

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра радиотехники и систем управления

СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

Методические указания
к лабораторной работе

по курсу *Радиотехнические цепи и сигналы*

Составители: А.А. Григорьев, М.А. Дунаева

МОСКВА
МФТИ
2016

УДК 621.396.6

Рецензент

Кандидат физико-математических наук *А.Л. Филатов*

Связанные колебательные контуры: методические указания к лабораторной работе по курсу *Радиотехнические цепи и сигналы* / сост. А.А. Григорьев, М.А. Дунаева. – М.: МФТИ, 2016. – 28 с.

Сложные LC-фильтры высоких порядков традиционно реализуются схемами с несколькими связанными резонаторами. Анализ и синтез подобных схем является одной из самых сложных задач теории электрических цепей. В работе исследуются относительно простые двухконтурные схемы с индуктивной и емкостной связями. Это знакомит с техническими приемами анализа многоконтурных систем и вводит в круг понятий и методов, используемых при экспериментальном исследовании характеристик многополюсных фильтров.

УДК 621.396.6

- © Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2016
- © Григорьев А.А., Дунаева М.А., составление, 2016

Содержание

1. Предмет исследования	4
2. Механическая аналогия	4
3. Параллельный контур	5
4. Индуктивная связь	6
5. Индуктивно связанные контуры	7
6. Вносимые проводности	9
7. Анализ передаточных функций	12
8. Низкочастотный прототип	14
9. Переходные характеристики	18
10. Контуры с емкостной связью	20
11. Задание	23

1. Предмет исследования

Линейное взаимодействие между элементами ансамбля из N одинаковых гармонических осцилляторов (резонаторов) вызывает расщепление резонансов – появляется N мод колебаний с различными собственными частотами. С проявлениями этого физического эффекта приходится сталкиваться в самых различных областях от классической механики до квантовой зонной теории проводимости полупроводников.

В теории электрических цепей эффект расщепления лежит в основе методов реализации пассивных LC-фильтров. Такие фильтры строятся как наборы связанных резонаторов (LC-контуров). Эффект расщепления открывает возможность снять фундаментальное противоречие между шириной полосы фильтра и крутизной скатов его частотной характеристики в зоне задержания. Произвольно крутые скаты можно получить, повысившая добротность резонатора. Но это сопровождается пропорциональным сужением полосы. Применение нескольких высокодобротных связанных резонаторов позволяет при высокой крутизне скатов обеспечить достаточную широкую полосу за счет расщепления резонансных частот.

Расчет многоконтурных LC-фильтров – это одна из самых технически сложных областей теории электрических цепей. В работе исследуются простые LC-структуры с двумя связанными контурами, которые до конца рассчитываются аналитически. Цель работы состоит в том, чтобы познакомиться с техникой анализа систем со связанными резонаторами и приобрести опыт экспериментального исследования характеристик простых двухконтурных фильтров. Ее выполнение вводит в круг новых понятий и приемов, ценных в плане общего образования.

2. Механическая аналогия

Эффект расщепления резонансов иллюстрирует простая механическая модель на рис. 1 – пара шариков массы m на пружинах с жесткостями K и k .

В отсутствие «пружины связи» k имеется два одинаковых гармонических осциллятора с уравнениями движения $m\ddot{x}_{(1,2)} = -Kx_{(1,2)}$ и частотой колебаний $\omega_0 = \sqrt{K/m}$.

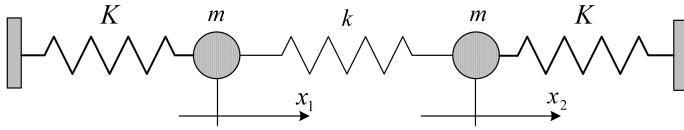


Рис. 1. Расщепление резонансов

Подключение пружины k приводит к системе связанных осцилляторов, которая описывается системой уравнений:

$$m\ddot{x}_1 = -Kx_1 - k(x_1 - x_2),$$

$$m\ddot{x}_2 = -Kx_2 - k(x_2 - x_1).$$

Переход к координатам $y_s = x_1 + x_2$ и $y_d = x_1 - x_2$ расщепляет эту систему на два независимых уравнения:

$$m\ddot{y}_s = -Ky_s; \quad m\ddot{y}_d = -(K + 2k)y_d.$$

Когда шарики колеблются синфазно (уравнение для y_s), «пружина связи» не работает. Частота колебаний $\omega_s = \sqrt{K/m}$ такая же, как у отдельного осциллятора. А вот частота противофазных колебаний y_d стала иной: $\omega_d = \sqrt{(K + 2k)/m}$. В системе появилось две моды колебаний и две различные собственные частоты.

3. Параллельный контур

Параллельный колебательный контур, рис. 2, – это двухполюсник, в котором наблюдается параллельный резонанс.

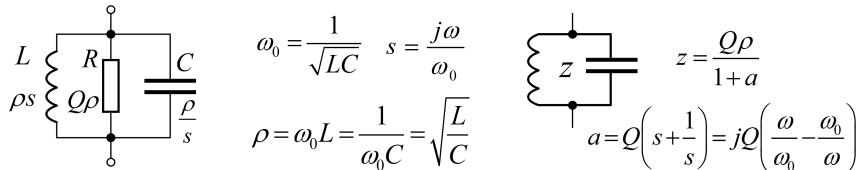


Рис. 2. Параллельный колебательный контур

Резонанс возникает на частоте $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, на которой индуктивный и емкостной импедансы равны по величине и противоположны по знаку: $j\omega_0 L = -\frac{1}{j\omega_0 C}$. Однократные на частоте резонанса модули этих импедансов определяют характеристическое сопротивление контура $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$.

Обсуждая контур, разумно сразу же перейти к относительной частоте, положив $s = \frac{j\omega}{\omega_0}$. В этой калибровке резонансу отвечает комплексная частота $s = j$. Во введенных обозначениях индуктивный и емкостной импедансы контура приводятся к компактным формам:

$$Z_L = j\omega L = j \frac{\omega L}{\omega_0 \sqrt{LC}} = \varrho s; \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{\omega_0 \sqrt{LC}}{j\omega C} = \frac{\varrho}{s}.$$

Для импеданса контура $z(s)$ это дает

$$z(s) = \frac{1}{Y} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{s}{\varrho} + \frac{1}{\varrho s}} = \frac{R}{1 + \frac{R}{\varrho} \left(s + \frac{1}{s} \right)} = \frac{Q\rho}{1 + a(s)},$$

где $Q = \frac{R}{\varrho}$ – добродельность контура, $Q\rho = R$ – его эквивалентное (резонансное) сопротивление, а $a(s)$ – обобщенная расстройка:

$$a(s) = Q \left(s + \frac{1}{s} \right) = jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \simeq j2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}; \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0.$$

Контур – это резонатор – двухполюсник с импедансом $z(s) = \frac{Q\rho}{1+a(s)}$, который характеризуется набором трех обобщенных параметров (ω_0, ϱ, Q). Для обозначения этого импеданса особенно выбрана строчная буква z , чтобы надежно отличать его от всех прочих импедансов Z . Физическая природа резонатора мало существенна. Им может быть твердотельный резонатор, четвертьволновой отрезок длинной линии или что-то иное.

4. Индуктивная связь

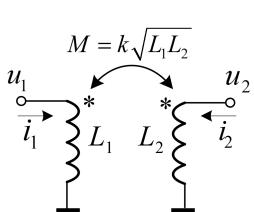
Пусть между парой индуктивностей L_1 и L_2 имеется связь со взаимной индукцией $M = k\sqrt{L_1 L_2}$, рис. 3а. Параметр $k = [0, 1]$ – это *коэффициент связи*. При $k = 0$ связь отсутствует, при $k = 1$ она максимально возможна (идеальный трансформатор).

Пара связанных индуктивностей – это четырехполюсник, который описывается уравнениями:

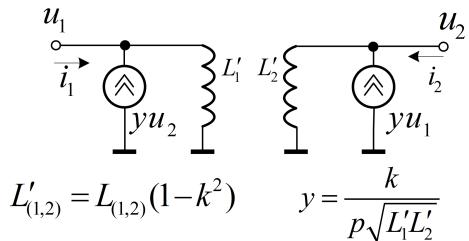
$$u_1 = pL_1 i_1 + pMi_2; \quad u_2 = pL_2 i_2 + pMi_1; \quad p = j\omega. \quad (1)$$

Его можно представить эквивалентной схемой рис. 3б, в которой связь между индуктивностями $L'_{(1,2)} = L_{(1,2)}(1 - k^2)$ учитывается добавлением источников *токов связи*, управляемых

напряжениями u_1 , u_2 на индуктивностях. Проводимость связи $y = \frac{k}{p\sqrt{L'_1 L'_2}}$ задает закон пересчета напряжения на одной индуктивности в ток связи, добавленный параллельно другой.



(a) Связанные индуктивности



(b) Эквивалентная схема

Рис. 3. Индуктивная связь

В схеме на рис. 3b напряжения и токи связаны уравнениями:

$$u_1 = pL'_1(i_1 + y_1 u_2) = pL'_1 i_1 + k \sqrt{\frac{L'_1}{L'_2}} u_2; \quad u_2 = pL'_2 i_2 + k \sqrt{\frac{L'_2}{L'_1}} u_1.$$

Исключив в первом из них u_2 из второго, найдем

$$u_1 = pL'_1 i_1 + pk \sqrt{L'_1 L'_2} i_2 + k^2 u_1,$$

или

$$u_1(1 - k^2) = pL'_1 i_1 + pk \sqrt{L'_1 L'_2} i_2 = (1 - k^2)(pL_1 i_1 + pM i_2).$$

После сокращения на $(1 - k^2)$ это как раз и дает первое из уравнений (1). Второе получается по симметрии. Схемы на рис. 3a и рис. 3b описываются, таким образом, одинаковыми уравнениями. Следовательно, они эквивалентны.

Переход к эквивалентной схеме рис. 3b особенно привлекателен в приближении слабой связи – при $k \ll 1$, когда квадратичными по k поправками к индуктивностям удается пренебречь, приняв $L'_{(1,2)} = L_{(1,2)}$.

5. Индуктивно связанные контуры

Пара индуктивно связанных контуров показана на рис. 4a. Зайдемся выводом формул для передаточных функций

$Z_1(s) = \frac{u_1}{I}$, $Z_2(s) = \frac{u_2}{I}$ от тока I источника до напряжений u_1, u_2 на контурах.

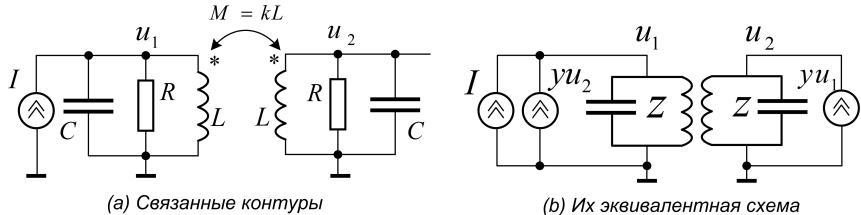


Рис. 4. Связанные контуры

Заменив индуктивную связь парой источников токов связи с проводимостями связи $y = \frac{k}{pL'} = \frac{k}{pL(1-k^2)}$, придем к эквивалентной схеме на рис. 4b. В приближении слабой связи можно считать, что импедансы резонаторов $z = \frac{Q\rho}{1+a}$ в эквивалентной схеме тождественны импедансам контуров. При сильной связи это не совсем так, поскольку переход к эквивалентным источникам тока сопровождается изменением индуктивностей с L до $L' = L(1 - k^2)$, а это сказывается на всех параметрах контуров.

Пусть $(\hat{\omega}_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \hat{\rho} = \sqrt{\frac{L}{C}}; \hat{Q} = \frac{R}{\hat{\rho}})$ – набор обобщенных параметров физических контуров на рис. 4a. Тогда импедансы z в эквивалентной схеме на рис. 4b на самом деле представляют резонаторы с параметрами

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L'C}} = \frac{\hat{\omega}_0}{\sqrt{1-k^2}}; \quad \rho = \sqrt{\frac{L'}{C}} = \hat{\rho}\sqrt{1-k^2}; \quad Q = \frac{\hat{Q}}{\sqrt{1-k^2}}.$$

Приведем проводимость связи к форме

$$y = \frac{k}{pL'} = \frac{k\omega_0\sqrt{L'C}}{pL'} = \frac{k}{\rho s} = \frac{F}{Q\rho s}; \quad s = \frac{p}{\omega_0}.$$

Появившийся здесь параметр $F = Qk$ – произведение коэффициента связи на добротность резонатора – известен как **фактор связи**. Анализ двухконтурных систем ведется главным образом в области **критической** связи $F = 1$, когда значения коэффициента связи $k = \frac{F}{Q}$ достаточно малы. Квадратичные по k разли-

чия между параметрами реальных контуров и их представлений в эквивалентной схеме оказываются при этом ничтожными.

Из эквивалентной схемы на рис. 4b вытекают очевидные уравнения:

$$u_1 = (I + yu_2)z; \quad u_2 = yzu_1.$$

Введя безразмерный коэффициент

$$\gamma(s) = yz = \frac{F}{Q\rho s} \frac{Q\rho}{(1+a)} = \frac{F}{s(1+a)},$$

который определяет закон преобразования напряжения на первом контуре в напряжение на втором, приведем эти уравнения к виду

$$u_1 - \gamma u_2 = Iz; \quad u_2 = \gamma u_1.$$

Искомые передаточные функции находятся теперь без труда:

$$\begin{aligned} Z_1(s) &= \frac{u_1}{I} = \frac{z}{1 - \gamma^2} = Q\rho \frac{1+a}{\left((1+a)^2 - \frac{F^2}{s^2}\right)}, \\ Z_2(s) &= \frac{u_2}{I} = \frac{\gamma z}{1 - \gamma^2} = \frac{Q\rho}{s} \frac{F}{\left((1+a)^2 - \frac{F^2}{s^2}\right)}. \end{aligned} \quad (2)$$

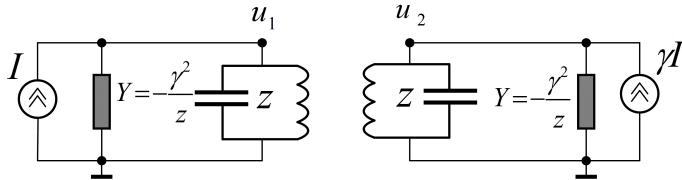
Теория двухконтурных систем с индуктивной связью на этом, собственно говоря, завершена. Все последующее обсуждение будет связано с анализом полученных передаточных функций.

Простота этого анализа напрямую связана с возможностью разложения знаменателей в (2) на множители: $1 - \gamma^2 = (1 - \gamma)(1 + \gamma)$. Это позволяет свести уравнение четвертой степени для полюсов системы к биквадратному. Если нарушить симметрию, допустив различие резонаторов ($z_1 \neq z_2$), знаменатели примут вид $1 - \gamma_1\gamma_2$, не допускающий разложения. Анализ натолкнется тогда на проблему отыскания корней общего уравнения четвертой степени.

6. Вносимые проводимости

Напряжение $u_1 = I \frac{z}{1 - \gamma^2}$ на первом контуре можно интерпретировать как результат протекания тока источника I по проводимости $\frac{1}{z} - \frac{\gamma^2}{z}$. Природа первой компоненты этой проводимости

очевидна – это проводимость самого контура $\frac{1}{z}$. А вот вторая компонента – $Y = -\frac{\gamma^2}{z}$ – взялась ниоткуда. Это так называемая *вносимая проводимость*. Она появилась в первом контуре ввиду присутствия индуктивно связанного второго. Эта интерпретация позволяет представить цепь первого контура в эквивалентном виде, показанном на рис. 5.



$$u_1 = \frac{I}{Y + \frac{1}{z}} = I \frac{z}{1 - \gamma^2} \quad u_2 = \gamma I \frac{z}{1 - \gamma^2}$$

Рис. 5. Эквивалентная схема с вносимыми проводимостями

Аналогичная интерпретация напряжения $u_2 = \gamma I \frac{z}{1 - \gamma^2}$ на втором контуре позволяет представить его как результат протекания тока γI по сумме проводимости контура $\frac{1}{z}$ и проводимости $Y = -\frac{\gamma^2}{z}$, внесенной из первого контура.

Параметр $\gamma(s)$ был введен выше как коэффициент передачи напряжений: $u_2 = \gamma u_1$. В схеме с вносимыми проводимостями он приобретает иной смысл коэффициента передачи от тока источника I до эквивалентного тока γI , которым питается второй контур.

Эквивалентная схема с вносимыми проводимостями на рис. 5 – это не более как графическое представление формул (2) для передаточных функций. Тем не менее она открывает возможность посмотреть на явления в связанных контурах менее формально и под другим углом зрения.

Для внесенных проводимостей Y найдем

$$Y = -\frac{\gamma^2}{z} = -\frac{F^2}{s^2(1+a)^2} \frac{(1+a)}{Q\rho} = \frac{F^2}{Q\rho} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \frac{\left(1 - jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)}{(1 + |a|^2)}.$$

На частоте резонанса ($\omega = \omega_0$, $a = 0$) вносимые импедансы $\frac{1}{Y}$ вещественны и составляют $\frac{Q\rho}{F^2}$. Они подключаются параллельно эквивалентным сопротивлениям контуров $R = Q\rho$, снижая их до $Q\rho \parallel \frac{Q\rho}{F^2} = \frac{Q\rho}{1+F^2}$. В частности, при критической связи $F = 1$ внесенные сопротивления совпадают с R . Эквивалентные сопротивления снижаются вдвое.

Вообще, приняв во внимание, что на частоте резонанса (при $s = j$, $a = 0$) $z = Q\rho$, а $\gamma = \frac{F}{j}$, из формул на рис. 5 для напряжений на первом и втором контурах найдем

$$u_1 = I \frac{Q\rho}{1+F^2}; \quad u_2 = -jI \frac{FQ\rho}{1+F^2}.$$

Как и следовало ожидать, в отсутствие связи, при $F = 0$, напряжение $IQ\rho$ на первом контуре оказывается результатом протекания тока источника по его эквивалентному сопротивлению. С ростом фактора связи F напряжение на первом контуре монотонно падает как $\frac{1}{1+F^2}$. Напряжение же на втором контуре изменяется как $\frac{F}{1+F^2}$. При малых F оно растет, а затем начинает падать. Максимум достигается при критической связи, при $F = 1$. Напряжения на контурах оказываются при этом одинаковыми.

Присутствие мнимой единицы в формуле для u_2 говорит о том, что между напряжениями u_2 и u_1 имеется фазовый сдвиг на $-\frac{\pi}{2}$. Это следствие мнимости коэффициента $\gamma = \frac{F}{j}$.

Наличие сдвига $\frac{\pi}{2}$ между напряжениями на контурах можно объяснить и менее формально, непосредственно по физической схеме на рис. 4а. В самом деле, ток в левой катушке сдвинут относительно напряжения u_1 на $-\frac{\pi}{2}$. ЭДС же взаимной индукции во втором контуре сдвинута относительно этого тока на $+\frac{\pi}{2}$. Сдвиги скомпенсировались. Это естественно, поскольку при согласованном включении концов ЭДС взаимной индукции во второй катушке синфазна с напряжением на первой. Далее, на частоте резонанса полное сопротивление при обходе по контуру вещественно. Поэтому кольцевой ток во втором контуре совпадает по фазе с ЭДС взаимной индукции. Осталось заметить, что напряжение u_2 есть результат протекания этого тока по конденсатору – сдвиг на $-\frac{\pi}{2}$.

При уходе от резонанса вносимая проводимость приобретает мнимую компоненту. Эта компонента добавляется к параллельно подключенной проводимости конденсатора $j\omega C$, изменяя

его емкость и, тем самым, резонансную частоту контура. На частотах выше резонанса мнимая часть вносимой проводимости отрицательна. Это снижает емкость контура, повышая его резонансную частоту. Наоборот, на частотах ниже резонанса вносимая проводимость увеличивает емкость контура. Получается, что резонансные частоты обоих контуров как бы подстраиваются под частоту сигнала. Этот эффект вызывает расширение полосы пропускания двухконтурной системы.

При выключенном источнике I в первом и втором контурах могут существовать собственные колебания. Они могут быть как синфазными, так и противофазными. Двум этим модам колебаний отвечают разные знаки вносимых проводимостей и, как следствие, разные собственные частоты. В этом и кроется механизм расщепления частот собственных колебаний при индуктивной связи.

Концепция вносимых проводимостей полезна для интуитивного понимания сущности явлений в связанных контурах. Однако попытка использовать ее для каких-либо количественных выводов приводит к необходимости записать уравнения для эквивалентной схемы рис. 5, а это тут же возвращает к анализу передаточных функций (2).

7. Анализ передаточных функций

Чтобы составить представление об асимптотическом поведении частотных характеристик двухконтурной системы, примем $\frac{1}{Q} = 2\xi$ и, раскрыв в (2) обобщенные расстройки $a = Q\left(s + \frac{1}{s}\right)$, приведем выражения для передаточных функций к виду

$$Z_1 = \rho \frac{s(s^2 + 2\xi s + 1)}{(s^2 + 2\xi s + 1)^2 - k^2}; \quad Z_2 = \frac{\rho ks}{(s^2 + 2\xi s + 1)^2 - k^2}. \quad (3)$$

Становится ясно, что мы имеем дело с системой четвертого порядка – многочлен степени 4 от s в знаменателе. В расширенной s -плоскости (с учетом бесконечно удаленной точки $s = \infty$) у ее передаточных функций имеется 4 полюса и 4 нуля.

Функция $Z_1(s)$ имеет одиночный нуль в нуле и спадает как $\frac{1}{s}$ (нуль в бесконечности). Два другие ее нуля образуют сопряжен-

ную пару. У $Z_2(s)$ также есть нуль в нуле, а вот в бесконечности она спадает как $\frac{1}{s^3}$ (нуль кратности три).

Асимметрия распределения нулей передачи между нулем и бесконечностью – это характерная негативная особенность систем с индуктивной связью. Избыток нулей в бесконечности объясняется тем, что на высоких частотах индуктивная связь эффективно «выключается», поскольку проводимость связи $y = \frac{k}{\rho s}$ стремится к нулю.

Более полное представление о свойствах системы можно составить, изучив положения нулей и полюсов ее передаточных функций в конечных точках s -плоскости. Для произвольной системы четвертого порядка эта задача была бы безнадежной. К счастью, знаменатели передаточных функций (3) имеют форму разностей квадратов и их удается разложить на квадратичные множители

$$(s^2 + 2\xi s + 1)^2 - k^2 = (s^2 + 2\xi s + 1 - k)(s^2 + 2\xi s + 1 + k),$$

корни которых легко находятся:

$$s_{\pm}(\pm k) = -\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2 \pm k} = -\xi \pm j\eta(\pm k); \quad \eta(\pm k) = \sqrt{\eta^2 \pm k},$$

$$\text{где } \xi = \frac{1}{2Q}, \text{ а } \eta = \sqrt{1 - \xi^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \simeq 1.$$

Пара полюсов $s_+(\pm k)$ выстроена на линии $\text{Re}(s) = -\xi$ вдоль положительной мнимой полуоси в точках

$$\sqrt{\eta^2 \pm k} \simeq \sqrt{1 \pm k} \simeq 1 \pm \frac{k}{2} = 1 + \frac{F}{2Q},$$

как это показано на рис. 6. (Мнимая ось направлена на этом рисунке по горизонтали.) Присутствие сопряженной пары $s_-(\pm k)$ вдоль отрицательной полуоси молчаливо предполагается. У обеих передаточных функций есть нуль передачи в нуле. У $Z_1(s)$ имеются также два сопряженных нуля в точках $-\xi \pm j\eta$. Пара же нулей функции $Z_2(s)$ перекочевала в бесконечность, войдя там в состав нуля кратности три.

Карты расположения полюсов/нулей на рис. 6 дают достаточно полное качественное представление о поведении частотных и фазовых характеристик двухконтурной системы.

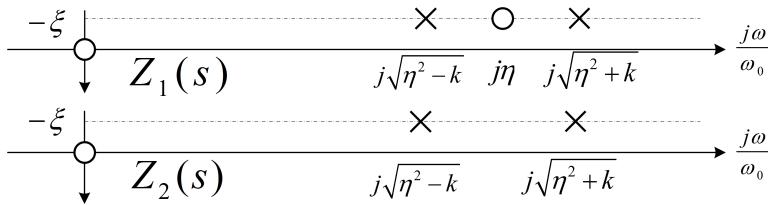


Рис. 6. Полюсы и нули передаточных функций

В окрестности резонанса, когда точка $s = \frac{j\omega}{\omega_0}$ проходит мимо области полюсов, на частотных характеристиках наблюдается резкий всплеск. При уходе от резонанса частотные характеристики падают по мере роста расстояний до полюсов. На первом контуре расстояние до одного из полюсов компенсируется расстоянием до нуля, поэтому спад частотной характеристики оказывается не таким быстрым, как на втором. С ростом коэффициента связи k полюсы «разбредаются» вдоль мнимой оси. Резонансные кривые становятся двугорбыми. Провал между горбами раньше появляется на первом контуре – так проявляет себя нуль передачи между двумя полюсами.

Обе фазовые характеристики отправляются от нулевой частоты с уровнем $+\frac{\pi}{2}$ – нуль передачи в нуле. Каждая пара со-сопряженных полюсов вносит вклад $-\pi$, пара нулей – вклад $+\pi$. В итоге фазовая характеристика Z_1 выходит в бесконечности на уровень $-\frac{\pi}{2}$, а фазовая характеристика Z_2 – на уровень $-\frac{3\pi}{2}$. Так проявляют себя нули кратностей один и три в бесконечности.

8. Низкочастотный прототип

Подробно изучить детали поведения частотных характеристик в области полюсов помогает низкочастотный прототип двухконтурной системы. К идею прототипа приводит известный прием преобразования фильтра нижних частот в полосовой фильтр заменой в передаточной функции частоты s на обобщенную расстройку $a(s) = Q\left(s + \frac{1}{s}\right)$. Обратная замена дает низкочастотный прототип полосового фильтра – эквивалентный фильтр нижних частот. Переход к прототипу вдвое понижает порядок передаточной функции, упрощая ее анализ.

Функция $a(s)$, устанавливающая связь между реальной ча-

стотой s и частотой прототипа a , довольно сложна и нелинейна. Более того, она двузначна, поскольку $a(s) = a(1/s)$. Однако в окрестности точки резонанса $s = j$ эта связь оказывается вполне прозрачной:

$$j\nu = a = Q \left(s + \frac{1}{s} \right) = jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \simeq j \frac{\Delta\omega}{\omega_0/2Q} = j \frac{\Delta\omega}{\Omega_0}.$$

Мерой относительной частоты прототипа ν оказывается отношение отклонения $\Delta\omega$ от частоты резонанса к частоте Ω_0 , равной ширине односторонней полосы резонатора по уровню $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Изменению ν в диапазоне $(0, 1)$ отвечает изменение реальной частоты ω в полосе $(\omega_0, \omega_0 + \Omega_0)$ выше резонанса. Отрицательные частоты $\nu \in (-1, 0)$ представляют полосу частот $(\omega_0 - \Omega_0, \omega_0)$ ниже резонанса.

Импеданс резонатора $z(a) = \frac{Q\rho}{1+a}$, рассматриваемый как функция комплексной частоты a , как раз является передаточной функцией его низкочастотного прототипа. Этот прототип представляет собой интегрирующее звено с полюсом при $a = -1$. В окрестности резонанса комплексный коэффициент передачи контура $\frac{Q\rho}{1+j\nu} = \frac{Q\rho}{1+j\frac{\Delta\omega}{\Omega_0}}$ подобен интегрирующей цепи с граничной частотой $\Omega_0 = \frac{\omega_0}{2Q}$.

Передаточные функции (2) не имеют прототипа глобально, поскольку они зависят не только от a , но и от s . Однако в окрестности резонанса переменная s почти постоянна. Это дает основание принять в (2) $s = j$, $s^2 = -1$, что и приводит к локальным прототипам передаточных функций Z_1 и Z_2 :

$$H_1(a) = \frac{Z_1}{Q\rho} = \frac{(a+1)}{(a+1)^2 + F^2}; \quad H_2(a) = \frac{jZ_2}{Q\rho} = \frac{F}{(a+1)^2 + F^2}. \quad (4)$$

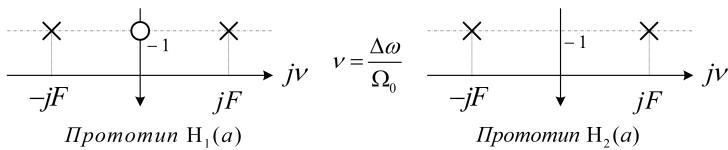


Рис. 7. Полюсы и нули прототипов

Полюсы передаточных функций прототипов лежат в точках $a = -1 \pm jF$, рис. 7. Функция H_1 имеет вещественный нуль при $a = -1$, у H_2 он отсутствует.

Прототипы эти не годятся для анализа асимптотического поведения – они применимы только в окрестности резонанса, при $\frac{\omega}{\omega_0} \simeq 1$. Тем не менее они вполне адекватны в ближней зоне там, где $\Delta\omega \ll \omega_0 = 2Q\Omega_0$ или $\nu \ll 2Q$. При высоких добротностях Q эта зона далеко простирается за границу $\nu = 1$ полосы пропускания резонатора.

Из (4) вытекает, например, что при уходе от резонанса напряжение на втором контуре падает квадратично по $|a| = \nu = \frac{\Delta\omega}{\Omega_0}$, то есть со скоростью 40 dB на декаду изменения ν , в то время как напряжение на первом лишь линейно – 20 dB на декаду.

Замена $a = j\nu$ в (4) приводит к следующим выражениям для квадратов модулей комплексных коэффициентов передачи прототипов:

$$|H_1|^2 = \frac{1 + \nu^2}{\nu^4 + 2\nu^2(1 - F^2) + (1 + F^2)^2}, \quad (5)$$

$$|H_2|^2 = \frac{F^2}{\nu^4 + 2\nu^2(1 - F^2) + (1 + F^2)^2}.$$

В частности, при $\nu = 0$ отсюда получаются уже известные факты: $|H_1| = \frac{1}{1+F^2}$, $|H_2| = \frac{F}{1+F^2}$.

Основной интерес представляет частотная характеристика напряжения на втором контуре. На ней и сосредоточимся, начав с исследования ее экстремумов.

Приравняв к нулю производную знаменателя $|H_2|^2$, придем к уравнению: $\nu[1 - F^2 + \nu^2] = 0$. Видно, что на частоте резонанса, при $\nu = 0$, экстремум присутствует всегда. Значение $1 - F^2$ второй производной в точке этого экстремума меняет знак при критической связи $F = 1$. В докритической области, при $F < 1$, оно положительно: минимум знаменателя – максимум на резонансной кривой. В послекритической области, при $F > 1$, на резонансной кривой обнаруживается минимум. При критической связи вторая производная обращается в нуль. Резонансный пик оказывается при этом экстремально плоским, а *критическая резонансная кривая* принимает вид $|H_2| = \frac{1}{\sqrt{\nu^4+4}}$ с уровнем $\frac{1}{2}$ (–6 dB) в нуле и спадом в $\sqrt{2}$ раз (на 3 dB) до крити-

ческого уровня $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ (-9 dB) на частоте $\nu = \sqrt{2}$. Это частота в $\sqrt{2}$ раз превышает граничную частоту резонатора $\nu = 1$.

При $F > 1$ появляются два других экстремума в точках $\nu = \pm\sqrt{F^2 - 1}$. Это пики двухгорбой резонансной кривой. Легко проверить, что их уровни составляют $\frac{1}{2}$ независимо от F .

Частоты пересечения резонансной кривой с критическим уровнем $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, по которому отсчитываются границы полосы критической резонансной кривой, можно найти из условия $|H_2(\nu)|^2 = \frac{1}{8}$. Это дает биквадратное уравнение с двумя парами решений:

$$\nu = \pm\sqrt{(F+1)^2 - 2}; \quad \nu = \pm\sqrt{(F-1)^2 - 2}.$$

При $F < \sqrt{2} - 1 \simeq 0.42$ вещественных решений нет – оба подкоренные выражения отрицательны. Это означает, что резонансная кривая проходит ниже уровня λ . В диапазоне $\sqrt{2} - 1 < F < \sqrt{2} + 1 \simeq 2.42$ существует только первая пара решений – пик резонансной кривой лежит выше критического уровня, а провал на ней еще не достиг его. В этом диапазоне неравномерность частотной характеристики по уровню λ не превышает 3 dB, а односторонняя полоса частот меняется от нуля до $\nu = 2\sqrt{1+\sqrt{2}} \simeq 3.11$. В частности, при критической связи она составляет $\sqrt{2} = 1.42$.

При $\nu > \sqrt{2} + 1$ появляется вторая пара решений – провал на частотной характеристике опускается ниже критической отметки. Неравномерность в полосе пропускания превышает 3 dB.

При типовой неравномерности частотной характеристики в 3 dB ширина полосы пропускания двухконтурной системы может более чем в три раза превышать полосу одиночного резонатора. При заданной полосе частот фильтра это позволяет применить в нем резонаторы с примерно втрое большей добротностью, что пропорционально повышает крутизну скатов частотной характеристики в полосе задержания.

Вычисление производной от $|H_1(\nu)|^2$ дает уравнение $\nu(\nu^4 + 2\nu^2 - (F^4 + 4F^2 - 1)) = 0$ для экстремумов напряжения на втором контуре. Экстремум на частоте резонанса, при $\nu = 0$, присутствует всегда. Два другие экстремума появляются при $F \geq \sqrt{\sqrt{5} - 2} \simeq 0.49$. Провал на частотной характеристике

первого контура возникает, таким образом, уже в докритической области, при $F > 0.49$.

9. Переходные характеристики

Переходные характеристики $h_0^{(1)}(t)$, $h_0^{(2)}(t)$ до напряжений u_1 , u_2 на первом и втором контурах можно найти по передаточным функциям (3) как обратные преобразования Лапласа от отношений $\frac{Z_1(s)}{s}$ и $\frac{Z_2(s)}{s}$. Отношения эти замечательным образом факторизуются в суммы

$$\frac{Z_1(s)}{s} = \frac{\rho}{2} \left\{ \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1 - k} + \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1 + k} \right\},$$

$$\frac{Z_2(s)}{s} = \frac{\rho}{2} \left\{ \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1 - k} - \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1 + k} \right\},$$

а обратные преобразования Лапласа от компонент этих сумм

$$\frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1 \pm k} = \frac{1}{2j\eta(\pm k)} \left\{ \frac{1}{s + \xi - j\eta(\pm k)} - \frac{1}{s + \xi + j\eta(\pm k)} \right\}$$

оказываются известными переходными характеристиками

$$h_{\pm}(t) = \frac{e^{-\xi t}}{\eta(\pm k)} \sin \eta(\pm k)t$$

полосовых звеньев второго порядка с полюсами в точках $s_{\pm}(\pm k) = -\xi \pm j\eta(\pm k)$, $\eta(\pm k) = \sqrt{\eta^2 \pm k}$, $\eta = \sqrt{1 - \xi^2}$. В итоге получается

$$h_0^{(1)}(t) = \frac{\rho e^{-\xi t}}{2} \left\{ \frac{1}{\eta(-k)} \sin \eta(-k)t + \frac{1}{\eta(+k)} \sin \eta(+k)t \right\},$$

$$h_0^{(2)}(t) = \frac{\rho e^{-\xi t}}{2} \left\{ \frac{1}{\eta(-k)} \sin \eta(-k)t - \frac{1}{\eta(+k)} \sin \eta(+k)t \right\}.$$

Если отвлечься от экспоненциального затухания $e^{-\xi t}$, то переходные характеристики оказываются алгебраическими суммами гармонических колебаний на двух близких собственных частотах двухконтурной системы. Положим $\eta(\pm k) = \sqrt{\eta^2 \pm k} \simeq 1 \pm \frac{k}{2}$

и для упрощения пренебрежем зависимостью амплитуд гармоник от k , положив в амплитудах $\eta(\pm k) = 1$. Получим:

$$h_0^{(1)}(t) = \frac{\rho e^{-\xi t}}{2} \left\{ \sin\left(1 - \frac{k}{2}\right)t + \sin\left(1 + \frac{k}{2}\right)t \right\} = \rho e^{-\xi t} \cos \frac{k}{2}t \sin t,$$

$$h_0^{(2)}(t) = \frac{\rho e^{-\xi t}}{2} \left\{ \sin\left(1 - \frac{k}{2}\right)t - \sin\left(1 + \frac{k}{2}\right)t \right\} = -\rho e^{-\xi t} \sin \frac{k}{2}t \cos t.$$

Перейдем от безразмерного времени t к физическому $\omega_0 t$ и учтем, что $\xi \omega_0 = \frac{\omega_0}{2Q} = \Omega_0$, $\frac{k\omega_0}{2} = \frac{kQ\omega_0}{2Q} = F\Omega_0$. Окончательно найдем:

$$h_0^{(1)}(t) = \rho e^{-\Omega_0 t} \cos F\Omega_0 \sin \omega_0 t; \quad h_0^{(2)}(t) = -\rho e^{-\Omega_0 t} \sin F\Omega_0 \cos \omega_0 t.$$

Формы найденных переходных характеристик двухконтурной системы определяются совместным действием трех факторов: экспоненциальное затухание $e^{-\Omega_0 t}$, постоянная времени которого $\tau = \frac{1}{\Omega_0} = \frac{2Q}{\omega_0}$ пропорциональна добротности резонаторов, высокочастотные колебания на частоте резонанса ω_0 и биения частоты $F\Omega_0$ между высокочастотными гармониками с двумя близкими частотами. С ростом фактора связи F частота биений $F\Omega_0$ линейно нарастает. При критической связи $F = 1$ она совпадает с односторонней полосой резонатора Ω_0 .

Импульсные реакции

$$h^{(1)}(t) = \Omega_0 e^{-\Omega_0 t} \cos F\Omega_0 t; \quad h^{(2)}(t) = \Omega_0 e^{-\Omega_0 t} \sin F\Omega_0 t$$

передаточных функций (4) низкочастотных прототипов удивительным образом совпадают по форме с огибающими переходных характеристик двухконтурной системы. И это не курьез, а проявление общей закономерности. Ее природу иллюстрирует рис. 8.

Созвездие полюсов/нулей передаточной функции $Z_2(s)$ (рис. 6) можно преобразовать в созвездие прототипа $H_2(a)$ (рис. 7) в три этапа: 1) ликвидация нуля в нуле, 2) ликвидация полюсов на отрицательной полуоси, 3) перенос пары оставшихся полюсов влево на ω_0 . Переходная характеристика $h_0^{(2)}(t)$ – это обратное преобразование Лапласа от $\frac{Z_2(s)}{s}$ – результата ликвидации нуля в $Z_2(s)$. Ликвидация полюсов на отрицательной

полуси (отбрасывание отрицательных частот) эквивалентна замене в переходной характеристики $\cos \omega_0 t$ на $e^{j\omega_0 t}$. Наконец, левый сдвиг переводит частоту ω_0 в нуль. Множитель $e^{j\omega_0 t}$ исчезает. От переходной характеристики остается огибающая. А это и есть импульсная реакция прототипа.

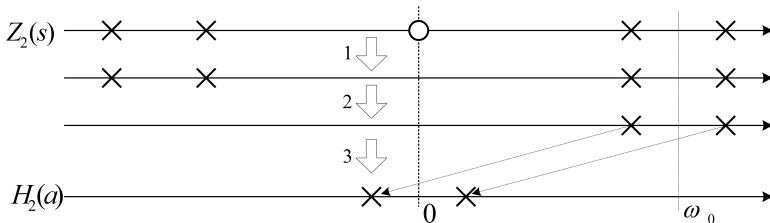


Рис. 8. Преобразование созвездий

Реальность несколько сложнее. Если преобразования рис. 8 проделать над $Z_2(s)$ аккуратно, то получившаяся передаточная функция окажется не строго инвариантной относительно сопряжения – не будет отвечать никакой вещественной системе. Для достижения инвариантности понадобятся приближения. Это неизбежность, связанная с нелинейностью перехода к низкочастотному прототипу.

10. Контуры с емкостной связью

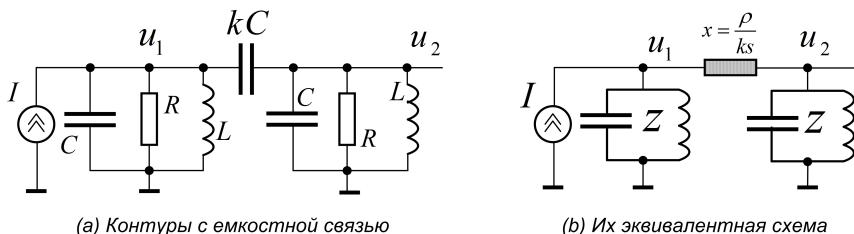


Рис. 9. Контуры с емкостной связью

Возможны и другие варианты организации связи между контурами. Пример двухконтурной системы с емкостной связью показан на рис. 9а. Роль связующей компоненты играет здесь *емкость связи* kC . Малый параметр k имеет смысл *коэффициента*

связи. Импеданс $x = \frac{1}{j\omega kC} = \frac{\rho}{ks} = \frac{Q\rho}{Fs}$ – это сопротивление связи, а $F = kQ$ – фактор связи, имеющий тот же смысл, что и раньше.

Передаточные функции от источника I до напряжений u_1 , u_2 на контурах элементарно находятся из эквивалентной схемы на рис. 9b, в которой, как и прежде, $z = \frac{Q\rho}{1+a}$ – импеданс резонатора:

$$Z_1 = \frac{u_1}{I} = \frac{z(z+x)}{2z+x} = Q\varrho \frac{1+a+Fs}{(1+a)(1+a+2Fs)}, \quad (6)$$

$$Z_2 = \frac{u_2}{I} = \frac{z^2}{2z+x} = Q\varrho \frac{Fs}{(1+a)(1+a+2Fs)}.$$

Существенно, что знаменатели передаточных функций уже разложены на квадратичные по s множители. Чтобы составить представление об их полюсах/нулях, найдем корни $s_{\pm}(\mu)$ фактора $(1 + a + \mu Fs)$ с параметром μ . (В выражениях для передаточных функций этот параметр принимает три значения: $\mu = 0, 1, 2$.) Положив $\xi = \frac{1}{2Q}$, $\eta = \sqrt{1 - \xi^2}$, найдем

$$s_{\pm}(\mu) = \frac{-\xi \pm j\sqrt{\eta^2 + \mu k}}{1 + \mu k} \simeq -\frac{\xi}{1 + \mu k} \pm j\frac{\eta}{\sqrt{1 + \mu k}}.$$

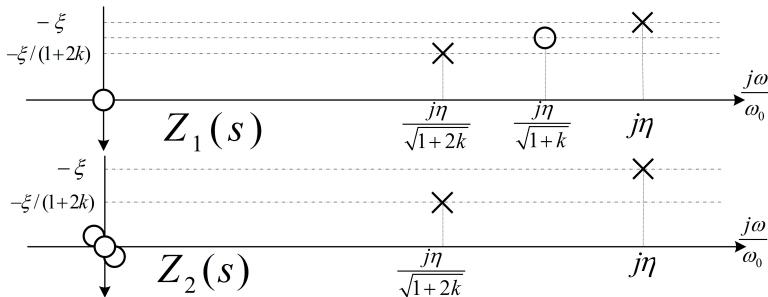


Рис. 10. Карты полюсов/нүлей

Примерное расположение полюсов/нулей показано на рис. 10. Значениям $\mu = 0, 2$ отвечают полюсы. Положение полюса с $\mu = 0$ фиксировано – не зависит от связи. Это полюс передаточной функции одиночного контура. Второй полюс ($\mu = 2$) сдвинут влево и вниз – в направлениях низких частот и высоких добротностей. Нуль Z_1 ($\mu = 1$) занимает промежуточное положение между двумя полюсами. С увеличением коэффициента связи сдвиги левого полюса и нуля нарастают.

Хотя это и не видно сразу, но передаточные функции (6) и (2) двухконтурных систем с емкостной и индуктивной связями практически тождественны – одни переводятся в другие простыми преобразованиями. В самом деле, смещенная обобщенная расстройка $a + Fs$ может быть приведена к стандартной форме

$$\begin{aligned} a + Fs &= Q \left(s(1 + k) + \frac{1}{s} \right) = Q\sqrt{1+k} \left(s\sqrt{1+k} + \frac{1}{s\sqrt{1+k}} \right) = \\ &= Q' \left(s' + \frac{1}{s'} \right) = a' \end{aligned}$$

малой вариацией добротности ($Q' = Q\sqrt{1+k}$) и перекалибровкой частоты: $s' = s\sqrt{1+k} = \frac{j\omega\sqrt{1+k}}{\omega_0}$. Новая резонансная частота $\omega'_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}$ как раз совпадает с частотой центрального нуля на рис. 10. Замены $a + Fs$ на a' и s на s' приводят функции (6) к виду

$$Z_1 = Q\varrho \frac{(1 + a')}{\left((1 + a')^2 - F'^2 s'^2 \right)}, \quad Z_2 = Q\varrho \frac{F' s'}{\left((1 + a')^2 - F'^2 s'^2 \right)},$$

где $F' = \frac{F}{\sqrt{1+k}}$. Теперь, чтобы сделать их вполне тождественными (2), достаточно заменить s' на $\frac{1}{s'}$. Эта замена меняет местами нуль с бесконечностью, сохраняя обобщенную расстройку $Q' \left(s' + \frac{1}{s'} \right)$.

Природа последней замены связана с тем, что передаточные функции Z_2 систем с индуктивной и емкостной связями радикально различаются положением нулей. Если индуктивная связь дает нуль кратности три в бесконечности, то при емкостной связи трехкратный нуль получается в нуле – рост емкостного сопротивления на низких частотах эффективно «выключает» связь между контурами. Эти особенности расположения нулей приводят к нежелательным последствиям – частотные характеристики двухконтурных фильтров теряют глобальную симметрию. Уровни затухания в дальних зонах на частотах выше и ниже резонанса оказываются существенно различными.

11. Задание

Работа выполняется в программе MicroCap. Предполагается наличие минимальных навыков пользования ею для исследования схем в режимах *AC* (частотная область) и *Transient* (временная область). Активно применяется варьирование параметров. Заявки на варьирование оформляются в диалоге *Stepping*. В тексте задания для их описания принят типовой синтаксис: *Step What* = [*From, To|Step Value*]. К примеру, запись $R = [1k, 5k|2k]$ задает варьирование резистора R в диапазоне от 1 до 5 к с шагом 2 к. Варьированием удобно пользоваться, чтобы изменять значение одного из параметров схемы. К примеру, установка $R = [10k, 10k|1k]$ задает значение $R = 10k$.

Подготовленные модели содержатся в двух файлах: 2LCM.CIR, 2LCC.CIR. Их нужно скопировать в свою рабочую директорию.

В моделях заготовлено множество графиков. Они распределены по группам – плотам. Вывод ненужных в данный момент графиков лучше отменять, стирая номер в столбце *P* (*Plot*) диалога *Limits*. Иначе графики получаются слишком мелкими. Отмена всех графиков плата отменяет сам плот. Диапазоны графиков по оси частот (*X Range*) и вертикальной оси (*Y Range*), равно как и параметры координатных сеток на графиках, предустановлены по умолчанию. **Не следует** включать режим **автоскейлинга** – флажок *Auto Scale Ranges*. Это сразу нарушит все установки.

Вертикальные диапазоны графиков лучше подстраивать вручную, задавая поля *Y Range* диалога *Limits* в формате [*верхний предел, нижний предел, шаг сетки*]. Иногда достаточно сделать это для одного из графиков плата – MicroCap выберет самую грубую из всех установок.

Частотный диапазон моделирования определяет запись [*верхняя граница, нижняя граница*] в поле *Frequency Range* диалога *Limits*. Изменив этот диапазон, диапазоны графиков можно подстроить к нему, занеся ключевое слово **auto** в поля *X Range*. Часто достаточно сделать это для одного из графиков плата. При исследованиях в узких частотных диапазонах разумно переходить на линейный шаг по оси частот – самый левый ряд кнопок в таблице описания графиков. Это позволяет задать тонкую координатную сетку вдоль частотной оси.

В моделях применен **стандартный резонатор** с параметрами

$$f_0 = 1 M; Q = 100; \rho = 1 k; Q\rho = 100 k; F_0 = \frac{f_0}{2Q} = 5 k.$$

Значение фактора связи $F = Qk$ задается установкой номинала никакуда не подключенного резистора F в омах.

Схемы моделей пытаются от источника напряжения *sine* единичной амплитуды с последовательным сопротивлением $R = 100 k$. Этот источник эквивалентен источнику тока $I = 10 \mu$ с параллельным сопротивлением $100 k$. В них присутствует также источник единичного перепада *step*. Переключать их не обязательно – MicroCap «понимает», что в режиме *AC* нужен источник *sine*.

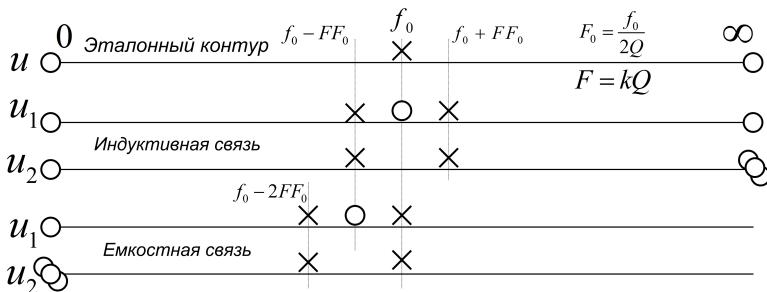


Рис. 11. Карты полюсов/нулей

При работе полезно иметь перед глазами карты полюсов/нулей передаточных функций до напряжения u на эталонном одиночном контуре, и до напряжений u_1, u_2 на первом и втором контурах связанных систем, рис. 11. Общее представление о поведении исследуемых графиков можно составить, бросив взгляд на эти карты.

Курсивом в тексте заданий выделены *результаты измерений*, которые должны содержаться в отчете о проделанной работе.

1. Система с индуктивной связью (файл 2LCM.CIR)

1. Открыть модель, ознакомиться со схемой, уяснить состав подготовленных графиков для режима *AC*: **плот 1** – частот-

ные характеристики для u, u_1, u_2 в децибелах, **плот 2** – просто частотные характеристики, **плот 3** – фазовые характеристики, **плот 4** – графики вещественной и мнимой частей вносимой проводимости. Вносимая проводимость вычисляется вычитанием из проводимости первого контура $\frac{I}{u_1}$ проводимости эталонного контура $\frac{I}{u} = \frac{1}{z}$, где $I = 10 \mu$. Единице на этих графиках отвечает проводимость $Y = \frac{1}{100k}$. При **критической связи** $F = 1$ запустить моделирование в режиме AC и полюбоваться на графики.

2. Оставить только **плот 2** графиков частотных характеристик. При критической связи изучить их поведение при варьировании параметров контуров. Изменять сопротивления потерь первого и второго контуров в диапазоне $R_{1(2)} = [100k, 900k|200k]$ и их емкости в диапазонах $C_{1(2)} = [159.2p, 165p|1p]$, $C_{1(2)} = [159.2p, 155p| - 1p]$. Составить качественное представление о чувствительности частотной характеристики второго контура по отношению к погрешностям задания параметров.

3. Добавить **плот 3** графиков фазовых характеристик. Изучить поведение резонансных кривых и фазовых характеристик при $F = [0.2, 1|0.2]$ и $F = [1, 5|1]$. Сопоставить наблюдения с картами на рис. 11. Измерить *границы диапазонов изменения фаз* на первом и втором контурах и *разность фаз* между напряжениями на контурах на частоте f_0 . *Измерив уровни* $u_1(f_0), u_2(f_0)$ при $F = 0.5; 1; 2$, *проверить формулы* $u_1(f_0) = \frac{1}{1+F^2}$, $u_2(f_0) = \frac{F}{1+F^2}$.

4. Измерить *значения* F , при которых возникает: а) провал на первом контуре, б) провал на втором контуре, с) подъем на фазовой характеристике первого контура. Измерив *частоты пересечения нуля* фазовой характеристикой u_1 при $F = 5; 10$ проверить приближенные $(f_0 \pm FF_0)$ и уточненные $(f_0 \sqrt{1 \pm \frac{F}{Q}})$ формулы для частот полюсов.

5. Оставить только **плот 1**. При критической связи измерить *ширину полосы* по уровню -3 dB эталонного контура и *ширину полосы* по уровню -9 dB резонансной кривой на втором контуре. Проверить, что их отношение составляет $\sqrt{2}$. Измерить *уровни затухания* критической кривой при сдвигах по частоте на декаду F_0 , то есть на $\pm 10F_0 = \pm 50k$. Варьируя сопротивление потерь эталонного контура $R = [60k, 80k|5k]$, выяснить, *при какой добротности* его полоса сравнивается с полосой двухконтурной

системы. Измерить *затухание*, вносимое эталонным контуром с этой добротностью при расстройках на декаду F_0 . Оценить *выигрыши* двухконтурной системы по затуханию.

6. Изучить поведение резонансных кривых при $F = [0.5, 1|0.1]$. Найти *значение* $F = [0.65, 0.75|0.05]$, при котором полоса двухконтурной системы по критическому уровню -9 dB сравнивается с полосой $10k$ эталонного контура. При этом значении F оценить *выигрыши по затуханию* при расстройке на декаду F_0 двухконтурной системы по сравнению с эталоном.

7. Изучить поведение резонансных кривых при $F = [1, 5|1]$. Измерить *значение* F из диапазона $F = [2.2, 2.6|0.1]$, при котором провал на втором контуре касается сверху критического уровня -9 dB . При этом значении F измерить *ширину полосы* $\Delta\omega$ двухконтурной системы по уровню -9 dB и *уровни затухания* при расстройках на декаду F_0 . Установить измеренное значение F в схеме модели. Варьированием сопротивления эталонного контура R добиться совпадения его полосы с полосой двухконтурной системы и измерить *уровни затухания*, вносимого контуром. Оценить *выигрыши по затуханию* двухконтурной системы с неравномерностью -3 dB в полосе пропускания. По завершении эксперимента восстановить $F = 1$ на схеме.

8. Установить диапазон моделирования $[10\text{Meg}, 100k]$. Задать $Y \text{ Range}$ графиков плата 1 равным $[0, -160, 10]$, а в поле $X \text{ Range}$ этих графиков ввести *auto*. Переключить графики плата 1 на логарифмический масштаб частоты. При критической связи $F = 1$ измерить *затухания на втором контуре* при расстройках на декаду f_0 – на границах полосы $(100k, 10\text{Meg})$. Изучить *зависимость уровней затухания* от $F = [1, 5.5|1.5]$. Установив добротность эталонного контура равной $\frac{Q}{\sqrt{2}}$ (сопротивление потерь $R = [70k, 70k|1k]$), оценить *выигрыши в затухании* двухконтурной системы с $F = 1$ по сравнению с эталонным контуром с той же шириной полосы.

9. Включить плты 2 и 4 – частотные характеристики и графики вносимых проводимостей (единицей проводимости на этих графиках является $\frac{1}{100k}$). Снять зависимость пиковых значений вещественной и мнимой частей вносимой проводимости от $F = [0.5, 1|0.5]$ и $F = [1, 2|1]$ (во втором случае масштаб Y

Range придется подстроить). Проверить формулу $\operatorname{Re}(Y) = \frac{F^2}{Q\rho}$. Оценить значения вносимых емкостей ϵC при $F = 0.5; 1; 2$. Поскольку $\omega\epsilon C \simeq \frac{\epsilon}{\rho} = \frac{\epsilon}{1k}$, уровень на графике дает значение 100ϵ .

10. В режиме *Transient* проанализировать переходные характеристики до напряжений на первом и втором контурах при $F = 1$. Установить $F = 0.1$, задав $F = [0.1, 0.1|1]$. Измерить постоянную времени τ экспоненциального спада огибающей напряжения $u_1 \sim e^{-t/\tau}$ до уровня $\frac{1}{e} = 0.37$. Проверить равенство: $\tau = \frac{2\pi}{F_0} \simeq 32\mu$. Задавая поочередно значения $F = 1; 2; 4; 8$, снять зависимость от F частоты биений. Полупериод биений легко измерять по положению первого нуля огибающей графика u_2 . Проверить, что эта частота близка к частоте FF_0 полюсов.

11. Установив диапазон моделирования [2Meg,600k], исследовать частотные и фазовые характеристики при сильной связи, варьируя $F = [10, 70|10]$. Измерив частоты f_{\pm} пиков при $F = 50$, проверить формулы: $f_{\pm} = \frac{f_0}{\sqrt{1\pm k}}$. Убедиться в том, что при $F \rightarrow 100$ частота одного пика стремится к $\frac{f_0}{\sqrt{2}}$, а второго – уходит в бесконечность.

2. Система с емкостной связью (файл 2LCC.CIR)

1. Открыть модель. Проанализировать поведение частотных и фазовых характеристик при варьировании $F = [1, 4|1]$. Сопоставить результаты наблюдений с картой полюсов/нулей на рис. 11. Измерить диапазоны изменения фазовых характеристик на первом и втором контурах. (Учесть, что $-90^\circ = +270^\circ$.) Измерить значения F , при которых возникает: а) провал на первом контуре, б) провал на втором контуре, с) подъем на фазовой характеристике первого контура. Снять зависимость частоты провала на втором контуре от $F = [2, 4|1]$.

2. Открыть графики частотных характеристик в децибелах. Исследовать их изменение при варьировании $F = [1, 4|1]$. Измерить уровни затухания при расстройках на $\pm 50k$ (на декаду полосы контура). Перейти на частотный диапазон [10Meg, 100k] и измерить уровни затухания при расстройках на декаду f_0 .

3. Изучить переходные характеристики при значениях $F = 0, 1; 1; 2; 4$. Убедиться в их сходстве с характеристиками системы с индуктивной связью.

Учебное издание

СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

Методические указания
к лабораторной работе

по курсу *Радиотехнические цепи и сигналы*

Составители: **Григорьев** Александр Алексеевич
Дунаева Мария Андреевна

Редактор *Л.В. Себова*. Корректор *Н.Е. Кобзева*
Компьютерная верстка *Н.Е. Кобзева*

Подписано в печать 20.06.2016. Формат 60×84 1/16.

Усл. печ. л. 1.75. Уч.-изд.л. 1,6. Тираж 200 экз. Заказ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Московский
физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел.: (495)408-58-22. E-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел.: (495)408-84-30. E-mail: polygraph@mipt.ru