壁と物体の跳ね返りの話

Torajiro Aida

2021 年 11 月 28 日

物体 1 の質量を 1, 物体 2 の質量を m とする．$m \geq 1$ とする．

物体 1, 物体 2 の速度 (の数列) をそれぞれ v_1, v_2 とする．

物体 1, 物体 2 の初期速度をそれぞれ 0, V とする (V は正).

座標が大きい順に, 壁面, 物体 1, 物体 2 の順に並んでいるとする．この時, 何回の衝突が発生するかを考える．

物体 1 と物体 2 の衝突前後を考える．ここで運動量保存則

$$v_1 + mv_2 = v_1' + mv_2' \tag{1}$$

と完全弾性衝突

$$v_1 - v_2 = -v_1' + v_2' \tag{2}$$

を仮定する．これを解くと,

$$v_1' = -\frac{m-1}{m+1}v_1 + \frac{2}{m+1}v_2 \tag{3}$$

$$v_2' = \frac{2}{m+1}v_1 + \frac{m-1}{m+1}v_2 \tag{4}$$

となる．

$\alpha = \frac{m-1}{m+1}$, $\beta = \frac{2}{m+1}$ とする．ここで, 物体 1 が物体 2 とぶつかり, その後, 壁にぶつかり跳ね返ったとする場合の変換

$$\begin{pmatrix} v_{1_{n+1}} \\ v_{2_{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta m \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1_n} \\ v_{2_n} \end{pmatrix} \tag{5}$$

を考える．ここで, この行列の行列式は,

$$\alpha^2 + m\beta^2 = 1 \tag{6}$$

である．

この変換を初期状態から n 回繰り返すと,

$$\begin{pmatrix} v_{1_n} \\ v_{2_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta m \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix} \tag{7}$$

となる．この行列を, その固有値 $\lambda_1 = \alpha + \beta\sqrt{m}i$ と $\lambda_2 = \alpha - \beta\sqrt{m}i$ を使って対角化すると,

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta m \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{m}i} \begin{pmatrix} \sqrt{m}i & -\sqrt{m}i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{m}i \\ -1 & \sqrt{m}i \end{pmatrix} \tag{8}$$

を得る．従って,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v_{1_n} \\ v_{2_n} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2\sqrt{m}i} \begin{pmatrix} \sqrt{m}i & -\sqrt{m}i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{m}i \\ -1 & \sqrt{m}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix} && (9) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{m}i} \begin{pmatrix} \sqrt{m}i & -\sqrt{m}i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n V\sqrt{m}i \\ \lambda_2^n V\sqrt{m}i \end{pmatrix} && (10) \\
&= \frac{1}{2}V \begin{pmatrix} \sqrt{m}(\lambda_1^n - \lambda_2^n)i \\ \lambda_1^n + \lambda_2^n \end{pmatrix} && (11)
\end{aligned}$$

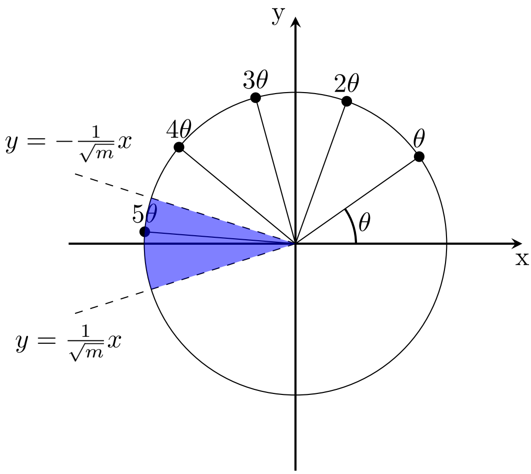
ここで, (6) より, ある θ が存在して, $\alpha = \cos\theta, \beta = \frac{1}{\sqrt{m}}\sin\theta$ となる．また, $\lambda_1 = e^{i\theta}, \lambda_2 = e^{-i\theta}$ となる．よって,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v_{1_n} \\ v_{2_n} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}V \begin{pmatrix} \sqrt{m}(2i\sin(n\theta))i \\ 2\cos(n\theta) \end{pmatrix} && (12) \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{m}V\sin(n\theta) \\ V\cos(n\theta) \end{pmatrix} && (13)
\end{aligned}$$

$m \geq 1$ より, $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. 物体 1 が物体 2 と n 回衝突した後, もう二度と衝突しない条件は, $v_{2_n} < 0$ かつ $|v_{2_n}| \geq |v_{1_n}|$.

xy 座標上の点 $(\cos(n\theta), \sin(n\theta))$ を考える． $v_1 = -\sqrt{m}V\sin(n\theta) = -\sqrt{m}Vy$, $v_2 = V\cos(n\theta) = Vx$ だから, 先程の条件は $x < 0$ かつ $\frac{1}{\sqrt{m}}|x| \geq |y|$ と表せる． $\frac{1}{\sqrt{m}}x = y$ と $x^2 + y^2 = 1$ の交点の一つは $x = \sqrt{\frac{m}{m+1}}$ であるが, この 2 倍角に対応する x 座標は, $x = \alpha$ となる．従って, $\pm\frac{1}{\sqrt{m}}x = y$ の間の角度は θ である．

以上を図で示すと, 以下のようになる．



物体 1 と物体 2 が n 回衝突した後, v_1 と v_2 に対応する点 $(\cos(n\theta), \sin(n\theta))$ が青色の領域に入っていた場合, 二度と物体 1 と物体 2 が衝突することはない．このとき, $\sin(n\theta) > 0$ の場合は, 物体 1 はその後壁に衝突する．いっぽうで $\sin(n\theta) < 0$ の場合は, 壁に衝突せず, 壁から遠ざかる方向 (すなわち負の方向) に等速直線運動する．

従って, 壁との衝突回数も含めた合計の衝突回数は,

$$n_{\text{total}} = 2\lceil \frac{\pi - \frac{\theta}{2}}{\theta} \rceil - \begin{cases} 1 & (\text{最後に壁に衝突しない場合}) \\ 0 & (\text{最後に壁に衝突する場合}) \end{cases}$$

と表せる．

ここで，$m \to \infty$ のとき，$\theta \to 0$ であり，$\frac{2\sqrt{m}}{m+1} = \sin\theta$，$\sin\theta \to \theta$，$\frac{2\sqrt{m}}{m+1} \to \frac{2}{\sqrt{m}}$．したがって，

$$\frac{n_{\text{total}}}{\sqrt{m}} \to \pi$$