

Dos Construcciones Geométricas Iterativas

Aidan Lorenzo

Noviembre 2024

1. Introducción

En este trabajo se desarrolla una doble generalización de la Espiral de Teodoro (véase la Figura 9 en la página siguiente). Por una parte generalizamos el ángulo de formación de nuevos triángulos: en la mencionada Espiral, el ángulo empleado es $\frac{\pi}{2}$, a fin de que, por el Teorema de Pitágoras, la distancia del centro a cada punto sea \sqrt{n} .

Por otra parte, ampliaremos esta construcción a bloques no triangulares, y demostraremos algunos teoremas que describen la relación entre los comportamientos de ambas construcciones geométricas iterativas. Conectaremos, además, nociones de Teoría de Números, al introducir la función totiente de Euler y demostrar algunas simetrías que rijen y sirven de Lema.

2. Primera Construcción

2.1. Definición de la Construcción

Definición 1.1. Sea $x \in (0, \pi) = X$ un ángulo de formación en su dominio de generación.

Definición 1.2. Llamaremos *bloque fundamental* al triángulo de lados a_i, b_i y c_i , tales que

$$\forall i \in \mathbb{Z}^+, a_i = 1 \text{ y } b_1 = 1$$

y O el *centro* de la figura, que es la intersección de b_i y c_i . x es el ángulo que separa a_i y b_i .

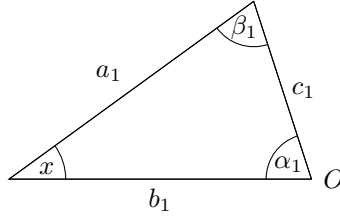


Figura 1: Triángulo Primero.

Definición 1.3. Sea T_x la figura generada por el ángulo x yuxtaponiendo bloques fundamentales mediante la siguiente regla:

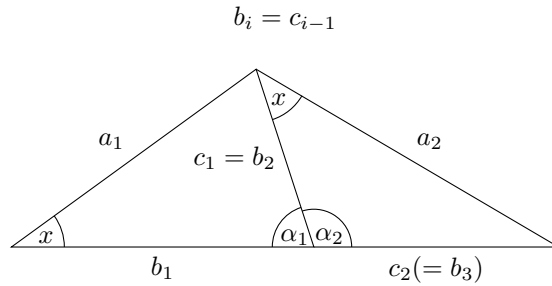


Figura 2: Los dos primeros bloques de T_{36° .

Definición 1.4. Sea $c_i(x)$ la longitud del segmento c_i de T_x .

2.2. Estudio de convergencia

Proposición 1.1.

$$c_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ \sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1} \cos x} & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

Demostración. Por el Teorema del Coseno y las definiciones anteriores tenemos:

$$c_i^2(x) = a_i^2 + b_i^2 - 2a_i b_i \cos x \iff c_i(x) = \sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1} \cos x}$$

La función está definida de forma recurrente, por lo que necesitamos un valor inicial de definición:

$$b_i = c_{i-1} \wedge b_1 = 1 \implies c_0 = 1$$

Proposición 1.2.

$$\begin{aligned} i) \quad & \lim_{i \rightarrow \infty} c_i(x) = \infty \iff \cos(x) \leq 0 \\ ii) \quad & \lim_{i \rightarrow \infty} (c_i(x) - c_{i-1}(x)) = |\cos(x)| \iff \cos(x) < 0 \\ iii) \quad & \lim_{i \rightarrow \infty} c_i(x) = \frac{1}{2 \cos(x)} \iff \cos(x) > 0 \end{aligned}$$

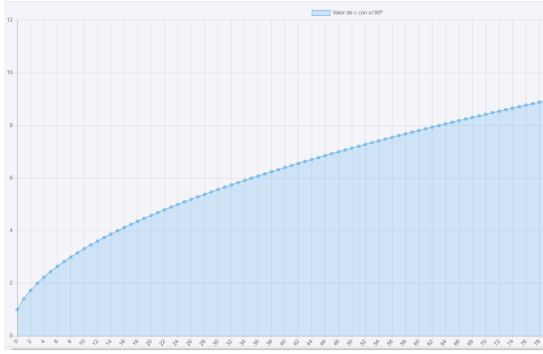


Figura 3: $c_i(\frac{\pi}{2})$

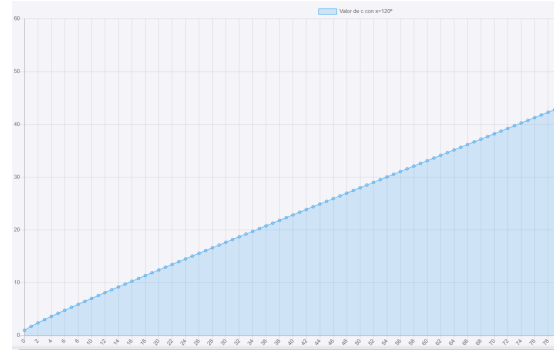


Figura 4: $c_i(\frac{2}{3}\pi)$

Demostración. Notemos primero que, por construcción, $c_i(x) > 0$, pues refiere a la longitud de un segmento.

Probemos i). Veamos que las funciones asociadas a ángulos x con coseno negativo o nulo son monótonamente crecientes.

$$\forall i \in \mathbb{Z}^+ \forall x \in X, c_i(x) > 0 \wedge \cos(x) \leq 0 \implies c_i(x) > c_{i-1}(x)$$

ya que

$$\sqrt{1 + c_{i-1}^2 + 2c_{i-1}|\cos(x)|} > c_{i-1} \iff 2c_{i-1}|\cos(x)| > -1$$

lo cual se cumple siempre. Además, la sucesión no está acotada superiormente; entonces, diverge.

Además, $c_i(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{i}$. Falta demostrar la convergencia de la serie para $\cos(x) > 0$. Estudiemos cómo se comporta la función para distintos intervalos de X_1 a través de la visualización de los correspondientes gráficos. Notemos que $c_i(\frac{\pi}{3}) = 1, \forall i \in \mathbb{Z}^+$, por lo que sólo tenemos la demostración analítica correspondiente al caso trivial donde la sucesión es constante, porque

$$c_1(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{2 - 2 \cos(\frac{\pi}{3})} = \sqrt{2 - 1} = \sqrt{1} = 1$$

y así vemos que cada vez que sea evaluada dará 1. Esto es equivalente a decir que los bloques serán triángulos equiláteros.

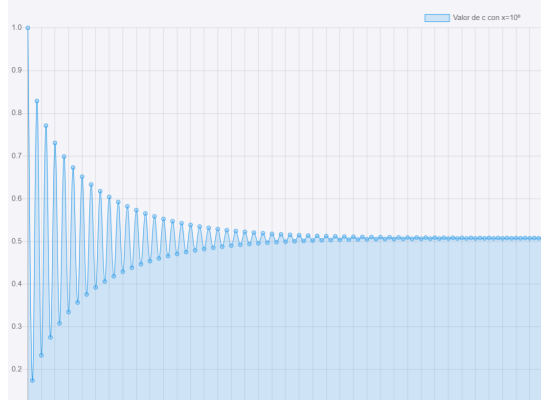


Figura 5: $c_i(x)$ para $x \in (0, \frac{\pi}{4})$

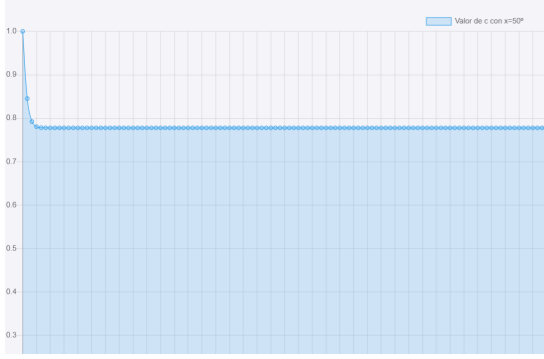


Figura 6: $c_i(x)$ para $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$

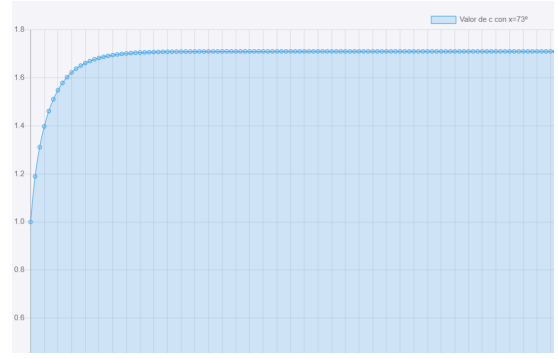


Figura 7: $c_i(x)$ para $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

Definición 2.1. Llamaremos *dominio de convergencia* al intervalo $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, para el cual

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}) \iff \cos(x) > 0 \iff c_i(x) \text{ converge}$$

Definición 2.2. Análogamente, llamaremos *dominio de no convergencia* al intervalo $X_2 = [\frac{\pi}{2}, \pi)$, para el cual

$$x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \iff \cos(x) \leq 0 \iff \lim_{i \rightarrow \infty} c_i(x) = \infty$$

Definición 2.3 Sea $r(x) = \frac{1}{2\cos(x)}$ la función *radio*, $\forall x \in X_1$

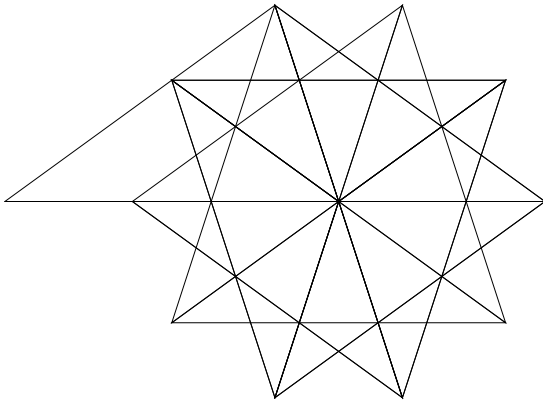


Figura 8: T_{36°

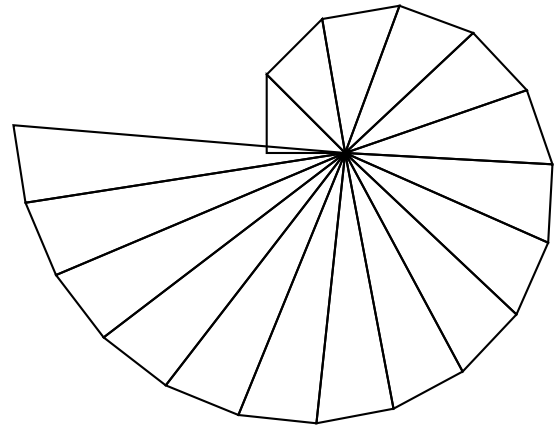


Figura 9: T_{90° (Espiral de Teodoro)

2.3. Estudio de una función: $p(x)$

Definición 3.1.

Sea $\varphi_n = |\{\frac{m}{n}\pi : m \in \mathbb{Z}^+_{<n} \wedge \text{mcd}(m, n) = 1\}|$ y $\varphi'_n = |\{m \in \mathbb{Z}^+_{<n} : \text{mcd}(m, n) = 1\}|$

Definición 3.2.

Sea $\gamma_n = |\{\frac{m}{n}\pi : 2m < n \wedge m \in \mathbb{Z}^+ \wedge \text{mcd}(m, n) = 1\}|$ y $\gamma'_n = |\{m \in \mathbb{Z}^+ : 2m < n \wedge \text{mcd}(m, n) = 1\}|$

Definición 3.3.

$\chi_n = |\{\frac{m}{n}\pi : m \in \mathbb{Z}^+_{<n} \wedge \text{mcd}(m, n) = 1 \wedge 2 \mid m\}|$, $\chi'_n = |\{m \in \mathbb{Z}^+_{<n} : \text{mcd}(m, n) = 1 \wedge 2 \mid m\}|$

Observación. Trivialmente, $|\varphi_n| = |\varphi'_n|$, $|\gamma_n| = |\gamma'_n|$ y $|\chi_n| = |\chi'_n|$.

Definición 4.1. Sea $p : X_1 \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ la función $p(x) = |\{P \in F_x : |\overline{OP}| = r(x)\}|$.

Teorema 1.1. Valor de la función $p(x)$

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff \begin{cases} 2 \nmid n \iff p(x) = 2n \\ 4 \mid n \iff p(x) = n \\ 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \implies p(x) = \frac{1}{2}n \end{cases}$$

Demostración. Notemos primero que, si $c_i(x)$ converge, lo hace también $c_{i-1}(x)$, que por la Definición 1.3, es igual a b_i , lo que implica que los bloques serán triángulos isósceles. Siendo O el vértice que une estos dos segmentos, y $\alpha_i = \hat{O}$, vemos también que α_i converge a $\alpha = \pi - 2x$. Luego, veamos que existe un número finito de bloques para el cual la suma de todos sus ángulos α constantes suman $v \cdot 2\pi$ para algún $v \in \mathbb{Z}^+$:

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff x = \frac{m}{n}\pi \iff \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2n}{n-2m} \iff \exists k, v \in \mathbb{Z}^+ : \text{mcd}(k, v) = 1 \wedge k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi$$

Esto significa que, tras k triángulos isósceles constantes, los nuevos triángulos se dibujarán sobre otros ya existentes, al ser α constante. Ahora, para conocer el valor de k en función de x , haremos lo siguiente:

$$k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi \iff \frac{k}{v} = \frac{2n}{n-2m}$$

Para igualar k al numerador de la expresión hay que estudiar qué valores de m y n generan una fracción irreducible.

$$\begin{cases} 2 \nmid n \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(n, n-2m) = \text{mcd}(2n, n-2m) = 1 \\ 4 \mid n \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(n, n-2m) = \text{mcd}(2n, n-2m) = 2 \\ 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(n, n-2m) = 2 \implies \text{mcd}(2n, n-2m) = 4 \end{cases}$$

En consecuencia tenemos que

$$\begin{cases} 2 \nmid n \implies \text{mcd}(2n, n-2m) = 1 \implies k(x) = 2n \\ 4 \mid n \implies \text{mcd}(2n, n-2m) = 2 \implies \text{mcd}\left(n, \frac{n-2m}{2}\right) = 1 \implies k(x) = n \\ 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \implies \text{mcd}(2n, n-2m) = 4 \implies \text{mcd}\left(\frac{n}{2}, \frac{n-2m}{4}\right) = 1 \implies k(x) = \frac{n}{2} \end{cases}$$

Falta ver que el valor $k(x)$, cuya expresión acabamos de encontrar, coincide con $p(x)$, objeto de este Teorema.

i	1	2	3	4	5	6	...	$k-1$	k
$\sum_{j=1}^i p_j$	2	3	4	5	6	7	...	k	k

Habiendo notado que los bloques son triángulos isósceles, donde $c_i = b_i = r(x)$, vemos que el primer bloque aportará 2 nuevas puntas a la figura; a partir de éste, cada nuevo triángulo aportará 1 punta nueva, pues compartirá una con el bloque anterior; finalmente, el último bloque no añade ninguna punta más a la figura, pues une dos ya existentes: las del primer y penúltimo bloque.

Corolario 1.1.

$$\nexists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff \frac{m}{n} \notin \mathbb{Q} \iff p\left(\frac{m}{n}\pi\right) = \infty$$

Demostración. Si x no es una fracción racional de π , $\nexists k, v \in \mathbb{Z}^+ : k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi$, lo que se traduce en que nunca se llega a cerrar la figura tras un número finito de bloques.

Corolario 1.2.

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff \begin{cases} 2 \nmid n \iff v(x) = n - 2m \\ 4 \mid n \iff v(x) = \frac{n-2m}{2} \\ 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \implies v(x) = \frac{n-2m}{4} \end{cases}$$

Definición 4.2. Sea $p^{-1}(p) = \{x \in X_1 : p(x) = p\}$, $\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ el conjunto antiimagen de la aplicación explicada en la Definición 3.1, y $f(p) := |p^{-1}(p)|$ la cantidad de ángulos de formación para los cuales su número de puntas es p .

Definición 5.1. Sea $\varphi(n) = |\varphi_n|$ la función totiente de Euler.

Lema Único. Simetrías de φ_n

- i) $\forall n \in \mathbb{Z}_{>2}, |\varphi_n| = 2|\chi_n|$
- ii) $\forall n \in \mathbb{Z}_{>2} : 2 \nmid n \iff |\varphi_n| = 2|\gamma_n|$
- iii) $\forall n \in \mathbb{Z}_{>2} : 2 \nmid n \iff \varphi(2n) = \varphi(n)$

La demostración de este Lema puede hallarse en el Apéndice.

Teorema 1.2. Inversa de $p(x)$ y Función Totiente

$$\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3}, f(p) = \frac{\varphi(p)}{2}$$

Demostración. Veamos primero qué denominador n causará que la figura tenga p puntas, siguiendo el Teorema 1.1:

$$\begin{cases} 2 \nmid p \iff n = 2p \\ 4 \mid n \iff n = p \\ 2 \mid p \wedge 4 \nmid p \iff n = \frac{1}{2}p \end{cases}$$

Así, dado un número independiente p , sabemos qué denominador único da lugar a figuras que cumplen $p(x) = p$.

$$\text{Vemos ahora que } p^{-1}(p) = \gamma_n = \begin{cases} \gamma_{2p} \iff 2 \nmid p \\ \gamma_n \iff 4 \mid p \\ \gamma_{\frac{p}{2}} \iff 2 \mid p \wedge 4 \nmid p \end{cases}$$

Es decir, el conjunto de las x para las cuales $p(x) = p$ son los ángulos $x \in X_1$ con denominador entero positivo n , dependiente de la paridad de p , y numerador también entero positivo y coprimo respecto a n . Esto es lo que representa, por construcción, el conjunto γ_n introducido en la Definición 4.2.

Seguendo el Lema de Simetrías y la Definición 5.1:

$$p^{-1}(p) = \gamma_n \iff |p^{-1}(p)| = f(p) = |\gamma_n| = \frac{\varphi(n)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(2p) \iff 2 \nmid p \\ \frac{1}{2}\varphi(p) \iff 4 \mid p \\ \frac{1}{2}\varphi(\frac{p}{2}) \iff 2 \mid p \wedge 4 \nmid p \end{cases} = \frac{\varphi(p)}{2}$$

2.4. Extensión de $p(x)$

Definición 6.1. Sea $k : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ la función

$$k(x, y) = k \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x) + (k - \lfloor k \rfloor) \alpha_{\lfloor k \rfloor + 1}(x) = y$$

Proposición 2.1.

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \gamma_n \iff p(x) = k(x, 2\pi v(x))$$

Demostración. Por el Teorema 1.1. y la Definición 6.1. vemos lo siguiente:

$$p(x) = k \iff \exists k, v \in \mathbb{Z}^+ : k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi \wedge \text{mcd}(k, v) = 1$$

$$k(x, y) = k \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x) + (k - \lfloor k \rfloor) \alpha_{\lfloor k \rfloor + 1}(x) = y$$

En el dominio de convergencia, para $k \in \mathbb{Z}^+$:

$$k(x, 2\pi v(x)) = k \iff \sum_{i=1}^k \alpha(x) = y \iff k \cdot \alpha = 2\pi v(x)$$

Teorema 2.1. Espirales Únicas

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 3}, \exists! x \in X : k(x, 2\pi) = k$$

Demostración. Veamos que la función $k(x, 2\pi)$ es inyectiva:

$$1. \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \implies c_i(x_1) < c_i(x_2)$$

En $i = 0$, $c_0(x_1) = c_0(x_2) = 1$. Luego:

$$x_1 < x_2 \implies c_1(x_1) = \sqrt{2(1 - \cos(x_1))} < \sqrt{2(1 - \cos(x_2))} = c_1(x_2) \iff \cos(x_1) > \cos(x_2)$$

Lo cual es cierto si y sólo si $x_1, x_2 \in (0, \pi) = X$. Para el resto de valores de i hacemos lo siguiente:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : a < b \implies \sqrt{1 + a^2 - 2a \cos(x_1)} < \sqrt{1 + b^2 - 2b \cos(x_2)} \iff a(a - 2 \cos(x_1)) < b(b - 2 \cos(x_2))$$

Por hipótesis tenemos que $a < b$, así que veamos que $a - 2 \cos(x_1) < b - 2 \cos(x_2)$. Con la misma lógica, $a < b$, así que basta ver que $2 \cos(x_1) > 2 \cos(x_2)$, lo cual acabamos de ver en el caso $i = 0$:

$$2. \forall x_1, x_2 \in X : c_i(x_1) < c_i(x_2) \implies \alpha_i(x_1) > \alpha_i(x_2)$$

Comprobémoslo para la primera iteración de dos construcciones cualesquiera:

$$\alpha_1(x_1) > \alpha_1(x_2) \iff \arccos\left(\frac{1^2 + c_1^2(x_1) - 1}{2 \cdot 1 \cdot c_1(x_1)}\right) > \arccos\left(\frac{1^2 + c_1^2(x_2) - 1}{2 \cdot 1 \cdot c_1(x_2)}\right) \iff \frac{c_1(x_1)}{2} < \frac{c_1(x_2)}{2}$$

$$\arccos\left(\frac{c_i(x_1)^2 + c_{i-1}(x_1)^2 - 1}{2c_i(x_1)c_{i-1}(x_1)}\right) > \arccos\left(\frac{c_i(x_2)^2 + c_{i-1}(x_2)^2 - 1}{2c_i(x_2)c_{i-1}(x_2)}\right) \iff$$

$$\begin{aligned} \frac{c_i(x_1)^2 + c_{i-1}(x_1)^2 - 1}{c_i(x_1)c_{i-1}(x_1)} &< \frac{c_i(x_2)^2 + c_{i-1}(x_2)^2 - 1}{c_i(x_2)c_{i-1}(x_2)} \iff \\ \frac{(\sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1}\cos(x_1)})^2 + c_{i-1}^2 - 1}{c_i(x_1)c_{i-1}(x_1)} &< \frac{(\sqrt{1 + c_{i-1}^2 - 2c_{i-1}\cos(x_2)})^2 + c_{i-1}^2 - 1}{c_i(x_2)c_{i-1}(x_2)} \iff \\ \frac{c_{i-1}(x_1) - \cos(x_1)}{c_i(x_1)} &< \frac{c_{i-1}(x_2) - \cos(x_2)}{c_i(x_2)} \end{aligned}$$

$$3. \forall k \in \mathbb{R}^+ \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \implies \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x_1) + (k - \lfloor k \rfloor) \alpha_{\lfloor k \rfloor}(x_1) > \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x_2) + (k - \lfloor k \rfloor) \alpha_{\lfloor k \rfloor}(x_2)$$

$$4. \forall x_1, x_2 \in X \forall y \in \mathbb{R}^+ : x_1 < x_2 \implies k(x_1, y) < k(x_2, y)$$

Consideremos $k(x_2, y) = k_2 \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k_2 \rfloor} \alpha_i(x_2) + (k_2 - \lfloor k_2 \rfloor) \alpha_{\lfloor k_2 \rfloor}(x_2) = y$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{\lfloor k_2 \rfloor} \alpha_i(x_1) + (k_2 - \lfloor k \rfloor) \alpha_{\lfloor k_2 \rfloor}(x_1) > y$$

Por lo que, necesariamente, $k(x_1, y) = k_1 < k_2 = k(x_2, y)$. Basándonos en este principio:

$$5. \forall x_1, x_2 \in X \forall y \in \mathbb{R}^+, \exists k \in \mathbb{Z}^+ : k(x_1, y) < k < k(x_2, y) \implies \exists! x_m \in X : x_1 < x_m < x_2 \wedge k(x_m, y) = k$$

Así, si conocemos $k(x, y)$, podemos usar su crecimiento monótono para encontrar aquellos ángulos únicos x_m tales que $k(x_m, y) \in \mathbb{Z}^+$.

En la Figura 4 se aprecian 17 bloques de la figura infinita T_{90° . Se ve que la suma de sus ángulos internos $\alpha_i(90^\circ)$ es mayor a 2π , y que la suma de los 16 primeros es menor a 2π . En consecuencia, sabemos que la parte entera de $k(90^\circ, 360^\circ) = k \in \mathbb{R}^+$ es 16. En general:

$$\lfloor k(x, y) \rfloor = n \in \mathbb{Z}^+ \iff \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) < y < \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(x)$$

$$k(x, y) = k \iff \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x) + (k - \lfloor k \rfloor) \alpha_{\lfloor k \rfloor+1}(x) = y \iff k = \lfloor k \rfloor + \frac{y - \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \alpha_i(x)}{\alpha_{\lfloor k \rfloor+1}(x)}$$

Ya podemos computar con facilidad la función $k(x, y)$ para todas $(x, y) \in X \times \mathbb{R}^+$. En particular, $k(90^\circ, 360^\circ) \approx 16,649128$, y $k(91^\circ, 360^\circ) \approx 17,445935$. Apliquemos el punto 5:

$$k(90^\circ, 360^\circ) < 17 < k(91^\circ, 360^\circ) \implies \exists! x_m \in (90^\circ, 91^\circ) : k(x_m, 360^\circ) = 17$$

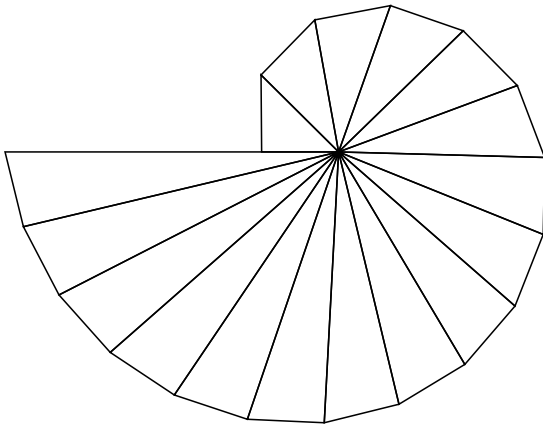


Figura 10: 17 bloques de $T_{x=90,45332215^\circ}$

$k \in \mathbb{Z}^+$	x°
3	19.019079333
6	60
9	74.15292718
12	82.2524055
16	89.13404388
17	90.45332215
18	91.65964018
19	92.76863062
20	93.79304858
21	94.74341811
60	110.8178438
450	128.8014110

Figura 11: $\{(k, x) : k(x, 2\pi) = k\}$

Corolario 2.

$$i) |\{x_1 \in X_1 : k(x_1, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+\}| = 14$$

$$ii) |\{x_2 \in X_2 : k(x_2, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+\}| = \infty$$

Es decir, que hay número finito de $x_1 \in X_1$ que exhiben este comportamiento inyectivo respecto a la aplicación $k(x, 2\pi)$, mientras que existen infinitos ángulos $x_2 \in X_2$ para los cuales $k(x_2, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+$

Conjetura 1.

$$\forall x \in X \setminus \left\{\frac{\pi}{3}\right\} : k(x, 2\pi) \in \mathbb{Z}^+ \implies \nexists n : x \in \gamma_n$$

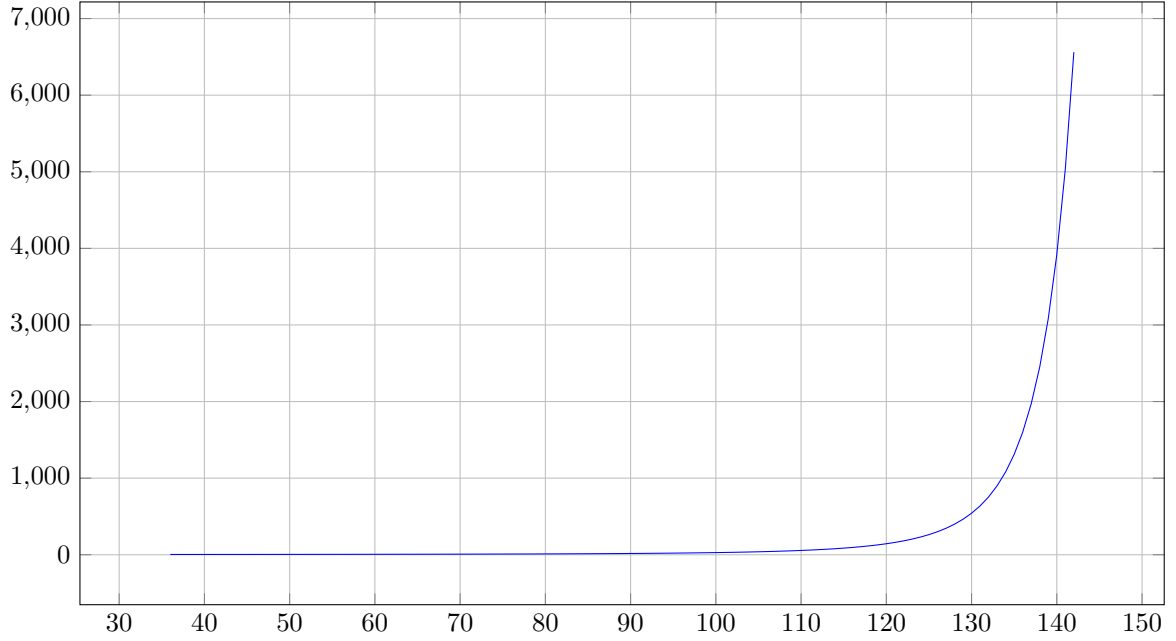


Figura 12: Gráfico de $k(x, 2\pi)$.

Concluimos así que ésta es una función de crecimiento exponencial.

3. Segunda Construcción

3.1. Definición de la Construcción

Definición 7.1. En este caso, el *bloque fundamental* será el paralelogramo equilátero de lados a_i, b_i, c_i y d_i tales que

$$a_i = b_i = c_i = d_i = \lambda \in \mathbb{R}^+$$

y x el ángulo que se forma entre a_i y b_i (también entre c_i y d_i)

Definición 7.2. Sea P_x la figura generada yuxtaponiendo bloques mediante la misma regla que T_x , y O el centro de la figura:

$$b_i = c_{i-1}$$

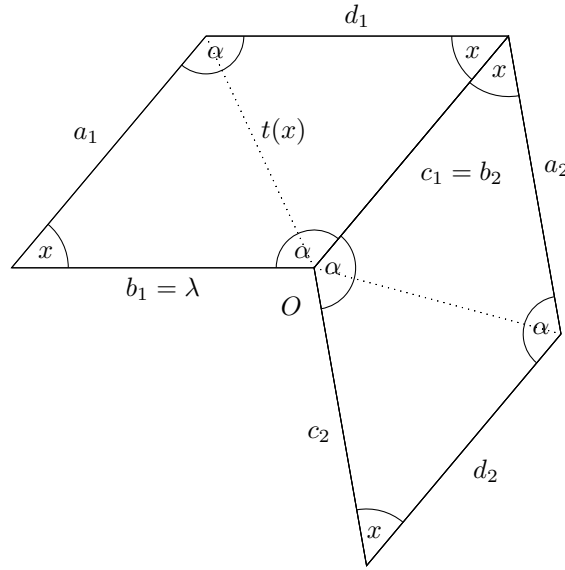


Figura 13: Dos primeros bloques de P_{50° .

Definición 7.3. Sea $r'(x) := \max(\lambda, t(x)), \forall x \in X$, donde $t(x)$ es la distancia entre los vértices opuestos cuyos ángulos son α .

3.2. Función homóloga a $p(x) : q(x)$

Proposición 3.1.

$$r'(x) = \begin{cases} \lambda & \text{si } 0 < x \leq \frac{\pi}{3} \\ \lambda\sqrt{2(1 - \cos x)} & \text{si } \frac{\pi}{3} < x < \pi \end{cases}$$

Demostración. Por el Teorema del Coseno, tenemos que:

$$t^2(x) = a^2 + b^2 - 2ab \cos x \iff t(x) = \sqrt{2\lambda^2 - 2\lambda^2 \cos(x)} = \sqrt{2\lambda^2(1 - \cos(x))} = \lambda\sqrt{2(1 - \cos(x))}$$

Luego:

$$\begin{cases} r'(x) = \lambda \iff \max(\lambda, \lambda\sqrt{2(1 - \cos x)}) = \lambda \iff \lambda \geq \lambda\sqrt{2(1 - \cos(x))} \iff \cos x \geq \frac{1}{2} \iff x \in (0, \frac{\pi}{3}] \\ r'(x) = \lambda\sqrt{2(1 - \cos x)} \iff \lambda < \lambda\sqrt{2(1 - \cos(x))} \iff \cos x < \frac{1}{2} \iff x \in (\frac{\pi}{3}, \pi) \end{cases}$$

Por lo que vemos que todas las figuras generadas por esta segunda construcción tendrán un radio real.

Definición 8.1. Sea $q : X \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ la función $q(x) = |\{S \in P_x : |\overline{OS}| = r'(x)\}|$

Teorema 3.1. Función $q(x)$

$$i) \forall n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{3\}, x \in \varphi_n \iff \begin{cases} q(x) = 2n \iff 2 \mid n \vee 2 \mid m \\ q(x) = n \iff 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \end{cases} \quad ii) q(\frac{1}{3}\pi) = 2n = 6$$

Demostración. Por la relación de ángulos de un cuadrilátero, $2\alpha + 2x = 2\pi \iff \alpha = \pi - x$. Procedamos ahora de la misma manera que en el Teorema 1.1:

$$\begin{aligned} \exists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \varphi_n &\iff x = \frac{m}{n}\pi \wedge m < n \iff \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2n}{n-m} \iff \\ &\iff \exists k, v \in \mathbb{Z}^+ : \text{mcd}(k, v) = 1 \wedge k \cdot \alpha = v \cdot 2\pi \iff \frac{k}{v} = \frac{2n}{n-m} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (2 \mid n \vee 2 \mid m) \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(2n, n-m) = 1 \implies k(x) = 2n \\ 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \wedge 1 = \text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(n, n-m) \implies \text{mcd}(2n, n-m) = 2 \implies k(x) = n \end{cases}$$

Veamos ahora la relación entre $q(x)$ y $k(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} r'(x) = \lambda \iff x \in (0, \frac{\pi}{3}) \\ r'(x) = \lambda\sqrt{2(1-\cos(x))} \\ x = \frac{\pi}{3} \end{array} \right\} \iff \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & k-1 & k \\ \hline \sum_{j=1}^i q_j & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & k & k \\ \hline i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & k-1 & k \\ \hline \sum_{j=1}^i q_j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & k-1 & k \\ \hline i & 1 & 2 & 3 & & & & & & \\ \hline \sum_{j=1}^i q_j & 3 & 5 & 6 & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Cuando $r'(x) = \lambda$, el primer bloque aporta dos puntas, porque tiene dos segmentos con esa longitud: $b_1 = \lambda = c_1$. En cambio, para $r'(x) = t(x)$, el primer bloque contiene únicamente un segmento desde O con longitud $t(x) = \lambda\sqrt{2(1-\cos(x))}$. En el caso singular $x = 60^\circ$ se da que los bloques son triángulos equiláteros.

Corolario 3.1.

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, x \in \varphi_n \iff \begin{cases} (2 \mid n \vee 2 \mid m) \iff v'(x) = n - m \\ 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff v'(x) = \frac{n-m}{2} \end{cases}$$

En la Sección de Relaciones entre Construcciones estudiaremos esta función.

Corolario 3.2.

$$\nexists n \in \mathbb{Z}^+ : x \in \varphi_n \iff \frac{m}{n} \notin \mathbb{Q} \iff q(\frac{m}{n}\pi) = \infty$$

4. Relaciones entre las Construcciones

4.1. Teoremas de Equivalencias

Definición 8.2. Sea $q^{-1}(q) = \{x \in X : q(x) = q\}$ el conjunto antiimagen de la función $q(x)$, y $g(q) := |q^{-1}(q)|$

Teorema 4.1. Primer Teorema de Equivalencias

$$i) \forall p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \setminus \{6\}, p = q \implies f(p) = g(q)$$

$$ii) \forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \setminus \{6\}, f(p) + g(p) = \varphi(p)$$

$$iii) f(6) + g(6) = 3 = \varphi(6) + 1$$

Demostración. Por el Teorema 1.2. tenemos que $f(p) = \frac{\varphi(p)}{2}$, así que veremos

$$f(p) + g(p) = \varphi(p) \iff g(p) = \frac{\varphi(p)}{2} \iff f(p) = g(p)$$

viendo que $g(p) = \frac{\varphi(p)}{2}$. Estudiemos las condiciones de q para conocer los denominadores y numeradores m y n para los cuales $q(\frac{m}{n}\pi) = q$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \nmid n \wedge 2 \mid m \iff n = \frac{q}{2} \wedge 2 \mid m \iff 2 \mid q \wedge 4 \nmid q \\ 2 \mid n \wedge 2 \nmid m \iff n = \frac{q}{2} \wedge 2 \nmid m \iff 4 \mid q \\ 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff n = q \wedge 2 \nmid m \iff 2 \nmid q \end{array} \right. \implies q^{-1}(q) = \left\{ \begin{array}{l} \chi_{\frac{q}{2}} \iff 2 \mid q \wedge 4 \nmid q \\ \varphi_{\frac{q}{2}} \iff 4 \mid q \\ \varphi_q \setminus \chi_q \iff 2 \nmid q \end{array} \right.$$

Luego, siguiendo el Lema de Simetrías:

$$|q^{-1}(q)| = g(q) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(q) - |\chi_q| = \frac{1}{2}\varphi(q) \iff 2 \nmid q \\ \varphi(\frac{q}{2}) \iff 4 \mid q \\ |\chi_{\frac{q}{2}}| = \frac{1}{2}\varphi(\frac{q}{2}) \iff 2 \mid q \wedge 4 \nmid q \end{array} \right. = \frac{\varphi(q)}{2}$$

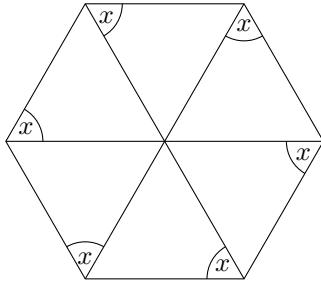


Figura 14: T_{60°

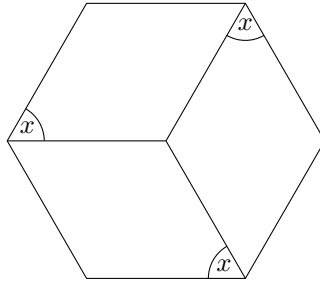


Figura 15: P_{60°

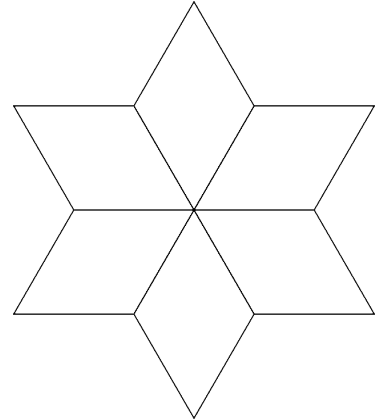


Figura 16: P_{120°

Definición 9.1. Diremos que $T_x \sim P_x \iff p(x) = q(x) \wedge v(x) = v'(x)$

Definición 9.2. Diremos que $T_{x_1} \sim T_{x_2} \iff p(x_1) = p(x_2) \wedge v(x_1) = v(x_2)$

Definición 9.3. Diremos que $P_{x_1} \sim P_{x_2} \iff q(x_1) = q(x_2) \wedge v'(x_1) = v'(x_2)$

Teorema 4.2. Segundo Teorema de Equivalencias

$$\begin{aligned}
i) \quad & \forall x \in X, T_x \sim P_x \iff x = \frac{\pi}{3} \\
ii) \quad & \forall x_t, x_p \in X, T_{x_t} \sim P_{x_p} \iff 2x_t = x_p \\
iii) \quad & \forall x_1, x_2 \in X_1, T_{x_1} \sim T_{x_2} \iff x_1 = x_2 \\
iv) \quad & \forall x_1, x_2 \in X, P_{x_1} \sim P_{x_2} \iff x_1 = x_2 \vee x_1 = \frac{\pi}{3} = \frac{x_2}{2}
\end{aligned}$$

Demostración. i) Veamos por separado qué valores de $x \in X$ permiten que $p(x) = q(x)$ y $v(x) = v'(x)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \quad p(x) = q(x) = 2n \iff 2 \nmid n \wedge (2 \mid n \vee 2 \mid m) \iff 2 \mid m \wedge 2 \nmid n \iff x \in \chi_n \\ 2. \quad p(x) = q(x) = n \iff 4 \mid n \wedge (2 \nmid n \wedge 2 \nmid m) \quad \text{es una contradicción} \\ 3. \quad p\left(\frac{\pi}{3}\right) = q\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6 \end{array} \right.$$

Por tanto, $p(x) = q(x) \iff 2 \mid m \wedge 2 \nmid n$. Luego:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4. \quad v(x) = v'(x) \wedge 2 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff \frac{n-m}{2} = n - 2m \iff n - m = 2n - 4m \iff 3m = n \iff \frac{m}{n} = \frac{1}{3} \\ 5. \quad v(x) = v'(x) \wedge 2 \nmid n \wedge 2 \mid m \iff n - 2m = n - m \iff m = 0 \iff x = 0 \notin X \\ 6. \quad v(x) = v'(x) \wedge 4 \mid n \wedge 2 \nmid m \iff \frac{n-2m}{2} = n - m \iff n - 2m = 2n - 2m \iff n = 0 \notin \mathbb{Z}_{\geq 2} \\ 7. \quad v(x) = v'(x) \wedge 2 \mid n \wedge 4 \nmid n \wedge 2 \nmid m \iff \frac{n-2m}{4} = n - m \iff 3n = 2m \iff \frac{m}{n} = \frac{3}{2} \iff x \notin X \end{array} \right.$$

Así vemos que $v(x) = v'(x) \iff x = \frac{\pi}{3}$. Además, y es un caso especial, $p(\frac{\pi}{3}) = q(\frac{\pi}{3}) = 6$.

$$ii) \quad T_{x_t} \sim P_{x_p} \iff \frac{p}{v} = \frac{q}{v'} \iff \frac{2n_t}{n_t - 2m_t} = \frac{2n_p}{n_p - m_p} \iff \frac{2m_t}{n_t} = \frac{m_p}{n_p} \iff 2x_t = x_p$$

Ya que $\text{mcd}(p, v) = \text{mcd}(q, v') = 1 \iff p = q \wedge v = v'$. Recordemos que, por i), $x_t = x_p = 60^\circ$ es la excepción.

$$iii) \quad T_{x_1} \sim T_{x_2} \iff \frac{p_1}{v_1} = \frac{p_2}{v_2} \iff \frac{2n_1}{n_1 - 2m_1} = \frac{2n_2}{n_2 - 2m_2} \iff \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \iff x_1 = x_2$$

$$iv) \quad P_{x_1} \sim P_{x_2} \iff \frac{q_1}{v'_1} = \frac{q_2}{v'_2} \iff \frac{2n_1}{n_1 - m_1} = \frac{2n_2}{n_2 - m_2} \iff \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \iff x_1 = x_2$$

Definición 10. Sean $x_t : \mathbb{Z}_{\geq 3} \times \gamma'_p \rightarrow X_1$ y $x_p : \mathbb{Z}_{\geq 3} \times \gamma'_q \rightarrow X$ las funciones

$$\begin{aligned}
x_t(p, v) &= x_t \iff p(x_t) = p \wedge v(x_t) = v \\
x_p(q, v') &= x_p \iff q(x_p) = q \wedge v'(x_p) = v'
\end{aligned}$$

Proposición 4.

$$i) \forall (p, v) \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \times \gamma'_p, \quad x_t(p, v) = \frac{p-2v}{2p}\pi \in X_1$$

$$ii) \forall (q, v') \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \times \gamma'_q, \quad x_p(q, v') = \frac{q-2v'}{q}\pi \in X$$

Demostración. Veamos primero i)

$$\frac{p}{v} = \frac{2n}{n-2m} \iff p(n-2m) = 2nv \iff pn - 2pm = 2nv \iff n(p-2v) = 2pm \iff \frac{m}{n} = \frac{p-2v}{2p}$$

$$1. 2m < n \iff p-2v < p \iff v > 0$$

$$2. p-2v > 0 \iff 2v < p$$

$$3. p, v \in \mathbb{Z}^+ \wedge \text{mcd}(p, v) = 1$$

por lo que, en suma, $v \in \gamma'_p$. Esto reafirma el Teorema 1.2, porque

$$\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 3} : v \in \gamma'_p \wedge |\gamma'_p| = \frac{\varphi(p)}{2}$$

$$ii) \frac{q}{v'} = \frac{2n}{n-m} \iff q(n-m) = 2nv' \iff qn - qm = 2nv' \iff n(q-2v') = qm \iff \frac{m}{n} = \frac{q-2v'}{q}$$

$$1. m < n \iff q-2v' < q \iff v' > 0$$

$$2. q-2v' > 0 \iff 2v' < q$$

$$3. q, v' \in \mathbb{Z}^+ \wedge \text{mcd}(q, v') = 1$$

En conclusión, análogamente, $v' \in \gamma'_q$, por lo que hemos hallado una vía de demostración del Primer Teorema de Equivalencias que no demanda ninguna información sobre χ_n .

Corolario 4.

$$\forall (p, v) \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \times \gamma_p : 2x_t(p, v) = x_p(p, v)$$

No es más que una reexpresión del apartado ii) del Segundo Teorema de Equivalencias, y se sigue inmediatamente de la Proposición 4. Y es que $2x_t = x_p$ implica que los ángulos internos que se formarán serán iguales, por lo tanto será el mismo número de puntas y de vueltas el que satisfaga la condición de cierre.

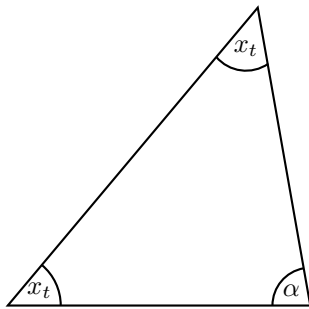


Figura 17: $x_t = 50^\circ$

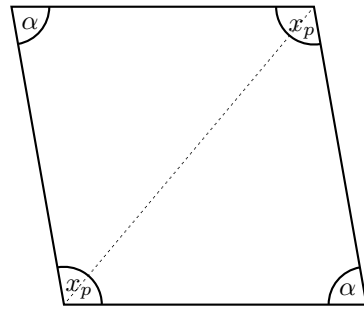


Figura 18: $x_p = 2x_t = 100^\circ$

5. Apéndice

5.1. Demostración del Lema de Simetrías

$$i) \forall n \in \mathbb{Z}_{>2}, 2 \nmid n \iff |\varphi_n| = 2|\chi_n|$$

Demostración.

$$1. \forall n \in \mathbb{Z}^+ : \exists f_n : [1, \frac{n-1}{2}] \cap \mathbb{Z}^+ \rightarrow [\frac{n+1}{2}, n-1] \cap \mathbb{Z}^+ \text{ biyectiva}$$

Es trivial ver que el dominio y el codominio de esta función son conjuntos finitos y numerables con cardinal $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}^+ \iff 2 \nmid n$:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+ : a \leq b \implies |[a, b] \cap \mathbb{Z}^+| = b - a + 1$$

$$n - 1 - \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{2(n-1) - (n+1) + 2}{2} = \frac{n-1}{2}$$

Además:

$$2 \nmid n \iff [1, \frac{n-1}{2}] \cap \mathbb{Z}^+ \cup [\frac{n+1}{2}, n-1] \cap \mathbb{Z}^+ = [1, n-1] \cap \mathbb{Z}^+ = \{m \in \mathbb{Z}^+ : m < n\}$$

En concreto vamos a considerar la regla de asignación

$$f_n(m) = n - m \iff f_n(m) + m = n$$

m	1	2	3	4	5	6	7
$f_{15}(m)$	14	13	12	11	10	9	8

$$2. \forall n \in \mathbb{Z}^+ : 2 \nmid n \iff \forall m \in [1, \frac{n-1}{2}] \cap \mathbb{Z}^+, \begin{cases} 2 \mid m \iff 2 \nmid f_n(m) \\ 2 \nmid m \iff 2 \mid f_n(m) \end{cases}$$

Esto se da porque, por la regla de asignación de la aplicación, vemos que la suma del argumento m y su imagen $f_n(m)$ debe ser igual a n , que es un número impar; y sólo la suma de un par y un impar resultan en un número impar.

$$3. \forall m, n \in \mathbb{Z}^+ : \text{mcd}(m, n) = 1 \iff \text{mcd}(n, n - m) = 1 \iff (m \in \gamma'_n \iff f_n(m) \in \varphi'_n \setminus \gamma'_n)$$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f_{27}(m)$	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14

Con esta información podemos ver que existirá una biyección entre los elementos pares e impares de φ'_n :

χ_{27}	2	4	8	10	14	16	20	22	26
$\varphi_{27} \setminus \chi_{27}$	25	23	19	17	13	11	7	5	1

$$\forall a \in \chi'_n, \exists! b \in \varphi'_n \setminus \chi'_n : a + b = n$$

$$\forall b \in \varphi'_n \setminus \chi'_n, \exists! a \in \varphi'_n : a + b = n$$

Por lo que ya habríamos demostrado la simetría ii) para $2 \nmid n$. Veámosla en general:

$$ii) \forall n \in \mathbb{Z}_{>2}, |\varphi_n| = 2|\gamma_n|$$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$f_{30}(m)$	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16

Donde estamos considerando la misma regla de asignación para $f_n(m)$. Notemos que, aquí, la unión del dominio y el codominio no es igual a todos los enteros menores que n , sino que se excluye $\frac{n}{2}$ cuando $2 \mid n$, lo cual no afectará al cómputo ni a la relación entre φ_n y γ_n , porque $n > 2 \implies \frac{n}{2} > 1 \implies \gcd(n, \frac{n}{2}) > 1 \implies \frac{n}{2} \notin \varphi_n$

$$\forall m \in [1, \frac{n}{2}) \cap \mathbb{Z}^+, (2m < n \wedge \frac{n}{2} < f_n(m) < n) \wedge (m \in \gamma_n \iff f_n(m) \in \varphi_n \setminus \gamma_n)$$

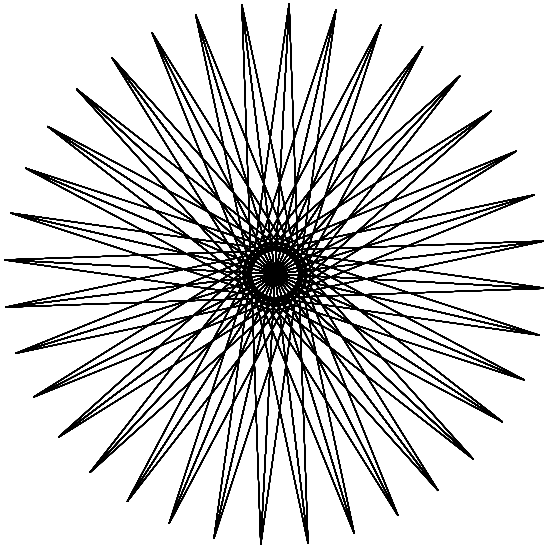
$$|\gamma_n| + |\varphi_n \setminus \gamma_n| = |\gamma_n| + (|\varphi_n| - |\gamma_n|) = |\varphi_n| \wedge |\gamma_n| = |\varphi_n \setminus \gamma_n| \implies |\varphi_n| = 2|\gamma_n|$$

5.2. Software

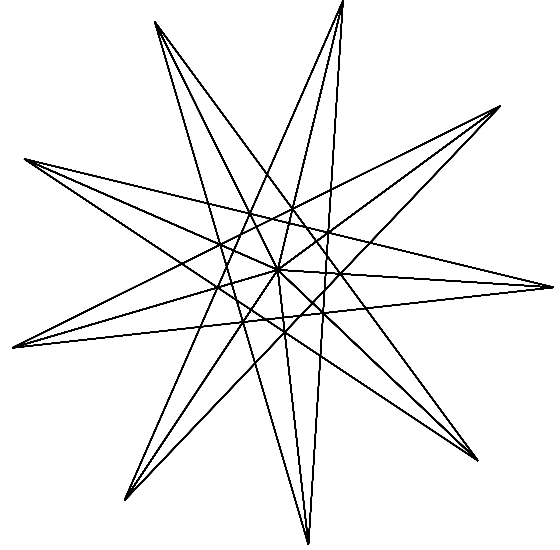
<https://aidanLorenzo.github.io>

<https://github.com/aidanLorenzo/aidanLorenzo.github.io>

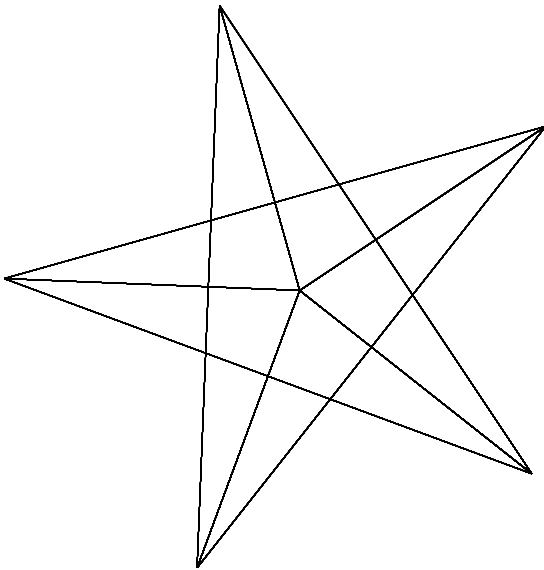
5.3. Figuras



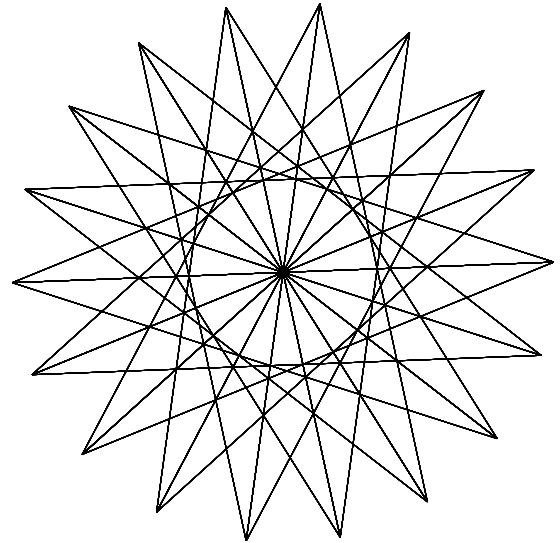
T_{5°



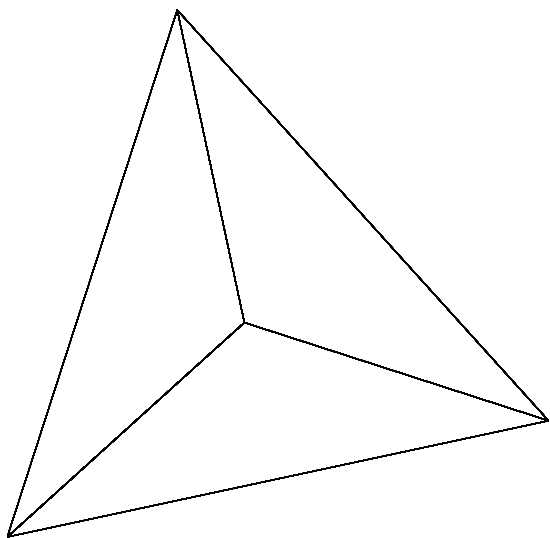
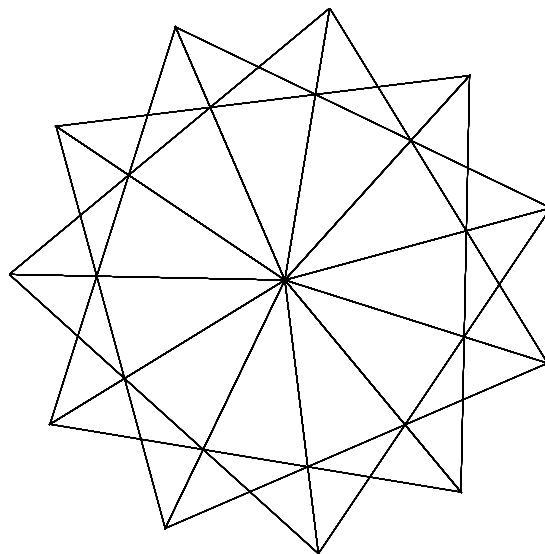
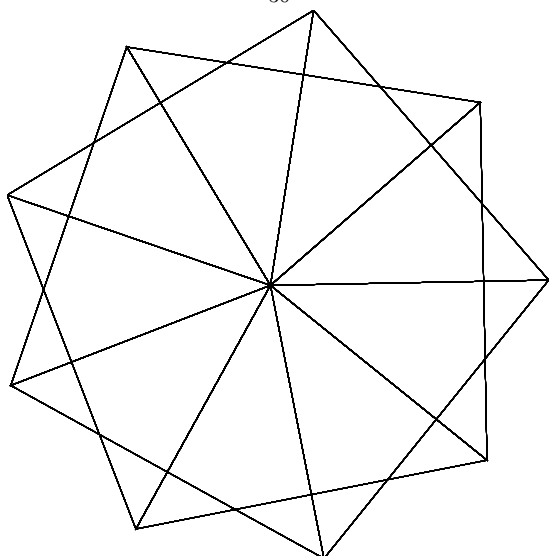
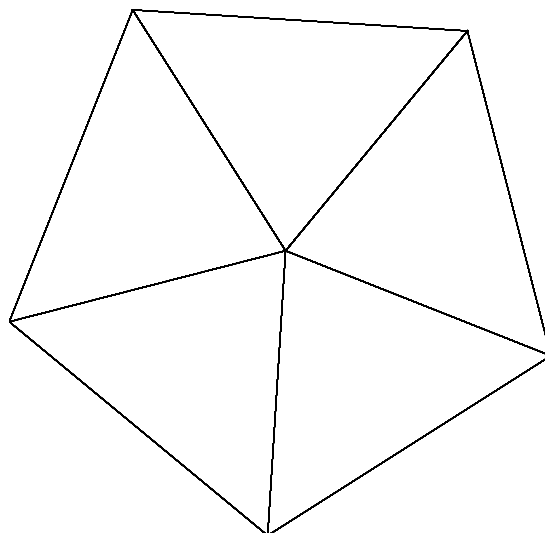
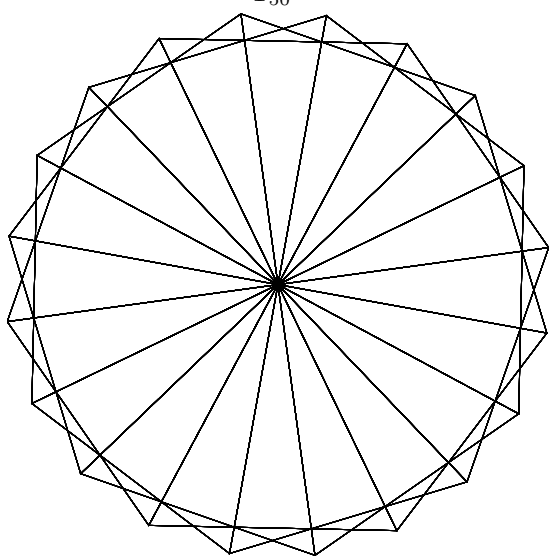
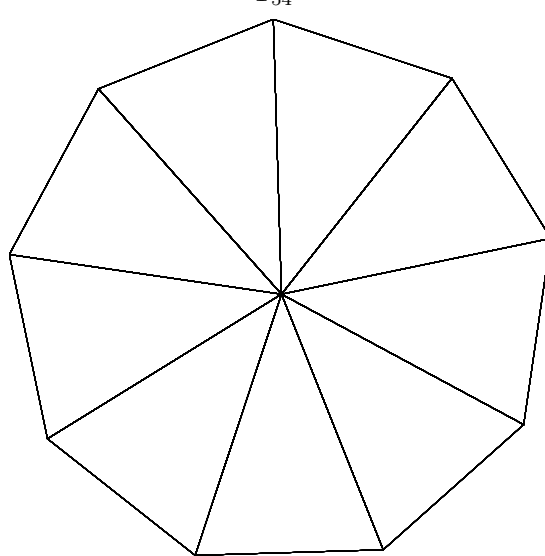
T_{10°



T_{18°



T_{20°


 T_{30°

 $T_{40,90^\circ}$

 T_{50°

 T_{54°

 T_{63°

 T_{70°