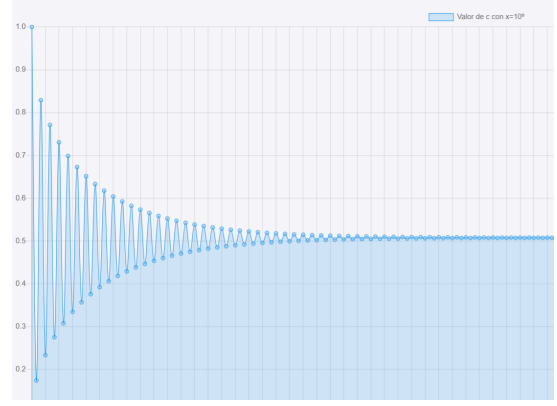


Figura 9: Comportamiento Oscilante en $c_i(x)$

Paso inductivo:

$$2. \ c_{i-1}(x) \geq \frac{1}{2 \cos x} \implies c_i(x) \leq \frac{1}{2 \cos x}$$

$$3. \ c_i(x) \leq \frac{1}{2 \cos x} \implies c_{i+1}(x) \geq \frac{1}{2 \cos x}$$

$$\cos_1 x = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4(2)(-1)}}{2 \times 2} = \frac{-1 - 3}{4} = -1, \quad \cos_2 x = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\forall x \in X : 2 \cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0 \iff \cos x \geq \frac{1}{2} \iff x \in (0, \frac{\pi}{3}]$$

Paso inductivo:

$$c_{i-2}(x) \geq c_i(x) \implies c_i(x) \geq c_{i+2}(x)$$

Transformando la Hipótesis de Inducción:

$$c_{i-2}(x) \geq c_i(x) \iff c_{i-2}(x) \geq \sqrt{c_{i-1}^2 - 2c_{i-1} \cos x + 1} \iff c_{i-2}^2(x) \geq c_{i-1}^2(x) - 2c_{i-1}(x) \cos x + 1$$

$$\begin{aligned} &\iff 2c_{i-2}(x) \cos x + 2c_{i-1}(x) \cos x \geq 2 \iff (c_{i-1}(x) \cos x)^2 \geq (1 - c_{i-2}(x) \cos x)^2 \\ &\iff \cos^2 x \cdot (1 - 2c_{i-2}(x) \cos x) \geq (1 - 2c_{i-2}(x) \cos x) \iff (1 - 2c_{i-2}(x) \cos x)(1 - \cos^2 x) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\iff c_{i-2}(x) \geq \frac{1}{2 \cos x}$$

Y queda igual la segunda inecuación, por lo que queremos demostrar:

$$c_{i-2}(x) \geq \frac{1}{2 \cos x} \implies c_i(x) \geq \frac{1}{2 \cos x}$$

Definición 2.1. Llamaremos *dominio de convergencia triangular* al intervalo $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, para el cual

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}) \iff \cos(x) > 0 \iff c_i(x) \text{ converge}$$

Definición 2.2. Análogamente, llamaremos *dominio de no convergencia triangular* X_2 al intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi)$, para el cual

$$x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \iff \cos(x) \leq 0 \iff \lim_{i \rightarrow \infty} c_i(x) = \infty$$

Definición 2.3 Sea $r(x) := \frac{1}{2 \cos(x)}$ la función *radio*, $\forall x \in X_1$

2.3. Estudio de $p(x)$: Condiciones de Cierre Total

Definición 3.1.

Sea $\varphi_n = |\{\frac{m}{n}\pi : m \in \mathbb{Z}^+_{<n} \wedge \text{mcd}(m, n) = 1\}|$ y $\varphi'_n = |\{m \in \mathbb{Z}^+_{<n} : \text{mcd}(m, n) = 1\}|$

Definición 3.2.

Sea $\gamma_n = |\{\frac{m}{n}\pi : 2m < n \wedge m \in \mathbb{Z}^+ \wedge \text{mcd}(m, n) = 1\}|$ y $\gamma'_n = |\{m \in \mathbb{Z}^+ : 2m < n \wedge \text{mcd}(m, n) = 1\}|$

Definición 3.3.

$\chi_n = |\{\frac{m}{n}\pi : m \in \mathbb{Z}^+_{<n} \wedge \text{mcd}(m, n) = 1 \wedge 2 \mid m\}|$, $\chi'_n = |\{m \in \mathbb{Z}^+_{<n} : \text{mcd}(m, n) = 1 \wedge 2 \mid m\}|$

Observación 1. Trivialmente, $|\varphi_n| = |\varphi'_n|$, $|\gamma_n| = |\gamma'_n|$ y $|\chi_n| = |\chi'_n|$.

Definición 4.1. Sea $p : X_1 \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ la función $p(x) = |\{P \in T_x : |\overline{OP}| = r(x)\}|$.

Teorema 1.1. Valor de la función $p(x)$

$$\forall x \in X_1, \exists n \in \mathbb{Z}_{>2} : x \in \gamma_n \iff \begin{cases} p(x) = 2n \iff 2 \nmid n \\ 4 \mid n \iff p(x) = n \\ 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \implies p(x) = \frac{1}{2}n \end{cases}$$

Demostración. Si $c_i(x)$ converge, también converge $c_{i-1}(x)$, que por la Definición 1.3, es igual a b_i . Esto implica que los bloques serán triángulos isósceles. Siendo O el vértice que une estos segmentos y α_i el ángulo central, vemos que α_i converge. Por la relación de ángulos de un triángulo, $\alpha = \pi - 2x$.

Establecemos la *condición de cierre*: deberá existir un número finito k de bloques la suma de cuyos ángulos centrales α sea $v \cdot 2\pi$ para algún $v \in \mathbb{Z}^+$:

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff x = \frac{m}{n}\pi \iff \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2n}{n-2m} \iff \exists k, v \in \mathbb{Z}^+ : \text{mcd}(k, v) = 1 \wedge k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi$$

Esto significa que, tras k triángulos isósceles constantes, los nuevos triángulos se dibujarán sobre otros ya existentes, al ser α constante. Para conocer el valor de k en función de x , haremos lo siguiente:

$$k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi \iff \frac{k}{v} = \frac{2n}{n-2m}$$

Para igualar k al numerador hay que ver qué valores de m y n generan una fracción irreducible.

- $2 \nmid n \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(n, n-2m) = \text{mcd}(2n, n-2m) = 1$
- $4 \mid n \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(n, n-2m) = \text{mcd}(2n, n-2m) = 2$
- $2 \mid n \wedge 4 \nmid n \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(n, n-2m) = 2 \implies \text{mcd}(2n, n-2m) = 4$

En consecuencia tenemos que

- $2 \nmid n \implies \text{mcd}(2n, n-2m) = 1 \implies k(x) = 2n$

- $4 \mid n \implies \text{mcd}(2n, n - 2m) = 2 \implies \text{mcd}\left(n, \frac{n-2m}{2}\right) = 1 \implies k(x) = n$
- $2 \mid n \wedge 4 \nmid n \implies \text{mcd}(2n, n - 2m) = 4 \implies \text{mcd}\left(\frac{n}{2}, \frac{n-2m}{4}\right) = 1 \implies k(x) = \frac{n}{2}$

Los bloques son triángulos isósceles, donde $c_i = b_i = r(x)$, por lo que el primer bloque aportará 2 nuevas puntas a la figura; a partir de éste, cada nuevo triángulo aportará 1 punta nueva, pues compartirá una con el bloque anterior; finalmente, el último bloque no añade ninguna punta más a la figura, pues une dos ya existentes cerrando la figura.

i	1	2	3	4	5	6	...	$k-1$	k
$\sum_{j=1}^i p_j$	2	3	4	5	6	7	...	k	k

Corolario 1.1.

$$p(X_1 \setminus \gamma_\infty) = \{\infty\}$$

Demostración. Si x no es una fracción racional de π , $\nexists k, v \in \mathbb{Z}^+ : k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi$, lo que se traduce en que nunca se llega a cerrar la figura tras un número finito de bloques.

Corolario 1.2.

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff \begin{cases} 2 \nmid n \iff v(x) = n - 2m \\ 4 \mid n \iff v(x) = \frac{n-2m}{2} \\ 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \implies v(x) = \frac{n-2m}{4} \end{cases}$$

2.4. Condiciones de Cierre Parcial: Estudio de $k_{i_0}(x, y)$

Definición 6.1. Sea $k_{i_0} : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ la función

$$k_{i_0}(x, y) = k \iff \sum_{i=i_0}^{\lfloor k \rfloor + i_0 - 1} \alpha_i(x) + (k - \lfloor k \rfloor) \alpha_{\lfloor k \rfloor + i_0}(x) = y$$

donde $i_0 \in \mathbb{Z}^+$. Si $i_0 = 1$, la denotaremos simplemente $k(x, y)$.

Proposición 2.1.

$$\forall x \in \gamma_\infty, p(x) = k_c(x, 2\pi v(x))$$

donde todos los bloques a partir del c -ésimo son triángulos isósceles constantes.

Demostración. Por el Teorema 1.1. y la Definición 6.1. vemos lo siguiente:

$$p(x) = k \iff \exists k, v \in \mathbb{Z}^+ : k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi \wedge \text{mcd}(k, v) = 1$$

$$k_c(x, y) = k \iff \sum_{i=c}^{\lfloor k \rfloor + c - 1} \alpha_i(x) + (k - \lfloor k \rfloor) \alpha_{\lfloor k \rfloor + c}(x) = y$$

En el dominio de convergencia, para $k \in \mathbb{Z}^+$:

$$k_c(x, 2\pi v(x)) = k \iff \sum_{i=c}^{k+c-1} \alpha_i(x) = 2\pi v(x) \iff k \cdot \alpha = 2\pi v(x)$$

Teorema 2.1. Espirales Únicas

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 3}, \exists! x \in X : k(x, 2\pi) = k$$

Demostración (Incompleta). Veamos que la función $k(x, 2\pi)$ es inyectiva:

Consideremos $k(x_2, y) = k_2 \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k_2 \rfloor} \alpha_i(x_2) + (k_2 - \lfloor k_2 \rfloor) \alpha_{\lfloor k_2 \rfloor}(x_2) = y$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{\lfloor k_2 \rfloor} \alpha_i(x_1) + (k_2 - \lfloor k_2 \rfloor) \alpha_{\lfloor k_2 \rfloor}(x_1) > y$$

Por lo que, necesariamente, $k(x_1, y) = k_1 < k_2 = k(x_2, y)$. Basándonos en este principio:

5. $\forall x_1, x_2 \in X \forall y \in \mathbb{R}^+, \exists k \in \mathbb{Z}^+ : k(x_1, y) < k < k(x_2, y) \implies \exists! x_m \in X : x_1 < x_m < x_2 \wedge k(x_m, y) = k$

Así, conociendo $k(x, y)$, podemos encontrar aquellos ángulos únicos x_m tales que $k(x_m, y) \in \mathbb{Z}^+$. En la Figura 9 se aprecian 17 bloques de T_{90° . La suma de sus ángulos centrales $\alpha_i(90^\circ)$ es mayor a 2π , y la suma de los 16 primeros es menor. Por esto, sabemos que la parte entera de $k(90^\circ, 360^\circ) = k \in \mathbb{R}^+$ es 16. En general:

$$\lfloor k(x, y) \rfloor = n \in \mathbb{Z}^+ \iff \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) < y < \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(x)$$

$$k(x, y) = k \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x) + (k - \lfloor k \rfloor) \alpha_{\lfloor k \rfloor}(x) = y \iff k = \lfloor k \rfloor + \frac{y - \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x)}{\alpha_{\lfloor k \rfloor}(x)}$$

Ya podemos computar con facilidad la función $k(x, y)$ para todas $(x, y) \in X \times \mathbb{R}^+$. En particular, $k(90^\circ, 360^\circ) \approx 16,649128$, y $k(91^\circ, 360^\circ) \approx 17,445935$. Apliquemos el Punto 5:

$$k(90^\circ, 360^\circ) < 17 < k(91^\circ, 360^\circ) \implies \exists! x_m \in (90^\circ, 91^\circ) : k(x_m, 360^\circ) = 17$$

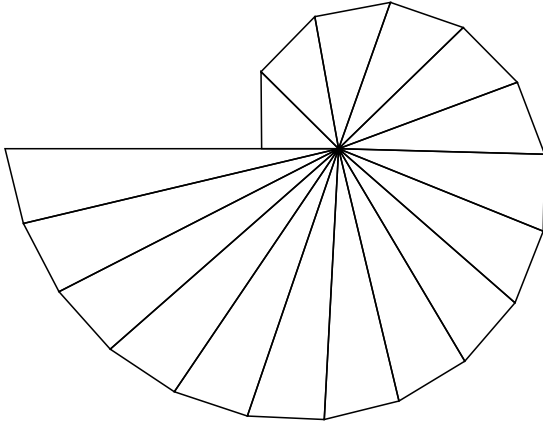


Figura 10: 17 bloques de $T_{x=90,45332215^\circ}$

$k \in \mathbb{Z}^+$	x°
3	19.019079333
6	60
9	74.15292718
12	82.2524055
16	89.13404388
17	90.45332215
18	91.65964018
19	92.76863062
20	93.79304858
21	94.74341811
60	110.8178438
450	128.8014110

Figura 11: $\{(k, x) : k(x, 2\pi) = k\}$

Corolario 2.

$$i) |\{x_1 \in X_1 : k(x_1, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+\}| = 14$$

$$ii) |\{x_2 \in X_2 : k(x_2, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+\}| = \infty$$

Es decir, que hay número finito de $x_1 \in X_1$ que satisfacen $k(x_1, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+$, mientras que existen infinitos ángulos $x_2 \in X_2$ para los cuales $k(x_2, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+$

La gráfica de la función muestra un crecimiento exponencial.

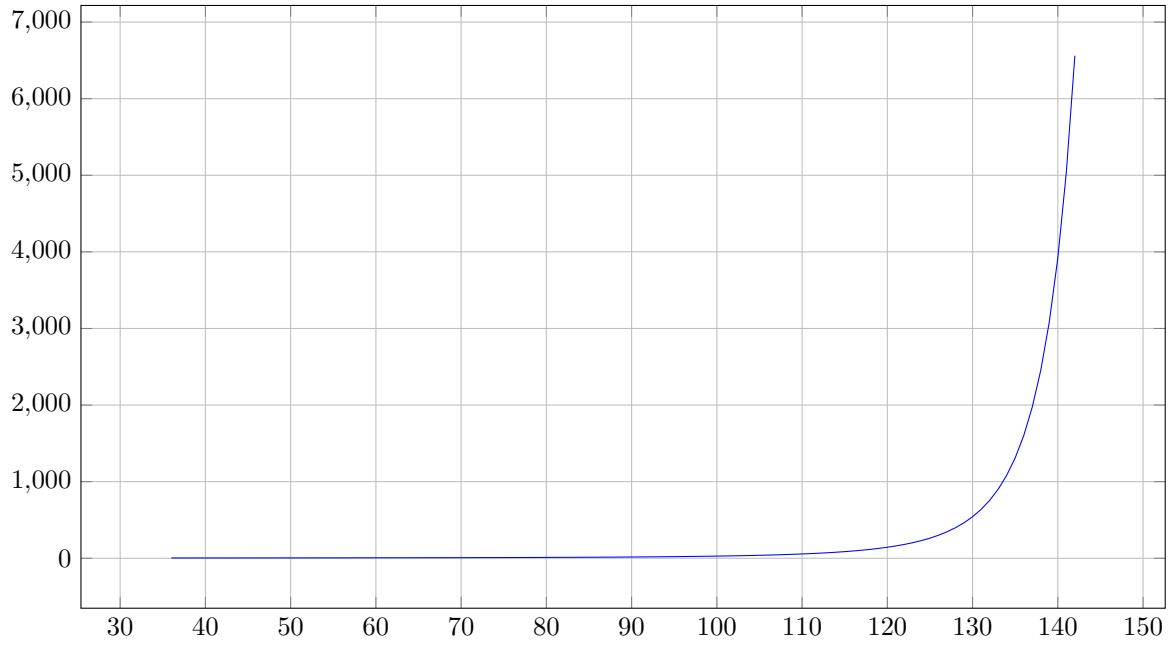


Figura 12: Gráfico de $k(x, 2\pi)$.

3. Segunda Construcción

3.1. Definición de la Construcción

Definición 7.1. En este caso, el *bloque fundamental* será el paralelogramo equilátero de lados a_i, b_i, c_i y d_i tales que

$$\forall i \in \mathbb{Z}^+ : a_i = b_i = c_i = d_i = \lambda \in \mathbb{R}^+$$

y x el ángulo que se forma entre a_i y b_i (también entre c_i y d_i)

Definición 7.2. Sea P_x la figura generada yuxtaponiendo bloques mediante la misma regla que T_x , y O el centro de la figura:

$$b_i = c_{i-1}$$

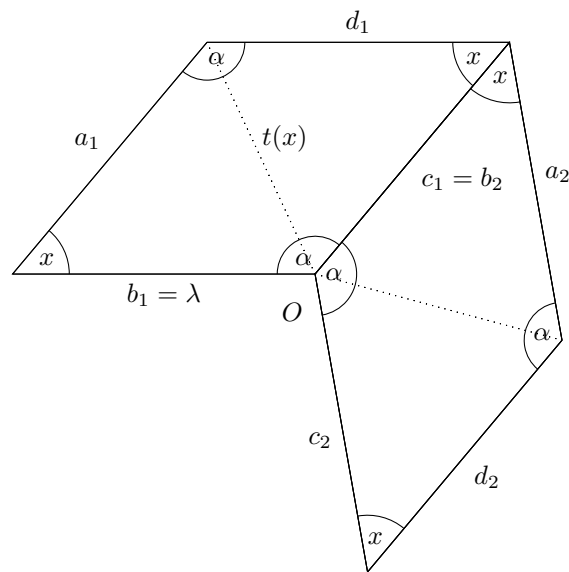


Figura 13: Dos primeros bloques de P_{50° .

Definición 7.3. Sea $r'(x) := \max(\lambda, t(x)), \forall x \in X$, donde $t(x)$ es la distancia entre los vértices opuestos cuyos ángulos son α .

3.2. Estudio de $r'(x)$

Proposición 3.1.

$$r'(x) = \begin{cases} \lambda & \text{si } 0 < x \leq \frac{\pi}{3} \\ \lambda\sqrt{2(1 - \cos x)} & \text{si } \frac{\pi}{3} < x < \pi \end{cases}$$

Demostración. Por el Teorema del Coseno, tenemos que:

$$t^2(x) = a^2 + b^2 - 2ab \cos x \iff t(x) = \sqrt{2\lambda^2 - 2\lambda^2 \cos(x)} = \sqrt{2\lambda^2(1 - \cos(x))} = \lambda\sqrt{2(1 - \cos(x))}$$

$$\begin{cases} r'(x) = \lambda \iff \max(\lambda, \lambda\sqrt{2(1 - \cos(x))}) = \lambda \iff \lambda \geq \lambda\sqrt{2(1 - \cos(x))} \iff \cos x \geq \frac{1}{2} \iff x \in (0, \frac{\pi}{3}] \\ r'(x) = \lambda\sqrt{2(1 - \cos(x))} \iff \lambda < \lambda\sqrt{2(1 - \cos(x))} \iff \cos x < \frac{1}{2} \iff x \in (\frac{\pi}{3}, \pi) \end{cases}$$

Por lo que vemos que todas las figuras generadas por esta segunda construcción tendrán radio finito.

3.3. Estudio de $q(x)$

Definición 8.1. Sea $q : X \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ la función $q(x) = |\{S \in P_x : |\overline{OS}| = r'(x)\}|$

Teorema 3.1. Función $q(x)$

$$i) \forall n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{3\}, x \in \varphi_n \iff \begin{cases} q(x) = 2n \iff 2 \mid n \vee 2 \mid m \\ q(x) = n \iff 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \end{cases} \quad ii) q(\frac{1}{3}\pi) = 2n = 6$$

Demostración. Por la relación de ángulos de un cuadrilátero, $2\alpha + 2x = 2\pi \iff \alpha = \pi - x$. Procedamos ahora de la misma manera que en el Teorema 1.1:

$$\begin{aligned} \exists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \varphi_n &\iff x = \frac{m}{n}\pi \wedge m < n \iff \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2n}{n-m} \iff \\ &\iff \exists k, v \in \mathbb{Z}^+ : \text{mcd}(k, v) = 1 \wedge k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi \iff \frac{k}{v} = \frac{2n}{n-m} \end{aligned}$$

$$\blacksquare (2 \mid n \vee 2 \mid m) \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(2n, n-m) = 1 \implies k(x) = 2n$$

$$\blacksquare 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(2n, n-m) = 2 \implies k(x) = n$$

Finalmente, la relación entre $q(x)$ y $k(x)$ es la siguiente:

$$\begin{cases} r'(x) = \lambda \iff x \in (0, \frac{\pi}{3}) & \iff \\ r'(x) = \lambda\sqrt{2(1 - \cos(x))} & \iff \\ x = \frac{\pi}{3} & \iff \end{cases} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & k-1 & k \\ \hline \sum_{j=1}^i q_j & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & k & k \\ \hline i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & k-1 & k \\ \hline \sum_{j=1}^i q_j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & k-1 & k \\ \hline i & 1 & 2 & 3 & & & & & & \\ \hline \sum_{j=1}^i q_j & 3 & 5 & 6 & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Cuando $r'(x) = \lambda$, el primer bloque aporta dos puntas, pues tiene dos segmentos de esa longitud: $b_1 = \lambda = c_1$. En cambio, si $r'(x) = t(x)$, el primer bloque contiene un solo segmento desde O con longitud $t(x) = \lambda\sqrt{2(1 - \cos(x))}$. En el caso singular $x = 60^\circ$ se da que los bloques son triángulos equiláteros.

Corolario 3.1.

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, x \in \varphi_n \iff \begin{cases} (2 \mid n \vee 2 \mid m) \iff v'(x) = n - m \\ 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff v'(x) = \frac{n-m}{2} \end{cases}$$

Corolario 3.2.

$$\nexists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \varphi_n \iff \frac{m}{n} \notin \mathbb{Q} \iff q\left(\frac{m}{n}\pi\right) = \infty$$

4. Integración de las Construcciones

Definición 8.2. Sea $q^{-1}(q) = \{x \in X : q(x) = q\}$ el conjunto antiimagen de la función $q(x)$, y $g(q) := |q^{-1}(q)|$

Definición 9. Sean $\varphi_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}} \varphi_n$, $\gamma_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{> 2}} \gamma_n$ y $\chi_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}} \chi_n$

Observación.

$$x \in \varphi_\infty \iff \exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 2} : x \in \varphi_n$$

4.1. Teoremas de Integración

Proposición 4.

$$\forall x \in X_1, \exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 2} : x \in \gamma_n \iff \begin{cases} p(x) = q(x) \iff 2 \mid m \vee 3m = n \iff x \in \chi_\infty \cup \{\frac{\pi}{3}\} \\ p(x) = 2q(x) \iff 2 \nmid m \wedge 2 \nmid n \wedge 3m \neq n \\ 2p(x) = q(x) \iff 4 \mid n \\ 4p(x) = q(x) \iff 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \end{cases}$$

Demostración. Uniendo los Teoremas 1.1. y 3.1:

1. $p(x) = 2n = q(x) \iff 2 \nmid n \wedge (2 \mid m \vee 2 \mid n) \iff 2 \mid m, p(x) = 6 = q(x) \iff x = \frac{\pi}{3}$
2. $p(x) = n = q(x) \iff 4 \mid n \wedge 2 \nmid n \iff F$
3. $p(x) = 2n = 2q(x) \iff 2 \nmid n \wedge (2 \nmid m \wedge 2 \nmid n) \iff 2 \nmid m \wedge 2 \nmid n$
4. $2p(x) = 2n = q(x) \iff 4 \mid n \wedge (2 \mid m \vee 2 \mid n) \iff 4 \mid n$
5. $2p(x) = n = q(x) \iff 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \wedge (2 \nmid m \wedge 2 \nmid n) \iff F$
6. $4p(x) = 2n = q(x) \iff (2 \mid n \wedge 4 \nmid n) \wedge (2 \mid m \vee 2 \mid n) \iff 2 \mid n \wedge 4 \nmid n$

4.1.1. Distribución de Figuras y Función Totiente

Lema 2. Simetrías de φ_n

- i) $\forall n \in \mathbb{Z}_{> 2}, |\varphi_n| = 2|\chi_n|$
- ii) $\forall n \in \mathbb{Z}_{> 2} : 2 \nmid n \iff |\varphi_n| = 2|\gamma_n|$
- iii) $\forall n \in \mathbb{Z}_{> 2} : 2 \nmid n \iff \varphi(2n) = \varphi(n)$

La demostración de este Lema puede hallarse en el Apéndice.

Definición 4.2. Sea $p^{-1}(p) = \{x \in X_1 : p(x) = p\}$, $\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ el conjunto antiimagen de la aplicación explicada en la Definición 4.1, y $f(p) := |p^{-1}(p)|$ el cardinal de este conjunto.

Definición 5.1. Sea $\varphi(n) = |\varphi_n|$ la función totiente de Euler.

Teorema 4.1. Primer Teorema de Integración

$$\begin{aligned} i) \quad & \forall p, q \in \mathbb{Z}_{>3} \setminus \{6\}, \quad p = q \implies f(p) = g(q) \\ ii) \quad & \forall p \in \mathbb{Z}_{>3} \setminus \{6\}, \quad f(p) + g(p) = \varphi(p) \\ iii) \quad & g(3) = 0 = \frac{\varphi(3)}{2} - 1 \wedge g(6) = 2 = \frac{\varphi(6)}{2} + 1 \end{aligned}$$

Demostración. Veamos primero que

$$\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3}, \quad f(p) = \frac{\varphi(p)}{2}$$

Hay que dilucidar qué denominador n causará que la figura tenga p puntas, siguiendo el Teorema 1.1:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \nmid p \iff n = 2p \\ 4 \mid n \iff n = p \\ 2 \mid p \wedge 4 \nmid p \iff n = \frac{1}{2}p \end{array} \right. \implies p^{-1}(p) = \gamma_n = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{2p} \iff 2 \nmid p \\ \gamma_n \iff 4 \mid p \\ \gamma_{\frac{p}{2}} \iff 2 \mid p \wedge 4 \nmid p \end{array} \right.$$

Es decir, el conjunto de las x para las cuales $p(x) = p$ son los ángulos $x \in X_1$ con denominador entero positivo n , dependiente de la paridad de p , y numerador también entero positivo y coprimo respecto a n . Esto es lo que representa, por construcción, el conjunto γ_n introducido en la Definición 4.2.

Siguiendo el Lema de Simetrías y la Definición 5.1:

$$p^{-1}(p) = \gamma_n \iff |p^{-1}(p)| = f(p) = |\gamma_n| = \frac{\varphi(n)}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\varphi(2p) \iff 2 \nmid p \\ \frac{1}{2}\varphi(p) \iff 4 \mid p \\ \frac{1}{2}\varphi(\frac{p}{2}) \iff 2 \mid p \wedge 4 \nmid p \end{array} \right. = \frac{\varphi(p)}{2}$$

Comprobaremos que

$$f(p) + g(p) = \varphi(p) \iff g(p) = \frac{\varphi(p)}{2} \iff f(p) = g(p)$$

viendo que $g(p) = \frac{\varphi(p)}{2}$. Estudiemos las condiciones de q para conocer los denominadores y numeradores m y n para los cuales $q(\frac{m}{n}\pi) = q$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \nmid n \wedge 2 \mid m \iff n = \frac{q}{2} \wedge 2 \mid m \iff 2 \mid q \wedge 4 \nmid q \\ 2 \mid n \wedge 2 \nmid m \iff n = \frac{q}{2} \wedge 2 \nmid m \iff 4 \mid q \\ 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff n = q \wedge 2 \nmid m \iff 2 \nmid q \end{array} \right. \implies q^{-1}(q) = \left\{ \begin{array}{l} \chi_{\frac{q}{2}} \iff 2 \mid q \wedge 4 \nmid q \\ \varphi_{\frac{q}{2}} \iff 4 \mid q \\ \varphi_q \setminus \chi_q \iff 2 \nmid q \end{array} \right.$$

Por el Lema de Simetrías:

$$|q^{-1}(q)| = g(q) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(q) - |\chi_q| = \frac{1}{2}\varphi(q) \iff 2 \nmid q \\ \varphi(\frac{q}{2}) \iff 4 \mid q \\ |\chi_{\frac{q}{2}}| = \frac{1}{2}\varphi(\frac{q}{2}) \iff 2 \mid q \wedge 4 \nmid q \end{array} \right. = \frac{\varphi(q)}{2}$$

iii) Cuando consideramos el número de puntas p en lugar del número de bloques k , siguiendo lo visto en el Teorema 3.1, estamos interpretando a $P_{\frac{\pi}{3}}$ como una figura del conjunto $q^{-1}(6)$. Por tanto, el conjunto $q^{-1}(3)$ se queda vacío, al haber movido la única figura que contenía al otro conjunto.

4.1.2. Homología y Unicidad de Figuras Finitas y Cerradas

Definición 10. Diremos que dos figuras F_{x_1} y G_{x_2} son *homólogas* si se cierran con las mismas k y v , y lo denotaremos por $F_{x_1} \sim_h G_{x_2}$.

Teorema 4.2. Segundo Teorema de Integración

$$\begin{aligned} \forall x_t, x_p \in \varphi_\infty : T_{x_t} \sim_h P_{x_p} &\iff 2x_t = x_p \\ \forall x_t, x_p \in \varphi_\infty : T_{x_t} \sim_h P_{x_p} \wedge x_p \neq \frac{\pi}{3} &\implies p(x_t) = q(x_p) \\ \forall x_1, x_2 \in \varphi_\infty : T_{x_1} \sim_h T_{x_2} &\iff x_1 = x_2 \\ \forall x_1, x_2 \in \varphi_\infty : P_{x_1} \sim_h P_{x_2} &\iff x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Demostración. Por la condición de cierre de los Teoremas 1.1. y 3.1. podemos ver que

$$\begin{aligned} \frac{k}{v} = \frac{k'}{v'} \wedge \text{mcd}(k, v) = \text{mcd}(k', v') = 1 &\iff k = k' \wedge v = v' \\ T_{x_t} \sim_h P_{x_p} &\iff \frac{k}{v} = \frac{k'}{v'} \iff \frac{2n_t}{n_t - 2m_t} = \frac{2n_p}{n_p - m_p} \iff \frac{2m_t}{n_t} = \frac{m_p}{n_p} \iff 2x_t = x_p \end{aligned}$$

Además sabemos que el número de bloques coincide con el número de puntas salvo en el caso singular:

$$\begin{aligned} \forall x_t \in \gamma_\infty : k(x_t) &= p(x_t) \\ \forall x_p \in \varphi_\infty : k'(x_p) &= q(x_p) \iff x_p \neq \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} T_{x_1} \sim_h T_{x_2} &\iff \frac{k_1}{v_1} = \frac{k_2}{v_2} \iff \frac{2n_1}{n_1 - 2m_1} = \frac{2n_2}{n_2 - 2m_2} \iff \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \iff x_1 = x_2 \\ P_{x_1} \sim_h P_{x_2} &\iff \frac{k'_1}{v'_1} = \frac{k'_2}{v'_2} \iff \frac{2n_1}{n_1 - m_1} = \frac{2n_2}{n_2 - m_2} \iff \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \iff x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Proposición 5.

$$\forall (p, v) \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \times \gamma'_p, \quad x_t(p, v) = \frac{p-2v}{2p}\pi \in \gamma_\infty$$

$$\forall (q, v') \in \mathbb{Z}_{> 3} \times \gamma'_q, \quad x_p(q, v') = \frac{q-2v'}{q}\pi \in \varphi_\infty$$

Demostración. Por el Segundo Teorema de Integración, tenemos que dos figuras de la misma construcción son homólogas si y sólo si comparten generador. Por lo tanto:

$$\forall (p, v) \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \times \gamma'_p, \exists ! x_t \in \gamma_\infty : p(x_t) = p \wedge v(x_t) = v$$

$$\forall (q, v') \in \mathbb{Z}_{> 3} \times \gamma'_q, \exists ! x_p \in \varphi_\infty : q(x_p) = q \wedge v'(x_p) = v'$$

$$\frac{p}{v} = \frac{2n}{n-2m} \iff p(n-2m) = 2nv \iff pn - 2pm = 2nv \iff n(p-2v) = 2pm \iff \frac{m}{n} = \frac{p-2v}{2p}$$

$$2m < n \iff p-2v < p \iff v > 0$$

$$p-2v > 0 \iff 2v < p$$

$$p, v \in \mathbb{Z}^+ \wedge \text{mcd}(p, v) = 1$$

$$\therefore v \in \gamma'_p$$

$$ii) \frac{q}{v'} = \frac{2n}{n-m} \iff q(n-m) = 2nv' \iff qn - qm = 2nv' \iff n(q-2v') = qm \iff \frac{m}{n} = \frac{q-2v'}{q}$$

$$m < n \iff q-2v' < q \iff v' > 0$$

$$q-2v' > 0 \iff 2v' < q$$

$$q, v' \in \mathbb{Z}^+ \wedge \text{mcd}(q, v') = 1$$

$$\therefore v' \in \gamma'_q$$

Esta caracterización permite demostrar el Primer Teorema de Integración sin información de χ_n . Por las expresiones explícitas de los ángulos en función de p y v podemos reexpresar el Segundo Teorema en los siguientes términos:

$$\forall (p, v) \in \mathbb{Z}_{> 3} \times \gamma'_p : 2x_t(p, v) = x_p(p, v)$$

$2x_t = x_p$ implica que los ángulos internos α serán iguales, por lo tanto será el mismo número de puntas y de vueltas el que satisfaga la condición de cierre.

En suma, hemos encontrado una nueva manera de caracterizar a los generadores, que pueden ser identificados de forma única por el número p de puntas y v de vueltas de la figura a la que dan lugar.

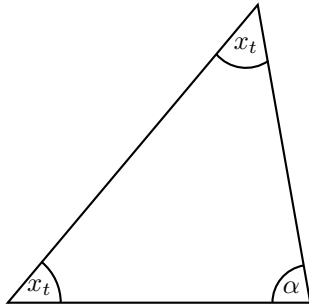


Figura 14: $x_t = 50^\circ$

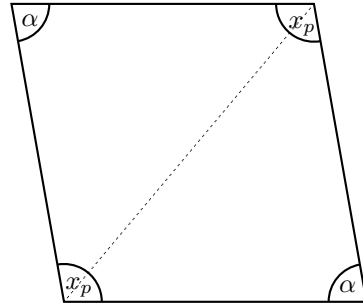


Figura 15: $x_p = 2x_t = 100^\circ$

4.1.3. Radio Mínimo Relativo (RMR)

Definición 11.1. Sea $r_t : X_1 \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow (0, r(x))$ la función radio generalizada para figuras T_x .

Definición 11.2. Sea $r_p : X \times \mathbb{Q}^+ \rightarrow (0, r'(x))$ la función radio generalizada para figuras P_x .

Proposición 6.1. Definición completa de r_t

$$r_t(x, n) = r(x) \frac{\sin(x)}{\sin(\frac{p(x)-n}{p(x)}\pi - x)}$$

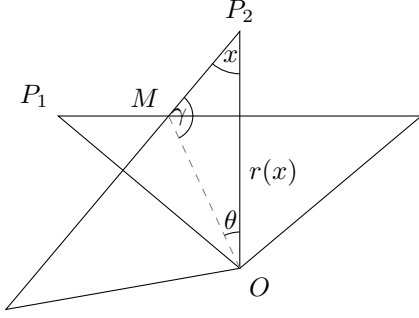


Figura 16: Disección de una construcción

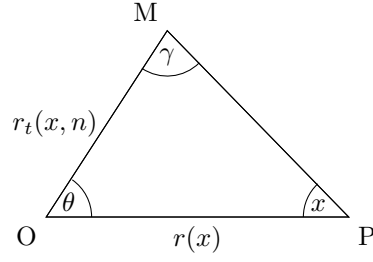


Figura 17: $r_t := |\overline{OM}|$

Definimos el ángulo central θ como n medias partes de sección ($\frac{2\pi}{p(x)}$):

$$1. \theta(x, n) := \frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{p(x)} = \frac{n\pi}{p(x)}$$

Por la relación fundamental de ángulos de un triángulo:

$$2. x + \gamma + \theta = \pi$$

Siguiendo el Teorema del Seno:

$$3. \frac{r_t(x, n)}{\sin x} = \frac{r(x)}{\sin \gamma} \iff r_t(x, n) = r(x) \frac{\sin x}{\sin \gamma}$$

$$4. r_t(x, n) = r(x) \frac{\sin x}{\sin(\pi - \theta - x)} = r(x) \frac{\sin x}{\sin(\frac{p(x)-n}{p(x)}\pi - x)}$$

Proposición 6.2. Radio Mínimo Relativo para Primera Construcción

$$r_0(x) := \frac{r_t(x, n_0)}{r(x)} = \frac{r_t(x, v(x))}{r(x)} = \sin(x)$$

Demostración. La condición de minimización del radio de las figuras de la Primera Construcción es

$$\gamma = \frac{\pi}{2}$$

ya que hay líneas tangentes al radio mínimo las cuales unen puntas internamente. Notando que entre la tangente a una circunferencia y su radio se forma un ángulo recto, veremos que igualando γ a $\frac{\pi}{2}$ sacaremos un valor específico de n , al que llamaremos n_0 , al ser el parámetro que minimiza el radio.

$$\frac{p-n}{p}\pi - x = \frac{p-n}{p}\pi - \frac{p-2v}{2p}\pi = \frac{2(p-n) - (p-2v)}{2p}\pi = \frac{2v-2n+p}{2p}\pi$$

$$\frac{2v-2n_0+p}{2p}\pi = \frac{\pi}{2} \iff n_0 = v$$

$$r_0(x) = \frac{\sin x}{\sin \gamma} = \frac{\sin x}{\sin \frac{\pi}{2}} = \sin x$$

La función $\sin(x)$ representa el *radio mínimo relativo* de la figura generada por el ángulo de formación x . En la Figura sería un 8,715 % del radio total, ya que $\sin(5^\circ) = 0,08715$.

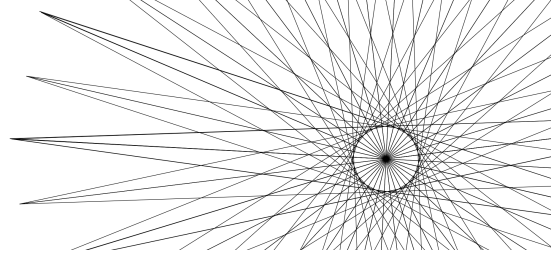


Figura 18: Zoom en T_{5° .

Proposición 7.1. Definición completa de r_p

$$r_p(x, n) = \begin{cases} r'(x) \frac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{q(x)-n}{q(x)}\pi - x\right)} & \text{si } x \in (0, \frac{\pi}{3}), \\ r'(x) \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin\left(\frac{q(x)-2n}{2q(x)}\pi + \frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in (\frac{\pi}{3}, \pi). \end{cases}$$

Para el intervalo de $x \in (0, \frac{\pi}{3})$ opera igual que la primera construcción, pues el ángulo de las puntas es $2x$, y en la disección se toma la mitad. Para el resto del dominio de convergencia, siguiendo las Definiciones 7.3. y 8.1, vemos que el ángulo de las puntas será α . Entonces:

$$\begin{aligned} 1. \theta(x, n) &:= \frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{q(x)} = \frac{n\pi}{q(x)} \\ 2. \frac{\alpha}{2} + \gamma + \theta &= \pi \iff \gamma = \pi - \frac{n\pi}{q(x)} - \frac{\pi - x}{2} = \frac{q(x) - 2n}{2q(x)}\pi + \frac{x}{2} \\ 3. \frac{r_p(x, n)}{\sin(\frac{\alpha}{2})} &= \frac{r'(x)}{\sin(\gamma)} \iff r_p(x, n) = r'(x) \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\gamma)} \\ 4. \sin(\frac{\alpha}{2}) &= \sin(\frac{\pi - x}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}) = \cos(\frac{x}{2}) \\ 5. r_p(x, n) &= r'(x) \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{q(x)-2n}{2q(x)}\pi + \frac{x}{2})} \end{aligned}$$

Proposición 7.2. Radio Mínimo Relativo para Segunda Construcción

$$r'_0(x) := \frac{r_p(x, n_0)}{r'(x)} = \begin{cases} \sin x \iff x \in (0, \frac{\pi}{3}] \\ \cos \frac{x}{2} \iff x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) \\ \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \iff x \in X_2 \end{cases}$$

Demostración. Las condiciones de minimización son 2: para $x \in X_1$ debemos $\gamma = \frac{\pi}{2}$, al estar calculando la apotema del polígono regular más pequeño que se forma en el interior de la figura. Cuando $2 \mid q$, tendremos un q -gono; y si $2 \nmid q$, habrá un $2q$ -gono.

Para el subdominio de generación X_2 tenemos que la forma más pequeña en el interior de la figura no será convexa, por lo que no calcularemos una apotema sino la longitud de los lados de los paralelogramos. Recordemos que en este tramo el radio es $t(x)$, y los lados de los bloques son $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}
x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) &\iff r'_0(x) = \frac{\sin x}{\sin \gamma} = \frac{\sin x}{\sin \frac{\pi}{2}} = \sin x \\
x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) &\iff r'_0(x) = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \gamma} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{x}{2} \\
x \in X_2 &\iff r'_0(x) = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \gamma} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin x} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

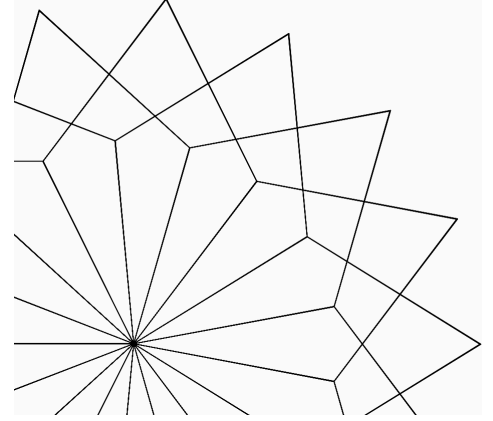


Figura 19: Zoom en $P_{x_p(17,3)}$.

Notemos que la función es continua en los puntos de transición:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \sin(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

4.1.4. Relación entre RMR de Figuras Homólogas

Definición 12. Sean $X_{1_1} = (0, \frac{\pi}{4})$ y $X_{1_2} = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

Teorema 4.3. Tercer Teorema de Integración

$$\forall x_t, x_p \in X : T_{x_t} \sim_h P_{x_p} \implies \begin{cases} r_0(x_t) < r'_0(x_p) \iff x_t \in X_{1_1} \wedge x_p \in X_1 \\ r_0(x_t) = r'_0(x_p) \iff x_t = \frac{\pi}{4} \wedge x_p = \frac{\pi}{2} \\ r_0(x_t) > r'_0(x_p) \iff x_t \in X_{1_2} \wedge x_p \in X_2 \end{cases}$$

Demostración. Siguiendo el Segundo Teorema de Integración y las Proposiciones 6.2. y 7.2. planteamos la desigualdad entre ambas funciones en los diversos tramos:

$$1. x_p \in (0, \frac{\pi}{3}) \wedge 2x_t = x_p \iff x_t \in (0, \frac{\pi}{6})$$

$$2. r_0(x_t) < r'_0(x_p) \iff r_0(x_t) < r'_0(2x_t) \iff \sin(x_t) < \sin(2x_t)$$

Lo cual se cumple para toda $x_t \in (0, \frac{\pi}{6}]$.

$$3. r_0(x_t) < r'_0(x_p) \iff \sin(x_t) < \cos\left(\frac{x_p}{2}\right) \iff \sin(x_t) < \cos(x_t)$$

Esta desigualdad se verifica positivamente para $x_t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$

$$4. r_0\left(\frac{\pi}{4}\right) = r'_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \iff \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5. r_0(x_t) > r'_0(x_p) \iff \sin(x_t) > \frac{1}{2 \sin \frac{x_p}{2}} \iff \sin(x_t) > \frac{1}{2 \sin x_t} \iff \sin x_t > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Lo cual es cierto para $x_t \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) = X_{1_2}$.

4.1.5. Monogeneradores y Bigeneradores

Definición 13.1. Diremos que x es un *monogenerador* si $p(x) = q(x) \wedge r_0(x) = r'_0(x)$.

Definición 13.2. En cambio, x será un *bigenerador* si $p(x) \neq q(x) \vee r_0(x) \neq r'_0(x)$.

Definición 14.1. Sea $M = (\chi_\infty \cap (0, \frac{\pi}{3})) \cup \{\frac{\pi}{3}\}$

Definición 14.2. Sea $B = (\gamma_\infty \setminus \{\frac{\pi}{3}\}) \setminus (\chi_\infty \cap (0, \frac{\pi}{3}))$

Teorema 4.4. Cuarto Teorema de Integración

$$\forall x \in X : x \text{ monogenerador} \iff x \in M$$

$$\forall x \in X : x \text{ bigenerador} \iff x \in B$$

Demostración. Veamos primero los monogeneradores. Por la Proposición 4:

$$p(x) = q(x) \in \mathbb{Z}^+ \iff x \in \chi_\infty \cap X_1 \vee x = \frac{\pi}{3}$$

Ahora, por las Proposiciones 6.2. y 7.2:

$$r_0(x) = \sin x = r'_0(x) \iff x \in \gamma_\infty \cap (0, \frac{\pi}{3}]$$

Entonces, el conjunto que satisfaga ambas propiedades será la intersección de aquellos que satisfacen cada una de ellas por separado. Veamos el caso discreto y añadamos posteriormente el conjunto de monogeneración trivial:

$$(\chi_\infty \cap X_1) \cup \{\frac{\pi}{3}\} \cap \gamma_\infty \cap (0, \frac{\pi}{3}] = (\chi_\infty \cap \gamma_\infty \cap X_1 \cap (0, \frac{\pi}{3})) \cup \{\frac{\pi}{3}\} = \chi_\infty \cap (0, \frac{\pi}{3}) \cup \{\frac{\pi}{3}\}$$

$$x \text{ monogenerador} \iff x \in M = (\chi_\infty \cap (0, \frac{\pi}{3})) \cup \{\frac{\pi}{3}\} \cup (X_1 \setminus \gamma_\infty)$$

Analicemos ahora los bigeneradores. Éste sería el caso complementario de la Proposición 4, esto es, que $p(x) \neq q(x)$. Entonces:

$$p(x) \neq q(x) \iff x \in \gamma_\infty \setminus (\chi_\infty \cup \{\frac{\pi}{3}\})$$

$$r_0(x) \neq r'_0(x) \iff x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) \cap \gamma_\infty$$

Aquí hay que considerar el conjunto unión, dada la definición de bigenerador:

$$(\gamma_\infty \setminus \chi_\infty) \cup ((\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) \cap \gamma_\infty) = \gamma_\infty \setminus (\chi_\infty \cap (0, \frac{\pi}{3}))$$

$$x \text{ bigenerador} \iff x \in B = (\gamma_\infty \setminus (\chi_\infty \cap (0, \frac{\pi}{3})))$$

4.2. Diagramas

- Las figuras de $\{T_x : x \in X_2\}$ son *espirales infinitas* cuya distancia al centro O crece linealmente si $x \neq \frac{\pi}{2}$.
- En $\{T_x : x \in X_{1_2} \cap \gamma_\infty\}$ y $\{P_x : x \in X_2 \cap \varphi_\infty\}$ son *figuras finitas y cerradas* Aquí, $r_0(x_t) > r'_0(x_p)$.
- En $\{T_x : x \in X_{1_1} \cap \gamma_\infty\}$ y $\{P_x : x \in X_1 \cap \varphi_\infty\}$ son también finitas y cerradas. Aquí, en cambio, $r_0(x_t) < r'_0(x_p)$.
- Finalmente, en $\{T_x : x \in X_1 \setminus \gamma_\infty\}$ y $\{P_x : x \in X \setminus \varphi_\infty\}$ se da una *singularidad finita*, pues el radio converge y no se cumple la condición de cierre

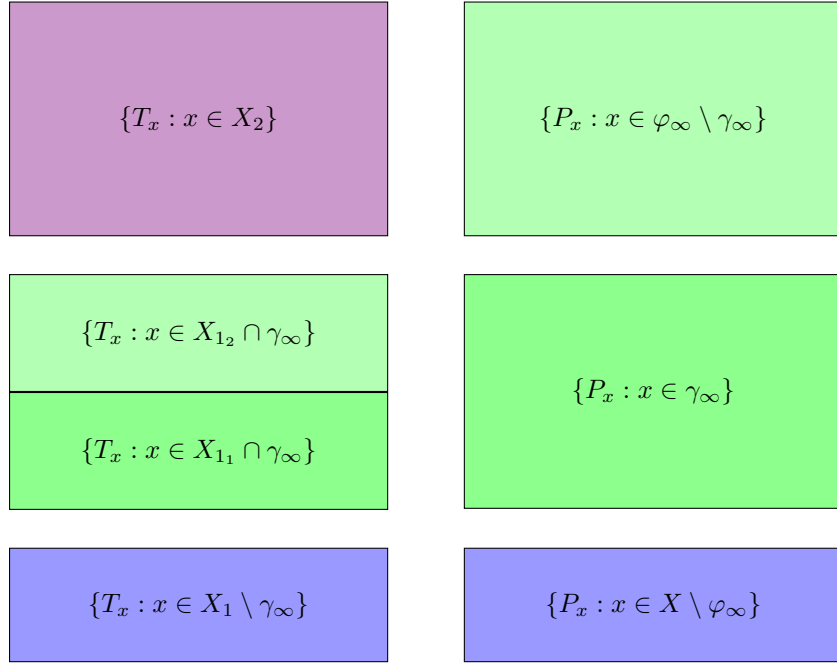


Figura 20: Diagrama Clasificadorio

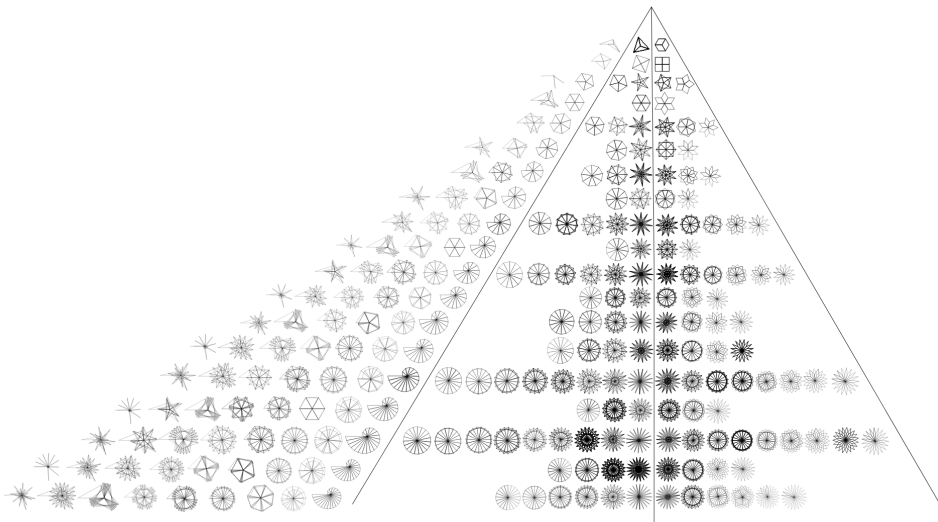


Figura 21: Diagrama Triangular.

5. Apéndice

5.1. Demostración del Lema de Simetrías

$$i) \forall n \in \mathbb{Z}_{>2}, 2 \nmid n \iff |\varphi_n| = 2|\chi_n|$$

Demostración.

$$1. \forall n \in \mathbb{Z}^+ : \exists f_n : [1, \frac{n-1}{2}] \cap \mathbb{Z}^+ \rightarrow [\frac{n+1}{2}, n-1] \cap \mathbb{Z}^+ \text{ biyectiva}$$

Es trivial ver que el dominio y el codominio de esta función son conjuntos finitos y numerables con cardinal $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}^+ \iff 2 \nmid n$:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+ : a \leq b \implies |[a, b] \cap \mathbb{Z}^+| = b - a + 1$$

$$n - 1 - \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{2(n-1) - (n+1) + 2}{2} = \frac{n-1}{2}$$

Además:

$$2 \nmid n \iff [1, \frac{n-1}{2}] \cap \mathbb{Z}^+ \cup [\frac{n+1}{2}, n-1] \cap \mathbb{Z}^+ = [1, n-1] \cap \mathbb{Z}^+ = \{m \in \mathbb{Z}^+ : m < n\}$$

En concreto vamos a considerar la regla de asignación

$$f_n(m) = n - m \iff f_n(m) + m = n$$

m	1	2	3	4	5	6	7
$f_{15}(m)$	14	13	12	11	10	9	8

$$2. \forall n \in \mathbb{Z}^+ : 2 \nmid n \iff \forall m \in [1, \frac{n-1}{2}] \cap \mathbb{Z}^+, \begin{cases} 2 \mid m \iff 2 \nmid f_n(m) \\ 2 \nmid m \iff 2 \mid f_n(m) \end{cases}$$

Esto se da porque, por la regla de asignación de la aplicación, vemos que la suma del argumento m y su imagen $f_n(m)$ debe ser igual a n , que es un número impar; y sólo la suma de un par y un impar resultan en un número impar.

$$3. \forall m, n \in \mathbb{Z}^+ : \text{mcd}(m, n) = 1 \iff \text{mcd}(n, n - m) = 1 \iff (m \in \gamma'_n \iff f_n(m) \in \varphi'_n \setminus \gamma'_n)$$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f_{27}(m)$	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14

Con esta información podemos ver que existirá una biyección entre los elementos pares e impares de φ'_n :

χ_{27}	2	4	8	10	14	16	20	22	26
$\varphi_{27} \setminus \chi_{27}$	25	23	19	17	13	11	7	5	1

$$\forall a \in \chi'_n, \exists! b \in \varphi'_n \setminus \chi'_n : a + b = n$$

$$\forall b \in \varphi'_n \setminus \chi'_n, \exists! a \in \varphi'_n : a + b = n$$

Por lo que ya habríamos demostrado la simetría ii) para $2 \nmid n$. Veámosla en general:

$$ii) \forall n \in \mathbb{Z}_{>2}, |\varphi_n| = 2|\gamma_n|$$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$f_{30}(m)$	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16

Donde estamos considerando la misma regla de asignación para $f_n(m)$. Notemos que, aquí, la unión del dominio y el codominio no es igual a todos los enteros menores que n , sino que se excluye $\frac{n}{2}$ cuando $2 \mid n$, lo cual no afectará al cómputo ni a la relación entre φ_n y γ_n , porque

$$2 \mid n \wedge n > 2 \implies \text{mcd}(n, \frac{n}{2}) > 1 \implies \frac{n}{2} \notin \varphi'_n$$

$$\forall m \in [1, \frac{n}{2}) \cap \mathbb{Z}^+, (2m < n \wedge \frac{n}{2} < f_n(m) < n) \wedge (m \in \gamma'_n \iff f_n(m) \in \varphi'_n \setminus \gamma'_n)$$

$$|\gamma'_n| + |\varphi'_n \setminus \gamma'_n| = |\gamma'_n| + (|\varphi'_n| - |\gamma'_n|) = |\varphi'_n| \wedge |\gamma'_n| = |\varphi'_n \setminus \gamma'_n| \implies |\varphi'_n| = 2|\gamma'_n|$$

5.2. Software

<https://aidanLorenzo.github.io>

<https://github.com/aidanLorenzo/aidanLorenzo.github.io>

Índice

1. Introducción	1
2. Primera Construcción	1
2.1. Definición de la Construcción	1
2.2. Una Familia de Sucesiones Recurrentes: $c_i(x)$	2
2.3. Estudio de $p(x)$: Condiciones de Cierre Total	6
2.4. Condiciones de Cierre Parcial: Estudio de $k_{i_0}(x, y)$	7
3. Segunda Construcción	9
3.1. Definición de la Construcción	9
3.2. Estudio de $r'(x)$	10
3.3. Estudio de $q(x)$	10
4. Integración de las Construcciones	11
4.1. Teoremas de Integración	11
4.1.1. Distribución de Figuras y Función Totiente	11
4.1.2. Homología y Unicidad de Figuras Finitas y Cerradas	13
4.1.3. Radio Mínimo Relativo (RMR)	15
4.1.4. Relación entre RMR de Figuras Homólogas	17
4.1.5. Monogeneradores y Bigeneradores	18
4.2. Diagramas	19
5. Apéndice	20
5.1. Demostración del Lema de Simetrías	20
5.2. Software	21