Dos Construcciones Geométricas Iterativas

Aidan Lorenzo

Noviembre 2024

1. Introducción

En este trabajo se desarrolla una doble generalización de la Espiral de Teodoro (véase la Figura 9 en la página siguiente). Por una parte generalizamos el ángulo de formación de nuevos triángulos: en la mencionada Espiral, el ángulo empleado es $\frac{\pi}{2}$, a fin de que, por el Teorema de Pitágoras, la distancia del centro a cada punto sea $\sqrt{n}$.

Por otra parte, ampliaremos esta construcción a bloques no triangulares, y demostraremos algunos teoremas que describen la relación entre los comportamientos de ambas construcciones geométricas iterativas. Conectaremos, además, nociones de Teoría de Números, al introducir la función totiente de Euler y demostrar algunas simetrías que rijen y sirven de Lema.

2. Primera Construcción

2.1. Definición de la Construcción

Definición 1.1. Sea $x \in (0, \pi) = X$ un *ángulo de formación* en su *dominio de generación.*

Definición 1.2. Llamaremos *bloque fundamental* al triángulo de lados a_i, b_i y c_i, tales que

$$\forall i \in \mathbb{Z}^+, a_i = 1 \text{ y } b_1 = 1$$

y O el *centro* de la figura, que es la intersección de b_i y c_i. x es el ángulo que separa a_i y b_i.

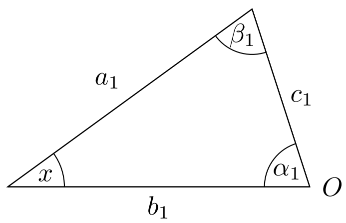


Figura 1: Triángulo Primero.

Definición 1.3. Sea T_x la figura generada por el ángulo x yuxtaponiendo bloques fundamentales mediante la siguiente regla:

$$b_i = c_{i-1}$$

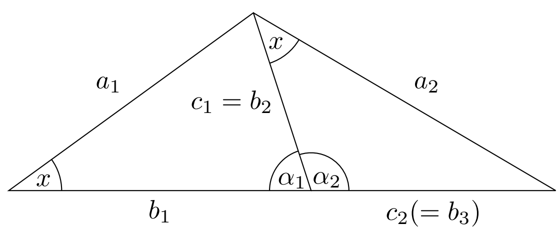


Figura 2: Los dos primeros bloques de T_{36°.

Definición 1.4. Sea $c_i(x)$ la longitud del segmento c_i de T_x.

2.2. Estudio de convergencia

Proposición 1.1.

$$c_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ \sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1}\cos x} & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

Demostración. Por el Teorema del Coseno y las definiciones anteriores tenemos:

$$c_i^2(x) = a_i^2 + b_i^2 - 2a_ib_i\cos x \iff c_i(x) = \sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1}\cos x}$$

La función está definida de forma recurrente, por lo que necesitamos un valor inicial de definición:

$$b_i = c_{i-1} \wedge b_1 = 1 \implies c_0 = 1$$

Proposición 1.2.

$$i)\ \lim_{i\to\infty} c_i(x) = \infty \iff \cos(x) \leq 0 \iff x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$$

$$ii)\ \lim_{i\to\infty} (c_i(x) - c_{i-1}(x)) = |\cos(x)| \iff \cos(x) < 0 \iff x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$$

$$iii)\ \lim_{i\to\infty} c_i(x) = \frac{1}{2\cos(x)} \iff \cos(x) > 0 \iff x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

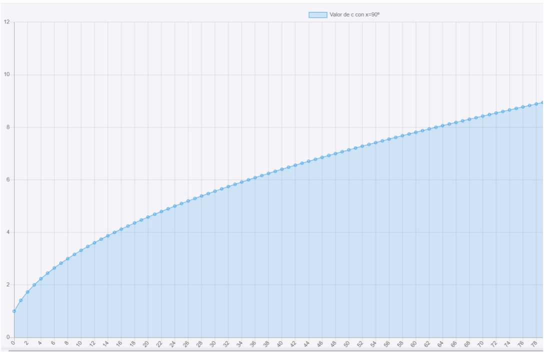


Figura 3: $c_i(\frac{\pi}{2})$

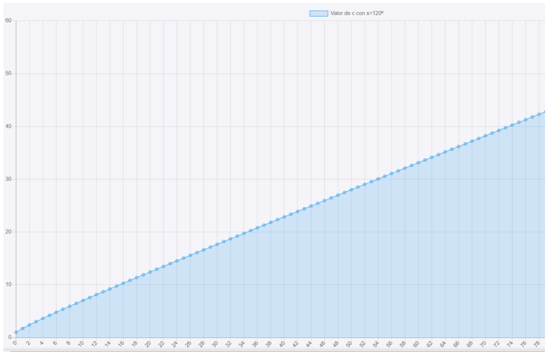


Figura 4: $c_i(\frac{2}{3}\pi)$

Demostración. Notemos primero que, por construcción, $c_i(x) > 0$, pues refiere a la longitud de un segmento.

Probemos i). Veamos que las funciones asociadas a ángulos x con coseno negativo o nulo son monótonamente crecientes.

$$\forall i \in \mathbb{Z}^+ \forall x \in X, c_i(x) > 0 \wedge \cos(x) \leq 0 \implies c_i(x) > c_{i-1}(x)$$

ya que

$$\sqrt{1 + c_{i-1}^2 + 2c_{i-1}|\cos(x)|} > c_{i-1} \iff 2c_{i-1}|\cos(x)| > -1$$

lo cual se cumple siempre. Además, la sucesión no está acotada superiormente; entonces, diverge.

Además, $c_i(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{i}$. Falta demostrar la convergencia de la serie para $\cos(x) > 0$. Estudiemos cómo se comporta la función para distintos intervalos de X_1 a través de la visualización de los correspondientes gráficos. Notemos que $c_i(\frac{\pi}{3}) = 1, \forall i \in \mathbb{Z}^+$, por lo que sólo tenemos la demostración analítica correspondiente al caso trivial donde la sucesión es constante, porque

$$c_1(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{2 - 2\cos(\frac{\pi}{3})} = \sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1$$

y así vemos que cada vez que sea evaluada dará 1. Esto es equivalente a decir que los bloques serán triángulos equiláteros.

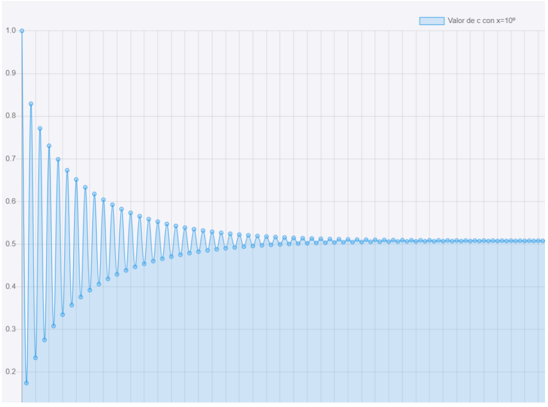


Figura 5: $c_i(x)$ para $x \in (0, \frac{\pi}{4})$

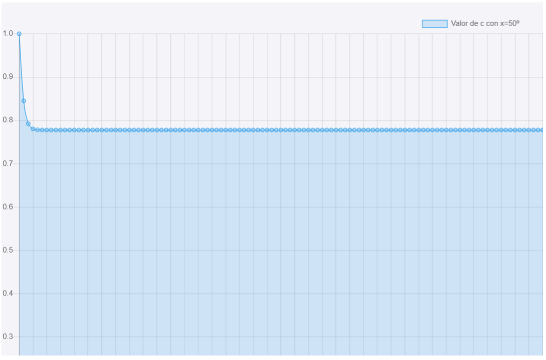


Figura 6: $c_i(x)$ para $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$

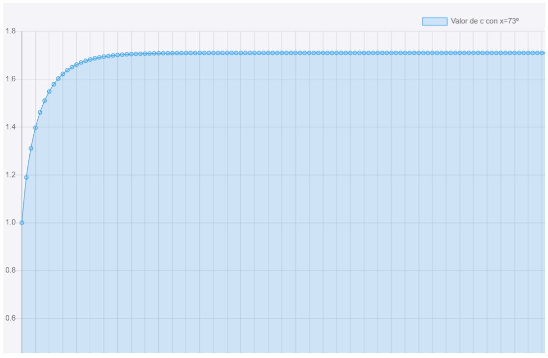


Figura 7: $c_i(x)$ para $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

Definición 2.1. Llamaremos *dominio de convergencia* al intervalo $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, para el cual

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}) \iff cos(x) > 0 \iff c_i(x) \text{ converge}$$

Definición 2.2. Análogamente, llamaremos *dominio de no convergencia* al intervalo $X_2 = [\frac{\pi}{2}, \pi)$, para el cual

$$x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \iff \cos(x) \leq 0 \iff \lim_{i \to \infty} c_i(x) = \infty$$

Definición 2.3 Sea $r(x) = \frac{1}{2\cos(x)}$ la función *radio*, $\forall x \in X_1$

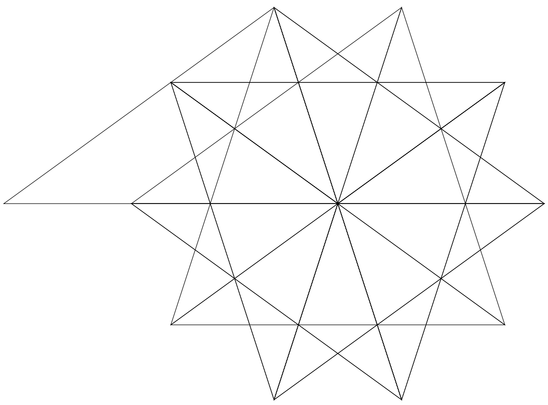


Figura 8: T_{36°

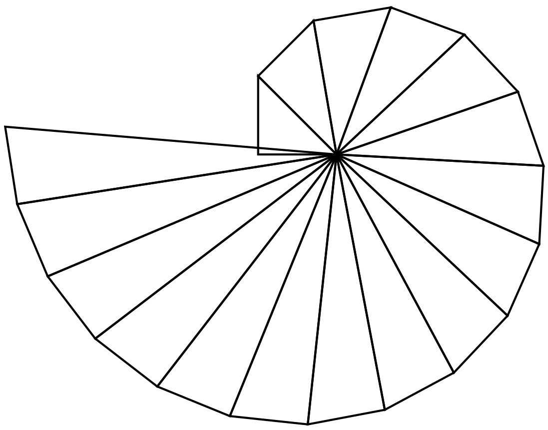


Figura 9: T_{90° (Espiral de Teodoro)

2.3. Estudio de una función: $p(x)$

Definición 3.1.
Sea $\varphi_n = |\{\frac{m}{n}\pi : m \in \mathbb{Z^+}_{<n} \wedge mcd(m,n) = 1\}|$ y $\varphi'_n = |\{m \in \mathbb{Z^+}_{<n} : mcd(m,n) = 1\}|$

Definición 3.2.
Sea $\gamma_n = |\{\frac{m}{n}\pi : 2m < n \wedge m \in \mathbb{Z}^+ \wedge mcd(m,n) = 1\}|$ y $\gamma'_n = |\{m \in \mathbb{Z}^+ : 2m < n \wedge mcd(m,n) = 1\}|$

Definición 3.3.
$\chi_n = |\{\frac{m}{n}\pi : m \in \mathbb{Z^+}_{<n} \wedge mcd(m,n) = 1 \wedge 2 \mid m\}|$, $\chi'_n = |\{m \in \mathbb{Z^+}_{<n} : mcd(m,n) = 1 \wedge 2 \mid m\}|$

Observación 1. Trivialmente, $|\varphi_n| = |\varphi'_n|, |\gamma_n| = |\gamma'_n|$ y $|\chi_n| = |\chi'_n|$.

Definición 4.1. Sea $p : X_1 \to \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ la función $p(x) = |\{P \in F_x : |\overline{OP}| = r(x)\}|$.

Teorema 1.1. Valor de la función $p(x)$

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff \begin{cases} 2 \nmid n \iff p(x) = 2n \\ 4 \mid n \iff p(x) = n \\ 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \implies p(x) = \frac{1}{2}n \end{cases}$$

Demostración. Notemos primero que, si $c_i(x)$ converge, lo hace también $c_{i-1}(x)$, que por la Definición 1.3, es igual a b_i, lo que implica que los bloques serán triángulos isósceles. Siendo O el vértice que une estos dos segmentos, y α_i el ángulo central, vemos que α_i también converge. Por la relación de ángulos de un triángulo, $\alpha = \pi - 2x$.

Ahora establecemos la condición de cierre: evaluemos si existe un número finito de bloques la suma de cuyos ángulos centrales α constantes sea $v \cdot 2\pi$ para algún $v \in \mathbb{Z}^+$:

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff x = \frac{m}{n}\pi \iff \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2n}{n-2m} \iff \exists k, v \in \mathbb{Z}^+ : mcd(k,v) = 1 \wedge k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi$$

Esto significa que, tras k triángulos isósceles constantes, los nuevos triángulos se dibujarán sobre otros ya existentes, al ser α constante. Ahora, para conocer el valor de k en función de x, haremos lo siguiente:

$$k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi \iff \frac{k}{v} = \frac{2n}{n-2m}$$

Para igualar k al numerador de la expresión hay que estudiar qué valores de m y n generan una fracción irreductible.

- $2 \nmid n \wedge 1 = \text{mcd}(n,m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(n, n-2m) = \text{mcd}(2n, n-2m) = 1$
- $4 \mid n \wedge 1 = \text{mcd}(n,m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(n, n-2m) = \text{mcd}(2n, n-2m) = 2$
- $2 \mid n \wedge 4 \nmid n \wedge 1 = \text{mcd}(n,m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(n, n-2m) = 2 \implies \text{mcd}(2n, n-2m) = 4$

En consecuencia tenemos que

- $2 \nmid n \implies \text{mcd}(2n, n-2m) = 1 \implies k(x) = 2n$
- $4 \mid n \implies \text{mcd}(2n, n-2m) = 2 \implies \text{mcd}\left(n, \frac{n-2m}{2}\right) = 1 \implies k(x) = n$
- $2 \mid n \wedge 4 \nmid n \implies \text{mcd}(2n, n-2m) = 4 \implies \text{mcd}\left(\frac{n}{2}, \frac{n-2m}{4}\right) = 1 \implies k(x) = \frac{n}{2}$

Falta ver que el valor $k(x)$, cuya expresión acabamos de encontrar, coincide con $p(x)$, objeto de este Teorema.

i	1	2	3	4	5	6	...	$k-1$	k
$\sum_{j=1}^{i} p_j$	2	3	4	5	6	7	...	k	k

Habiendo notado que los bloques son triángulos isósceles, donde $c_i = b_i = r(x)$, vemos que el primer bloque aportará 2 nuevas puntas a la figura; a partir de éste, cada nuevo triángulo aportará 1 punta nueva, pues compartirá una con el bloque anterior; finalmente, el último bloque no añade ninguna punta más a la figura, pues une dos ya existentes: las del primer y penúltimo bloque.

Corolario 1.1.

$$\nexists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff \frac{m}{n} \notin \mathbb{Q} \iff p(\frac{m}{n}\pi) = \infty$$

Demostración. Si x no es una fracción racional de π, $\nexists k, v \in \mathbb{Z}^+ : k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi$, lo que se traduce en que nunca se llega a cerrar la figura tras un número finito de bloques.

Corolario 1.2.

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff \begin{cases} 2 \nmid n \iff v(x) = n - 2m \\ 4 \mid n \iff v(x) = \frac{n-2m}{2} \\ 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \implies v(x) = \frac{n-2m}{4} \end{cases}$$

Definición 4.2. Sea $p^{-1}(p) = \{x \in X_1 : p(x) = p\}, \forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ el conjunto antiimagen de la aplicación explicada en la Definición 3.1, y $f(p) \coloneqq |p^{-1}(p)|$ la cantidad de ángulos de formación para los cuales su número de puntas es p.

Definición 5.1. Sea $\varphi(n) = |\varphi_n|$ la función totiente de Euler.

Lema Único. Simetrías de φ_n

$$i)\ \forall n \in \mathbb{Z}_{>2},\ |\varphi_n| = 2|\chi_n|$$
$$ii)\ \forall n \in \mathbb{Z}_{>2} : 2 \nmid n \iff |\varphi_n| = 2|\gamma_n|$$
$$iii)\ \forall n \in \mathbb{Z}_{>2} : 2 \nmid n \iff \varphi(2n) = \varphi(n)$$

La demostración de este Lema puede hallarse en el Apéndice.

Teorema 1.2. Inversa de $p(x)$ y Función Totiente

$$\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3},\ f(p) = \frac{\varphi(p)}{2}$$

Demostración. Veamos primero qué denominador n causará que la figura tenga p puntas, siguiendo el Teorema 1.1:

$$\begin{cases} 2 \nmid p \iff n = 2p \\ 4 \mid n \iff n = p \\ 2 \mid p \wedge 4 \nmid p \iff n = \frac{1}{2}p \end{cases} \implies p^{-1}(p) = \gamma_n = \begin{cases} \gamma_{2p} \iff 2 \nmid p \\ \gamma_n \iff 4 \mid p \\ \gamma_{\frac{p}{2}} \iff 2 \mid p \wedge 4 \nmid p \end{cases}$$

Es decir, el conjunto de las x para las cuales $p(x) = p$ son los ángulos $x \in X_1$ con denominador entero positivo n, dependiente de la paridad de p, y numerador también entero positivo y coprimo respecto a n. Esto es lo que representa, por construcción, el conjunto γ_n introducido en la Definición 4.2.

Siguiendo el Lema de Simetrías y la Definición 5.1:

$$p^{-1}(p) = \gamma_n \iff |p^{-1}(p)| = f(p) = |\gamma_n| = \frac{\varphi(n)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(2p) \iff 2 \nmid p \\ \frac{1}{2}\varphi(p) \iff 4 \mid p \\ \frac{1}{2}\varphi(\frac{p}{2}) \iff 2 \mid p \wedge 4 \nmid p \end{cases} = \frac{\varphi(p)}{2}$$

2.4. Extensión de $p(x)$

Definición 6.1. Sea $k : X \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ la función

$$k(x, y) = k \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x) + (k - \lfloor k \rfloor)\alpha_{\lfloor k \rfloor + 1}(x) = y$$

Proposición 2.1.

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff p(x) = k(x, 2\pi v(x))$$

Demostración. Por el Teorema 1.1. y la Definición 6.1. vemos lo siguiente:

$$p(x) = k \iff \exists k, v \in \mathbb{Z}^+ : k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi \wedge mcd(k, v) = 1$$

$$k(x, y) = k \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x) + (k - \lfloor k \rfloor)\alpha_{\lfloor k \rfloor + 1}(x) = y$$

En el dominio de convergencia, para $k \in \mathbb{Z}^+$:

$$k(x, 2\pi v(x)) = k \iff \sum_{i=1}^{k} \alpha(x) = y \iff k \cdot \alpha = 2\pi v(x)$$

Teorema 2.1. Espirales Únicas

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 3}, \exists! x \in X : k(x, 2\pi) = k$$

Demostración. Veamos que la función $k(x, 2\pi)$ es inyectiva:

$$1.\ \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \implies c_i(x_1) < c_i(x_2)$$

En $i = 0$, $c_0(x_1) = c_0(x_2) = 1$. Luego:

$$x_1 < x_2 \implies c_1(x_1) = \sqrt{2(1 - \cos(x_1))} < \sqrt{2(1 - \cos(x_2))} = c_1(x_2) \iff \cos(x_1) > \cos(x_2)$$

Lo cual es cierto si y sólo si $x_1, x_2 \in (0, \pi) = X$. Para el resto de valores de i hacemos lo siguiente:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : a < b \implies \sqrt{1 + a^2 - 2a\cos x_1} < \sqrt{1 + b^2 - 2b\cos(x_2)} \iff a(a - 2\cos(x_1)) < b(b - 2\cos(x_2))$$

Por hipótesis tenemos que $a < b$, así que veamos que $a - 2\cos(x_1) < b - 2\cos(x_2)$. Con la misma lógica, $a < b$, así que basta ver que $2\cos(x_1) > 2\cos(x_2)$, lo cual acabamos de ver en el caso $i = 0$:

$$2.\ \forall x_1, x_2 \in X : c_i(x_1) < c_i(x_2) \implies \alpha_i(x_1) > \alpha_i(x_2)$$

Comprobémoslo para la primera iteración de dos construcciones cualesquiera:

$$\alpha_1(x_1) > \alpha_1(x_2) \iff \arccos\left(\frac{1^2 + c_1^2(x_1) - 1}{2 \cdot 1 \cdot c_1(x_1)}\right) > \arccos\left(\frac{1^2 + c_1^2(x_2) - 1}{2 \cdot 1 \cdot c_1(x_2)}\right) \iff \frac{c_1(x_1)}{2} < \frac{c_1(x_2)}{2}$$

$$\arccos\left(\frac{c_i(x_1)^2 + c_{i-1}(x_1)^2 - 1}{2c_i(x_1)c_{i-1}(x_1)}\right) > \arccos\left(\frac{c_i(x_2)^2 + c_{i-1}(x_2)^2 - 1}{2c_i(x_2)c_{i-1}(x_2)}\right) \iff$$

$$\frac{c_i(x_1)^2 + c_{i-1}(x_1)^2 - 1}{c_i(x_1)c_{i-1}(x_1)} < \frac{c_i(x_2)^2 + c_{i-1}(x_2)^2 - 1}{c_i(x_2)c_{i-1}(x_2)} \iff$$

$$\frac{(\sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1}\cos(x_1)})^2 + c_{i-1}^2 - 1}{c_i(x_1)c_{i-1}(x_1)} < \frac{(\sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1}\cos(x_2)})^2 + c_{i-1}^2 - 1}{c_i(x_2)c_{i-1}(x_2)} \iff$$

$$\frac{c_{i-1}(x_1) - \cos(x_1)}{c_i(x_1)} < \frac{c_{i-1}(x_2) - \cos(x_2)}{c_i(x_2)}$$

3. $\forall k \in \mathbb{R}^+ \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \implies \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x_1) + (k - \lfloor k \rfloor)\alpha_{\lfloor k \rfloor}(x_1) > \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x_2) + (k - \lfloor k \rfloor)\alpha_{\lfloor k \rfloor}(x_2)$

4. $\forall x_1, x_2 \in X \ \forall y \in \mathbb{R}^+ : x_1 < x_2 \implies k(x_1, y) < k(x_2, y)$

Consideremos $k(x_2, y) = k_2 \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k_2 \rfloor} \alpha_i(x_2) + (k_2 - \lfloor k_2 \rfloor)\alpha_{\lfloor k_2 \rfloor}(x_2) = y$. *Entonces:*

$$\sum_{i=1}^{\lfloor k_2 \rfloor} \alpha_i(x_1) + (k_2 - \lfloor k \rfloor)\alpha_{\lfloor k_2 \rfloor}(x_1) > y$$

Por lo que, necesariamente, $k(x_1, y) = k_1 < k_2 = k(x_2, y)$. *Basándonos en este principio:*

5. $\forall x_1, x_2 \in X \ \forall y \in \mathbb{R}^+, \exists k \in \mathbb{Z}^+ : k(x_1, y) < k < k(x_2, y) \implies \exists! x_m \in X : x_1 < x_m < x_2 \wedge k(x_m, y) = k$

Así, si conocemos $k(x, y)$, *podemos usar su crecimiento monótono para encontrar aquellos ángulos únicos* x_m *tales que* $k(x_m, y) \in \mathbb{Z}^+$.

En la Figura 4 se aprecian 17 *bloques de la figura infinita* T_{90°. *Se ve que la suma de sus ángulos internos* $\alpha_i(90^\circ)$ *es mayor a* 2π, *y que la suma de los* 16 *primeros es menor a* 2π. *En consecuencia, sabemos que la parte entera de* $k(90^\circ, 360^\circ) = k \in \mathbb{R}^+$ *es* 16. *En general:*

$$\lfloor k(x, y) \rfloor = n \in \mathbb{Z}^+ \iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) < y < \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(x)$$

$$k(x, y) = k \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x) + (k - \lfloor k \rfloor)\alpha_{\lfloor k \rfloor + 1}(x) = y \iff k = \lfloor k \rfloor + \frac{y - \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x)}{\alpha_{\lfloor k \rfloor + 1}(x)}$$

Ya podemos computar con facilidad la función $k(x, y)$ *para todas* $(x, y) \in X \times \mathbb{R}^+$. *En particular,* $k(90^\circ, 360^\circ) \approx 16{,}649128$, *y* $k(91^\circ, 360^\circ) \approx 17{,}445935$. *Apliquemos el punto* 5*:*

$$k(90^\circ, 360^\circ) < 17 < k(91^\circ, 360^\circ) \implies \exists! x_m \in (90^\circ, 91^\circ) : k(x_m, 360^\circ) = 17$$

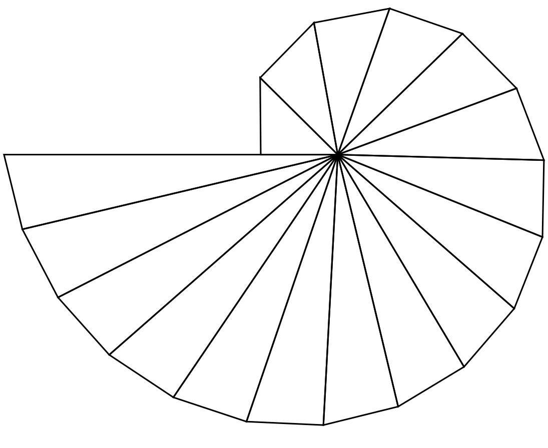


Figura 10: 17 bloques de $T_{x=90{,}45332215^\circ}$

$k \in \mathbb{Z}^+$	x°
3	19.019079333
6	60
9	74.15292718
12	82.2524055
16	89.13404388
17	90.45332215
18	91.65964018
19	92.76863062
20	93.79304858
21	94.74341811
60	110.8178438
450	128.8014110

Figura 11: $\{(k, x) : k(x, 2\pi) = k\}$

Corolario 2.

$$i)\ |\{x_1 \in X_1 : k(x_1, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+\}| = 14$$

$$ii)\ |\{x_2 \in X_2 : k(x_2, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+\}| = \infty$$

Es decir, que hay número finito de $x_1 \in X_1$ que exhiben este comportamiento inyectivo respecto a la aplicación $k(x, 2\pi)$, mientras que existen infinitos ángulos $x_2 \in X_2$ para los cuales $k(x_2, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+$

Conjetura 1.

$$\forall x \in X \setminus \{\frac{\pi}{3}\} : k(x, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+ \implies \nexists n : x \in \gamma_n$$

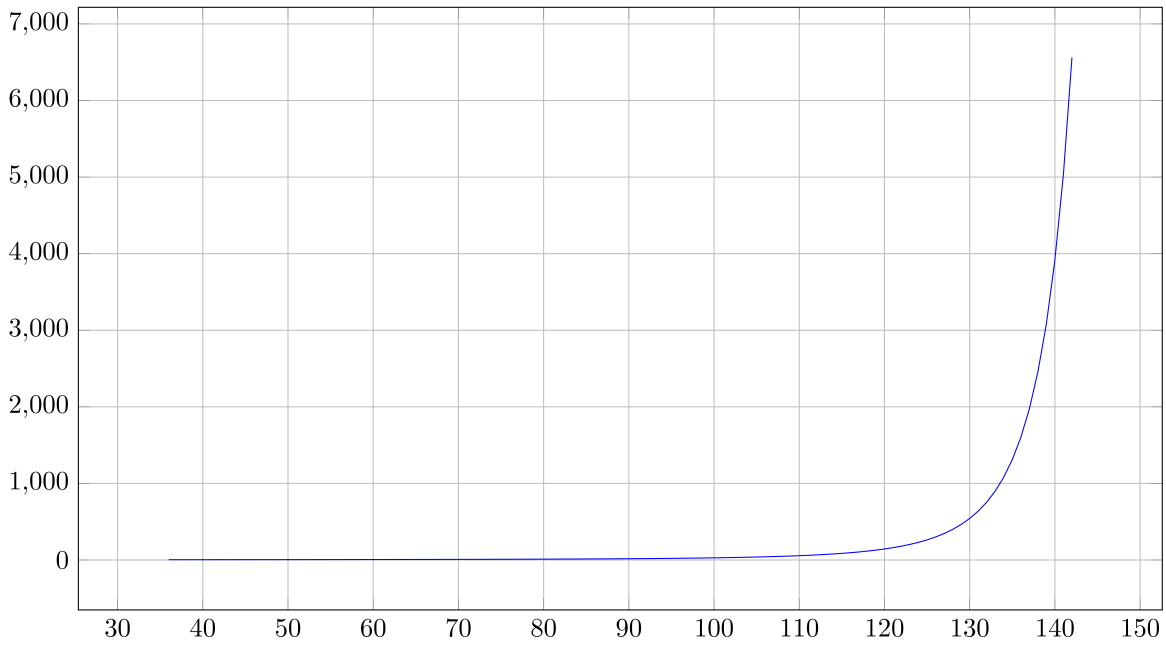


Figura 12: Gráfico de $k(x, 2\pi)$.

Concluímos así que ésta es una función de crecimiento exponencial.

3. Segunda Construcción

3.1. Definición de la Construcción

Definición 7.1. En este caso, el *bloque fundamental* será el paralelogramo equilátero de lados a_i, b_i, c_i y d_i tales que

$$a_i = b_i = c_i = d_i = \lambda \in \mathbb{R}^+$$

y x el ángulo que se forma entre a_i y b_i (también entre c_i y d_i)

Definición 7.2. Sea P_x la figura generada yuxtaponiendo bloques mediante la misma regla que T_x, y O el centro de la figura:

$$b_i = c_{i-1}$$

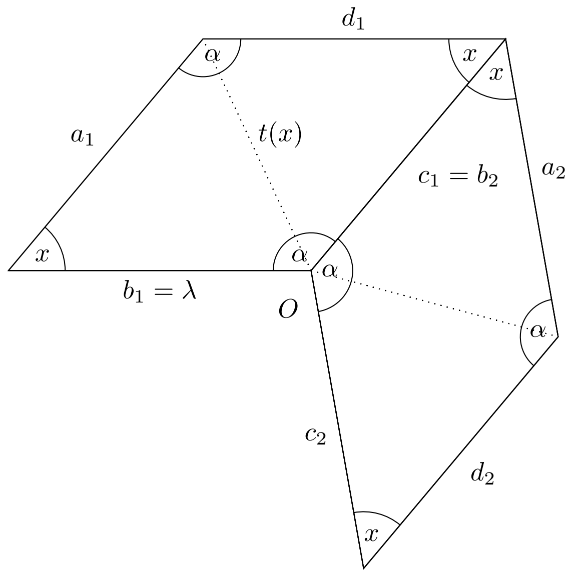


Figura 13: Dos primeros bloques de P_{50°.

Definición 7.3. Sea $r'(x) \coloneqq \text{máx}(\lambda, t(x)), \forall x \in X$, donde $t(x)$ es la distancia entre los vértices opuestos cuyos ángulos son α.

3.2. Función homóloga a $p(x) : q(x)$

Proposición 3.1.

$$r'(x) = \begin{cases} \lambda & \text{si } 0 < x \leq \frac{\pi}{3} \\ \lambda\sqrt{2(1-\cos x)} & \text{si } \frac{\pi}{3} < x < \pi \end{cases}$$

Demostración. Por el Teorema del Coseno, tenemos que:

$$t^2(x) = a^2 + b^2 - 2ab\cos x \iff t(x) = \sqrt{2\lambda^2 - 2\lambda^2\cos(x)} = \sqrt{2\lambda^2(1-\cos(x))} = \lambda\sqrt{2(1-\cos(x)}$$

Luego:

$$\begin{cases} r'(x) = \lambda \iff \text{máx}(\lambda, \lambda\sqrt{2(1-\cos x)}) = \lambda \iff \lambda \geq \lambda\sqrt{2(1-\cos(x)} \iff \cos x \geq \frac{1}{2} \iff x \in (0, \frac{\pi}{3}] \\ \\ r'(x) = \lambda\sqrt{2(1-\cos x)} \iff \lambda < \lambda\sqrt{2(1-\cos(x)} \iff \cos x < \frac{1}{2} \iff x \in (\frac{\pi}{3}, \pi) \end{cases}$$

Por lo que vemos que todas las figuras generadas por esta segunda construcción tendrán un radio real.

Definición 8.1. Sea $q : X \to \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ la función $q(x) = |\{S \in P_x : |\overline{OS}| = r'(x)\}|$

Teorema 3.1. Función $q(x)$

$$i)\ \forall n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{3\}, x \in \varphi_n \iff \begin{cases} q(x) = 2n \iff 2 \mid n \vee 2 \mid m \\ \\ q(x) = n \iff 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \end{cases} \qquad ii)\ q(\frac{1}{3}\pi) = 2n = 6$$

Demostración. Por la relación de ángulos de un cuadrilátero, $2\alpha + 2x = 2\pi \iff \alpha = \pi - x$. *Procedamos ahora de la misma manera que en el Teorema 1.1:*

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \varphi_n \iff x = \frac{m}{n}\pi \wedge m < n \iff \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2n}{n-m} \iff$$
$$\iff \exists k, v \in \mathbb{Z}^+ : mcd(k, v) = 1 \wedge k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi \iff \frac{k}{v} = \frac{2n}{n-m}$$

- $(2 \mid n \vee 2 \mid m) \wedge 1 = mcd(n, m) = mcd(n, n-m) \implies mcd(2n, n-m) = 1 \implies k(x) = 2n$
- $2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \wedge 1 = mcd(n, m) = mcd(n, n-m) \implies mcd(2n, n-m) = 2 \implies k(x) = n$

Veamos ahora la relación entre $q(x)$ *y* $k(x)$*:*

$$r'(x) = \lambda \iff x \in (0, \tfrac{\pi}{3}) \iff$$

i	1	2	3	4	5	6	...	$k-1$	k
$\sum_{j=1}^{i} q_j$	2	3	4	5	6	7	...	k	k

$$r'(x) = \lambda\sqrt{2(1 - \cos(x))} \iff$$

i	1	2	3	4	5	6	...	$k-1$	k
$\sum_{j=1}^{i} q_j$	1	2	3	4	5	6	...	$k-1$	k

$$x = \tfrac{\pi}{3} \iff$$

i	1	2	3
$\sum_{j=1}^{i} q_j$	3	5	6

Cuando $r'(x) = \lambda$*, el primer bloque aporta dos puntas, porque tiene dos segmentos con esa longitud:* $b_1 = \lambda = c_1$*. En cambio, para* $r'(x) = t(x)$*, el primer bloque contiene únicamente un segmento desde* O *con longitud* $t(x) = \lambda\sqrt{2(1 - \cos(x))}$*. En el caso singular* $x = 60°$ *se da que los bloques son triángulos equiláteros.*

Corolario 3.1.

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, x \in \varphi_n \iff \begin{cases} (2 \mid n \vee 2 \mid m) \iff v'(x) = n - m \\ \\ 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff v'(x) = \frac{n-m}{2} \end{cases}$$

En la Sección de Relaciones entre Construcciones estudiaremos esta función.

Corolario 3.2.

$$\nexists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \varphi_n \iff \frac{m}{n} \notin \mathbb{Q} \iff q(\frac{m}{n}\pi) = \infty$$

Definición 8.2. Sea $q^{-1}(q) = \{x \in X : q(x) = q\}$ el conjunto antiimagen de la función $q(x)$, y $g(q) \coloneqq |q^{-1}(q)|$

4. Relaciones entre las Construcciones

4.1. Teoremas de Equivalencias

Teorema 4.1. Primer Teorema de Equivalencias

$$i)\ \forall p, q \in \mathbb{Z}_{>3} \setminus \{6\},\ p = q \implies f(p) = g(q)$$
$$ii)\ \forall p \in \mathbb{Z}_{>3} \setminus \{6\},\ f(p) + g(p) = \varphi(p)$$
$$iii)\ f(6) + g(6) = 3 = \varphi(6) + 1$$

Demostración. Por el Teorema 1.2. tenemos que $f(p) = \frac{\varphi(p)}{2}$*, así que veremos*

$$f(p) + g(p) = \varphi(p) \iff g(p) = \frac{\varphi(p)}{2} \iff f(p) = g(p)$$

viendo que $g(p) = \frac{\varphi(p)}{2}$*. Estudiemos las condiciones de* q *para conocer los denominadores y numeradores* m *y* n *para los cuales* $q(\frac{m}{n}\pi) = q$*:*

$$\begin{cases} 2 \nmid n \wedge 2 \mid m \iff n = \frac{q}{2} \wedge 2 \mid m \iff 2 \mid q \wedge 4 \nmid q \\ 2 \mid n \wedge 2 \nmid m \iff n = \frac{q}{2} \wedge 2 \nmid m \iff 4 \mid q \\ 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff n = q \wedge 2 \nmid m \iff 2 \nmid q \end{cases} \implies q^{-1}(q) = \begin{cases} \chi_{\frac{q}{2}} \iff 2 \mid q \wedge 4 \nmid q \\ \varphi_{\frac{q}{2}} \iff 4 \mid q \\ \varphi_q \setminus \chi_q \iff 2 \nmid q \end{cases}$$

Luego, siguiendo el Lema de Simetrías:

$$|q^{-1}(q)| = g(q) = \begin{cases} \varphi(q) - |\chi_q| = \frac{1}{2}\varphi(q) \iff 2 \nmid q \\ \varphi(\frac{q}{2}) \iff 4 \mid q \\ |\chi_{\frac{q}{2}}| = \frac{1}{2}\varphi(\frac{q}{2}) \iff 2 \mid q \wedge 4 \nmid q \end{cases} = \frac{\varphi(q)}{2}$$

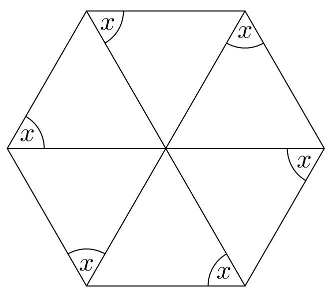


Figura 14: T_{60°

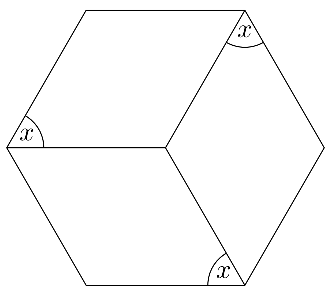


Figura 15: P_{60°

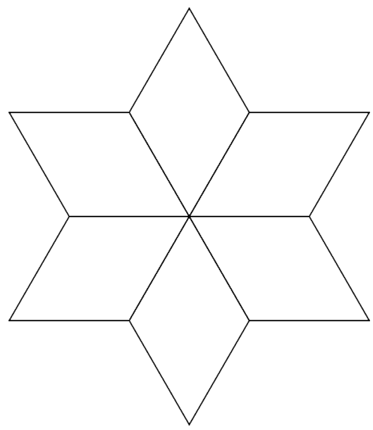


Figura 16: P_{120°

Definición 9.1.

- $T_x \sim_p P_x \iff p(x) = q(x) \wedge v(x) = v'(x)$
- $T_{x_1} \sim_p T_{x_2} \iff p(x_1) = p(x_2) \wedge v(x_1) = v(x_2)$
- $P_{x_1} \sim_p P_{x_2} \iff q(x_1) = q(x_2) \wedge v'(x_1) = v'(x_2)$

Definición 9.2.

- $T_x \sim_k P_x \iff k(x) = k'(x) \wedge v(x) = v'(x)$
- $T_{x_1} \sim_k T_{x_2} \iff k(x_1) = k(x_2) \wedge v(x_1) = v(x_2)$
- $P_{x_1} \sim_k P_{x_2} \iff k'(x_1) = k'(x_2) \wedge v'(x_1) = v'(x_2)$

Teorema 4.2. Segundo Teorema de Equivalencias

$$i)\ \forall x \in X,\ T_x \sim_p P_x \iff x = \frac{\pi}{3}$$
$$ii)\ \forall x_t, x_p \in X,\ T_{x_t} \sim_k P_{x_p} \iff 2x_t = x_p$$
$$iii)\ \forall x_1, x_2 \in X_1,\ T_{x_1} \sim_p T_{x_2} \iff T_{x_1} \sim_k T_{x_2} \iff x_1 = x_2$$
$$iv)\ \forall x_1, x_2 \in X,\ P_{x_1} \sim_k P_{x_2} \iff x_1 = x_2$$
$$v)\ \forall x_1, x_2 \in X, P_{x_1} \sim_p P_{x_2} \iff x_1 = \frac{\pi}{3} \wedge x_2 = \frac{2}{3}\pi$$

Demostración. i) Veamos por separado qué valores de $x \in X$ permiten que $p(x) = q(x)$ y $v(x) = v'(x)$.

- 1. $p(x) = q(x) = 2n \iff 2 \nmid n \wedge (2 \mid n \vee 2 \mid m) \iff 2 \mid m \wedge 2 \nmid n \iff x \in \chi_n$
- 2. $p(x) = q(x) = n \iff 4 \mid n \wedge (2 \nmid n \wedge 2 \nmid m)$ es una contradicción
- 3. $p\left(\frac{\pi}{3}\right) = q\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6$

Por tanto, $p(x) = q(x) \iff 2 \mid m \wedge 2 \nmid n$. Luego:

- 4. $v(x) = v'(x) \wedge 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff \frac{n-m}{2} = n - 2m \iff 3m = n \iff \frac{m}{n} = \frac{1}{3}$
- 5. $v(x) = v'(x) \wedge 2 \nmid n \wedge 2 \mid m \iff n - 2m = n - m \iff m = 0 \iff x = 0 \notin X$
- 6. $v(x) = v'(x) \wedge 4 \mid n \wedge 2 \nmid m \iff \frac{n-2m}{2} = n - m \iff n - 2m = 2n - 2m \iff n = 0 \notin \mathbb{Z}_{\geq 2}$
- 7. $v(x) = v'(x) \wedge 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff \frac{n-2m}{4} = n - m \iff 3n = 2m \iff \frac{m}{n} = \frac{3}{2} \iff x \notin X$

Así vemos que $v(x) = v'(x) \iff x = \frac{\pi}{3}$. Además, y es un caso especial, $p(\frac{\pi}{3}) = q(\frac{\pi}{3}) = 6$.

$$ii)\ T_{x_t} \sim_k P_{x_p} \iff \frac{k}{v} = \frac{k'}{v'} \iff \frac{2n_t}{n_t - 2m_t} = \frac{2n_p}{n_p - m_p} \iff \frac{2m_t}{n_t} = \frac{m_p}{n_p} \iff 2x_t = x_p$$

Ya que $mcd(k, v) = mcd(k', v') = 1 \iff k = k' \wedge v = v'$.

$$iii)\ T_{x_1} \sim_p T_{x_2} \iff T_{x_1} \sim_k T_{x_2} \iff \frac{k_1}{v_1} = \frac{k_2}{v_2} \iff \frac{2n_1}{n_1 - 2m_1} = \frac{2n_2}{n_2 - 2m_2} \iff \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \iff x_1 = x_2$$

$$iv)\ P_{x_1} \sim_k P_{x_1} \iff \frac{k'_1}{v'_1} = \frac{k'_2}{v'_2} \iff \frac{2n_1}{n_1 - m_1} = \frac{2n_2}{n_2 - m_2} \iff \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \iff x_1 = x_2$$

Definición 10. Sean $x_t : \mathbb{Z}_{\geq 3} \times \gamma'_p \to X_1$ y $x_p : \mathbb{Z}_{\geq 3} \times \gamma'_q \to X$ las funciones

$$x_t(p, v) = x_t \iff p(x_t) = p \wedge v(x_t) = v$$
$$x_p(q, v') = x_p \iff q(x_p) = q \wedge v'(x_p) = v'$$

Proposición 4.

$$i)\ \forall (p,v) \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \times \gamma'_p,\ x_t(p,v) = \frac{p-2v}{2p}\pi \in X_1$$

$$ii)\ \forall (q,v') \in \mathbb{Z}_{>3} \times \gamma'_q,\ x_p(q,v') = \frac{q-2v'}{q}\pi \in X$$

Demostración. Veamos primero i)

$$\frac{p}{v} = \frac{2n}{n-2m} \iff p(n-2m) = 2nv \iff pn - 2pm = 2nv \iff n(p-2v) = 2pm \iff \frac{m}{n} = \frac{p-2v}{2p}$$

$$1.\ 2m < n \iff p - 2v < p \iff v > 0$$
$$2.\ p - 2v > 0 \iff 2v < p$$
$$3.\ p, v \in \mathbb{Z}^+ \wedge mcd(p,v) = 1$$

por lo que, en suma, $v \in \gamma'_p$. Esto reafirma el Teorema 1.2, porque

$$\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3} : v \in \gamma'_p \wedge |\gamma'_p| = \frac{\varphi(p)}{2}$$

$$ii)\ \frac{q}{v'} = \frac{2n}{n-m} \iff q(n-m) = 2nv' \iff qn - qm = 2nv' \iff n(q-2v') = qm \iff \frac{m}{n} = \frac{q-2v'}{q}$$

$$1.\ m < n \iff q - 2v' < q \iff v' > 0$$
$$2.\ q - 2v' > 0 \iff 2v' < p$$
$$3.\ q, v' \in \mathbb{Z}^+ \wedge mcd(q,v') = 1$$

En conclusión, análogamente, $v' \in \gamma'_q$, por lo que hemos hallado una vía de demostración del Primer Teorema de Equivalencias que no demanda ninguna información sobre χ_n.

Corolario 4.

$$\forall (p,v) \in \mathbb{Z}_{>3} \times \gamma_p : 2x_t(p,v) = x_p(p,v)$$

No es más que una reexpresión del apartado $ii)$ del Segundo Teorema de Equivalencias, y se sigue inmediatamente de la Proposición 4. Y es que $2x_t = x_p$ implica que los ángulos internos que se formarán serán iguales, por lo tanto será el mismo número de puntas y de vueltas el que satisfaga la condición de cierre.

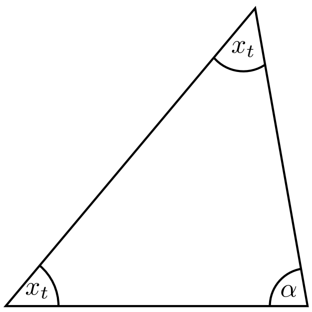


Figura 17: $x_t = 50°$

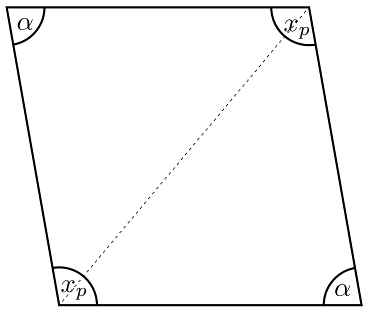


Figura 18: $x_p = 2x_t = 100°$

Observación 2.

$$\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3} : x_t(p,1) = x_t \iff T_{x_t} \text{ p-gono regular}$$

Definición 11. Sean $\varphi_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}} \varphi_n$ y $\gamma_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}} \gamma_n$

Definición 12. Sean $T \coloneqq \{T_x : x \in X_1 \cap \gamma_\infty\}$ y $P \coloneqq \{P_x : x \in X \cap \varphi_\infty\}$

Teorema 4.3. Tercer Teorema de Equivalencias

$$|T| = |P|$$

Demostración. Por definición de equipotencia, hallemos una función biyectiva que relacione ambos conjuntos. Siguiendo el Segundo Teorema de Equivalencias:

$$h(x_t) = x_p \iff T_{x_t} \sim_k P_{x_p} \iff 2x_t = x_p$$

Así vemos que la función escogida es inyectiva. Falta verificar su exhaustividad. Trivialmente:

1. $\forall x_p \in X \cap \varphi_\infty, \exists x_t \in X_1 \cap \gamma_\infty : h(x_p) = x_t$
2. $\forall x_t \in X_1 \cap \gamma_\infty, \exists x_p \in X \cap \varphi_\infty : h(x_t) = x_p$

Como la *función ángulo homólogo* h es biyectiva, existe su inversa:

$$h(x_t) = 2x_t,\ h^{-1}(x_p) = \frac{x_p}{2}$$

4.2. Radio Mínimo Relativo de una Figura

Definición 13.1. Sea $r_t : X_1 \times \mathbb{Z}^+ \to (0, r(x))$ la función radio generalizada para figuras T_x.

Definición 13.2. Sea $r_p : X \times \mathbb{Q}^+ \to (0, r'(x))$ la función radio generalizada para figuras P_x.

Proposición 5.1. Definición completa de r_t

$$r_t(x,n) = r(x)\frac{\sin(x)}{\sin(\frac{p(x)-n}{p(x)}\pi - x)}$$

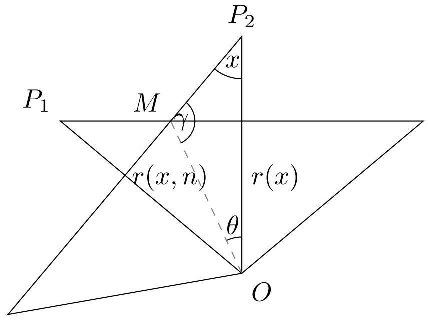


Figura 19: Disección de una construcción

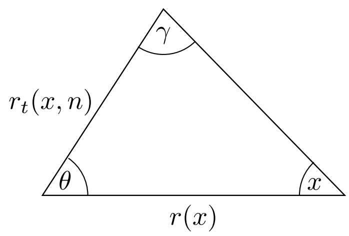


Figura 20: Triángulo auxiliar

Definimos el ángulo central θ como n medias partes de sección ($\frac{2\pi}{p(x)}$):

$$1.\ \theta(x,n) \coloneqq \frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{p(x)} = \frac{n\pi}{p(x)}$$

Por la relación fundamental de ángulos de un triángulo:

$$2.\ x + \gamma + \theta = \pi$$

Siguiendo el Teorema del Seno:

$$3.\ \frac{r_t(x,n)}{\sin x} = \frac{r(x)}{\sin\gamma} \iff r(x,n) = r(x)\frac{\sin x}{\sin\gamma}$$

Juntándolo todo:

$$4.\ r_t(x,n) = r(x)\frac{\sin x}{\sin(\pi - \theta - x)} = r(x)\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{p(x)-n}{p(x)}\pi - x\right)}$$

Proposición 5.2.

$$r(x, v(x)) = \min_{n\in(0,p(x))\cap\mathbb{Z}^+} r_t(x,n)$$

Demostración. La variable n sólo se halla presente en el denominador, por lo que hemos de hallar el valor de n para el cual éste denominador se maximiza; esto es, para el cual

$$\frac{p(x)-n}{p(x)}\pi - x = \frac{\pi}{2} \implies \sin\left(\frac{p(x)-n}{p(x)}\pi - x\right) = 1$$

Por la Proposición 4:

$$\frac{p(x)-n}{p(x)}\pi - x = \frac{p(x)-n}{p(x)}\pi - \frac{p(x)-2v(x)}{2p(x)}\pi = \frac{2(p(x)-n)-(p(x)-2v(x))}{2p(x)}\pi = \frac{2v(x)-2n+p(x)}{2p(x)}\pi$$

$$\frac{2v(x)-2n+p(x)}{2p(x)}\pi = \frac{\pi}{2} \iff n = v(x)$$

Corolario 5.1. Radio Mínimo Relativo para Primera Construcción

$$r_0(x) \coloneqq \frac{r_t(x, v(x))}{r(x)} = \sin(x)$$

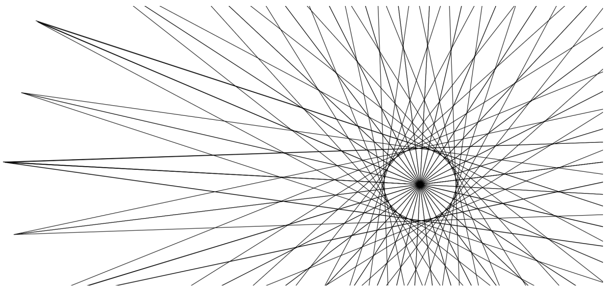


Figura 21: Zoom en T_{5°.

Esto significa que la función $\sin(x)$ representa el *radio mínimo relativo* de la figura generada por el ángulo x. En la Figura sería un 8,715 % del radio total, ya que $\sin(5^\circ) = 0{,}08715$.

Observación 3.

$$x_t = x_t(p,1) \iff r(x_t, v(x_t)) = a(p, r(x_t))$$

donde $a(p,r)$ es la apotema de un p-gono de radio r.

Proposición 6.1. Definición completa de r_p

$$r_p(x,n) = \begin{cases} r'(x)\frac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{q(x)-n}{q(x)}\pi - x\right)} & \text{si } x \in (0, \frac{\pi}{3}), \\ r'(x)\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{q(x)-2n}{2q(x)}\pi + \frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in (\frac{\pi}{3}, \pi). \end{cases}$$

Para el intervalo de $x \in (0, \frac{\pi}{3})$ se sigue exactamente el mismo procedimiento que en la Proposición 5.1, ya que el ángulo que se encuentra en cada punta es $2x$, y en la disección se estudia la mitad de ése, y en este intervalo pasa lo mismo en la segunda construcción.

No se da así para el dominio complementario. Siguiendo las Definiciones 7.3. y 8.1, vemos que el ángulo que se formará en las puntas será α:

$$1.\ \theta(x,n) \coloneqq \frac{n}{2}\cdot\frac{2\pi}{q(x)} = \frac{n\pi}{q(x)}$$

$$2.\ \frac{\alpha}{2}+\gamma+\theta=\pi \iff \gamma=\pi-\frac{n\pi}{q(x)}-\frac{\pi-x}{2}=\frac{q(x)-2n}{2q(x)}\pi+\frac{x}{2}$$

$$3.\ \frac{r_p(x,n)}{\sin(\frac{\alpha}{2})}=\frac{r'(x)}{\sin(\gamma)} \iff r_p(x,n)=r'(x)\frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\gamma)}$$

$$4.\ \sin(\frac{\alpha}{2})=\sin(\frac{\pi-x}{2})=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2})=\cos(\frac{x}{2})$$

$$5.\ r_p(x,n)=r'(x)\frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{q(x)-2n}{2q(x)}\pi+\frac{x}{2})}$$

Proposición 6.2.

$$r_p(x,\frac{q(x)-2v'(x)}{2}) = \min_{n\in(0,q(x))\cap\mathbb{Q}^+} r_p(x,n)$$

Por analogía a la Proposición 5.2, encontremos aquella n que hace que $\gamma=\frac{\pi}{2}$

$$\frac{q-2n}{2q}\pi+\frac{q-2v}{2q}\pi=\frac{\pi}{2} \iff n=\frac{q-2v}{2}$$

Cuando el número de puntas q sea par, n será un entero, pero si q es impar, entonces n será racional y $2n$ entero

Corolario 5.2. Radio Mínimo Relativo para Segunda Construcción

$$r_0'(x) \coloneqq \frac{r_p(x,\frac{q(x)-2v'(x)}{2})}{r'(x)} = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x\in(0,\frac{\pi}{3}], \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) & \text{si } x\in(\frac{\pi}{3},\pi). \end{cases}$$

Notemos que en la intersección la imagen es la misma:

$$\sin(\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Definición 14. Sean $X_{1_1}=(0,\frac{\pi}{4})$ y $X_{1_2}=(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$

Teorema 4.4. Cuarto Teorema de Equivalencias

$$\forall x_t,x_p\in X: T_{x_t}\sim_k P_{x_p} \implies \begin{cases} r_0(x_t)<r_0'(x_p) \iff x_t\in X_{1_1}\wedge x_p\in X_1 \\ r_0(x_t)=r_0'(x_p) \iff x_t=\frac{\pi}{4}\wedge x_p=\frac{\pi}{2} \\ r_0(x_t)>r_0'(x_p) \iff x_t\in X_{1_2}\wedge x_p\in X_2\setminus\{\frac{\pi}{2}\}. \end{cases}$$

Demostración. Siguiendo el apartado ii) del Segundo Teorema de Equivalencias y los Corolarios 5.1. y 5.2. planteamos la desigualdad entre ambas funciones en los diversos tramos:

$$1.\ x_p\in(0,\frac{\pi}{3})\wedge 2x_t=x_p \iff x_t\in(0,\frac{\pi}{6})$$

$$2.\ r_0(x_t)<r_0'(x_p) \iff r_0(x_t)<r_0'(2x_t) \iff \sin(x_t)<\sin(2x_t)$$

Lo cual se cumple para toda $x_t\in(0,\frac{\pi}{6}]$.

$$3.\ r_0(x_t) < r_0'(x_p) \iff \sin(x_t) < \cos(\frac{x_p}{2}) \iff \sin(x_t) < \cos(x_t)$$

Esta desigualdad se verifica positivamente para $x_t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$

$$4.\ r_0(\frac{\pi}{4}) = r_0'(\frac{\pi}{2}) \iff \sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5.\ r_0(x_t) > r_0'(x_p) \iff \sin(x_t) > \cos(\frac{x_p}{2}) \iff \sin(x_t) > \cos(x_t)$$

Lo cual es cierto para $x_t \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. *Para el caso* $T_{x_t} \sim P_{x_p} \wedge x_t = x_p = \frac{\pi}{3}$, *se da* $r_0(\frac{\pi}{3}) = r_0'(\frac{\pi}{3})$.

4.3. Diagrama Clasificatorio de Figuras

- Las figuras de $\{T_x : x \in X_2\}$ son *espirales infinitas* cuyo radio crece linealmente si $x \neq \frac{\pi}{2}$.
- En $\{T_x : x \in X_{1_2} \cap \gamma_\infty\}$ y $\{P_x : x \in X_2 \cap \varphi_\infty\}$ son *figuras finitas y cerradas* Aquí, $r_0(x_t) > r_0'(x_p)$.
- En $\{T_x : x \in X_{1_1} \cap \gamma_\infty\}$ y $\{P_x : x \in X_1 \cap \varphi_\infty\}$ son también finitas y cerradas. Aquí, en cambio, $r_0(x_t) < r_0'(x_p)$.
- Finalmente, en $\{T_x : x \in X_1 \setminus \gamma_\infty\}$ y $\{P_x : x \in X \setminus \varphi_\infty\}$ se da una *singularidad finita*, pues el radio converge y no se cumple la condición de cierre

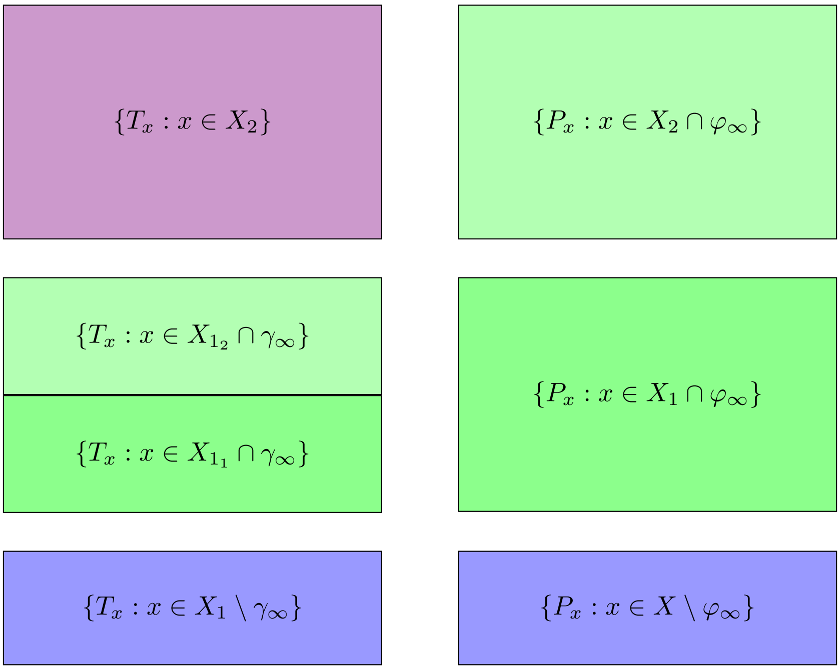


Figura 22: Diagrama Clasificatorio

5. Apéndice

5.1. Demostración del Lema de Simetrías

$$i)\ \forall n \in \mathbb{Z}_{>2},\ 2 \nmid n \iff |\varphi_n| = 2|\chi_n|$$

Demostración.

$$1.\ \forall n \in \mathbb{Z}^+ : \exists f_n : [1, \frac{n-1}{2}] \cap \mathbb{Z}^+ \to [\frac{n+1}{2}, n-1] \cap \mathbb{Z}^+ \ \textit{biyectiva}$$

Es trivial ver que el dominio y el codominio de esta función son conjuntos finitos y numerables con cardinal $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}^+ \iff 2 \nmid n$:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+ : a \leq b \implies |[a,b] \cap \mathbb{Z}^+| = b - a + 1$$

$$n - 1 - \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{2(n-1) - (n+1) + 2}{2} = \frac{n-1}{2}$$

Además:

$$2 \nmid n \iff [1, \frac{n-1}{2}] \cap \mathbb{Z}^+ \ \cup \ [\frac{n+1}{2}, n-1] \cap \mathbb{Z}^+ = [1, n-1] \cap \mathbb{Z}^+ = \{m \in \mathbb{Z}^+ : m < n\}$$

En concreto vamos a considerar la regla de asignación

$$f_n(m) = n - m \iff f_n(m) + m = n$$

m	1	2	3	4	5	6	7
$f_{15}(m)$	14	13	12	11	10	9	8

$$2.\ \forall n \in \mathbb{Z}^+ : 2 \nmid n \iff \forall m \in [1, \frac{n-1}{2}] \cap \mathbb{Z}^+, \begin{cases} 2 \mid m \iff 2 \nmid f_n(m) \\ 2 \nmid m \iff 2 \mid f_n(m) \end{cases}$$

Esto se da porque, por la regla de asignación de la aplicación, vemos que la suma del argumento m y su imagen $f_n(m)$ debe ser igual a n, que es un número impar; y sólo la suma de un par y un impar resultan en un número impar.

$$3.\ \forall m, n \in \mathbb{Z}^+ : mcd(m,n) = 1 \iff mcd(n, n-m) = 1 \iff (m \in \gamma'_n \iff f_n(m) \in \varphi'_n \setminus \gamma'_n)$$

m	1	2	$\cancel{3}$	4	5	$\cancel{6}$	7	8	$\cancel{9}$	10	11	$\cancel{12}$	13
$f_{27}(m)$	26	25	$\cancel{24}$	23	22	$\cancel{21}$	20	19	$\cancel{18}$	17	16	$\cancel{15}$	14

Con esta información podemos ver que existirá una biyección entre los elementos pares e impares de φ'_n:

χ_{27}	2	4	8	10	14	16	20	22	26
$\varphi_{27} \setminus \chi_{27}$	25	23	19	17	13	11	7	5	1

$$\forall a \in \chi'_n, \exists! b \in \varphi'_n \setminus \chi'_n : a + b = n$$

$$\forall b \in \varphi'_n \setminus \chi'_n, \exists! a \in \varphi'_n : a + b = n$$

Por lo que ya habríamos demostrado la simetría ii) para $2 \nmid n$. Veámosla en general:

$$ii)\ \forall n \in \mathbb{Z}_{>2}, |\varphi_n| = 2|\gamma_n|$$

m	1	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$	$\cancel{4}$	$\cancel{5}$	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$	11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$
$f_{30}(m)$	29	$\cancel{28}$	$\cancel{27}$	$\cancel{26}$	$\cancel{25}$	$\cancel{24}$	23	$\cancel{22}$	$\cancel{21}$	$\cancel{20}$	19	$\cancel{18}$	17	$\cancel{16}$

Donde estamos considerando la misma regla de asignación para $f_n(m)$. Notemos que, aquí, la unión del dominio y el codominio no es igual a todos los enteros menores que n, sino que se excluye $\frac{n}{2}$ cuando $2 \mid n$, lo cual no afectará al cómputo ni a la relación entre φ_n y γ_n, porque $n > 2 \implies \frac{n}{2} > 1 \implies mcd(n, \frac{n}{2}) > 1 \implies \frac{n}{2} \notin \varphi_n$

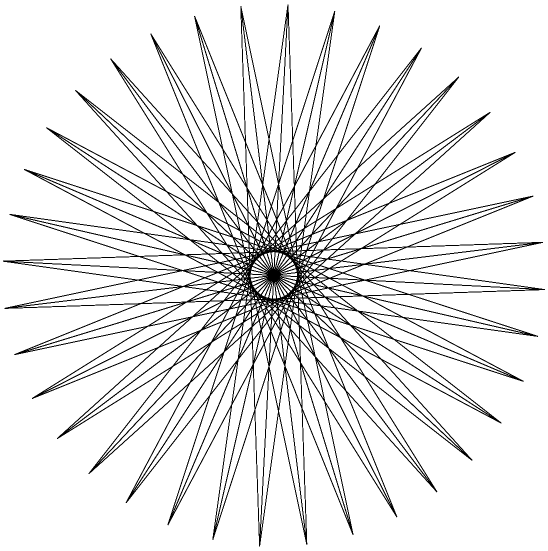
$$\forall m \in [1, \frac{n}{2}) \cap \mathbb{Z}^+, (2m < n \wedge \frac{n}{2} < f_n(m) < n) \wedge (m \in \gamma_n \iff f_n(m) \in \varphi_n \setminus \gamma_n)$$

$$|\gamma_n| + |\varphi_n \setminus \gamma_n| = |\gamma_n| + (|\varphi_n| - |\gamma_n|) = |\varphi_n| \wedge |\gamma_n| = |\varphi_n \setminus \gamma_n| \implies |\varphi_n| = 2|\gamma_n|$$

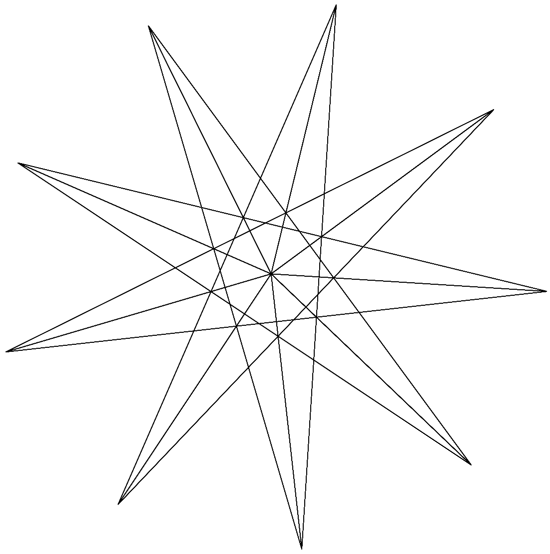
5.2. Software

`https://aidanLorenzo.github.io`
`https://github.com/aidanLorenzo/aidanLorenzo.github.io`

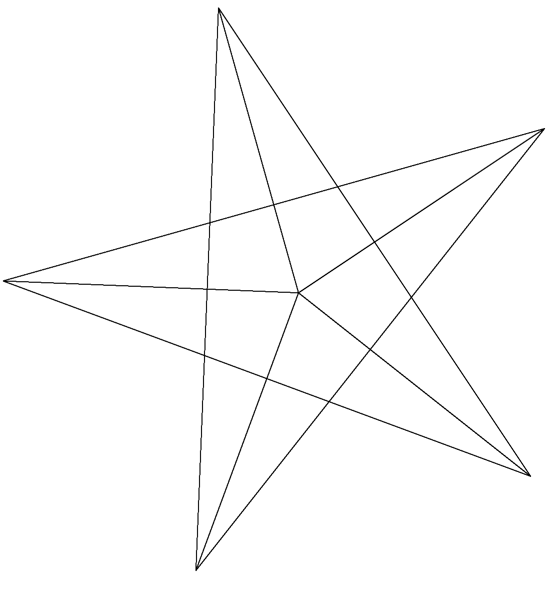
5.3. Figuras



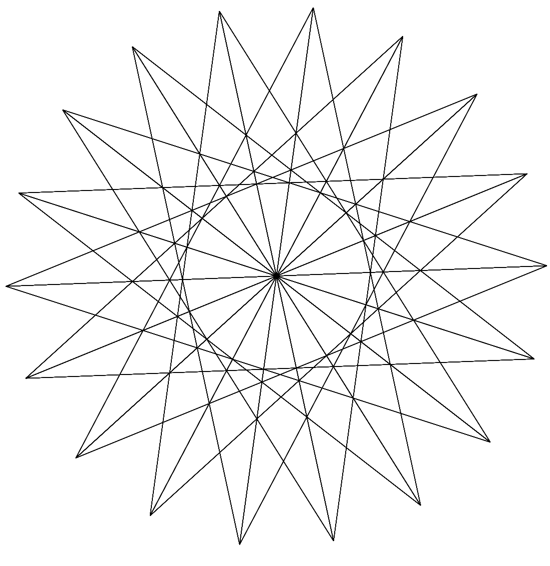
T_{5°



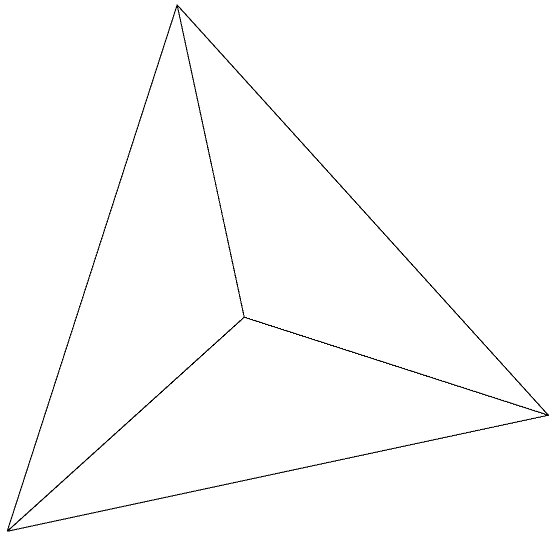
T_{10°



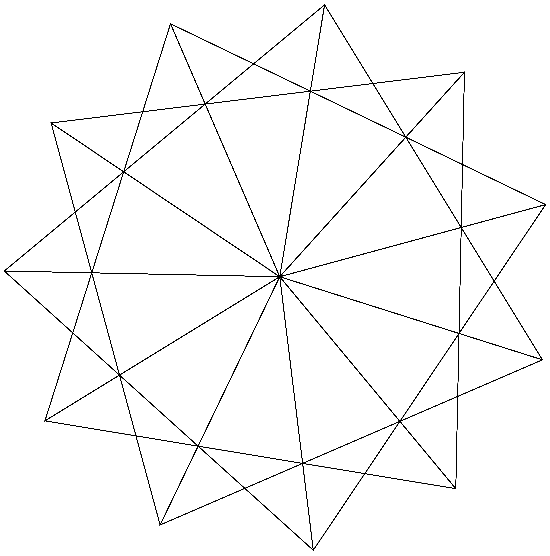
T_{18°



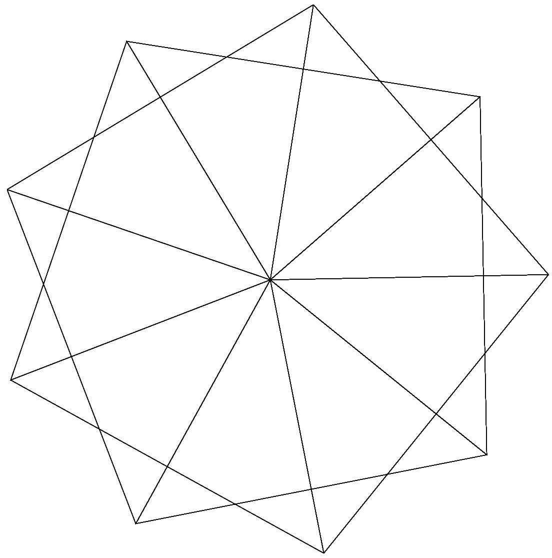
T_{20°



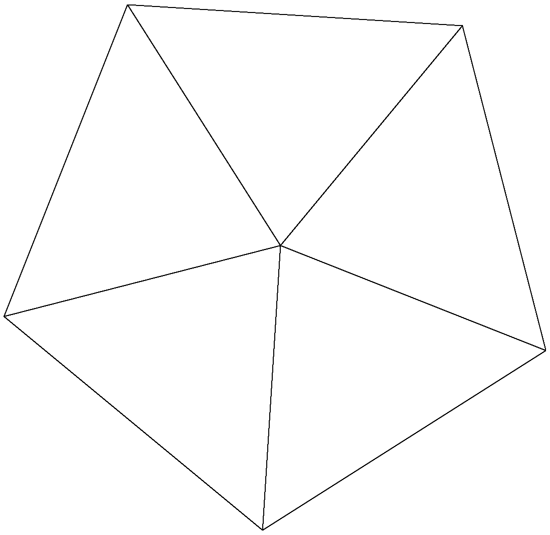
T_{30°



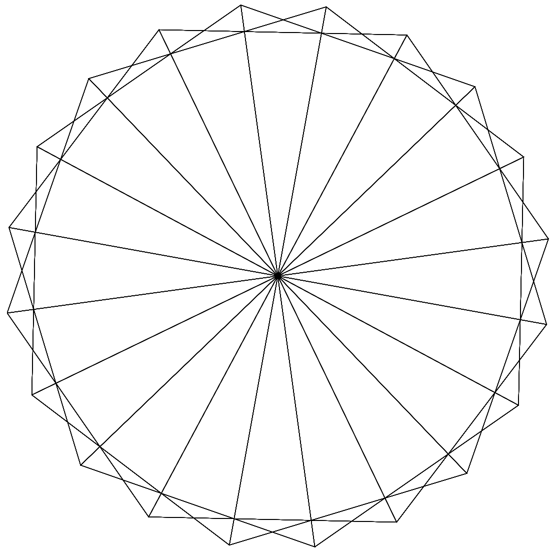
$T_{40,\overline{90}^\circ}$



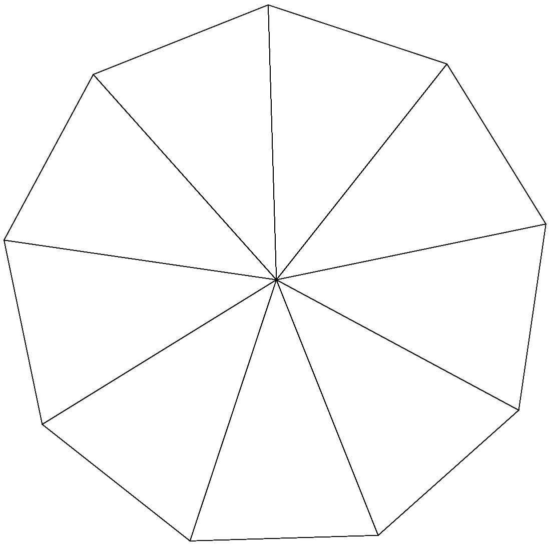
T_{50°



T_{54°



T_{63°



T_{70°