Dos Construcciones Geométricas Iterativas

Aidan Lorenzo

Noviembre 2024

1. Introducción

En este trabajo se desarrolla una doble generalización de la Espiral de Teodoro (véase la Figura 4 en la página siguiente). Por una parte generalizamos el ángulo de formación de nuevos triángulos: en la mencionada Espiral, el ángulo empleado es $\frac{\pi}{2}$, a fin de que, por el Teorema de Pitágoras, la distancia del centro a cada punto sea $\sqrt{n}$.

Por otra parte, ampliaremos esta construcción a bloques no triangulares, y demostraremos algunos teoremas que describen la relación entre los comportamientos de ambas construcciones geométricas iterativas. Conectaremos, además, nociones de Teoría de Números, al introducir la función totiente de Euler y demostrar algunas simetrías que rijen y sirven de Lema.

2. Primera Construcción

2.1. Definición de la Construcción

Definición 1.1. Sea $x \in (0, \pi) = X$ un *ángulo de formación* en su *dominio de generación.*

Definición 1.2. Llamaremos *bloque fundamental* al triángulo de lados a_i, b_i y c_i, tales que

$$\forall i \in \mathbb{Z}^+, a_i = 1 \text{ y } b_1 = 1$$

y O el *centro* de la figura, que es la intersección de b_i y c_i. x es el ángulo que separa a_i y b_i.

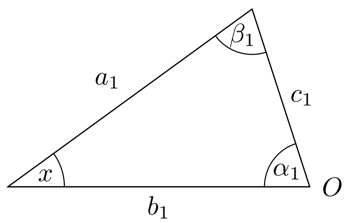


Figura 1: Triángulo Primero.

Definición 1.3. Sea T_x la figura generada por el ángulo x yuxtaponiendo bloques fundamentales mediante la siguiente regla:

$$b_i = c_{i-1}$$

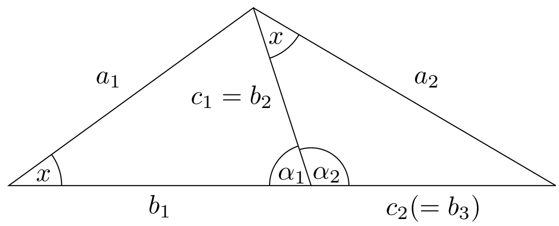


Figura 2: Los dos primeros bloques de T_{36°.

Definición 1.4. Sea $c_i(x)$ la longitud del segmento c_i de T_x.

2.2. Estudio de convergencia

Proposición 1.1.

$$c_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ \sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1}\cos x} & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

Demostración. Por el Teorema del Coseno y las definiciones anteriores tenemos:

$$c_i^2(x) = a_i^2 + b_i^2 - 2a_ib_i\cos x \iff c_i(x) = \sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1}\cos x}$$

La función está definida de forma recurrente, por lo que necesitamos un valor inicial de definición:

$$b_i = c_{i-1} \land b_1 = 1 \implies c_0 = 1$$

Proposición 1.2.

$$i)\ \lim_{i\to\infty} c_i(x) = \infty \iff \cos(x) \leq 0$$

$$ii)\ \lim_{i\to\infty} (c_i(x) - c_{i-1}(x)) = |\cos(x)| \iff \cos(x) < 0$$

$$iii)\ \lim_{i\to\infty} c_i(x) = \frac{1}{2\cos(x)} \iff \cos(x) > 0$$

Demostración. Notemos primero que, por construcción, $c_i(x) > 0$, pues refiere a la longitud de un segmento.

Probemos i). Veamos que las funciones asociadas a ángulos x con coseno negativo o nulo son monótonamente crecientes.

$$\forall i \in \mathbb{Z}^+ \forall x \in X, c_i(x) > 0 \land \cos(x) \leq 0 \implies c_i(x) > c_{i-1}(x)$$

ya que

$$\sqrt{1 + c_{i-1}^2 + 2c_{i-1}|\cos(x)|} > c_{i-1} \iff 2c_{i-1}|\cos(x)| > -1$$

lo cual se cumple siempre. Además, la sucesión no está acotada superiormente; entonces, diverge. Además, $c_i(90°) = \sqrt{i}$. Falta demostrar la convergencia de la serie para $\cos(x) > 0$

Definición 2.1. Llamaremos *dominio de convergencia* al intervalo $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, para el cual

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}) \iff cos(x) > 0 \iff c_i(x) \text{ converge}$$

Definición 2.2. Análogamente, llamaremos *dominio de no convergencia* al intervalo $X_2 = [\frac{\pi}{2}, \pi)$, para el cual

$$x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \iff \cos(x) \leq 0 \iff \lim_{i\to\infty} c_i(x) = \infty$$

Definición 2.3 Sea $r(x) = \frac{1}{2\cos(x)}$ la función *radio*, $\forall x \in X_1$

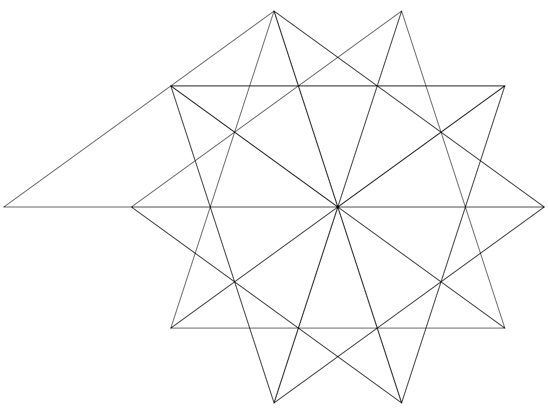


Figura 3: $T_{36°}$

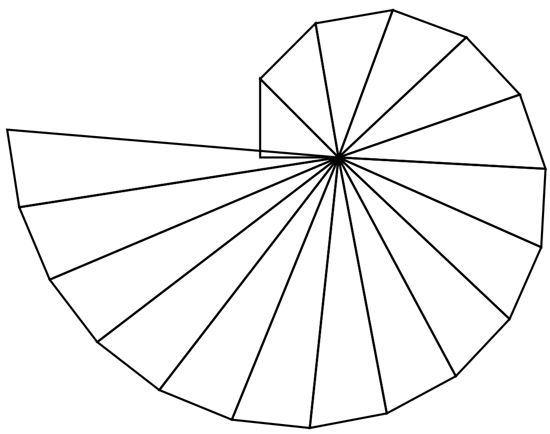


Figura 4: $T_{90°}$ (Espiral de Teodoro)

2.3. Estudio de una función: $p(x)$

Definición 3.1.
Sea $\varphi_n = |\{\frac{m}{n}\pi : m \in \mathbb{Z}^+{}_{<n} \wedge mcd(m,n) = 1\}|$ y $\varphi'_n = |\{m \in \mathbb{Z}^+{}_{<n} : mcd(m,n) = 1\}|$

Definición 3.2.
Sea $\gamma_n = |\{\frac{m}{n}\pi : 2m < n \wedge m \in \mathbb{Z}^+ \wedge mcd(m,n) = 1\}|$ y $\gamma'_n = |\{m \in \mathbb{Z}^+ : 2m < n \wedge mcd(m,n) = 1\}|$

Definición 3.3.
$\chi_n = |\{\frac{m}{n}\pi : m \in \mathbb{Z}^+{}_{<n} \wedge mcd(m,n) = 1 \wedge 2 \mid m\}|$, $\chi'_n = |\{m \in \mathbb{Z}^+{}_{<n} : mcd(m,n) = 1 \wedge 2 \mid m\}|$

Observación. Trivialmente, $|\varphi_n| = |\varphi'_n|, |\gamma_n| = |\gamma'_n|$ y $|\chi_n| = |\chi'_n|$.

Definición 4.1. Sea $p : X_1 \to \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ la función $p(x) = |\{P \in F_x : |\overline{OP}| = r(x)\}|$.

Teorema 1.1. Valor de la función $p(x)$

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff \begin{cases} 2 \nmid n \iff p(x) = 2n \\ 4 \mid n \iff p(x) = n \\ 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \implies p(x) = \frac{1}{2}n \end{cases}$$

Demostración. Notemos primero que, si $c_i(x)$ converge, lo hace también $c_{i-1}(x)$, que por la Definición 1.3, es igual a b_i, lo que implica que los bloques serán triángulos isósceles. Siendo O el vértice que une estos dos segmentos, y $\alpha_i = \hat{O}$, vemos también que α_i converge a $\alpha = \pi - 2x$. Luego, veamos que existe un número finito de bloques para el cual la suma de todos sus ángulos α constantes suman $v \cdot 2\pi$ para algún $v \in \mathbb{Z}^+$:

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff x = \frac{m}{n}\pi \iff \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2n}{n-2m} \iff \exists k, v \in \mathbb{Z}^+ : mcd(k,v) = 1 \wedge k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi$$

Esto significa que, tras k triángulos isósceles constantes, los nuevos triángulos se dibujarán sobre otros ya existentes, al ser α constante. Ahora, para conocer el valor de k en función de x, haremos lo siguiente:

$$k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi \iff \frac{k}{v} = \frac{2n}{n-2m}$$

Para igualar k al numerador de la expresión hay que estudiar qué valores de m y n generan una fracción irreductible.

$$\begin{cases} 2 \nmid n \wedge 1 = mcd(n,m) = mcd(n, n-m) \implies mcd(n, n-2m) = mcd(2n, n-2m) = 1 \\ 4 \mid n \wedge 1 = mcd(n,m) = mcd(n, n-m) \implies mcd(n, n-2m) = mcd(2n, n-2m) = 2 \\ 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \wedge 1 = mcd(n,m) = mcd(n, n-m) \implies mcd(n, n-2m) = 2 \implies mcd(2n, n-2m) = 4 \end{cases}$$

En consecuencia tenemos que

$$\begin{cases} 2 \nmid n \implies mcd(2n, n-2m) = 1 \implies k(x) = 2n \\ 4 \mid n \implies mcd(2n, n-2m) = 2 \implies mcd\left(n, \frac{n-2m}{2}\right) = 1 \implies k(x) = n \\ 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \implies mcd(2n, n-2m) = 4 \implies mcd\left(\frac{n}{2}, \frac{n-2m}{4}\right) = 1 \implies k(x) = \frac{n}{2} \end{cases}$$

Falta ver que el valor $k(x)$, cuya expresión acabamos de encontrar, coincide con $p(x)$, objeto de este Teorema.

i	1	2	3	4	5	6	...	$k-1$	k
$\sum_{j=1}^{i} p_j$	2	3	4	5	6	7	...	k	k

Habiendo notado que los bloques son triángulos isósceles, donde $c_i = b_i = r(x)$, vemos que el primer bloque aportará 2 nuevas puntas a la figura; a partir de éste, cada nuevo triángulo aportará 1 punta nueva, pues compartirá una con el bloque anterior; finalmente, el último bloque no añade ninguna punta más a la figura, pues une dos ya existentes: las del primer y penúltimo bloque.

Corolario 1.1.

$$\nexists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff \frac{m}{n} \notin \mathbb{Q} \iff p(\frac{m}{n}\pi) = \infty$$

Demostración. Si x no es una fracción racional de π, $\nexists k, v \in \mathbb{Z}^+ : k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi$, lo que se traduce en que nunca se llega a cerrar la figura tras un número finito de bloques.

Corolario 1.2.

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff \begin{cases} 2 \nmid n \iff v(x) = n - 2m \\ 4 \mid n \iff v(x) = \frac{n-2m}{2} \\ 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \implies v(x) = \frac{n-2m}{4} \end{cases}$$

Definición 4.2. Sea $p^{-1}(p) = \{x \in X_1 : p(x) = p\}, \forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ el conjunto antiimagen de la aplicación explicada en la Definición 3.1, y $f(p) \coloneqq |p^{-1}(p)|$ la cantidad de ángulos de formación para los cuales su número de puntas es p.

Definición 5.1. Sea $\varphi(n) = |\varphi_n|$ la función totiente de Euler.

Lema Único. Simetrías de φ_n

$$i)\ \forall n \in \mathbb{Z}_{>2},\ |\varphi_n| = 2|\chi_n|$$
$$ii)\ \forall n \in \mathbb{Z}_{>2} : 2 \nmid n \iff |\varphi_n| = 2|\gamma_n|$$
$$iii)\ \forall n \in \mathbb{Z}_{>2} : 2 \nmid n \iff \varphi(2n) = \varphi(n)$$

La demostración de este Lema puede hallarse en el Apéndice.

Teorema 1.2. Inversa de $p(x)$ y Función Totiente

$$\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3},\ f(p) = \frac{\varphi(p)}{2}$$

Demostración. Veamos primero qué denominador n causará que la figura tenga p puntas, siguiendo el Teorema 1.1:

$$\begin{cases} 2 \nmid p \iff n = 2p \\ 4 \mid n \iff n = p \\ 2 \mid p \wedge 4 \nmid p \iff n = \frac{1}{2}p \end{cases}$$

Así, dado un número independiente p, sabemos qué denominador único da lugar a figuras que cumplen $p(x) = p$.

Vemos ahora que $p^{-1}(p) = \gamma_n = \begin{cases} \gamma_{2p} \iff 2 \nmid p \\ \gamma_n \iff 4 \mid p \\ \gamma_{\frac{p}{2}} \iff 2 \mid p \wedge 4 \nmid p \end{cases}$

Es decir, el conjunto de las x para las cuales $p(x) = p$ son los ángulos $x \in X_1$ con denominador entero positivo n, dependiente de la paridad de p, y numerador también entero positivo y coprimo respecto a n. Esto es lo que representa, por construcción, el conjunto γ_n introducido en la Definición 4.2.

Siguiendo el Lema de Simetrías y la Definición 5.1:

$$p^{-1}(p) = \gamma_n \iff |p^{-1}(p)| = f(p) = |\gamma_n| = \frac{\varphi(n)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(2p) \iff 2 \nmid p \\ \frac{1}{2}\varphi(p) \iff 4 \mid p \\ \frac{1}{2}\varphi(\frac{p}{2}) \iff 2 \mid p \wedge 4 \nmid p \end{cases} = \frac{\varphi(p)}{2}$$

2.4. Extensión de $p(x)$

Definición 6.1. Sea $k : X \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ la función

$$k(x, y) = k \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x) + (k - \lfloor k \rfloor)\alpha_{\lfloor k \rfloor + 1}(x) = y$$

Proposición 2.1.

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff p(x) = k(x, 2\pi v(x))$$

Demostración. Por el Teorema 1.1. y la Definición 6.1. vemos lo siguiente:

$$p(x) = k \iff \exists k, v \in \mathbb{Z}^+ : k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi \wedge mcd(k, v) = 1$$

$$k(x, y) = k \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x) + (k - \lfloor k \rfloor)\alpha_{\lfloor k \rfloor + 1}(x) = y$$

En el dominio de convergencia, para $k \in \mathbb{Z}^+$:

$$k(x, 2\pi v(x)) = k \iff \sum_{i=1}^{k} \alpha(x) = y \iff k \cdot \alpha = 2\pi v(x)$$

Teorema 2.1. Espirales Únicas

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 3}, \exists! x \in X : k(x, 2\pi) = k$$

Demostración. Veamos que la función $k(x, 2\pi)$ es inyectiva:

$$1.\ \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \implies c_i(x_1) < c_i(x_2)$$

En $i = 0$, $c_0(x_1) = c_0(x_2) = 1$. Luego:

$$x_1 < x_2 \implies c_1(x_1) = \sqrt{2(1 - \cos(x_1))} < \sqrt{2(1 - \cos(x_2))} = c_1(x_2) \iff \cos(x_1) > \cos(x_2)$$

Lo cual es cierto si y sólo si $x_1, x_2 \in (0, \pi) = X$. Para el resto de valores de i hacemos lo siguiente:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : a < b \implies \sqrt{1 + a^2 - 2a\cos x_1} < \sqrt{1 + b^2 - 2b\cos(x_2)} \iff a(a - 2\cos(x_1)) < b(b - 2\cos(x_2))$$

Por hipótesis tenemos que $a < b$, así que veamos que $a - 2\cos(x_1) < b - 2\cos(x_2)$. Con la misma lógica, $a < b$, así que basta ver que $2\cos(x_1) > 2\cos(x_2)$, lo cual acabamos de ver en el caso $i = 0$:

$$2.\ \forall x_1, x_2 \in X : c_i(x_1) < c_i(x_2) \implies \alpha_i(x_1) > \alpha_i(x_2)$$

Comprobémoslo para la primera iteración de dos construcciones cualesquiera:

$$\alpha_1(x_1) > \alpha_1(x_2) \iff \arccos(\frac{1^2 + c_1^2(x_1) - 1}{2 \cdot 1 \cdot c_1(x_1)}) > \arccos(\frac{1^2 + c_1^2(x_2) - 1}{2 \cdot 1 \cdot c_1(x_2)}) \iff \frac{c_1(x_1)}{2} < \frac{c_1(x_2)}{2}$$

$$\arccos(\frac{c_i(x_1)^2 + c_{i-1}(x_1)^2 - 1}{2c_i(x_1)c_{i-1}(x_1)}) > \arccos(\frac{c_i(x_2)^2 + c_{i-1}(x_2)^2 - 1}{2c_i(x_2)c_{i-1}(x_2)}) \iff$$

$$\frac{c_i(x_1)^2 + c_{i-1}(x_1)^2 - 1}{c_i(x_1)c_{i-1}(x_1)} < \frac{c_i(x_2)^2 + c_{i-1}(x_2)^2 - 1}{c_i(x_2)c_{i-1}(x_2)} \iff$$

$$\frac{(\sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1}\cos(x_1)})^2 + c_{i-1}^2 - 1}{c_i(x_1)c_{i-1}(x_1)} < \frac{(\sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1}\cos(x_2)})^2 + c_{i-1}^2 - 1}{c_i(x_2)c_{i-1}(x_2)} \iff$$

$$\frac{c_{i-1}(x_1) - \cos(x_1)}{c_i(x_1)} < \frac{c_{i-1}(x_2) - \cos(x_2)}{c_i(x_2)}$$

3. $\forall k \in \mathbb{R}^+ \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \implies \displaystyle\sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x_1) + (k - \lfloor k \rfloor)\alpha_{\lfloor k \rfloor}(x_1) > \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x_2) + (k - \lfloor k \rfloor)\alpha_{\lfloor k \rfloor}(x_2)$

4. $\forall x_1, x_2 \in X \ \forall y \in \mathbb{R}^+ : x_1 < x_2 \implies k(x_1, y) < k(x_2, y)$

Consideremos $k(x_2, y) = k_2 \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k_2 \rfloor} \alpha_i(x_2) + (k_2 - \lfloor k_2 \rfloor)\alpha_{\lfloor k_2 \rfloor}(x_2) = y$. *Entonces:*

$$\sum_{i=1}^{\lfloor k_2 \rfloor} \alpha_i(x_1) + (k_2 - \lfloor k \rfloor)\alpha_{\lfloor k_2 \rfloor}(x_1) > y$$

Por lo que, necesariamente, $k(x_1, y) = k_1 < k_2 = k(x_2, y)$. *Basándonos en este principio:*

5. $\forall x_1, x_2 \in X \ \forall y \in \mathbb{R}^+, \exists k \in \mathbb{Z}^+ : k(x_1, y) < k < k(x_2, y) \implies \exists! x_m \in X : x_1 < x_m < x_2 \land k(x_m, y) = k$

Así, si conocemos $k(x, y)$, *podemos usar su crecimiento monótono para encontrar aquellos ángulos únicos* x_m *tales que* $k(x_m, y) \in \mathbb{Z}^+$.

En la Figura 4 se aprecian 17 *bloques de la figura infinita* T_{90°. *Se ve que la suma de sus ángulos internos* $\alpha_i(90^\circ)$ *es mayor a* 2π, *y que la suma de los* 16 *primeros es menor a* 2π. *En consecuencia, sabemos que la parte entera de* $k(90^\circ, 360^\circ) = k \in \mathbb{R}^+$ *es* 16. *En general:*

$$\lfloor k(x, y) \rfloor = n \in \mathbb{Z}^+ \iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) < y < \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(x)$$

$$k(x, y) = k \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x) + (k - \lfloor k \rfloor)\alpha_{\lfloor k \rfloor + 1}(x) = y \iff k = \lfloor k \rfloor + \frac{y - \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x)}{\alpha_{\lfloor k \rfloor + 1}(x)}$$

Ya podemos computar con facilidad la función $k(x, y)$ *para todas* $(x, y) \in X \times \mathbb{R}^+$. *En particular,* $k(90^\circ, 360^\circ) \approx 16{,}649128$, *y* $k(91^\circ, 360^\circ) \approx 17{,}445935$. *Apliquemos el punto 5:*

$$k(90^\circ, 360^\circ) < 17 < k(91^\circ, 360^\circ) \implies \exists! x_m \in (90^\circ, 91^\circ) : k(x_m, 360^\circ) = 17$$

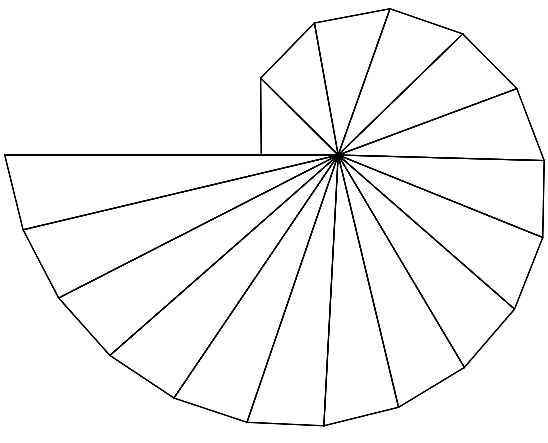


Figura 5: 17 bloques de $T_{x=90{,}45332215^\circ}$

$k \in \mathbb{Z}^+$	x°
3	19.019079333
6	60
9	74.15292718
12	82.2524055
16	89.13404388
17	90.45332215
18	91.65964018
19	92.76863062
20	93.79304858
21	94.74341811
60	110.8178438
450	128.8014110

Figura 6: $\{(k, x) : k(x, 2\pi) = k\}$

Corolario 2.

$$i)\ |\{x_1 \in X_1 : k(x_1, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+\}| = 14$$

$$ii)\ |\{x_2 \in X_2 : k(x_2, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+\}| = \infty$$

Es decir, que hay número finito de $x_1 \in X_1$ que exhiben este comportamiento inyectivo respecto a la aplicación $k(x, 2\pi)$, mientras que existen infinitos ángulos $x_2 \in X_2$ para los cuales $k(x_2, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+$

Conjetura 1.

$$\forall x \in X \setminus \{\frac{\pi}{3}\} : k(x, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+ \implies \nexists n : x \in \gamma_n$$

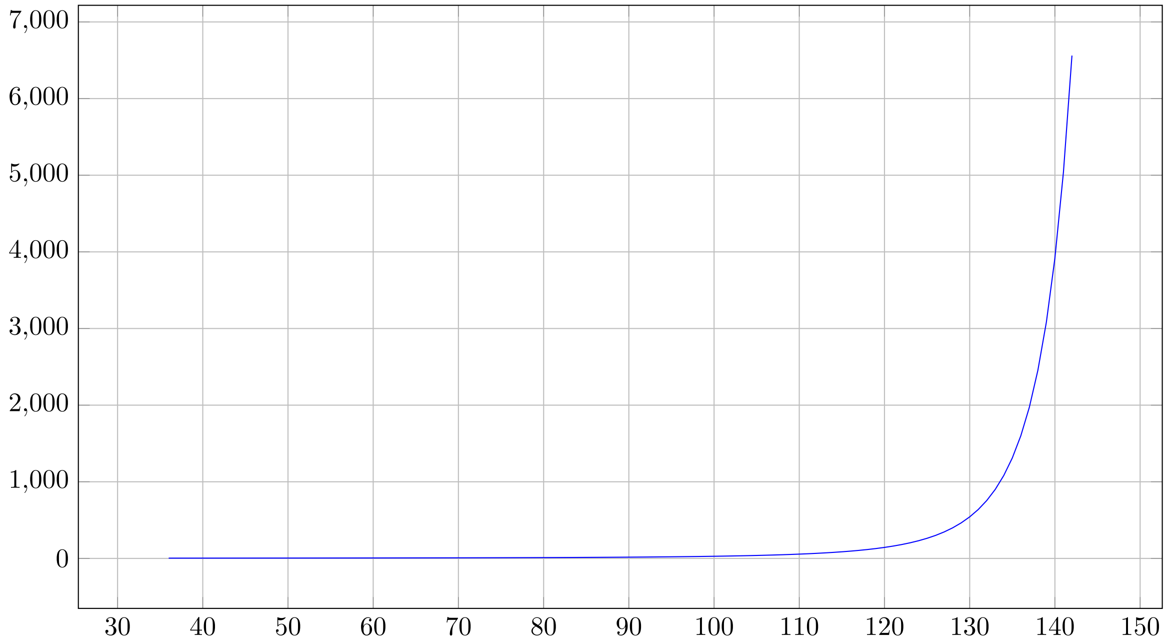


Figura 7: Gráfico de $k(x, 2\pi)$.

3. Segunda Construcción

3.1. Definición de la Construcción

Definición 7.1. En este caso, el *bloque fundamental* será el paralelogramo equilátero de lados a_i, b_i, c_i y d_i tales que

$$a_i = b_i = c_i = d_i = \lambda \in \mathbb{R}^+$$

y x el ángulo que se forma entre a_i y b_i (también entre c_i y d_i)

Definición 7.2. Sea P_x la figura generada yuxtaponiendo bloques mediante la misma regla que T_x, y O el centro de la figura:

$$b_i = c_{i-1}$$

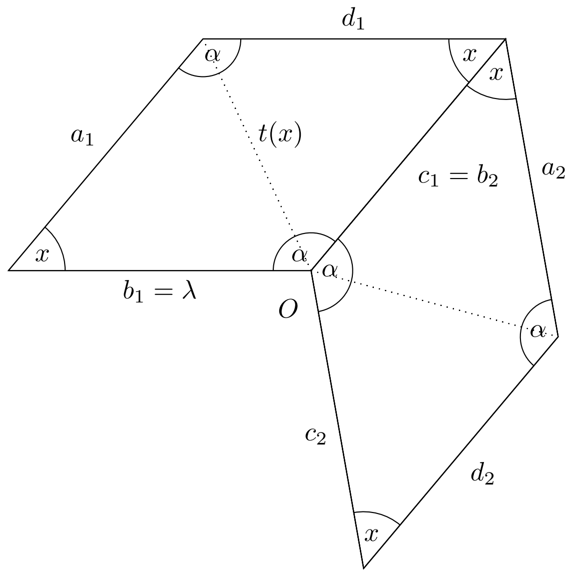


Figura 8: Dos primeros bloques de P_{50°.

Definición 7.3. Sea $r'(x) \coloneqq \text{máx}(\lambda, t(x)), \forall x \in X$, donde $t(x)$ es la distancia entre los vértices opuestos cuyos ángulos son α.

3.2. Función homóloga a $p(x) : q(x)$

Proposición 3.1.

$$r'(x) = \begin{cases} \lambda & \text{si } 0 < x \leq \frac{\pi}{3} \\ \lambda\sqrt{2(1-\cos x)} & \text{si } \frac{\pi}{3} < x < \pi \end{cases}$$

Demostración. Por el Teorema del Coseno, tenemos que:

$$t^2(x) = a^2 + b^2 - 2ab\cos x \iff t(x) = \sqrt{2\lambda^2 - 2\lambda^2\cos(x)} = \sqrt{2\lambda^2(1-\cos(x))} = \lambda\sqrt{2(1-\cos(x)}$$

Luego:

$$\begin{cases} r'(x) = \lambda \iff \text{máx}(\lambda, \lambda\sqrt{2(1-\cos x)}) = \lambda \iff \lambda \geq \lambda\sqrt{2(1-\cos(x)} \iff \cos x \geq \frac{1}{2} \iff x \in (0, \frac{\pi}{3}] \\ \\ r'(x) = \lambda\sqrt{2(1-\cos x)} \iff \lambda < \lambda\sqrt{2(1-\cos(x)} \iff \cos x < \frac{1}{2} \iff x \in (\frac{\pi}{3}, \pi) \end{cases}$$

Por lo que vemos que todas las figuras generadas por esta segunda construcción tendrán un radio real.

Definición 8.1. Sea $q : X \to \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ la función $q(x) = |\{S \in P_x : |\overline{OS}| = r'(x)\}|$

Teorema 3.1. Función $q(x)$

$$i)\ \forall n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{3\}, x \in \varphi_n \iff \begin{cases} q(x) = 2n \iff 2 \mid n \vee 2 \mid m \\ \\ q(x) = n \iff 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \end{cases} \qquad ii)\ q(\frac{1}{3}\pi) = 2n = 6$$

Demostración. Por la relación de ángulos de un cuadrilátero, $2\alpha + 2x = 2\pi \iff \alpha = \pi - x$. *Procedamos ahora de la misma manera que en el Teorema 1.1:*

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \varphi_n \iff x = \frac{m}{n}\pi \wedge m < n \iff \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2n}{n-m} \iff$$

$$\iff \exists k, v \in \mathbb{Z}^+ : mcd(k, v) = 1 \wedge k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi \iff \frac{k}{v} = \frac{2n}{n-m}$$

$$\begin{cases} (2 \mid n \vee 2 \mid m) \wedge 1 = mcd(n, m) = mcd(n, n-m) \implies mcd(2n, n-m) = 1 \implies k(x) = 2n \\ \\ 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \wedge 1 = mcd(n, m) = mcd(n, n-m) \implies mcd(2n, n-m) = 2 \implies k(x) = n \end{cases}$$

Veamos ahora la relación entre $q(x)$ *y* $k(x)$*:*

$r'(x) = \lambda \iff x \in (0, \frac{\pi}{3}) \iff$

i	1	2	3	4	5	6	...	$k-1$	k
$\sum_{j=1}^{i} q_j$	2	3	4	5	6	7	...	k	k

$r'(x) = \lambda\sqrt{2(1-\cos(x))} \iff$

i	1	2	3	4	5	6	...	$k-1$	k
$\sum_{j=1}^{i} q_j$	1	2	3	4	5	6	...	$k-1$	k

$x = \frac{\pi}{3} \iff$

i	1	2	3
$\sum_{j=1}^{i} q_j$	3	5	6

Cuando $r'(x) = \lambda$*, el primer bloque aporta dos puntas, porque tiene dos segmentos con esa longitud:* $b_1 = \lambda = c_1$*. En cambio, para* $r'(x) = t(x)$*, el primer bloque contiene únicamente un segmento desde* O *con longitud* $t(x) = \lambda\sqrt{2(1-\cos(x))}$*. En el caso singular* $x = 60°$ *se da que los bloques son triángulos equiláteros.*

Corolario 3.1.

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, x \in \varphi_n \iff \begin{cases} (2 \mid n \vee 2 \mid m) \iff v'(x) = n - m \\ \\ 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m2 \iff v'(x) = \frac{n-m}{2} \end{cases}$$

En la Sección de Relaciones entre Construcciones estudiaremos esta función.

Corolario 3.2.

$$\nexists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \varphi_n \iff \frac{m}{n} \notin \mathbb{Q} \iff q(\frac{m}{n}\pi) = \infty$$

4. Relaciones entre las Construcciones

4.1. Teoremas de Equivalencias

Definición 8.2. Sea $q^{-1}(q) = \{x \in X : q(x) = q\}$ el conjunto antiimagen de la función $q(x)$, y $g(q) \coloneqq |q^{-1}(q)|$

Teorema 4.1. Primer Teorema de Equivalencias

$$i)\ \forall p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \setminus \{6\},\ p = q \implies f(p) = g(q)$$

$$ii)\ \forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \setminus \{6\},\ f(p) + g(p) = \varphi(p)$$

$$iii)\ f(6) + g(6) = 3 = \varphi(6) + 1$$

Demostración. Por el Teorema 1.2. tenemos que $f(p) = \frac{\varphi(p)}{2}$*, así que veremos*

$$f(p) + g(p) = \varphi(p) \iff g(p) = \frac{\varphi(p)}{2} \iff f(p) = g(p)$$

viendo que $g(p) = \frac{\varphi(p)}{2}$*. Estudiemos las condiciones de* q *para conocer los denominadores y numeradores* m *y* n *para los cuales* $q(\frac{m}{n}\pi) = q$*:*

$$\begin{cases} 2 \nmid n \land 2 \mid m \iff n = \frac{q}{2} \land 2 \mid m \iff 2 \mid q \land 4 \nmid q \\ 2 \mid n \land 2 \nmid m \iff n = \frac{q}{2} \land 2 \nmid m \iff 4 \mid q \\ 2 \nmid n \land 2 \nmid m \iff n = q \land 2 \nmid m \iff 2 \nmid q \end{cases} \implies q^{-1}(q) = \begin{cases} \chi_{\frac{q}{2}} \iff 2 \mid q \land 4 \nmid q \\ \varphi_{\frac{q}{2}} \iff 4 \mid q \\ \varphi_q \setminus \chi_q \iff 2 \nmid q \end{cases}$$

Luego, siguiendo el Lema de Simetrías:

$$|q^{-1}(q)| = g(q) = \begin{cases} \varphi(q) - |\chi_q| = \frac{1}{2}\varphi(q) \iff 2 \nmid q \\ \varphi(\frac{q}{2}) \iff 4 \mid q \\ |\chi_{\frac{q}{2}}| = \frac{1}{2}\varphi(\frac{q}{2}) \iff 2 \mid q \land 4 \nmid q \end{cases} = \frac{\varphi(q)}{2}$$

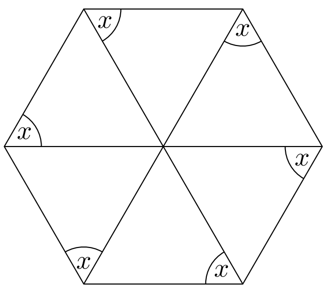


Figura 9: T_{60°

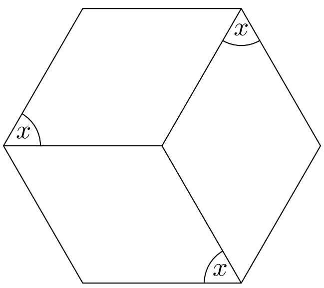


Figura 10: P_{60°

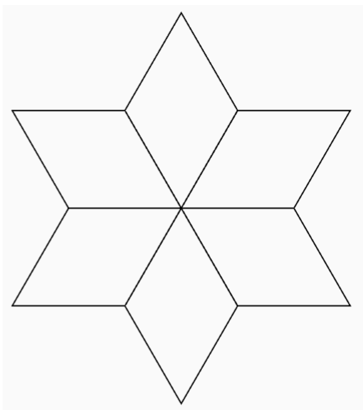


Figura 11: P_{120°

Definición 9.1. Diremos que $T_x \sim P_x \iff p(x) = q(x) \land v(x) = v'(x)$

Definición 9.2. Diremos que $T_{x_1} \sim T_{x_2} \iff p(x_1) = p(x_2) \land v(x_1) = v(x_2)$

Definición 9.3. Diremos que $P_{x_1} \sim P_{x_2} \iff q(x_1) = q(x_2) \land v'(x_1) = v'(x_2)$

Teorema 4.2. Segundo Teorema de Equivalencias

$$i)\ \forall x \in X,\ T_x \sim P_x \iff x = \frac{\pi}{3}$$
$$ii)\ \forall x_t, x_p \in X,\ T_{x_t} \sim P_{x_p} \iff 2x_t = x_p$$
$$iii)\ \forall x_1, x_2 \in X_1,\ T_{x_1} \sim T_{x_2} \iff x_1 = x_2$$
$$iv)\ \forall x_1, x_2 \in X,\ P_{x_1} \sim P_{x_2} \iff x_1 = x_2 \vee x_1 = \frac{\pi}{3} = \frac{x_p}{2}$$

Demostración. i) Veamos por separado qué valores de $x \in X$ permiten que $p(x) = q(x)$ y $v(x) = v'(x)$.

$$\begin{cases} 1. \quad p(x) = q(x) = 2n \iff 2 \nmid n \wedge (2 \mid n \vee 2 \mid m) \iff 2 \mid m \wedge 2 \nmid n \iff x \in \chi_n \\ 2. \quad p(x) = q(x) = n \iff 4 \mid n \wedge (2 \nmid n \wedge 2 \nmid m) \quad \text{es una contradicción} \\ 3. \quad p\left(\frac{\pi}{3}\right) = q\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6 \end{cases}$$

Por tanto, $p(x) = q(x) \iff 2 \mid m \wedge 2 \nmid n$. Luego:

$$\begin{cases} 4. \quad v(x) = v'(x) \wedge 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff \frac{n-m}{2} = n - 2m \iff n - m = 2n - 4m \iff 3m = n \iff \frac{m}{n} = \frac{1}{3} \\ 5. \quad v(x) = v'(x) \wedge 2 \nmid n \wedge 2 \mid m \iff n - 2m = n - m \iff m = 0 \iff x = 0 \notin X \\ 6. \quad v(x) = v'(x) \wedge 4 \mid n \wedge 2 \nmid m \iff \frac{n-2m}{2} = n - m \iff n - 2m = 2n - 2m \iff n = 0 \notin \mathbb{Z}_{\geq 2} \\ 7. \quad v(x) = v'(x) \wedge 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff \frac{n-2m}{4} = n - m \iff 3n = 2m \iff \frac{m}{n} = \frac{3}{2} \iff x \notin X \end{cases}$$

Así vemos que $v(x) = v'(x) \iff x = \frac{\pi}{3}$. Además, y es un caso especial, $p(\frac{\pi}{3}) = q(\frac{\pi}{3}) = 6$.

$$ii)\ T_{x_t} \sim P_{x_p} \iff \frac{p}{v} = \frac{q}{v'} \iff \frac{2n_t}{n_t - 2m_t} = \frac{2n_p}{n_p - m_p} \iff \frac{2m_t}{n_t} = \frac{m_p}{n_p} \iff 2x_t = x_p$$

Ya que $mcd(p, v) = mcd(q, v') = 1 \iff p = q \wedge v = v'$. Recordemos que, por i), $x_t = x_p = 60^\circ$ es la excepción.

$$iii)\ T_{x_1} \sim T_{x_2} \iff \frac{p_1}{v_1} = \frac{p_2}{v_2} \iff \frac{2n_1}{n_1 - 2m_1} = \frac{2n_2}{n_2 - 2m_2} \iff \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \iff x_1 = x_2$$

$$iv)\ P_{x_1} \sim P_{x_1} \iff \frac{q_1}{v_1'} = \frac{q_2}{v_2'} \iff \frac{2n_1}{n_1 - m_1} = \frac{2n_2}{n_2 - m_2} \iff \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \iff x_1 = x_2$$

Definición 10. Sean $x_t : \mathbb{Z}_{\geq 3} \times \gamma_p' \to X_1$ y $x_p : \mathbb{Z}_{\geq 3} \times \gamma_q' \to X$ las funciones

$$x_t(p, v) = x_t \iff p(x_t) = p \wedge v(x_t) = v$$
$$x_p(q, v') = x_p \iff q(x_p) = q \wedge v'(x_p) = v'$$

Proposición 4.

$$i)\ \forall (p,v) \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \times \gamma'_p,\ x_t(p,v) = \frac{p-2v}{2p}\pi \in X_1$$

$$ii)\ \forall (q,v') \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \times \gamma'_q,\ x_p(q,v') = \frac{q-2v'}{q}\pi \in X$$

Demostración. Veamos primero i)

$$\frac{p}{v} = \frac{2n}{n-2m} \iff p(n-2m) = 2nv \iff pn - 2pm = 2nv \iff n(p-2v) = 2pm \iff \frac{m}{n} = \frac{p-2v}{2p}$$

1. $2m < n \iff p - 2v < p \iff v > 0$
2. $p - 2v > 0 \iff 2v < p$
3. $p, v \in \mathbb{Z}^+ \wedge mcd(p,v) = 1$

por lo que, en suma, $v \in \gamma'_p$. Esto reafirma el Teorema 1.2, porque

$$\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3} : v \in \gamma'_p \wedge |\gamma'_p| = \frac{\varphi(p)}{2}$$

$$ii)\ \frac{q}{v'} = \frac{2n}{n-m} \iff q(n-m) = 2nv' \iff qn - qm = 2nv' \iff n(q-2v') = qm \iff \frac{m}{n} = \frac{q-2v'}{q}$$

1. $m < n \iff q - 2v' < q \iff v' > 0$
2. $q - 2v' > 0 \iff 2v' < p$
3. $q, v' \in \mathbb{Z}^+ \wedge mcd(q,v') = 1$

En conclusión, análogamente, $v' \in \gamma'_q$, por lo que hemos hallado una vía de demostración del Primer Teorema de Equivalencias que no demanda ninguna información sobre χ_n.

Corolario 4.

$$\forall (p,v) \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \times \gamma_p : 2x_t(p,v) = x_p(p,v)$$

No es más que una reexpresión del apartado *ii)* del Segundo Teorema de Equivalencias, y se sigue inmediatamente de la Proposición 4.

5. Apéndice

5.1. Demostración del Lema de Simetrías

$$i)\ \forall n \in \mathbb{Z}_{>2},\ 2 \nmid n \iff |\varphi_n| = 2|\chi_n|$$

Demostración.

1. $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : \exists f_n : [1, \frac{n-1}{2}] \cap \mathbb{Z}^+ \to [\frac{n+1}{2}, n-1] \cap \mathbb{Z}^+$ *biyectiva*

Es trivial ver que el dominio y el codominio de esta función son conjuntos finitos y numerables con cardinal $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}^+ \iff 2 \nmid n$:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+ : a \leq b \implies |[a,b] \cap \mathbb{Z}^+| = b - a + 1$$

$$n - 1 - \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{2(n-1) - (n+1) + 2}{2} = \frac{n-1}{2}$$

Además:

$$2 \nmid n \iff [1, \frac{n-1}{2}] \cap \mathbb{Z}^+ \;\cup\; [\frac{n+1}{2}, n-1] \cap \mathbb{Z}^+ = [1, n-1] \cap \mathbb{Z}^+ = \{m \in \mathbb{Z}^+ : m < n\}$$

En concreto vamos a considerar la regla de asignación

$$f_n(m) = n - m \iff f_n(m) + m = n$$

m	1	2	3	4	5	6	7
$f_{15}(m)$	14	13	12	11	10	9	8

$$2.\ \forall n \in \mathbb{Z}^+ : 2 \nmid n \iff \forall m \in [1, \frac{n-1}{2}] \cap iff\mathbb{Z}^+, \begin{cases} 2 \mid m \iff 2 \nmid f_n(m) \\ 2 \nmid m \iff 2 \mid f_n(m) \end{cases}$$

Esto se da porque, por la regla de asignación de la aplicación, vemos que la suma del argumento m y su imagen $f_n(m)$ debe ser igual a n, que es un número impar; y sólo la suma de un par y un impar resultan en un número impar.

$$3.\ \forall m, n \in \mathbb{Z}^+ : mcd(m, n) = 1 \iff mcd(n, n-m) = 1 \iff (m \in \gamma'_n \iff f_n(m) \in \varphi'_n \setminus \gamma'_n)$$

m	1	2	$\cancel{3}$	4	5	$\cancel{6}$	7	8	$\cancel{9}$	10	11	$\cancel{12}$	13
$f_{27}(m)$	26	25	$\cancel{24}$	23	22	$\cancel{21}$	20	19	$\cancel{18}$	17	16	$\cancel{15}$	14

Con esta información podemos ver que existirá una biyección entre los elementos pares e impares de φ'_n:

χ_{27}	2	4	8	10	14	16	20	22	26
$\varphi_{27} \setminus \chi_{27}$	25	23	19	17	13	11	7	5	1

$$\forall a \in \chi'_n, \exists! b \in \varphi'_n \setminus \chi'_n : a + b = n$$

$$\forall b \in \varphi'_n \setminus \chi'_n, \exists! a \in \varphi'_n : a + b = n$$

Por lo que ya habríamos demostrado la simetría $ii)$ para $2 \nmid n$. Veámosla en general:

$$ii)\ \forall n \in \mathbb{Z}_{>2}, |\varphi_n| = 2|\gamma_n|$$

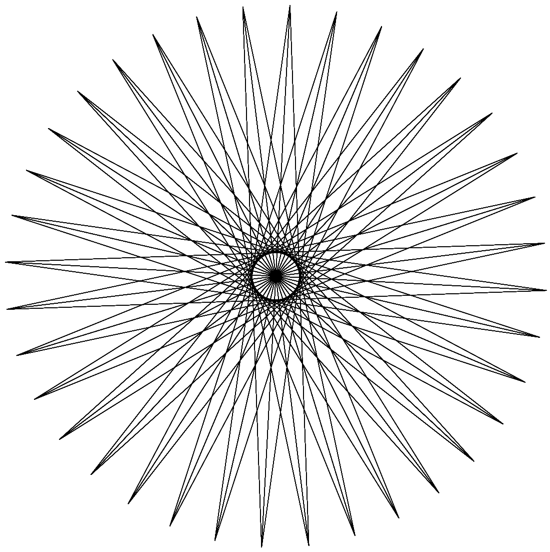
m	1	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$	$\cancel{4}$	$\cancel{5}$	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$	11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$
$f_{30}(m)$	29	$\cancel{28}$	$\cancel{27}$	$\cancel{26}$	$\cancel{25}$	$\cancel{24}$	23	$\cancel{22}$	$\cancel{21}$	$\cancel{20}$	19	$\cancel{18}$	17	$\cancel{16}$

Donde estamos considerando la misma regla de asignación para $f_n(m)$. Notemos que, aquí, la unión del dominio y el codominio no es igual a todos los enteros menores que n, sino que se excluye $\frac{n}{2}$ cuando $2 \mid n$, lo cual no afectará al cómputo ni a la relación entre φ_n y γ_n, porque $n > 2 \implies \frac{n}{2} > 1 \implies mcd(n, \frac{n}{2}) > 1 \implies \frac{n}{2} \notin \varphi_n$

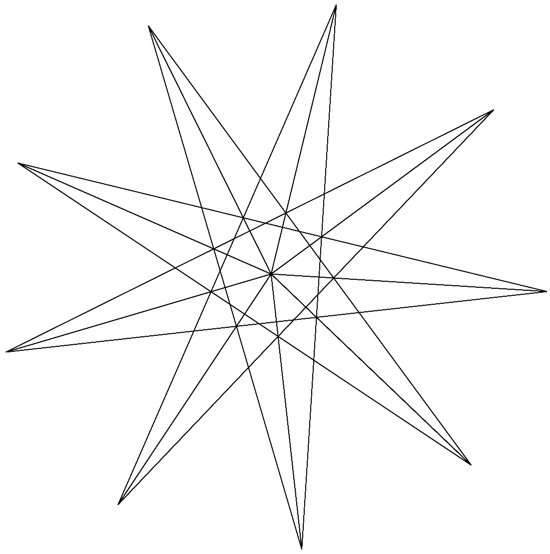
$$\forall m \in [1, \frac{n}{2}) \cap \mathbb{Z}^+, (2m < n \wedge \frac{n}{2} < f_n(m) < n) \wedge (m \in \gamma_n \iff f_n(m) \in \varphi_n \setminus \gamma_n)$$

$$|\gamma_n| + |\varphi_n \setminus \gamma_n| = |\gamma_n| + (|\varphi_n| - |\gamma_n|) = |\varphi_n| \wedge |\gamma_n| = |\varphi_n \setminus \gamma_n| \implies |\varphi_n| = 2|\gamma_n|$$

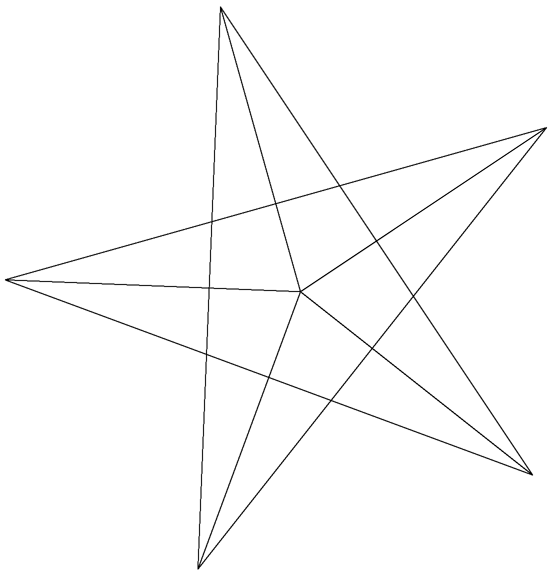
5.2. Figuras



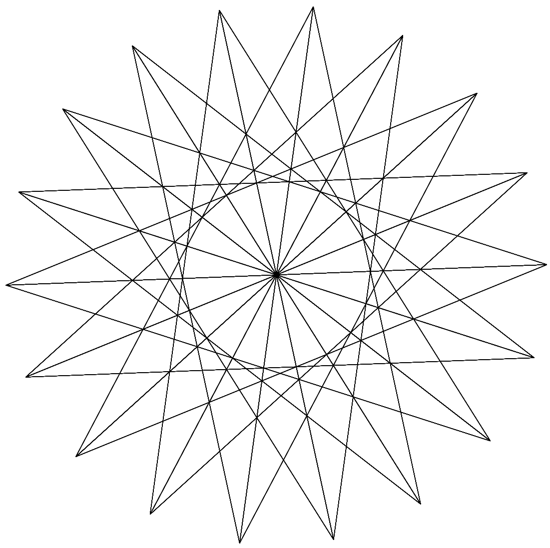
T_{5°



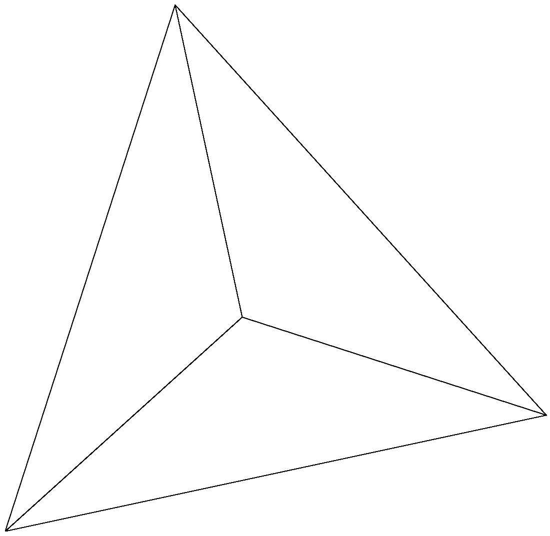
T_{10°



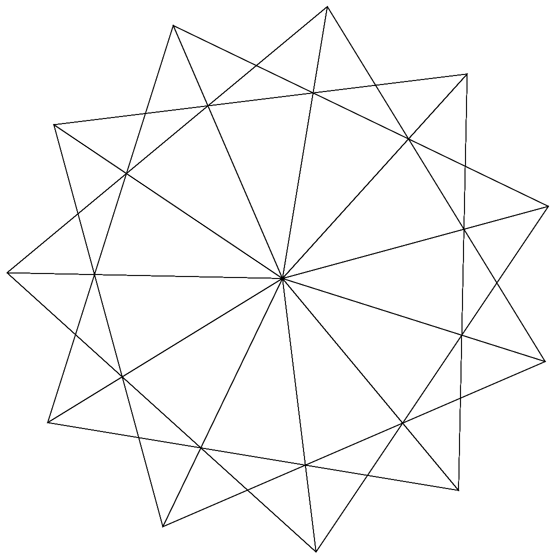
T_{18°



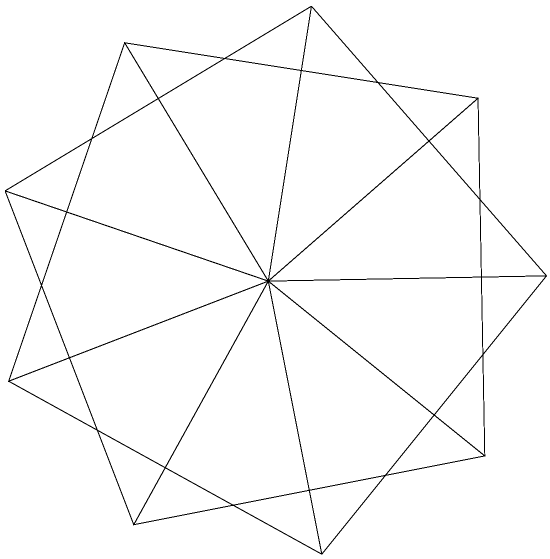
T_{20°



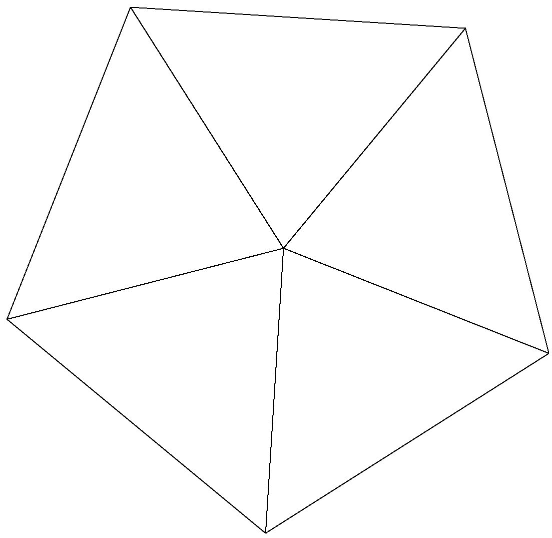
T_{30°



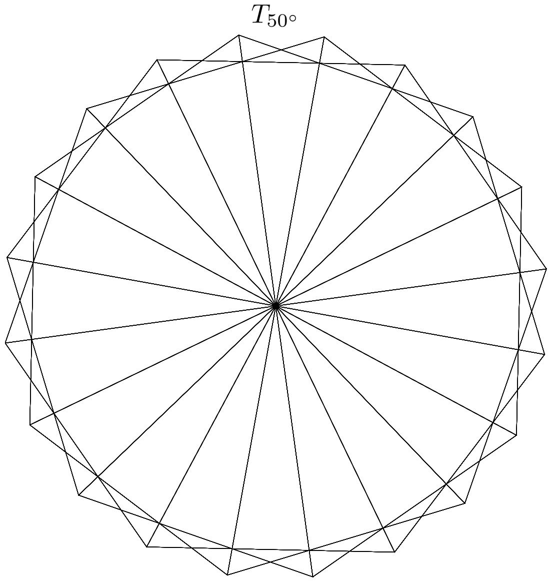
$T_{40,\overline{90}^\circ}$



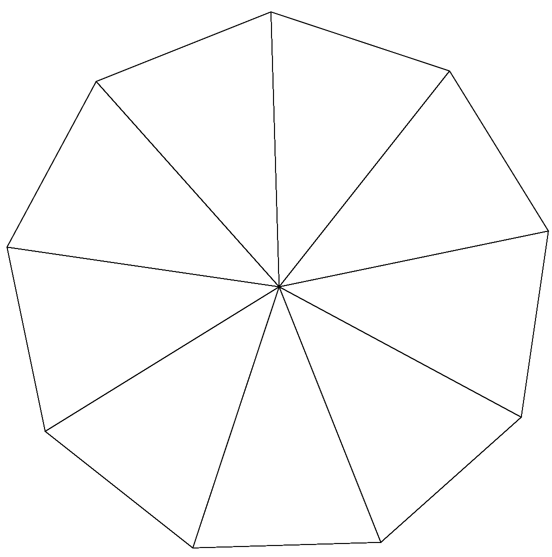
T_{50°



T_{54°



T_{63°



T_{70°

Índice