M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, Lekt 3, V16

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

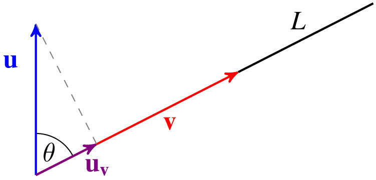
Lekt 2

Bestäm ekvationen för linjen L genom punkterna $(5, 3)$ och $(-2, 7)$ på vektor- riktningskoefficient- och normalform.

Projektion, koordinater

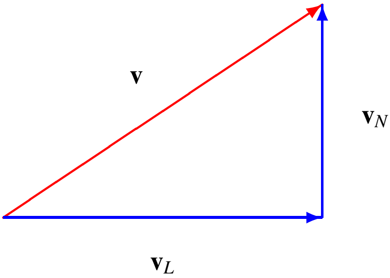
Låt $\mathbf{u}$ vara en godtycklig vektor och L en rät linje med riktningsvektor $\mathbf{v}$. Den ortogonala (vinkelräta) projektionen $\mathbf{u_v}$ på L är den vektor med egenskapen

- $\mathbf{u_v} \parallel L$,
- $\mathbf{u} - \mathbf{u_v} \perp L$.



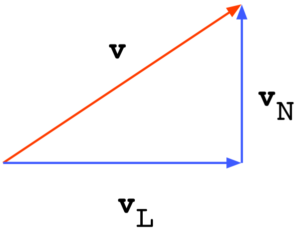
Komposantuppdelning

Det är ofta praktiskt att uttrycka en vektor som en summa av två andra vektorer, parallella med och ortogonala mot en föreskriven riktning.



Låt L och N vara två vinkelräta linjer i planet med riktningsvektorer $\mathbf{v}_L$ och $\mathbf{v}_N$. En godtycklig vektor $\mathbf{v}$ kan då uttryckas som summan

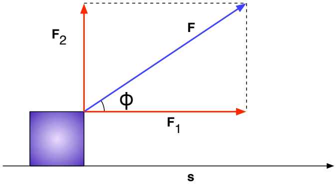
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_L + \mathbf{v}_N \tag{1}$$



Vektorerna $\mathbf{v}_L$ och $\mathbf{v}_N$ kallas $\mathbf{v}$:s komposanter. Uttrycket (1) kallas en komposantuppdelning av $\mathbf{v}$.

Exempel

Ett föremål dras längs en vågrät väg L med en kraft $\mathbf{F}$ som bildar en vinkel ϕ med förflyttningen.



Enligt definitionen av arbete utför kraften $\mathbf{F}$ arbetet

$$W = |\mathbf{F}| \cos\phi \, |\mathbf{s}| \quad \text{(Kraft i förflyttningsriktn. } \times \text{ väg)}$$

Vi komposantuppdelar $\mathbf{F}$ och finner att $|\mathbf{F}| \cos\phi = |\mathbf{F}_1|$. Definitionen av arbete visar att

$$W = |\mathbf{F}_1| \, |\mathbf{s}| = |\mathbf{F}| \cos\phi \, |\mathbf{s}|.$$

Låt oss uttrycka detta med en alternativ formulering.

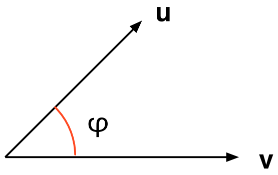
Skalärprodukt

Föregående exempel kan tjäna som inledning till begreppet skalärprodukt.

Skalärprodukten $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, definieras som

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\, |\mathbf{v}|\, \cos\varphi \quad ,$$

och φ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.



Anmärkning Föregående exempel visar att

$$W = \mathbf{F} \bullet \mathbf{s} \quad (= |\mathbf{F}|\, |\mathbf{s}|\, \cos\varphi)$$

Speciella egenskaper

- $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$,
- Om $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$ så är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ortogonala (vinkelräta) (eller någon faktor är lika med nollvektorn),

Räkneregler

Kommutativ lag $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u},$

Distributiv lag $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w},$

För $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}).$

Från Lekt 2

Exempel Visa att vektorn $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ är normalvektor till linjen $Ax + By + C = 0$.

Lösningsförslag

Punkterna $P(x_1, y_1)$ resp. $Q(x_2, y_2)$ antas ligga på linjen. Därför gäller:

$$\begin{cases} Ax_1 & + & By_1 & + & C & = & 0 \\ Ax_2 & + & By_2 & + & C & = & 0 \end{cases}$$

Vi subtraherar och får

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0 \quad .$$

Tolkning

Detta kan alternativt uttryckas som skalärprodukten

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} = 0 \quad .$$

Detta betyder att vektorerna $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ och $\overline{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$ är ortogonala, dvs. $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ är en normalvektor till linjen, eftersom $\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ är en riktningsvektor till linjen.

Exempel

Bestäm en riktningsvektor till linjen med ekvationen

- $Ax + By + C = 0$.

Lösningsförslag

Vår räta linje är given på normalform. Då vet vi att vektorn $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ är normalvektor till linjen $Ax + By + C = 0$. Därför kan vi förslagsvis välja vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -B \\ A \end{bmatrix}$ till riktningsvektor. (Varför?)

Exempel

Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har längderna 1 resp. 2 längdenheter. Vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är $\pi/3$.

- Bestäm a så att vektorerna $3\,\mathbf{u} + 2\,\mathbf{v}$ och $2\,\mathbf{u} + a\,\mathbf{v}$ blir ortogonala.

ON-baser och skalärprodukt

Om

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

i ON-basen $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$, så är

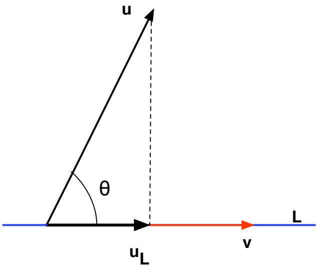
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = x_1\, x_2 + y_1\, y_2.$$

Anm: Motsvarande gäller för vektorer i rummet.

Vinkelrät projektion

I början av lektionen introducerade vi begreppet vinkelrät projektion.

Vektorn $\mathbf{u}$ är godtycklig. Linjen L har riktningsvektor $\mathbf{v}$. Komposanten $\mathbf{u}_L$ kallas $\mathbf{u}$:s (vinkelräta) projektion på L.

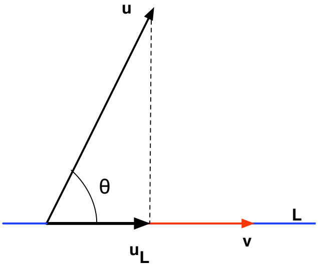


Anm Vi antar inledningsvis att $\mathbf{u}_L$ och $\mathbf{v}$ är parallella och riktade åt samma håll, dvs

$$\mathbf{u}_L = t \cdot \mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Anta att $0 < \theta < \pi/2$. Det gäller att

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{u}_L| &= |\mathbf{u}|\,\cos\theta = \\
&= \frac{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,\cos\theta}{|\mathbf{v}|} = \\
&= \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad .
\end{aligned}
$$



Vi dividerar med $|\mathbf{v}|$ och får

$$\frac{|\mathbf{u}_L|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}} (= t). \quad \text{(Minns att } |\mathbf{u}_L| = t \cdot |\mathbf{v}|\text{.)}$$

Projektionsformeln

Vi får som resultat av kalkylerna den s.k. projektionsformeln:

$$\mathbf{u}_L = t \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}\, \mathbf{v}. \tag{2}$$

Anmärkning

I (2) kan vi sätta enhetsvektorn $\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ och får alternativt

$$\mathbf{u}_L = (\mathbf{u} \bullet \mathbf{e})\,\mathbf{e}. \tag{3}$$

Mer generellt: Om $\mathbf{u}_L$ och $\mathbf{v}$ är parallella, dvs

$$\mathbf{u}_L = t \cdot \mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

innebär detta att komposanten $\mathbf{u}_L$ har längden

$$|\mathbf{u}_L| = \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}\,|\mathbf{v}| \quad \text{eller} \quad |\mathbf{u}_L| = |\mathbf{u} \bullet \mathbf{e}|.$$

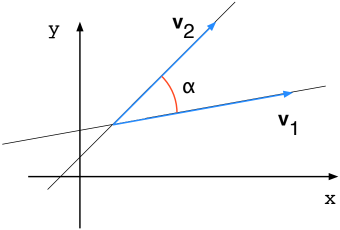
Exempel

Bestäm vinkeln $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ mellan linjerna

$$y = k_1 x + m_1$$

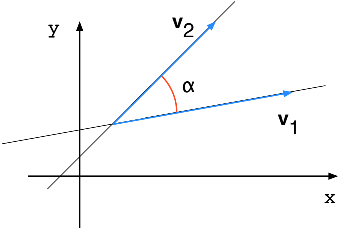
och

$$y = k_2 x + m_2$$



Lösningsförslag

Genom att parameterframställa linjerna, erhålls riktningsvektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ k_1 \end{bmatrix}$ respektive $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ k_2 \end{bmatrix}$



Med definitionen på skalärprodukt får vi att

$$\cos\alpha = \frac{|1 + k_1\, k_2|}{\sqrt{1 + k_1^2}\,\sqrt{1 + k_2^2}} \quad .$$

Anmärkning

Om $k_1\, k_2$=-1 så är linjerna ortogonala. Nu förstår vi formeln vi använde i M0038M!

Avslutande exempel

Vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ är given och skall komposantuppdelas. Bestäm alltså vektorer $\mathbf{c}$ och $\mathbf{d}$ så att $\mathbf{c}$ är parallell med vektorn $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{d}$ är vinkelrät mot $\mathbf{u}$ samt $\mathbf{v} = \mathbf{c} + \mathbf{d}$.

Att räkna på egen hand

Vektorerna $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ är givna i en ON-bas. Visa att vektorerna $t \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $t \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u}$ är ortogonala, oberoende av värdet på den reella konstanten t.

Räkna på egen hand

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ON-bas). Bestäm vinkeln mellan vektorerna.

Svar: $\alpha = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{66}}\right)$