

# Dos Construcciones Geométricas Iterativas

Aidan Lorenzo

Noviembre 2024

## 1. Introducción

En este trabajo se desarrolla una doble generalización de la Espiral de Teodoro (véase la Figura 9). Por una parte generalizamos el ángulo de formación de nuevos triángulos: en la mencionada Espiral, el ángulo empleado es  $\frac{\pi}{2}$ , a fin de que, por el Teorema de Pitágoras, la distancia del centro a cada nuevo punto de la espiral sea la función  $\sqrt{n}$ .

Por otra parte, ampliaremos esta construcción a bloques no triangulares, y demostraremos algunos teoremas que describen la relación entre los comportamientos de ambas construcciones geométricas iterativas. Conectaremos, además, nociones de Teoría de Números, al introducir la función totiente de Euler y demostrar algunas simetrías que rijen y sirven de Lema.

## 2. Primera Construcción

### 2.1. Definición de la Construcción

**Definición 1.1.** Sea  $x \in (0, \pi) = X$  un *ángulo de formación* en su *dominio de generación*.

**Definición 1.2.** Llamaremos *bloque fundamental* al triángulo de lados  $a_i, b_i$  y  $c_i$ , tales que

$$\forall i \in \mathbb{Z}^+, a_i = 1 \text{ y } b_1 = 1$$

y  $O$  el *centro* de la figura, que es la intersección de  $b_i$  y  $c_i$ .  $x$  es el ángulo que separa  $a_i$  y  $b_i$ .

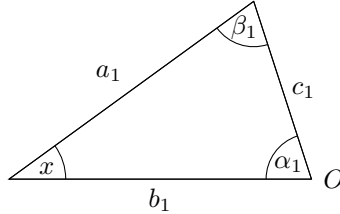


Figura 1: Triángulo Primero.

**Definición 1.3.** Sea  $T_x$  la figura generada por el ángulo  $x$  yuxtaponiendo bloques fundamentales triangulares mediante la siguiente regla:

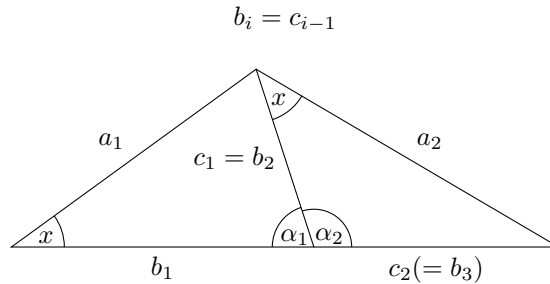


Figura 2: Dos primeros bloques de  $T_{36^\circ}$ .

**Definición 1.4.** Sea  $c_i(x)$  la longitud del segmento  $c_i$  de  $T_x$ .

## 2.2. Estudio de convergencia

### Proposición 1.1.

$$c_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ \sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1} \cos x} & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

*Demostración.* Por el Teorema del Coseno y las Definiciones anteriores tenemos:

$$c_i^2(x) = a_i^2 + b_i^2 - 2a_i b_i \cos x \iff c_i(x) = \sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1} \cos x}$$

La función está definida de forma recurrente, por lo que necesitamos un valor inicial de definición:

$$b_i = c_{i-1} \wedge b_1 = 1 \implies c_0 = 1$$

### Proposición 1.2.

$$\begin{aligned} i) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} c_i(x) &= \infty \iff \cos(x) \leq 0 \iff x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \\ ii) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} (c_i(x) - c_{i-1}(x)) &= |\cos(x)| \iff \cos(x) < 0 \iff x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \\ iii) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} c_i(x) &= \frac{1}{2 \cos(x)} \iff \cos(x) > 0 \iff x \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

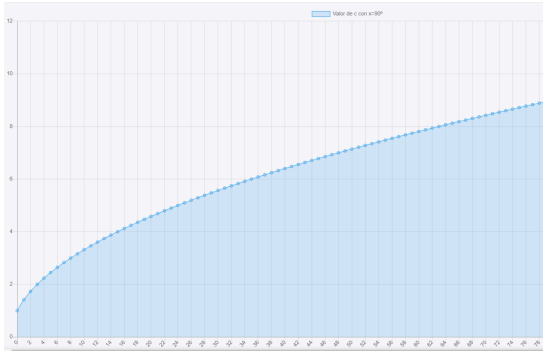


Figura 3:  $c_i(\frac{\pi}{2})$

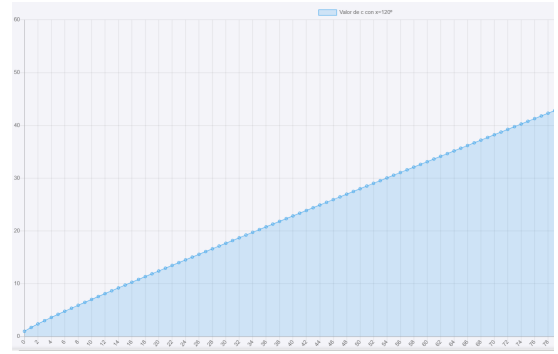


Figura 4:  $c_i(\frac{2}{3}\pi)$

*Demostración.* Notemos primero que, por construcción,  $c_i(x) > 0$ , pues refiere a la longitud de un segmento.

Probemos i). Veamos que las funciones asociadas a ángulos  $x$  con coseno negativo o nulo son monótonamente crecientes.

$$\forall i \in \mathbb{Z}^+ \forall x \in X, c_i(x) > 0 \wedge \cos(x) \leq 0 \implies c_i(x) > c_{i-1}(x)$$

ya que

$$\sqrt{1 + c_{i-1}^2 + 2c_{i-1}|\cos(x)|} > c_{i-1} \iff 2c_{i-1}|\cos(x)| > -1$$

lo cual se cumple siempre. Además, la sucesión no está acotada superiormente; entonces, diverge.

Además,  $c_i(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{i}$ . Falta demostrar la convergencia de la serie para  $\cos(x) > 0$ . Estudiemos cómo se comporta la función para distintos intervalos de  $X_1$  a través de la visualización de los correspondientes gráficos. Notemos que  $c_i(\frac{\pi}{3}) = 1, \forall i \in \mathbb{Z}^+$ , por lo que sólo tenemos la demostración analítica correspondiente al caso trivial donde la sucesión es constante, porque

$$c_1(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{2 - 2 \cos(\frac{\pi}{3})} = \sqrt{2 - 1} = \sqrt{1} = 1$$

y así vemos que cada vez que sea evaluada dará 1. Esto es equivalente a decir que los bloques serán triángulos equiláteros.

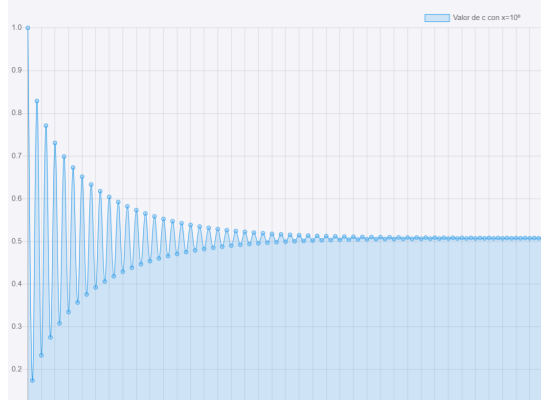


Figura 5:  $c_i(x)$  para  $x \in (0, \frac{\pi}{4})$

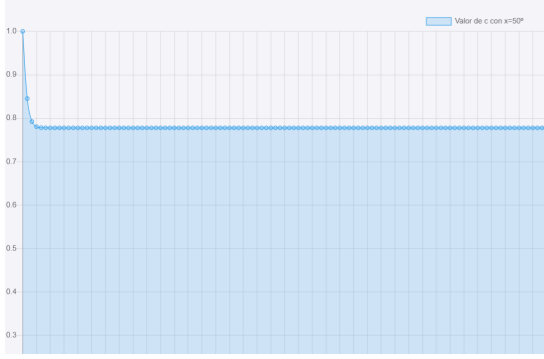


Figura 6:  $c_i(x)$  para  $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$

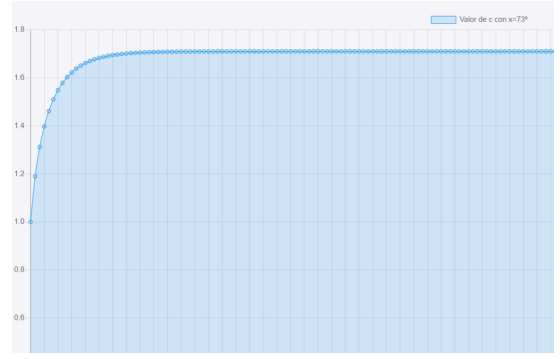


Figura 7:  $c_i(x)$  para  $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

**Definición 2.1.** Llamaremos *dominio de convergencia triangular* al intervalo  $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$ , para el cual

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}) \iff \cos(x) > 0 \iff c_i(x) \text{ converge}$$

**Definición 2.2.** Análogamente, llamaremos *dominio de no convergencia triangular*  $X_2$  al intervalo  $[\frac{\pi}{2}, \pi)$ , para el cual

$$x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \iff \cos(x) \leq 0 \iff \lim_{i \rightarrow \infty} c_i(x) = \infty$$

**Definición 2.3** Sea  $r(x) = \frac{1}{2 \cos(x)}$  la función *radio*,  $\forall x \in X_1$

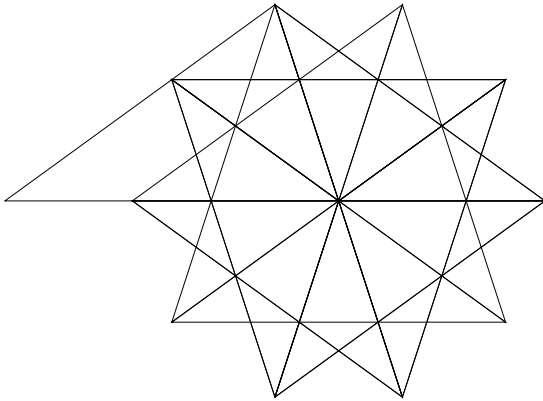


Figura 8:  $T_{36^\circ}$

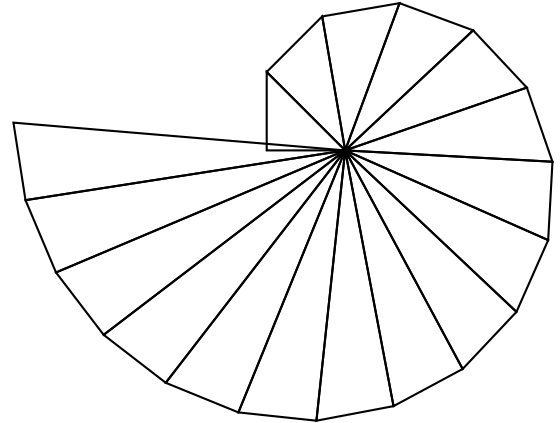


Figura 9:  $T_{90^\circ}$  (Espiral de Teodoro)

### 2.3. Estudio de una función: $p(x)$

**Definición 3.1.**

Sea  $\varphi_n = |\{\frac{m}{n}\pi : m \in \mathbb{Z}^+_{<n} \wedge \text{mcd}(m, n) = 1\}|$  y  $\varphi'_n = |\{m \in \mathbb{Z}^+_{<n} : \text{mcd}(m, n) = 1\}|$

**Definición 3.2.**

Sea  $\gamma_n = |\{\frac{m}{n}\pi : 2m < n \wedge m \in \mathbb{Z}^+ \wedge \text{mcd}(m, n) = 1\}|$  y  $\gamma'_n = |\{m \in \mathbb{Z}^+ : 2m < n \wedge \text{mcd}(m, n) = 1\}|$

**Definición 3.3.**

$\chi_n = |\{\frac{m}{n}\pi : m \in \mathbb{Z}^+_{<n} \wedge \text{mcd}(m, n) = 1 \wedge 2 \mid m\}|$ ,  $\chi'_n = |\{m \in \mathbb{Z}^+_{<n} : \text{mcd}(m, n) = 1 \wedge 2 \mid m\}|$

**Observación 1.** Trivialmente,  $|\varphi_n| = |\varphi'_n|$ ,  $|\gamma_n| = |\gamma'_n|$  y  $|\chi_n| = |\chi'_n|$ .

**Definición 4.1.** Sea  $p : X_1 \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$  la función  $p(x) = |\{P \in F_x : |\overline{OP}| = r(x)\}|$ .

**Teorema 1.1.** Valor de la función  $p(x)$

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff \begin{cases} 2 \nmid n \iff p(x) = 2n \\ 4 \mid n \iff p(x) = n \\ 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \implies p(x) = \frac{1}{2}n \end{cases}$$

*Demostración.* Notemos primero que, si  $c_i(x)$  converge, lo hace también  $c_{i-1}(x)$ , que por la Definición 1.3, es igual a  $b_i$ , lo que implica que los bloques serán triángulos isósceles. Siendo  $O$  el vértice que une estos dos segmentos, y  $\alpha_i$  el ángulo central, vemos que  $\alpha_i$  también converge. Por la relación de ángulos de un triángulo,  $\alpha = \pi - 2x$ .

Ahora establecemos la condición de cierre: evaluemos si existe un número finito de bloques la suma de cuyos ángulos centrales  $\alpha$  constantes sea  $v \cdot 2\pi$  para algún  $v \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff x = \frac{m}{n}\pi \iff \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2n}{n-2m} \iff \exists k, v \in \mathbb{Z}^+ : \text{mcd}(k, v) = 1 \wedge k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi$$

Esto significa que, tras  $k$  triángulos isósceles constantes, los nuevos triángulos se dibujarán sobre otros ya existentes, al ser  $\alpha$  constante. Ahora, para conocer el valor de  $k$  en función de  $x$ , haremos lo siguiente:

$$k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi \iff \frac{k}{v} = \frac{2n}{n-2m}$$

Para igualar  $k$  al numerador de la expresión hay que estudiar qué valores de  $m$  y  $n$  generan una fracción irreducible.

- $2 \nmid n \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(n, n-2m) = \text{mcd}(2n, n-2m) = 1$
- $4 \mid n \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(n, n-2m) = \text{mcd}(2n, n-2m) = 2$
- $2 \mid n \wedge 4 \nmid n \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(n, n-2m) = 2 \implies \text{mcd}(2n, n-2m) = 4$

En consecuencia tenemos que

- $2 \nmid n \implies \text{mcd}(2n, n-2m) = 1 \implies k(x) = 2n$
- $4 \mid n \implies \text{mcd}(2n, n-2m) = 2 \implies \text{mcd}(n, \frac{n-2m}{2}) = 1 \implies k(x) = n$
- $2 \mid n \wedge 4 \nmid n \implies \text{mcd}(2n, n-2m) = 4 \implies \text{mcd}(\frac{n}{2}, \frac{n-2m}{4}) = 1 \implies k(x) = \frac{n}{2}$

Falta ver que el valor  $k(x)$ , cuya expresión acabamos de encontrar, coincide con  $p(x)$ , objeto de este Teorema.

$i$	1	2	3	4	5	6	...	$k-1$	$k$
$\sum_{j=1}^i p_j$	2	3	4	5	6	7	...	$k$	$k$

Habiendo notado que los bloques son triángulos isósceles, donde  $c_i = b_i = r(x)$ , vemos que el primer bloque aportará 2 nuevas puntas a la figura; a partir de éste, cada nuevo triángulo aportará 1 punta nueva, pues compartirá una con el bloque anterior; finalmente, el último bloque no añade ninguna punta más a la figura, pues une dos ya existentes: las del primer y penúltimo bloque.

**Corolario 1.1.**

$$\nexists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff \frac{m}{n} \notin \mathbb{Q} \iff p\left(\frac{m}{n}\pi\right) = \infty$$

*Demostración.* Si  $x$  no es una fracción racional de  $\pi$ ,  $\nexists k, v \in \mathbb{Z}^+ : k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi$ , lo que se traduce en que nunca se llega a cerrar la figura tras un número finito de bloques.

**Corolario 1.2.**

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff \begin{cases} 2 \nmid n \iff v(x) = n - 2m \\ 4 \mid n \iff v(x) = \frac{n-2m}{2} \\ 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \implies v(x) = \frac{n-2m}{4} \end{cases}$$

**Definición 4.2.** Sea  $p^{-1}(p) = \{x \in X_1 : p(x) = p\}$ ,  $\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$  el conjunto antiimagen de la aplicación explicada en la Definición 4.1, y  $f(p) := |p^{-1}(p)|$  la cantidad de ángulos de formación para los cuales su número de puntas es  $p$ .

**Definición 5.1.** Sea  $\varphi(n) = |\varphi_n|$  la función totiente de Euler.

**Lema Único.** Simetrías de  $\varphi_n$

- i)  $\forall n \in \mathbb{Z}_{>2}, |\varphi_n| = 2|\chi_n|$
- ii)  $\forall n \in \mathbb{Z}_{>2} : 2 \nmid n \iff |\varphi_n| = 2|\gamma_n|$
- iii)  $\forall n \in \mathbb{Z}_{>2} : 2 \nmid n \iff \varphi(2n) = \varphi(n)$

La demostración de este Lema puede hallarse en el Apéndice.

**Teorema 1.2.** Inversa de  $p(x)$  y Función Totiente

$$\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3}, f(p) = \frac{\varphi(p)}{2}$$

*Demostración.* Veamos primero qué denominador  $n$  causará que la figura tenga  $p$  puntas, siguiendo el Teorema 1.1:

$$\begin{cases} 2 \nmid p \iff n = 2p \\ 4 \mid n \iff n = p \\ 2 \mid p \wedge 4 \nmid p \iff n = \frac{1}{2}p \end{cases} \implies p^{-1}(p) = \gamma_n = \begin{cases} \gamma_{2p} \iff 2 \nmid p \\ \gamma_n \iff 4 \mid p \\ \gamma_{\frac{p}{2}} \iff 2 \mid p \wedge 4 \nmid p \end{cases}$$

Es decir, el conjunto de las  $x$  para las cuales  $p(x) = p$  son los ángulos  $x \in X_1$  con denominador entero positivo  $n$ , dependiente de la paridad de  $p$ , y numerador también entero positivo y coprime respecto a  $n$ . Esto es lo que representa, por construcción, el conjunto  $\gamma_n$  introducido en la Definición 4.2.

Siguiendo el Lema de Simetrías y la Definición 5.1:

$$p^{-1}(p) = \gamma_n \iff |p^{-1}(p)| = f(p) = |\gamma_n| = \frac{\varphi(n)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(2p) \iff 2 \nmid p \\ \frac{1}{2}\varphi(p) \iff 4 \mid p \\ \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{p}{2}\right) \iff 2 \mid p \wedge 4 \nmid p \end{cases} = \frac{\varphi(p)}{2}$$

## 2.4. Extensión de $p(x)$

**Definición 6.1.** Sea  $k : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  la función

$$k(x, y) = k \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x) + (k - \lfloor k \rfloor) \alpha_{\lfloor k \rfloor + 1}(x) = y$$

**Proposición 2.1.**

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff p(x) = k(x, 2\pi v(x))$$

*Demostración.* Por el Teorema 1.1. y la Definición 6.1. vemos lo siguiente:

$$p(x) = k \iff \exists k, v \in \mathbb{Z}^+ : k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi \wedge \text{mcd}(k, v) = 1$$

$$k(x, y) = k \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x) + (k - \lfloor k \rfloor) \alpha_{\lfloor k \rfloor + 1}(x) = y$$

En el dominio de convergencia, para  $k \in \mathbb{Z}^+$ :

$$k(x, 2\pi v(x)) = k \iff \sum_{i=1}^k \alpha(x) = y \iff k \cdot \alpha = 2\pi v(x)$$

**Teorema 2.1.** Espirales Únicas

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 3}, \exists! x \in X : k(x, 2\pi) = k$$

*Demostración.* Veamos que la función  $k(x, 2\pi)$  es inyectiva:

$$1. \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \implies c_i(x_1) < c_i(x_2)$$

En  $i = 0$ ,  $c_0(x_1) = c_0(x_2) = 1$ . Luego:

$$x_1 < x_2 \implies c_1(x_1) = \sqrt{2(1 - \cos(x_1))} < \sqrt{2(1 - \cos(x_2))} = c_1(x_2) \iff \cos(x_1) > \cos(x_2)$$

Lo cual es cierto cuando  $x_1, x_2 \in (0, \pi) = X$ . Para el resto de valores de  $i$  hacemos lo siguiente:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : a < b \implies \sqrt{1 + a^2 - 2a \cos(x_1)} < \sqrt{1 + b^2 - 2b \cos(x_2)} \iff a(a - 2 \cos(x_1)) < b(b - 2 \cos(x_2))$$

Por hipótesis tenemos que  $a < b$ , así que veamos que  $a - 2 \cos(x_1) < b - 2 \cos(x_2)$ . Con la misma lógica,  $a < b$ , así que basta ver que  $2 \cos(x_1) > 2 \cos(x_2)$ , lo cual acabamos de ver en el caso  $i = 0$ :

$$2. \forall x_1, x_2 \in X : c_i(x_1) < c_i(x_2) \implies \alpha_i(x_1) > \alpha_i(x_2)$$

Comprobémoslo para la primera iteración de dos construcciones cualesquiera:

$$\alpha_1(x_1) > \alpha_1(x_2) \iff \arccos\left(\frac{1^2 + c_1^2(x_1) - 1}{2 \cdot 1 \cdot c_1(x_1)}\right) > \arccos\left(\frac{1^2 + c_1^2(x_2) - 1}{2 \cdot 1 \cdot c_1(x_2)}\right) \iff \frac{c_1(x_1)}{2} < \frac{c_1(x_2)}{2}$$

$$\arccos\left(\frac{c_i(x_1)^2 + c_{i-1}(x_1)^2 - 1}{2c_i(x_1)c_{i-1}(x_1)}\right) > \arccos\left(\frac{c_i(x_2)^2 + c_{i-1}(x_2)^2 - 1}{2c_i(x_2)c_{i-1}(x_2)}\right) \iff$$

$$\frac{c_i(x_1)^2 + c_{i-1}(x_1)^2 - 1}{c_i(x_1)c_{i-1}(x_1)} < \frac{c_i(x_2)^2 + c_{i-1}(x_2)^2 - 1}{c_i(x_2)c_{i-1}(x_2)} \iff$$

$$\frac{(\sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1} \cos(x_1)})^2 + c_{i-1}^2 - 1}{c_i(x_1)c_{i-1}(x_1)} < \frac{(\sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1} \cos(x_2)})^2 + c_{i-1}^2 - 1}{c_i(x_2)c_{i-1}(x_2)} \iff$$

$$\frac{c_{i-1}(x_1) - \cos(x_1)}{c_i(x_1)} < \frac{c_{i-1}(x_2) - \cos(x_2)}{c_i(x_2)}$$

$$3. \forall k \in \mathbb{R}^+ \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \implies \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x_1) + (k - \lfloor k \rfloor) \alpha_{\lfloor k \rfloor}(x_1) > \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x_2) + (k - \lfloor k \rfloor) \alpha_{\lfloor k \rfloor}(x_2)$$

$$4. \forall x_1, x_2 \in X \forall y \in \mathbb{R}^+ : x_1 < x_2 \implies k(x_1, y) < k(x_2, y)$$

Consideremos  $k(x_2, y) = k_2 \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k_2 \rfloor} \alpha_i(x_2) + (k_2 - \lfloor k_2 \rfloor) \alpha_{\lfloor k_2 \rfloor}(x_2) = y$ . Entonces:

$$\sum_{i=1}^{\lfloor k_2 \rfloor} \alpha_i(x_1) + (k_2 - \lfloor k \rfloor) \alpha_{\lfloor k_2 \rfloor}(x_1) > y$$

Por lo que, necesariamente,  $k(x_1, y) = k_1 < k_2 = k(x_2, y)$ . Basándonos en este principio:

$$5. \forall x_1, x_2 \in X \forall y \in \mathbb{R}^+, \exists k \in \mathbb{Z}^+ : k(x_1, y) < k < k(x_2, y) \implies \exists! x_m \in X : x_1 < x_m < x_2 \wedge k(x_m, y) = k$$

Así, si conocemos  $k(x, y)$ , podemos usar su crecimiento monótono para encontrar aquellos ángulos únicos  $x_m$  tales que  $k(x_m, y) \in \mathbb{Z}^+$ .

En la Figura 9 se aprecian 17 bloques de la figura infinita  $T_{90^\circ}$ . Se ve que la suma de sus ángulos internos  $\alpha_i(90^\circ)$  es mayor a  $2\pi$ , y que la suma de los 16 primeros es menor a  $2\pi$ . En consecuencia, sabemos que la parte entera de  $k(90^\circ, 360^\circ) = k \in \mathbb{R}^+$  es 16. En general:

$$\lfloor k(x, y) \rfloor = n \in \mathbb{Z}^+ \iff \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) < y < \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(x)$$

$$k(x, y) = k \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x) + (k - \lfloor k \rfloor) \alpha_{\lfloor k \rfloor + 1}(x) = y \iff k = \lfloor k \rfloor + \frac{y - \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x)}{\alpha_{\lfloor k \rfloor + 1}(x)}$$

Ya podemos computar con facilidad la función  $k(x, y)$  para todas  $(x, y) \in X \times \mathbb{R}^+$ . En particular,  $k(90^\circ, 360^\circ) \approx 16,649128$ , y  $k(91^\circ, 360^\circ) \approx 17,445935$ . Apliquemos el punto 5:

$$k(90^\circ, 360^\circ) < 17 < k(91^\circ, 360^\circ) \implies \exists! x_m \in (90^\circ, 91^\circ) : k(x_m, 360^\circ) = 17$$

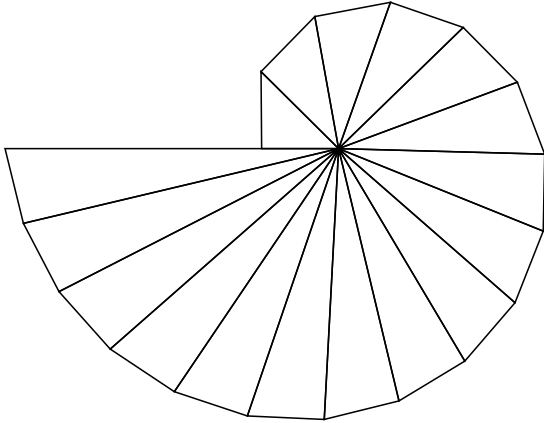


Figura 10: 17 bloques de  $T_{x=90,45332215^\circ}$

$k \in \mathbb{Z}^+$	$x^\circ$
3	19.019079333
6	60
9	74.15292718
12	82.2524055
16	89.13404388
17	90.45332215
18	91.65964018
19	92.76863062
20	93.79304858
21	94.74341811
60	110.8178438
450	128.8014110

Figura 11:  $\{(k, x) : k(x, 2\pi) = k\}$

**Corolario 2.**

$$i) |\{x_1 \in X_1 : k(x_1, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+\}| = 14$$

$$ii) |\{x_2 \in X_2 : k(x_2, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+\}| = \infty$$

Es decir, que hay número finito de  $x_1 \in X_1$  que exhiben este comportamiento inyectivo respecto a la aplicación  $k(x, 2\pi)$ , mientras que existen infinitos ángulos  $x_2 \in X_2$  para los cuales  $k(x_2, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+$

**Conjetura 1.**

$$\forall x \in X \setminus \left\{\frac{\pi}{3}\right\} : k(x, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+ \implies \nexists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n$$

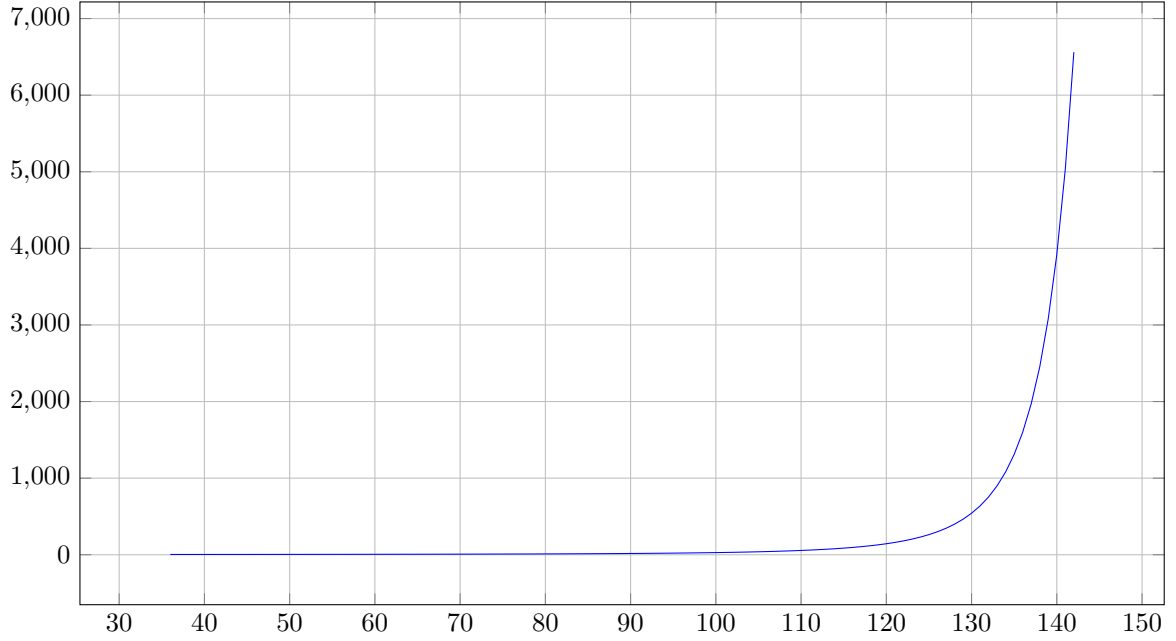


Figura 12: Gráfico de  $k(x, 2\pi)$ .

Concluimos así que ésta es una función de crecimiento exponencial.



### 3. Segunda Construcción

#### 3.1. Definición de la Construcción

**Definición 7.1.** En este caso, el *bloque fundamental* será el paralelogramo equilátero de lados  $a_i, b_i, c_i$  y  $d_i$  tales que

$$\forall i \in \mathbb{Z}^+ : a_i = b_i = c_i = d_i = \lambda \in \mathbb{R}^+$$

y  $x$  el ángulo que se forma entre  $a_i$  y  $b_i$  (también entre  $c_i$  y  $d_i$ )

**Definición 7.2.** Sea  $P_x$  la figura generada yuxtaponiendo bloques mediante la misma regla que  $T_x$ , y  $O$  el centro de la figura:

$$b_i = c_{i-1}$$

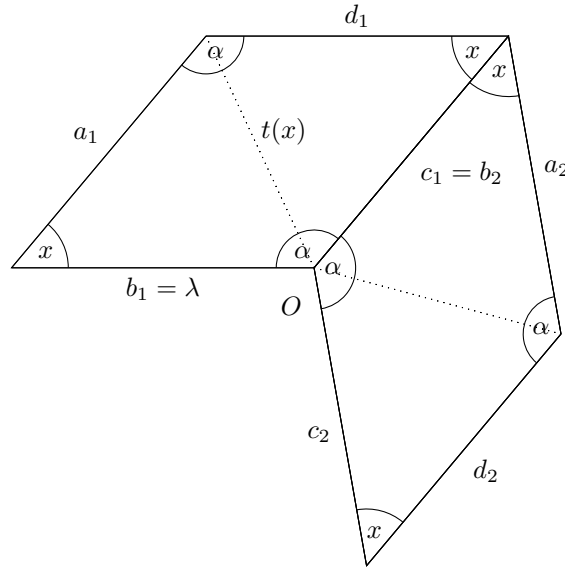


Figura 13: Dos primeros bloques de  $P_{50^\circ}$ .

**Definición 7.3.** Sea  $r'(x) := \max(\lambda, t(x)), \forall x \in X$ , donde  $t(x)$  es la distancia entre los vértices opuestos cuyos ángulos son  $\alpha$ .

#### 3.2. Función homóloga a $p(x) : q(x)$

**Proposición 3.1.**

$$r'(x) = \begin{cases} \lambda & \text{si } 0 < x \leq \frac{\pi}{3} \\ \lambda\sqrt{2(1 - \cos x)} & \text{si } \frac{\pi}{3} < x < \pi \end{cases}$$

*Demostración.* Por el Teorema del Coseno, tenemos que:

$$t^2(x) = a^2 + b^2 - 2ab \cos x \iff t(x) = \sqrt{2\lambda^2 - 2\lambda^2 \cos(x)} = \sqrt{2\lambda^2(1 - \cos(x))} = \lambda\sqrt{2(1 - \cos(x))}$$

Luego:

$$\begin{cases} r'(x) = \lambda \iff \max(\lambda, \lambda\sqrt{2(1 - \cos x)}) = \lambda \iff \lambda \geq \lambda\sqrt{2(1 - \cos(x))} \iff \cos x \geq \frac{1}{2} \iff x \in (0, \frac{\pi}{3}] \\ r'(x) = \lambda\sqrt{2(1 - \cos x)} \iff \lambda < \lambda\sqrt{2(1 - \cos(x))} \iff \cos x < \frac{1}{2} \iff x \in (\frac{\pi}{3}, \pi) \end{cases}$$

Por lo que vemos que todas las figuras generadas por esta segunda construcción tendrán un radio real.

**Definición 8.1.** Sea  $q : X \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$  la función  $q(x) = |\{S \in P_x : |\overline{OS}| = r'(x)\}|$

**Teorema 3.1.** Función  $q(x)$

$$i) \forall n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{3\}, x \in \varphi_n \iff \begin{cases} q(x) = 2n \iff 2 \mid n \vee 2 \mid m \\ q(x) = n \iff 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \end{cases} \quad ii) q(\frac{1}{3}\pi) = 2n = 6$$

*Demostración.* Por la relación de ángulos de un cuadrilátero,  $2\alpha + 2x = 2\pi \iff \alpha = \pi - x$ . Procedamos ahora de la misma manera que en el Teorema 1.1:

$$\begin{aligned} \exists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \varphi_n &\iff x = \frac{m}{n}\pi \wedge m < n \iff \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2n}{n-m} \iff \\ &\iff \exists k, v \in \mathbb{Z}^+ : \text{mcd}(k, v) = 1 \wedge k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi \iff \frac{k}{v} = \frac{2n}{n-m} \end{aligned}$$

$$\blacksquare (2 \mid n \vee 2 \mid m) \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(2n, n-m) = 1 \implies k(x) = 2n$$

$$\blacksquare 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(2n, n-m) = 2 \implies k(x) = n$$

Veamos ahora la relación entre  $q(x)$  y  $k(x)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} r'(x) = \lambda \iff x \in (0, \frac{\pi}{3}) \\ r'(x) = \lambda\sqrt{2(1-\cos(x))} \\ x = \frac{\pi}{3} \end{array} \right\} \iff \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & k-1 & k \\ \hline \sum_{j=1}^i q_j & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & k & k \\ \hline i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & k-1 & k \\ \hline \sum_{j=1}^i q_j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & k-1 & k \\ \hline i & 1 & 2 & 3 & & & & & & \\ \hline \sum_{j=1}^i q_j & 3 & 5 & 6 & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Cuando  $r'(x) = \lambda$ , el primer bloque aporta dos puntas, porque tiene dos segmentos con esa longitud:  $b_1 = \lambda = c_1$ . En cambio, para  $r'(x) = t(x)$ , el primer bloque contiene únicamente un segmento desde  $O$  con longitud  $t(x) = \lambda\sqrt{2(1-\cos(x))}$ . En el caso singular  $x = 60^\circ$  se da que los bloques son triángulos equiláteros.

**Corolario 3.1.**

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, x \in \varphi_n \iff \begin{cases} (2 \mid n \vee 2 \mid m) \iff v'(x) = n - m \\ 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff v'(x) = \frac{n-m}{2} \end{cases}$$

En la Sección de Relaciones entre Construcciones estudiaremos esta función.

**Corolario 3.2.**

$$\nexists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \varphi_n \iff \frac{m}{n} \notin \mathbb{Q} \iff q(\frac{m}{n}\pi) = \infty$$

**Definición 8.2.** Sea  $q^{-1}(q) = \{x \in X : q(x) = q\}$  el conjunto antiimagen de la función  $q(x)$ , y  $g(q) := |q^{-1}(q)|$

## 4. Relaciones entre las Construcciones

### 4.1. Teoremas de Equivalencias

**Teorema 4.1.** Primer Teorema de Equivalencias

- i)  $\forall p, q \in \mathbb{Z}_{>3} \setminus \{6\}, p = q \implies f(p) = g(q)$
- ii)  $\forall p \in \mathbb{Z}_{>3} \setminus \{6\}, f(p) + g(p) = \varphi(p)$
- iii)  $g(3) = 0 = \frac{\varphi(3)}{2} - 1 \wedge g(6) = 2 = \frac{\varphi(6)}{2} + 1$

*Demostración.* Por el Teorema 1.2. tenemos que  $f(p) = \frac{\varphi(p)}{2}$ , así que veremos

$$f(p) + g(p) = \varphi(p) \iff g(p) = \frac{\varphi(p)}{2} \iff f(p) = g(p)$$

viendo que  $g(p) = \frac{\varphi(p)}{2}$ . Estudiemos las condiciones de  $q$  para conocer los denominadores y numeradores  $m$  y  $n$  para los cuales  $q(\frac{m}{n}\pi) = q$ :

$$\begin{cases} 2 \nmid n \wedge 2 \mid m \iff n = \frac{q}{2} \wedge 2 \mid m \iff 2 \mid q \wedge 4 \nmid q \\ 2 \mid n \wedge 2 \nmid m \iff n = \frac{q}{2} \wedge 2 \nmid m \iff 4 \mid q \\ 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff n = q \wedge 2 \nmid m \iff 2 \nmid q \end{cases} \implies q^{-1}(q) = \begin{cases} \chi_{\frac{q}{2}} \iff 2 \mid q \wedge 4 \nmid q \\ \varphi_{\frac{q}{2}} \iff 4 \mid q \\ \varphi_q \setminus \chi_q \iff 2 \nmid q \end{cases}$$

Luego, siguiendo el Lema de Simetrías:

$$|q^{-1}(q)| = g(q) = \begin{cases} \varphi(q) - |\chi_q| = \frac{1}{2}\varphi(q) \iff 2 \nmid q \\ \varphi(\frac{q}{2}) \iff 4 \mid q \\ |\chi_{\frac{q}{2}}| = \frac{1}{2}\varphi(\frac{q}{2}) \iff 2 \mid q \wedge 4 \nmid q \end{cases} = \frac{\varphi(q)}{2}$$

iii) Cuando consideramos el número de puntas  $p$  en lugar del número de bloques  $k$ , siguiendo lo visto en el Teorema 3.1, estamos interpretando a  $P_{\frac{p}{3}}$  como una figura del conjunto  $q^{-1}(6)$ . Por tanto, el conjunto  $q^{-1}(3)$  se queda vacío, al haber movido la única figura que contenía al otro conjunto.

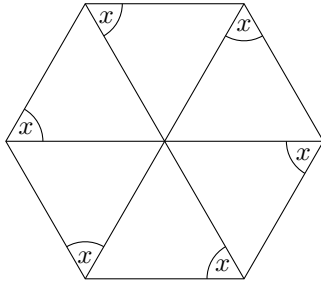


Figura 14:  $T_{60^\circ}$

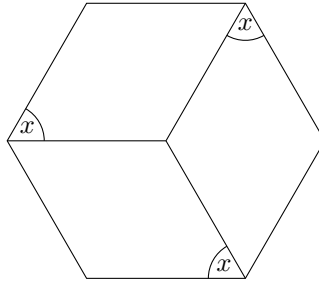


Figura 15:  $P_{60^\circ}$

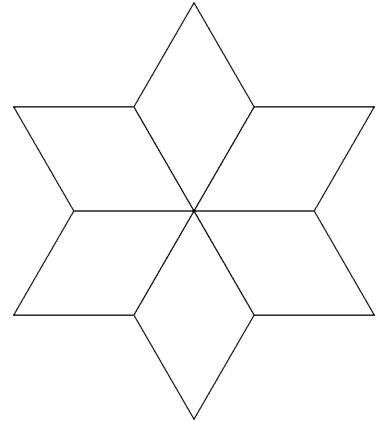


Figura 16:  $P_{120^\circ}$

**Definición 9.1.**

- $T_x \sim_p P_x \iff p(x) = q(x) \wedge v(x) = v'(x)$
- $T_{x_1} \sim_p T_{x_2} \iff p(x_1) = p(x_2) \wedge v(x_1) = v(x_2)$
- $P_{x_1} \sim_p P_{x_2} \iff q(x_1) = q(x_2) \wedge v'(x_1) = v'(x_2)$

**Definición 9.2.**

- $T_x \sim_k P_x \iff k(x) = k'(x) \wedge v(x) = v'(x)$
- $T_{x_1} \sim_k T_{x_2} \iff k(x_1) = k(x_2) \wedge v(x_1) = v(x_2)$
- $P_{x_1} \sim_k P_{x_2} \iff k'(x_1) = k'(x_2) \wedge v'(x_1) = v'(x_2)$

**Teorema 4.2.** Segundo Teorema de Equivalencias

$$\begin{aligned}
 i) \quad & \forall x \in X, T_x \sim_p P_x \iff x = \frac{\pi}{3} \\
 ii) \quad & \forall x_t, x_p \in X, T_{x_t} \sim_k P_{x_p} \iff 2x_t = x_p \\
 iii) \quad & \forall x_1, x_2 \in X_1, T_{x_1} \sim_p T_{x_2} \iff T_{x_1} \sim_k T_{x_2} \iff x_1 = x_2 \\
 iv) \quad & \forall x_1, x_2 \in X, P_{x_1} \sim_k P_{x_2} \iff x_1 = x_2 \\
 v) \quad & \forall x_1, x_2 \in X, P_{x_1} \sim_p P_{x_2} \iff x_1 = \frac{\pi}{3} \wedge x_2 = \frac{2}{3}\pi
 \end{aligned}$$

*Demostración.* i) Veamos por separado qué valores de  $x \in X$  permiten que  $p(x) = q(x)$  y  $v(x) = v'(x)$ .

- 1.  $p(x) = q(x) = 2n \iff 2 \nmid n \wedge (2 \mid n \vee 2 \mid m) \iff 2 \mid m \wedge 2 \nmid n \iff x \in \chi_n$
- 2.  $p(x) = q(x) = n \iff 4 \mid n \wedge (2 \nmid n \wedge 2 \nmid m)$  es una contradicción
- 3.  $p\left(\frac{\pi}{3}\right) = q\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6$

Por tanto,  $p(x) = q(x) \iff 2 \mid m \wedge 2 \nmid n$ . Luego:

- 4.  $v(x) = v'(x) \wedge 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff \frac{n-m}{2} = n - 2m \iff 3m = n \iff \frac{m}{n} = \frac{1}{3}$
- 5.  $v(x) = v'(x) \wedge 2 \nmid n \wedge 2 \mid m \iff n - 2m = n - m \iff m = 0 \iff x = 0 \notin X$
- 6.  $v(x) = v'(x) \wedge 4 \mid n \wedge 2 \nmid m \iff \frac{n-2m}{2} = n - m \iff n - 2m = 2n - 2m \iff n = 0 \notin \mathbb{Z}_{\geq 2}$
- 7.  $v(x) = v'(x) \wedge 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff \frac{n-2m}{4} = n - m \iff 3n = 2m \iff \frac{m}{n} = \frac{3}{2} \iff x \notin X$

Así vemos que  $v(x) = v'(x) \iff x = \frac{\pi}{3}$ . Además, y es un caso especial,  $p\left(\frac{\pi}{3}\right) = q\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6$ .

$$ii) T_{x_t} \sim_k P_{x_p} \iff \frac{k}{v} = \frac{k'}{v'} \iff \frac{2n_t}{n_t - 2m_t} = \frac{2n_p}{n_p - m_p} \iff \frac{2m_t}{n_t} = \frac{m_p}{n_p} \iff 2x_t = x_p$$

Ya que  $\frac{k}{v} = \frac{k'}{v'} \wedge \text{mcd}(k, v) = \text{mcd}(k', v') = 1 \iff k = k' \wedge v = v'$ .

$$iii) T_{x_1} \sim_p T_{x_2} \iff T_{x_1} \sim_k T_{x_2} \iff \frac{k_1}{v_1} = \frac{k_2}{v_2} \iff \frac{2n_1}{n_1 - 2m_1} = \frac{2n_2}{n_2 - 2m_2} \iff \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \iff x_1 = x_2$$

$$iv) P_{x_1} \sim_k P_{x_2} \iff \frac{k'_1}{v'_1} = \frac{k'_2}{v'_2} \iff \frac{2n_1}{n_1 - m_1} = \frac{2n_2}{n_2 - m_2} \iff \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \iff x_1 = x_2$$

**Definición 10.** Sean  $x_t : \mathbb{Z}_{\geq 3} \times \gamma'_p \rightarrow X_1$  y  $x_p : \mathbb{Z}_{\geq 3} \times \gamma'_q \rightarrow X$  las funciones

$$\begin{aligned}
 x_t(p, v) = x_t & \iff p(x_t) = p \wedge v(x_t) = v \\
 x_p(q, v') = x_p & \iff q(x_p) = q \wedge v'(x_p) = v'
 \end{aligned}$$

**Proposición 4.**

$$\begin{aligned} i) \forall (p, v) \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \times \gamma'_p, \quad x_t(p, v) &= \frac{p-2v}{2p} \pi \in X_1 \\ ii) \forall (q, v') \in \mathbb{Z}_{> 3} \times \gamma'_q, \quad x_p(q, v') &= \frac{q-2v'}{q} \pi \in X \end{aligned}$$

*Demostración. Veamos primero i)*

$$\frac{p}{v} = \frac{2n}{n-2m} \iff p(n-2m) = 2nv \iff pn - 2pm = 2nv \iff n(p-2v) = 2pm \iff \frac{m}{n} = \frac{p-2v}{2p}$$

$$1. 2m < n \iff p-2v < p \iff v > 0$$

$$2. p-2v > 0 \iff 2v < p$$

$$3. p, v \in \mathbb{Z}^+ \wedge \text{mcd}(p, v) = 1$$

por lo que, en suma,  $v \in \gamma'_p$ . Esto reafirma el Teorema 1.2, porque

$$\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3} : v \in \gamma'_p \wedge |\gamma'_p| = \frac{\varphi(p)}{2}$$

$$ii) \frac{q}{v'} = \frac{2n}{n-m} \iff q(n-m) = 2nv' \iff qn - qm = 2nv' \iff n(q-2v') = qm \iff \frac{m}{n} = \frac{q-2v'}{q}$$

$$1. m < n \iff q-2v' < q \iff v' > 0$$

$$2. q-2v' > 0 \iff 2v' < q$$

$$3. q, v' \in \mathbb{Z}^+ \wedge \text{mcd}(q, v') = 1$$

En conclusión, análogamente,  $v' \in \gamma'_q$ , por lo que hemos hallado una vía de demostración del Primer Teorema de Equivalencias que no demanda ninguna información sobre  $\chi_n$ .

**Corolario 4.**

$$\forall (p, v) \in \mathbb{Z}_{> 3} \times \gamma_p : 2x_t(p, v) = x_p(p, v)$$

No es más que una reexpresión del apartado ii) del Segundo Teorema de Equivalencias, y se sigue inmediatamente de la Proposición 4. Y es que  $2x_t = x_p$  implica que los ángulos internos que se formarán serán iguales, por lo tanto será el mismo número de puntas y de vueltas el que satisfaga la condición de cierre.

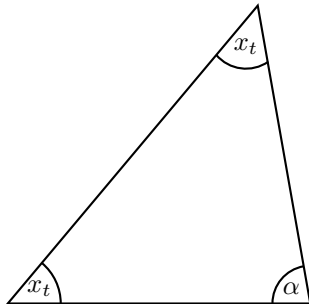


Figura 17:  $x_t = 50^\circ$

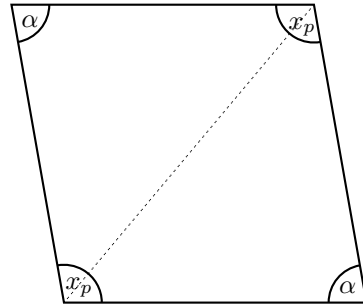


Figura 18:  $x_p = 2x_t = 100^\circ$

**Observación 2.**

$$\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3} : x_t(p, 1) = x_t \iff T_{x_t} \text{ p-gono regular}$$

**Definición 11.** Sean  $\varphi_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}} \varphi_n$  y  $\gamma_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}} \gamma_n$

**Definición 12.** Sean  $T := \{T_x : x \in \gamma_\infty\}$  y  $P := \{P_x : x \in \varphi_\infty\}$

**Teorema 4.3.** Tercer Teorema de Equivalencias

$$|T| = |P|$$

*Demostración.* Por definición de equipotencia, hallemos una función biyectiva que relacione ambos conjuntos. Consideremos la función ángulo homólogo  $h$ :

$$h(x_t) = x_p \iff T_{x_t} \sim_k P_{x_p}$$

Por el Segundo Teorema de Equivalencias,  $T_{x_t} \sim_k P_{x_p} \iff 2x_t = x_p$ , por lo que  $h$  es biyectiva.

1.  $h(x_t) = 2x_t$ ,  $h^{-1}(x_p) = \frac{x_p}{2}$
2.  $\forall x_t \in \gamma_\infty, \exists x_p \in \varphi_\infty : h(x_t) = x_p = 2x_t$
3.  $\forall x_p \in \varphi_\infty, \exists x_t \in \gamma_\infty : h^{-1}(x_p) = x_t = \frac{x_p}{2}$

## 4.2. Radio Mínimo Relativo de una Figura

**Definición 13.1.** Sea  $r_t : X_1 \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow (0, r(x))$  la función radio generalizada para figuras  $T_x$ .

**Definición 13.2.** Sea  $r_p : X \times \mathbb{Q}^+ \rightarrow (0, r'(x))$  la función radio generalizada para figuras  $P_x$ .

**Proposición 5.1.** Definición completa de  $r_t$

$$r_t(x, n) = r(x) \frac{\sin(x)}{\sin(\frac{p(x)-n}{p(x)}\pi - x)}$$

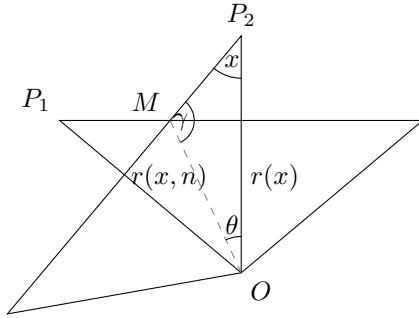


Figura 19: Disección de una construcción

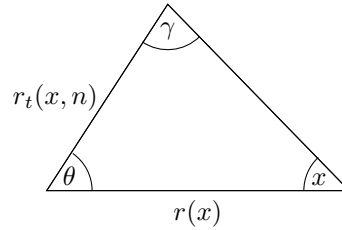


Figura 20: Triángulo auxiliar

Definimos el ángulo central  $\theta$  como  $n$  medias partes de sección  $(\frac{2\pi}{p(x)})$ :

$$1. \theta(x, n) := \frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{p(x)} = \frac{n\pi}{p(x)}$$

Por la relación fundamental de ángulos de un triángulo:

$$2. x + \gamma + \theta = \pi$$

Siguiendo el Teorema del Seno:

$$3. \frac{r_t(x, n)}{\sin x} = \frac{r(x)}{\sin \gamma} \iff r(x, n) = r(x) \frac{\sin x}{\sin \gamma}$$

Juntándolo todo:

$$4. r_t(x, n) = r(x) \frac{\sin x}{\sin(\pi - \theta - x)} = r(x) \frac{\sin x}{\sin\left(\frac{p(x)-n}{p(x)}\pi - x\right)}$$

**Proposición 5.2.**

$$r(x, v(x)) = \min_{n \in (0, p(x)) \cap \mathbb{Z}^+} r_t(x, n)$$

*Demostración.* La variable  $n$  sólo se halla presente en el denominador, por lo que hemos de hallar el valor de  $n$  para el cual éste denominador se maximiza; esto es, para el cual

$$\frac{p(x)-n}{p(x)}\pi - x = \frac{\pi}{2} \iff \sin\left(\frac{p(x)-n}{p(x)}\pi - x\right) = 1$$

Por la Proposición 4:

$$\frac{p(x)-n}{p(x)}\pi - x = \frac{p(x)-n}{p(x)}\pi - \frac{p(x)-2v(x)}{2p(x)}\pi = \frac{2(p(x)-n) - (p(x)-2v(x))}{2p(x)}\pi = \frac{2v(x)-2n+p(x)}{2p(x)}\pi$$

$$\frac{2v(x)-2n+p(x)}{2p(x)}\pi = \frac{\pi}{2} \iff n = v(x)$$

**Corolario 5.1.** Radio Mínimo Relativo para Primera Construcción

$$r_0(x) := \frac{r_t(x, v(x))}{r(x)} = \sin(x)$$

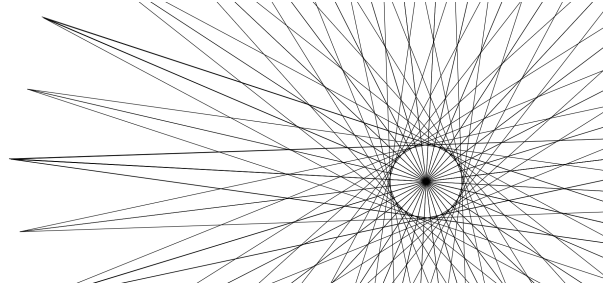


Figura 21: Zoom en  $T_{5^\circ}$ .

Esto significa que la función  $\sin(x)$  representa el *radio mínimo relativo* de la figura generada por el ángulo  $x$ . En la Figura sería un 8,715 % del radio total, ya que  $\sin(5^\circ) = 0,08715$ .

**Observación 3.**

$$x_t = x_t(p, 1) \iff r(x_t, v(x_t)) = a(p, r(x_t))$$

donde  $a(p, r)$  es la apotema de un  $p$ -gono de radio  $r$ .

**Proposición 6.1.** Definición completa de  $r_p$

$$r_p(x, n) = \begin{cases} r'(x) \frac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{q(x)-n}{q(x)}\pi - x\right)} & \text{si } x \in (0, \frac{\pi}{3}), \\ r'(x) \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{q(x)-2n}{2q(x)}\pi + \frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in (\frac{\pi}{3}, \pi). \end{cases}$$

Para el intervalo de  $x \in (0, \frac{\pi}{3})$  se sigue exactamente el mismo procedimiento que en la Proposición 5.1, ya que el ángulo que se encuentra en cada punta es  $2x$ , y en la disección se estudia la mitad de ése, y en este intervalo pasa lo mismo en la segunda construcción.

No se da así para el dominio complementario. Siguiendo las Definiciones 7.3. y 8.1, vemos que el ángulo que se formará en las puntas será  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
1. \quad & \theta(x, n) := \frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{q(x)} = \frac{n\pi}{q(x)} \\
2. \quad & \frac{\alpha}{2} + \gamma + \theta = \pi \iff \gamma = \pi - \frac{n\pi}{q(x)} - \frac{\pi - x}{2} = \frac{q(x) - 2n}{2q(x)}\pi + \frac{x}{2} \\
3. \quad & \frac{r_p(x, n)}{\sin(\frac{\alpha}{2})} = \frac{r'(x)}{\sin(\gamma)} \iff r_p(x, n) = r'(x) \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\gamma)} \\
4. \quad & \sin(\frac{\alpha}{2}) = \sin(\frac{\pi - x}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}) = \cos(\frac{x}{2}) \\
5. \quad & r_p(x, n) = r'(x) \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{q(x) - 2n}{2q(x)}\pi + \frac{x}{2})}
\end{aligned}$$

**Proposición 6.2.**

$$r_p(x, \frac{q(x) - 2v'(x)}{2}) = \min_{n \in (0, q(x)) \cap \mathbb{Q}^+} r_p(x, n)$$

Por analogía a la Proposición 5.2, encontremos aquella  $n$  que hace que  $\gamma = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{q - 2n}{2q}\pi + \frac{q - 2v}{2q}\pi = \frac{\pi}{2} \iff n = \frac{q - 2v}{2}$$

Cuando el número de puntas  $q$  sea par,  $n$  será un entero, pero si  $q$  es impar, entonces  $n$  será racional y  $2n$  entero

**Corolario 5.2.** Radio Mínimo Relativo para Segunda Construcción

$$r'_0(x) := \frac{r_p(x, \frac{q(x) - 2v'(x)}{2})}{r'(x)} = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \in (0, \frac{\pi}{3}], \\ \cos(\frac{x}{2}) & \text{si } x \in (\frac{\pi}{3}, \pi). \end{cases}$$

Notemos que la función es continua en el punto de transición:

$$\sin(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \sin(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} \cos(\frac{x}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Definición 14.** Sean  $X_{1_1} = (0, \frac{\pi}{4})$  y  $X_{1_2} = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

**Teorema 4.4.** Cuarto Teorema de Equivalencias

$$\forall x_t, x_p \in X : T_{x_t} \sim_k P_{x_p} \implies \begin{cases} r_0(x_t) < r'_0(x_p) \iff x_t \in X_{1_1} \wedge x_p \in X_1 \\ r_0(x_t) = r'_0(x_p) \iff x_t = \frac{\pi}{4} \wedge x_p = \frac{\pi}{2} \\ r_0(x_t) > r'_0(x_p) \iff x_t \in X_{1_2} \wedge x_p \in X_2 \setminus \{\frac{\pi}{2}\}. \end{cases}$$

*Demostración.* Siguiendo el apartado ii) del Segundo Teorema de Equivalencias y los Corolarios 5.1. y 5.2. planteamos la desigualdad entre ambas funciones en los diversos tramos:

$$\begin{aligned}
1. \quad & x_p \in (0, \frac{\pi}{3}) \wedge 2x_t = x_p \iff x_t \in (0, \frac{\pi}{6}) \\
2. \quad & r_0(x_t) < r'_0(x_p) \iff r_0(x_t) < r'_0(2x_t) \iff \sin(x_t) < \sin(2x_t)
\end{aligned}$$



Lo cual se cumple para toda  $x_t \in (0, \frac{\pi}{6}]$ .

$$3. r_0(x_t) < r'_0(x_p) \iff \sin(x_t) < \cos(\frac{x_p}{2}) \iff \sin(x_t) < \cos(x_t)$$

Esta desigualdad se verifica positivamente para  $x_t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$

$$4. r_0(\frac{\pi}{4}) = r'_0(\frac{\pi}{2}) \iff \sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5. r_0(x_t) > r'_0(x_p) \iff \sin(x_t) > \cos(\frac{x_p}{2}) \iff \sin(x_t) > \cos(x_t)$$

Lo cual es cierto para  $x_t \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ . Para el caso  $T_{x_t} \sim P_{x_p} \wedge x_t = x_p = \frac{\pi}{3}$ , se da  $r_0(\frac{\pi}{3}) = r'_0(\frac{\pi}{3})$ .

### 4.3. Diagrama Clasificadorio de Figuras

- Las figuras de  $\{T_x : x \in X_2\}$  son *espirales infinitas* cuya distancia al centro  $O$  crece linealmente si  $x \neq \frac{\pi}{2}$ .
- En  $\{T_x : x \in X_{1_2} \cap \gamma_\infty\}$  y  $\{P_x : x \in X_2 \cap \varphi_\infty\}$  son *figuras finitas y cerradas* Aquí,  $r_0(x_t) > r'_0(x_p)$ .
- En  $\{T_x : x \in X_{1_1} \cap \gamma_\infty\}$  y  $\{P_x : x \in X_1 \cap \varphi_\infty\}$  son también finitas y cerradas. Aquí, en cambio,  $r_0(x_t) < r'_0(x_p)$ .
- Finalmente, en  $\{T_x : x \in X_1 \setminus \gamma_\infty\}$  y  $\{P_x : x \in X \setminus \varphi_\infty\}$  se da una *singularidad finita*, pues el radio converge y no se cumple la condición de cierre

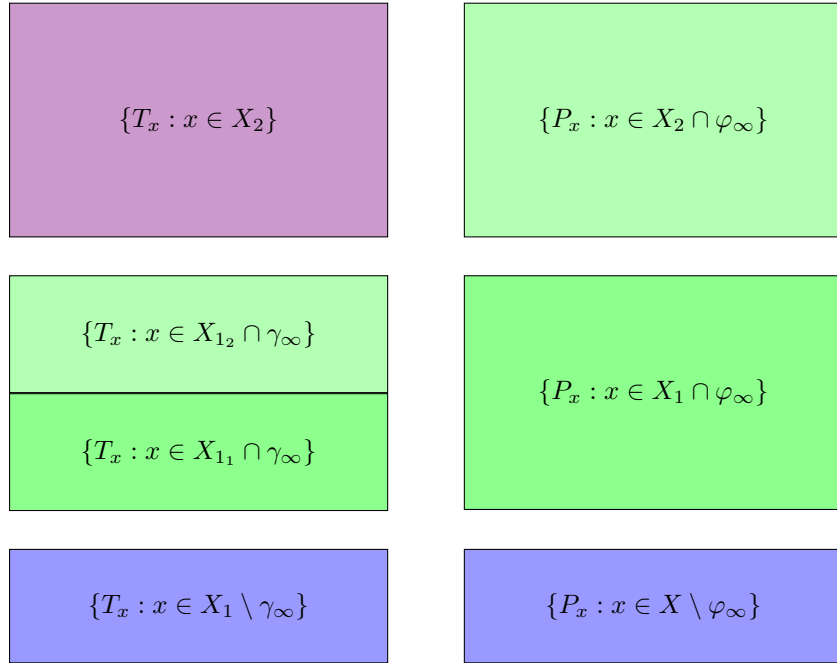


Figura 22: Diagrama Clasificadorio

## 5. Apéndice

### 5.1. Demostración del Lema de Simetrías

$$i) \forall n \in \mathbb{Z}_{>2}, 2 \nmid n \iff |\varphi_n| = 2|\chi_n|$$

*Demostración.*

$$1. \forall n \in \mathbb{Z}^+ : \exists f_n : [1, \frac{n-1}{2}] \cap \mathbb{Z}^+ \rightarrow [\frac{n+1}{2}, n-1] \cap \mathbb{Z}^+ \text{ biyectiva}$$

*Es trivial ver que el dominio y el codominio de esta función son conjuntos finitos y numerables con cardinal  $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}^+ \iff 2 \nmid n$ :*

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+ : a \leq b \implies |[a, b] \cap \mathbb{Z}^+| = b - a + 1$$

$$n - 1 - \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{2(n-1) - (n+1) + 2}{2} = \frac{n-1}{2}$$

*Además:*

$$2 \nmid n \iff [1, \frac{n-1}{2}] \cap \mathbb{Z}^+ \cup [\frac{n+1}{2}, n-1] \cap \mathbb{Z}^+ = [1, n-1] \cap \mathbb{Z}^+ = \{m \in \mathbb{Z}^+ : m < n\}$$

*En concreto vamos a considerar la regla de asignación*

$$f_n(m) = n - m \iff f_n(m) + m = n$$

$m$	1	2	3	4	5	6	7
$f_{15}(m)$	14	13	12	11	10	9	8

$$2. \forall n \in \mathbb{Z}^+ : 2 \nmid n \iff \forall m \in [1, \frac{n-1}{2}] \cap \mathbb{Z}^+, \begin{cases} 2 \mid m \iff 2 \nmid f_n(m) \\ 2 \nmid m \iff 2 \mid f_n(m) \end{cases}$$

*Esto se da porque, por la regla de asignación de la aplicación, vemos que la suma del argumento  $m$  y su imagen  $f_n(m)$  debe ser igual a  $n$ , que es un número impar; y sólo la suma de un par y un impar resultan en un número impar.*

$$3. \forall m, n \in \mathbb{Z}^+ : \text{mcd}(m, n) = 1 \iff \text{mcd}(n, n - m) = 1 \iff (m \in \gamma'_n \iff f_n(m) \in \varphi'_n \setminus \gamma'_n)$$

$m$	1	2	<del>3</del>	4	5	<del>6</del>	7	8	<del>9</del>	10	11	<del>12</del>	13
$f_{27}(m)$	26	25	<del>24</del>	23	22	<del>21</del>	20	19	<del>18</del>	17	16	<del>15</del>	14

*Con esta información podemos ver que existirá una biyección entre los elementos pares e impares de  $\varphi'_n$ :*

$\chi_{27}$	2	4	8	10	14	16	20	22	26
$\varphi_{27} \setminus \chi_{27}$	25	23	19	17	13	11	7	5	1

$$\forall a \in \chi'_n, \exists! b \in \varphi'_n \setminus \chi'_n : a + b = n$$

$$\forall b \in \varphi'_n \setminus \chi'_n, \exists! a \in \varphi'_n : a + b = n$$

*Por lo que ya habríamos demostrado la simetría ii) para  $2 \nmid n$ . Veámosla en general:*

$$ii) \forall n \in \mathbb{Z}_{>2}, |\varphi_n| = 2|\gamma_n|$$

$m$	1	<del>2</del>	<del>3</del>	<del>4</del>	<del>5</del>	<del>6</del>	7	<del>8</del>	<del>9</del>	<del>10</del>	11	<del>12</del>	13	<del>14</del>
$f_{30}(m)$	29	<del>28</del>	<del>27</del>	<del>26</del>	<del>25</del>	<del>24</del>	23	<del>22</del>	<del>21</del>	<del>20</del>	19	<del>18</del>	17	<del>16</del>

Donde estamos considerando la misma regla de asignación para  $f_n(m)$ . Notemos que, aquí, la unión del dominio y el codominio no es igual a todos los enteros menores que  $n$ , sino que se excluye  $\frac{n}{2}$  cuando  $2 \mid n$ , lo cual no afectará al cómputo ni a la relación entre  $\varphi_n$  y  $\gamma_n$ , porque

$$2 \mid n \wedge n > 2 \implies \gcd(n, \frac{n}{2}) > 1 \implies \frac{n}{2} \notin \varphi'_n$$

$$\forall m \in [1, \frac{n}{2}) \cap \mathbb{Z}^+, (2m < n \wedge \frac{n}{2} < f_n(m) < n) \wedge (m \in \gamma'_n \iff f_n(m) \in \varphi'_n \setminus \gamma'_n)$$

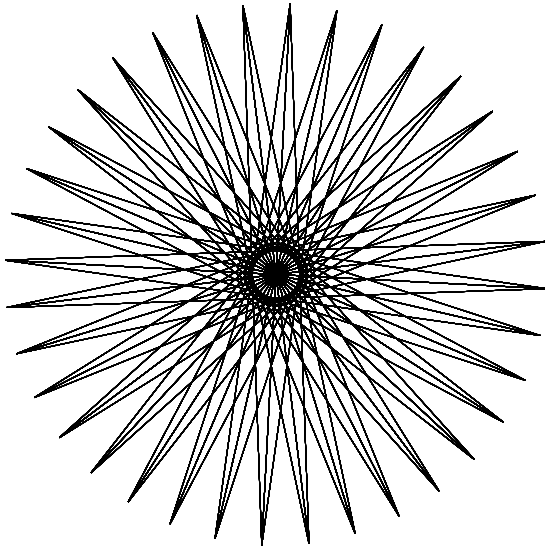
$$|\gamma'_n| + |\varphi'_n \setminus \gamma'_n| = |\gamma'_n| + (|\varphi'_n| - |\gamma'_n|) = |\varphi'_n| \wedge |\gamma'_n| = |\varphi'_n \setminus \gamma'_n| \implies |\varphi'_n| = 2|\gamma'_n|$$

## 5.2. Software

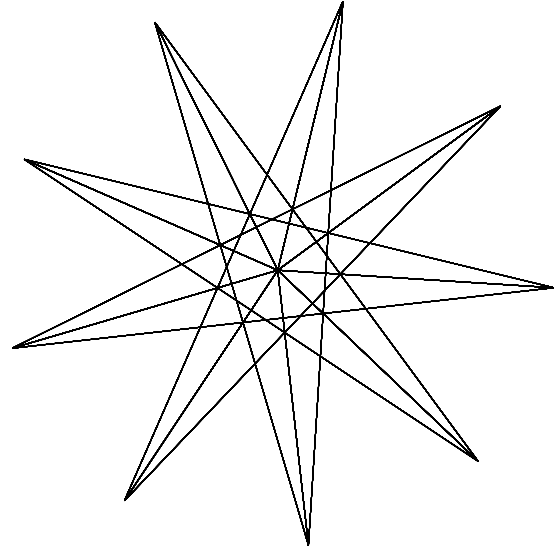
<https://aidanLorenzo.github.io>

<https://github.com/aidanLorenzo/aidanLorenzo.github.io>

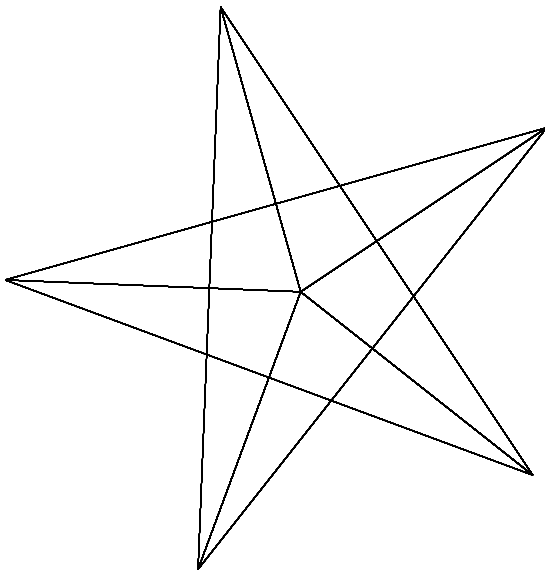
## 5.3. Figuras



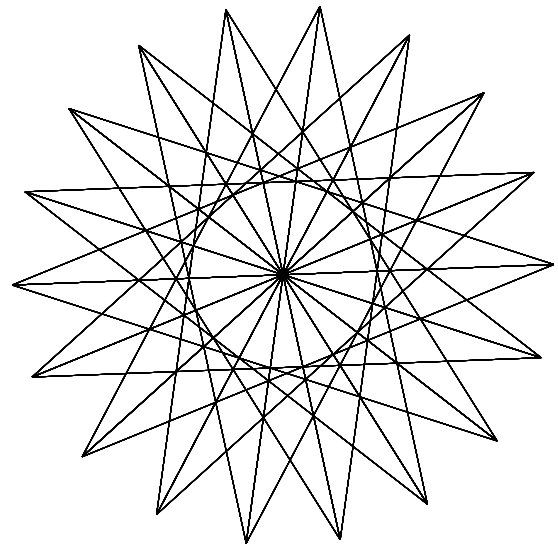
$T_{5^\circ}$



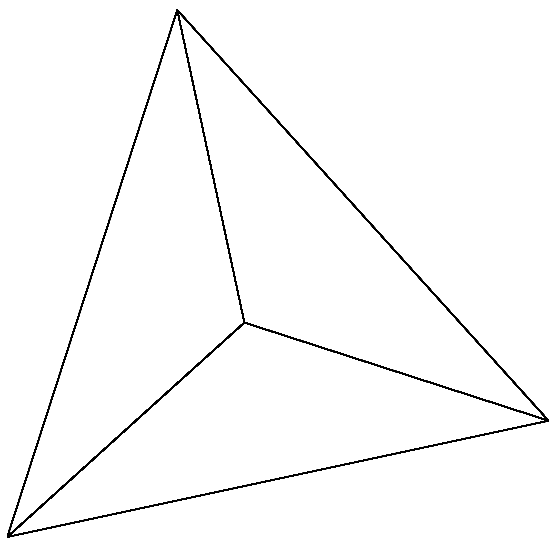
$T_{10^\circ}$



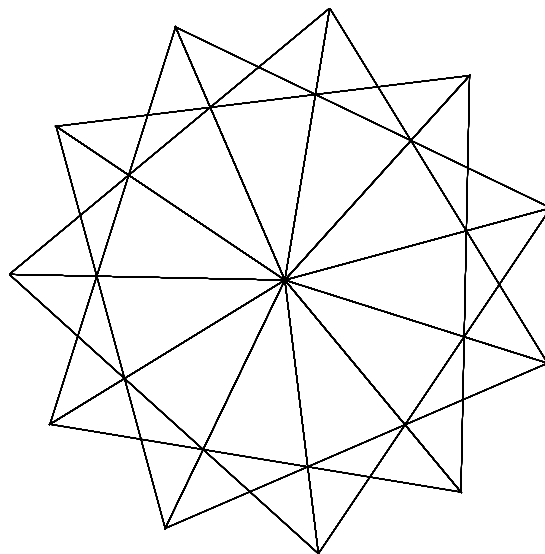
$T_{18^\circ}$



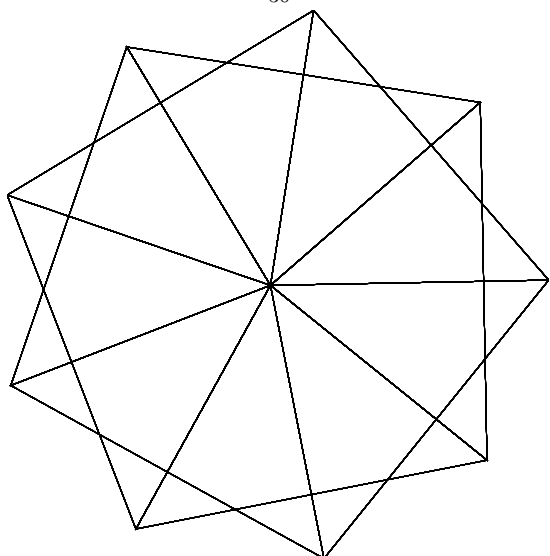
$T_{20^\circ}$



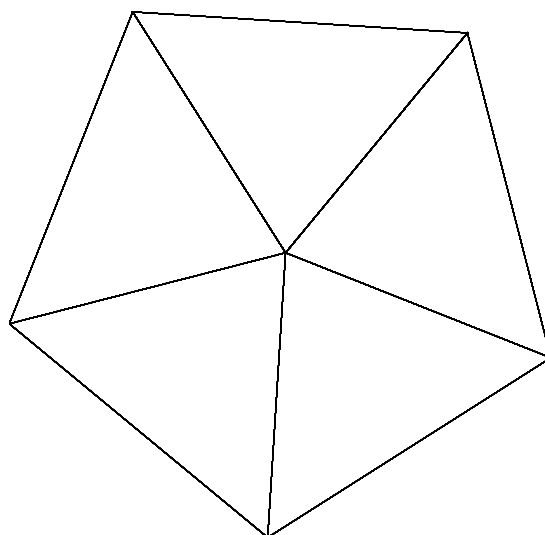
$T_{30^\circ}$



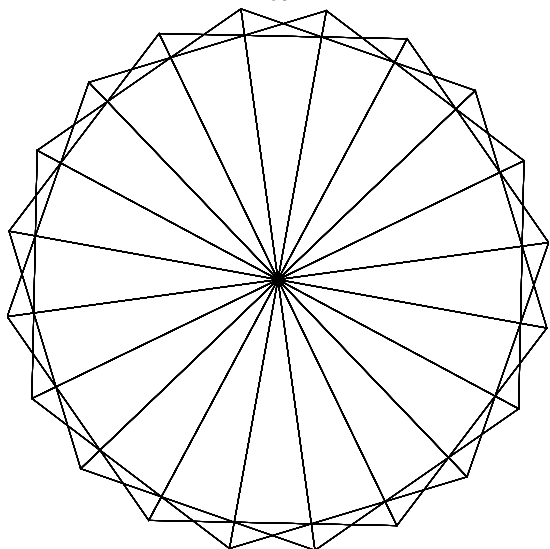
$T_{40,90^\circ}$



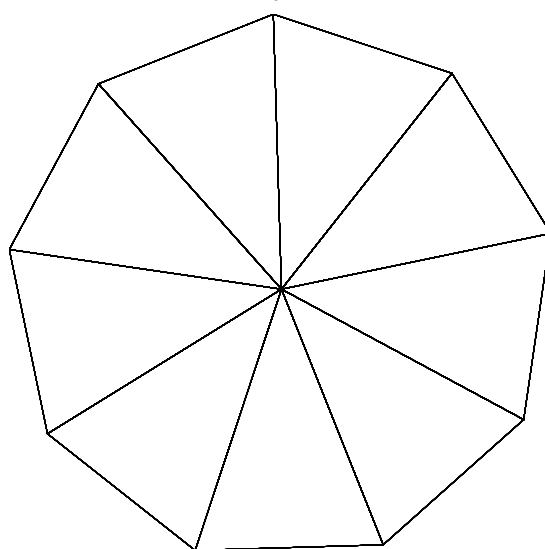
$T_{50^\circ}$



$T_{54^\circ}$



$T_{63^\circ}$



$T_{70^\circ}$