*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования*

**«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»**

*Манро Эйден Форбс*
*студент 2 курса группы Б01-307*

# В О П Р О С П О В Ы Б О Р У

по курсу общей физики «Оптика»

на тему:

**Зоны Шустера и спираль Корню**

Москва 2025

# 1 Введение

В одномерных задачах, например при рассмотрении дифракции на прямоугольной щели, разбиение волнового фронта на кольцевые зоны нецелесообразно. Лучше разбивать волновой фронт на полосатые зоны, называемые зонами Шустера (1851-1934).

# 2 Теория

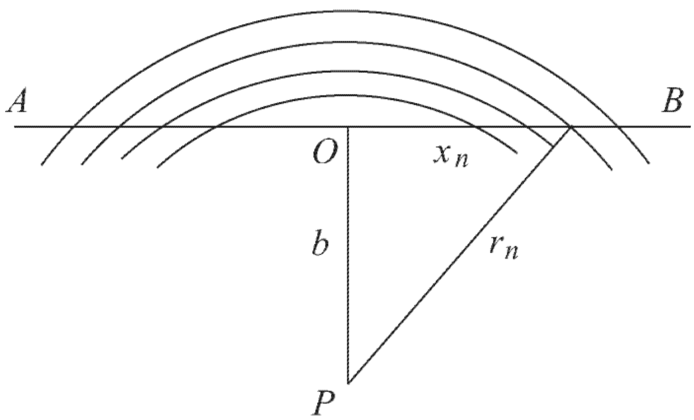


Рис. 1

Ограничимся случаем когда волновой фронт плоский, хотя обобщение на случай сферического фронта и не встречает никаких препятствий. Пусть плоскость волнового фронта AB перпендикулярна к плоскости рис. 1. Обозначим через $b$ длину перпендикуляра PO, опущенного из точки наблюдения на волновой фронт. Проведем цилиндрические коаксиальные поверхности, ось которых проходит через точку P перпендикулярно к плоскости рисунка, а радиусы равны $b$, $b+\lambda/2$, $b+2(\lambda/2)$, ... Тогда волновой фронт разобьется на прямоугольные полосы, которые и называются зонами Шустера. Центральную зону условимся считать за две зоны: одна расположена справа, а другая слева от точки O. Тогда $r_n^2 = b^2 + x_n^2$, $r_{n-1}^2 = b^2 + x_{n-1}^2$, а потому

$$r_n^2 - r_{n-1}^2 = x_n^2 - x_{n-1}^2.$$

Приближённо

$$r_n^2 - r_{n-1}^2 = (r_n + r_{n-1})(r_n - r_{n-1}) = 2b(\lambda/2) = b\lambda.$$

Таким образом, получаем рекуррентное соотношение

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 = b\lambda,$$

из которого могут быть найдены все $x_n$. Так как $x_0 = 0$, то

$$x_1 = \sqrt{b\lambda}, \quad x_2 = \sqrt{2b\lambda}, \quad \ldots, \quad x_n = \sqrt{nb\lambda}.$$

Ширины последовательных зон Шустера будут

$$\sqrt{b\lambda}, \quad (\sqrt{2}-1)\sqrt{b\lambda}, \quad (\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{b\lambda}, \ldots .$$

Они монотонно убывают и в пределе, когда $r \to \infty$, стремятся к $\lambda/2$, как это ясно из их построения. (Впрочем высшие зоны не играют роли. Имеют значение не только несколько десятков первых зон Шустера).

Как и в случае зон Френеля, применим теперь графический метод. Каждую зону Шустера разобьем на узкие полоски и будем изображать колебание в точке P, вносимое отдельной полоской, вектором на векторной диаграмме. Затем перейдем к пределу, устремляя к нулю ширину каждой полоски. В результате чего получится плавная кривая, называемая спиралью Корню (1841-1902). Она состоит из двух симметричных ветвей, бесконечное число раз обвивающихся вокруг «фокусов» $F$ и $F'$ и неограниченно приближающихся к ним.

Верхняя ветвь представляет действие правой половины волнового фронта, нижняя — левой. Отличие каждой из ветвей от соответствующей спирали Френеля обусловлено более быстрым убыванием начальных зон

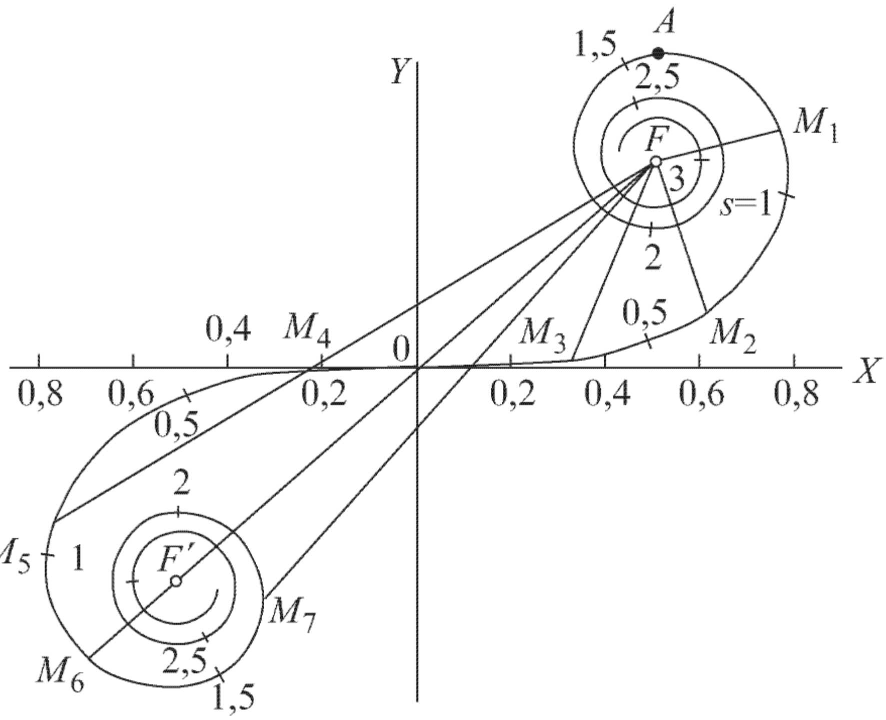


Рис. 2

Шустера, чем зон Френеля. Колебание, возбуждаемое первой правой зоной Шустера, изображается вектором $\overrightarrow{OA}$, второй правой — вектором $\overrightarrow{AB}$, двумя первыми правыми зонами вместе — вектором $\overrightarrow{OB}$ и т.д. (все эти векторы на рис. 2 не проведены). Колебание, возбуждаемое всем волновым фронтом, представляется вектором $\overrightarrow{F'F}$, соединяющим фокусы спирали Корню. По мере приближения к фокусам амплитуды колебаний становятся все меньше и меньше и в пределе обращаются в нуль.

При нахождении уравнения спирали Корню надо учесть, что реально всегда приходится иметь дело не с бесконечными, а с ограниченными волновыми фронтами, причём заметная интенсивность наблюдается лишь при малых углах дифракции. Поэтому в формуле $E_P = \int \frac{1}{rr'} e^{i\Phi(\mathbf{R})}\, dF$ изменения знаменателей $r$ и $r'$ (а также уже отброшенных ранее ослабляющих множителей $K(\alpha)$) можно не принимать во внимание. Если нас интересует только относительное распределение интенсивности, то можно положить $rr' = 1$. В плоскости волнового фронта фазу можно представить в виде $\Phi = \omega t - kr$ (здесь произведено переобозначение: в формуле (41.1) расстояние $r$ обозначалось через $r'$).

Примем волновой фронт за координатную плоскость $XY$, а начало координат поместим в точке $O$. Тогда $r^2 = b^2 + (x^2 + y^2)$, а следовательно,

$$r - b = \frac{x^2 + y^2}{2b} + \dots$$

Члены высших степеней можно отбросить, если даже они добавляют в фазу слагаемые порядка $\pi$ и больше. Дело в том, что такие члены, как это видно из формы спирали Корню, не меняя общего характера дифракционной картины, производят в ней только практически незаметные смещения высших дифракционных максимумов и минимумов. Кроме того, высшие дифракционные максимумы и минимумы следуют друг за другом столь часто, что для их реального осуществления требуются точечные источники света высокой степени монохроматичности. В противном случае все дифракционные полосы высших порядков размываются и переходят в равномерно освещённый фон. Отбросим все фазовые множители, не влияющие на относительное распределение интенсивности светового поля. Тогда поле в точке наблюдения $P$ представится интегралом

$$E_P = \iint e^{-ik(x^2+y^2)/(2b)}\, dx\, dy.$$

Интегрирование должно быть выполнено по всей открытой поверхности волнового фронта. Допустим, что в направлении оси $Y$ она простирается достаточно далеко в обе стороны. Тогда интегрирование по $y$ можно выполнить в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, в результате чего появится постоянный множитель, не представляющий интереса. Интегрирование по $x$ произведём от нуля, считая верхний предел $x$ переменным (он может быть и положительным, и отрицательным). Вместо $x$, как это принято, введём новую переменную $s$ по формуле $kx^2/b = \pi s^2$. Тогда

$$E_P = \int_0^s e^{-i\pi s^2/2}\, ds, \tag{1}$$

$$E_P^* = \int_0^s e^{i\pi s^2/2}\, ds. \tag{2}$$

При изображении колебаний можно пользоваться как выражением (1), так и комплексно сопряжённым с ним (2). При построении спирали Корню обычно применяют выражение (2). Оно и представляет уравнение спирали Корню в комплексной форме. Если координатные оси выбраны так, как указано на рис. 2, то в прямоугольных координатах уравнение спирали Корню запишется в виде

$$X(s) = \int_0^s \cos\frac{\pi s^2}{2}\, ds, \quad Y(s) = \int_0^s \sin\frac{\pi s^2}{2}\, ds. \tag{3}$$

Входящие сюда интегралы называются **интегралами Френеля**. Очевидно,

$$X(s) = -X(-s), \quad Y(s) = -Y(-s),$$

т.е. кривая (3) симметрична относительно начала координат.

Полагая $s = \infty$, находим координаты фокусов спирали Корню:

$$X_F = Y_F = \frac{1}{2}, \quad X_{F'} = Y_{F'} = -\frac{1}{2}.$$

Впрочем, для многих целей проще пользоваться непосредственно комплексной формой (2). В частности, для дифференциала дуги спирали Корню из (2) находим: $\left|e^{i\pi s^2/2}\, ds\right| = |ds|$. Отсюда следует, что параметр $s$ есть длина дуги спирали, отсчитываемая от начала координат $O$.

Если $\tau$ — угол между касательной к спирали Корню и осью $X$, то $\tan\tau =$

$\frac{dY}{dX} = \tan\left(\frac{\pi s^2}{2}\right)$, а потому

$$\tau = \frac{\pi s^2}{2}. \tag{4}$$

При $s = 0$ угол $\tau = 0$, т.е. в начале координат кривая касается оси $X$. При $s = 1$ касательная вертикальна и идёт вверх. При $s = \sqrt{2}$, $\tau = \pi$ касательная снова горизонтальна, но идёт в отрицательном направлении оси $X$. При $s = \sqrt{3}$, $\tau = \frac{3\pi}{2}$ она вертикальна и идёт вниз. При $s = 2$, $\tau = 2\pi$ касательная принимает исходное — горизонтальное — направление. Формула (4) позволяет наглядно проследить, как кривая обвивается вокруг фокусов $F$ и $F'$, делая при этом бесконечное число оборотов. Эта формула особенно полезна в том отношении, что она позволяет по заданному параметру $s$ легко находить соответствующую точку на спирали Корню.

Из формулы (4) получаем формулу для кривизны спирали Корню:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\tau}{ds} = \pi s.$$

Длина всей спирали Корню бесконечна, а потому при приближении к фокусам её кривизна стремится к бесконечности.

**3.** При работе со спиралью Корню надо знать значение параметра $s$. Его легко найти, зная на экране расстояние $x$ точки наблюдения от центра картины $O$ (см. рис. 1). Вычислив ширину первой зоны Шустера $\sqrt{\lambda b}$, находим далее $s = x\sqrt{2/(\lambda b)}$.

Рассмотрим в качестве примера дифракционную картину от прямолинейного края экрана (рис. 3). Где бы ни находилась точка наблюдения $P$, для неё всегда будет открыт правый край волнового фронта. На векторной диаграмме (см. рис. 2) колебание в точке наблюдения представится вектором $M_n\dot{F}$, конечная точка которого всегда находится в верхнем фокусе $F$, а начальная $M_n$ лежит где-то на спирали Корню. Если, сохраняя неизменным положение конечной точки $F$, перемещать начальную точку $M_n$ вдоль спирали Корню (положения $M_1, M_2, M_3, \ldots$), то таким путём можно получить распределение амплитуд и интенсивности колебаний света по всему экрану.

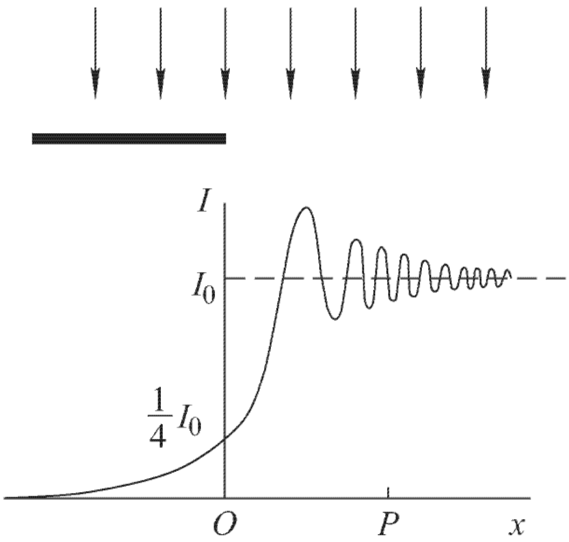


Рис. 3

Обозначим через $a_0 = |FF'|$ и $I_0 = a_0^2$ амплитуду и интенсивность волны, когда открыт весь волновой фронт. Когда точка наблюдения $P$ находится на границе геометрической тени, то колебание представится вектором $O\dot{F} = \frac{1}{2}F'\dot{F}$. Ему соответствует амплитуда $a_0/2$ и интенсивность $I_0/4$. При перемещении точки $P$ в освещённую область экрана изображающая точка $M_n$ начнёт перемещаться по нижней ветви спирали Корню, а амплитуда и интенсивность колебаний будут последовательно проходить через максимумы и минимумы. Максимальная амплитуда, как видно из рис. 2, составляет $1{,}12a_0$, а интенсивность $1{,}25I_0$; минимальные значения их соответственно $0{,}89a_0$ и $0{,}78I_0$. При дальнейшем продвижении в освещённую область интенсивность асимптотически приближается к $I_0$. При погружении точки $P$ в область геометрической тени изображающая точка $M_n$ перемещается по верхней ветви спирали Корню. При этом по мере погружения в указанную область интенсивность света монотонно убывает и асимптотически стремится к нулю.

Распределение интенсивности графически представлено на рис. 3. Таким образом, нет резкой границы между светом и тенью: в области геометрической тени интенсивность света убывает непрерывно и монотонно, а освещённая область расщепляется в дифракционные полосы. На рис. 4 показана дифракционная картина, наблюдаемая при дифракции света на крае экрана. Таким же путём можно рассчитать дифракционную картину на щели или длинном прямоугольном экране. На рис. 5 показана тень проволоки от точечного (или линейного) источника.

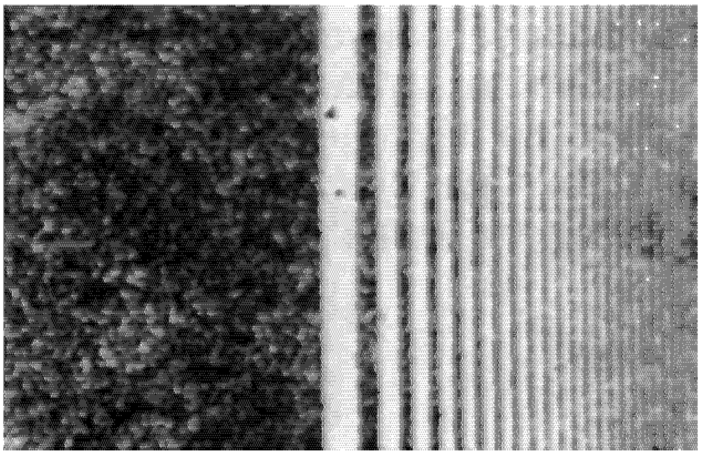

Рис. 4

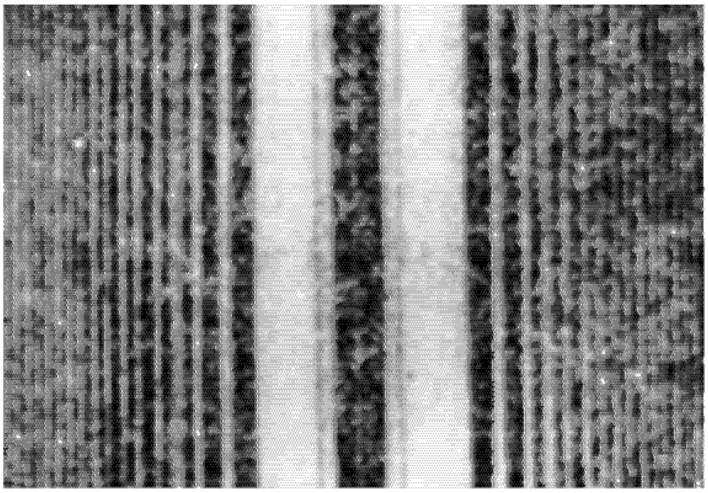

Рис. 5

# 3 Литература

[1] Сивухин Д.В. Общий курс физики. Учеб. пособие: Для вузов, В 5 т. Т. IV. Оптика. - 3-е изд., стереот. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 792 с.