

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Физтех-школа радиотехники и компьютерных технологий

**Отчёт о выполнении лабораторной работы 1.2.4.  
«Определение главных моментов инерции твердых тел  
с помощью крутильных колебаний»**

Работу выполнили:  
Студенты группы Б01-304  
Лепин Владислав Дмитриевич  
Каспаров Николай Михайлович  
Преподаватель:  
Колесов Юрий Иванович

Долгопрудный, 2023

# Содержание

# 1 Введение

## 1.1 Цель работы

Измерить периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закрепленного в ней тела, проверить теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, определить моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции тел и построить эллипсоид инерции.

## 1.2 В работе используются:

- установка для получения крутильных колебаний (жесткая рамка, имеющая винты для закрепления в ней твердых тел, подвешенная на натянутой вертикально проволоке);
- набор исследуемых твердых тел;
- секундомер;
- весы;
- штангенциркуль.

## 1.3 Оборудование и их систематические погрешности

Штангенциркуль:  $\Delta_{шт} = 0,1 \text{ мм}$

Электронные весы:  $\Delta_{в} = 1 \text{ г}$

Секундомер:  $\Delta_{с} = 0,4 \text{ с}$

## 2 Теоретические сведения

### 2.1 Экспериментальная установка

В данной работе используется устройство для получения крутильных колебаний, изображенное на рис. ?? . Рамка 1 жестко соединена с проволокой 2, закрепленной вертикально в специальных зажимах 3, позволяющих сообщить начальное закручивание для возбуждения крутильных колебаний вокруг вертикальной оси. В рамке с помощью планки 4, гаек 5 и винта 6 закрепляется твердое тело 7. На теле имеются специальные выемки, позволяющие его закрепить так, чтобы ось вращения проходила в теле под различными углами через центр масс.

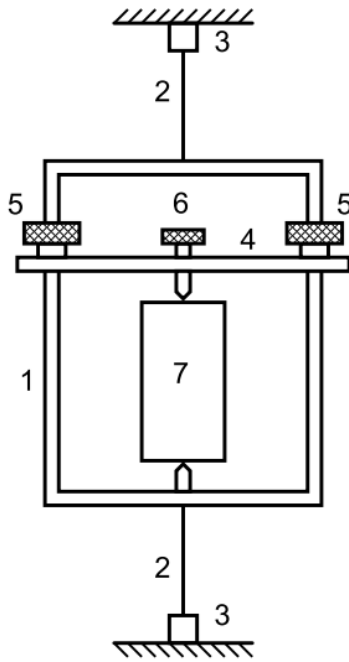


Рис. 1: Схема установки

Крутильные колебания рамки с телом описываются уравнением

$$(I + I_p) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -f \varphi. \quad (1)$$

Здесь  $I$  и  $I_p$  – моменты инерции тела и рамки относительно оси вращения,  $\varphi$  – угол поворота рамки, меняющийся со временем  $t$ ,  $f$  – модуль кручения проволоки. Период крутильных колебаний рамки с телом определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_p}{f}}. \quad (2)$$

На рис. ?? показано, как проходят оси вращения в параллелепипеде. Оси  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  являются главными. Моменты инерции относительно этих осей обозначим соответственно  $I_x, I_y, I_z$ . Ось  $DD'$ , проходящая вдоль диагонали параллелепипеда, с главными осями составляет такие же углы, как с ребрами  $a, b$  и  $c$ , которые им параллельны.

Косинусы этих углов соответственно  $A/d, b/d$  и  $c/d$ , где длина диагонали  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

Момент инерции  $I_d$  при вращении относительно диагонали  $DD'$  выражается через главные моменты с помощью следующей формулы:

$$I_d = I_x \frac{a^2}{d^2} + I_y \frac{b^2}{d^2} + I_z \frac{c^2}{d^2}. \quad (3)$$

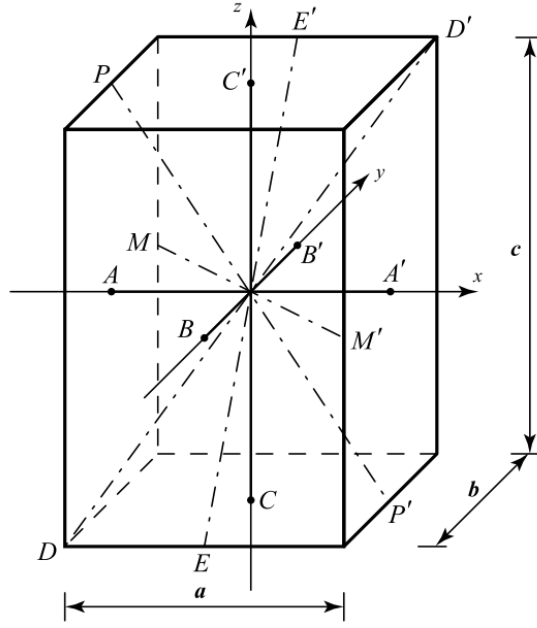


Рис. 2: Оси вращения прямоугольного параллелепипеда

Отсюда получаем соотношение

$$(a^2 + b^2 + c^2)I_d = a^2I_x + b^2I_y + c^2I_z. \quad (4)$$

Используя связь момента инерции с периодом крутильных колебаний ??, получаем соотношение между периодами колебаний

$$(a^2 + b^2 + c^2)T_d^2 = a^2T_x^2 + b^2T_y^2 + c^2T_z^2. \quad (5)$$

Экспериментальная проверка этого соотношения является вместе с тем и проверкой соотношения ??. Из этой формулы следуют также выражения, связывающие моменты инерции относительно осей  $EE$ ,  $MM'$  и  $PP$  с главными моментами инерции. С помощью ?? и для этих осей получаем выражения для периодов крутильных колебаний. Также можно получить следующие формулы

$$(b^2 + c^2)T_E^2 = b^2T_y^2 + c^2T_z^2, \quad (6)$$

$$(a^2 + c^2)T_P^2 = a^2T_x^2 + c^2T_z^2, \quad (7)$$

$$(a^2 + b^2)T_M^2 = a^2T_x^2 + b^2T_y^2. \quad (8)$$

Эти соотношения также необходимо проверить экспериментально.

## **3   Ход работы**

### **3.1   Знакомство с экспериментальной установкой**

Перед началом работы было проведено ознакомление с установкой для получения крутильных колебаний. Проволока натянута безупречно. Рамка закреплена на ней жесточайшим образом. Устройство для возбуждения крутильных колебаний работает без нареканий. Колебания в вертикальной плоскости, к счастью, не возникают.

### **3.2   Закрепление тела в рамке**

На данном этапе лабораторной работы был осуществлен процесс закрепления тел в рамке с использованием специальных углублений на телах и винтов, находящихся на рамке.

Процесс закрепления тел в рамке был внимательно выполнен в соответствии с предоставленными инструкциями, тем самым мы обеспечили надежность и стабильность закрепленных тел в экспериментальной установке.

### **3.3   Определение амплитуды крутильных колебаний**

Перед каждой серией измерений, включая пустую рамку или рамку с предварительным закреплением тела, произведено важное действие — выбор оптимальной амплитуды крутильных колебаний. Этот процесс характеризуется следующими этапами:

1. Проведение измерения периода колебаний, определяемого по 10-15 колебаниям рамки.
2. Уменьшение амплитуды в два раза, согласно установленным критериям. Оценка изменения периода колебаний при уменьшении амплитуды.
3. В случае изменения периода колебаний после уменьшения амплитуды, произведение коррекции амплитуды в соответствии с установленными критериями.

Примечание: процесс коррекции повторяется до тех пор, пока не будет достигнута оптимальная амплитуда, при которой период колебаний остается постоянным.

Этот этап эксперимента направлен на обеспечение точности и надежности измерений путем правильного выбора амплитуды крутильных колебаний перед каждой серией наблюдений.

### 3.4 Измерение периодов колебаний для пустой рамки и тел в различных положениях

На данном этапе исследования проведены измерения периодов колебаний для как пустой рамки, так и тел, находящихся в различных положениях относительно оси колебаний. Процедура измерения включала в себя следующие этапы:

#### 1. Пустая рамка.

- Проведено измерение периода колебаний для пустой рамки, при этом осуществлены не менее трех повторных измерений для обеспечения достоверности данных. Каждое измерение включало в себя фиксацию времени, затраченного на 10-15 колебаний.

#### 2. Тела в различных положениях.

- Каждое тело было размещено в рамке в различных положениях относительно оси колебаний.
- Для каждого положения тела были проведены измерения периода колебаний, повторенные от трех до пяти раз. Результаты измерений приведены в таблицах ??, ??, ??.
- Зафиксированы временные интервалы, необходимые для осуществления 10-15 колебаний для каждого положения тела.

#### 3. Обработка данных.

Для каждого измерения были рассчитаны средние значения периода колебаний по формуле:

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i, \quad (9)$$

где  $N$  – количество измерений.

Также была вычислена случайная погрешность измерений:

$$\sigma_{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (T_{\text{ср}} - T_i)^2}, \quad (10)$$

и полная погрешность в пределах одной серии опытов:

$$\sigma = \sqrt{\Delta_{\text{с}}^2 + \sigma_{\text{сл}}^2}. \quad (11)$$

В таблицу была записана полная относительная погрешность  $\varepsilon_t^{\text{полн}}$  измерений среднего периода колебаний  $T_{\text{ср}}$ :

$$\varepsilon_t^{\text{полн}} = \frac{\sigma}{T_{\text{ср}}} \quad (12)$$

Из таблиц ?? и ?? видно, что периоды колебаний симметричных осей равны, а значит, параллелепипед действительно является симметричным.



Только платформа					
t,с	N	t,с	$T_{\text{ср}}$	$\sigma_t^{\text{случ}},\text{с}$	$\varepsilon_t^{\text{полн}},\text{с}$
45,15	10	4,515	4,515	0,005	0,009
45,17	10	4,517			
45,11	10	4,511			
45,22	10	4,522			
45,08	10	4,508			
Ось Z					
t,с	N	t,с	$T_{\text{ср}},\text{с}$	$\sigma_t^{\text{случ}},\text{с}$	$\varepsilon_t^{\text{полн}}$
56,22	10	5,622	5,633	0,007	0,007
56,40	10	5,640			
56,30	10	5,630			
56,32	10	5,632			
56,42	10	5,642			
Ось Y					
t,с	N	t,с	$T_{\text{ср}},\text{с}$	$\sigma_t^{\text{случ}},\text{с}$	$\varepsilon_t^{\text{полн}}$
69,01	10	6,901	6,900	0,007	0,006
69,12	10	6,912			
68,91	10	6,891			
68,97	10	6,897			
69,01	10	6,901			
Ось X					
t,с	N	t,с	$T_{\text{ср}},\text{с}$	$\sigma_t^{\text{случ}},\text{с}$	$\varepsilon_t^{\text{полн}}$
65,71	10	6,571	6,558	0,007	0,006
65,51	10	6,551			
65,53	10	6,553			
65,60	10	6,560			
65,55	10	6,555			

Таблица 1: Измерение основных периодов колебаний параллелепипеда.

Ось ЕЕ'				Ось ЕЕ' (симметричная)				
t,с	N	T,с	$T_{ср,с}$	t,с	T,с	$T_{ср,с}$	$\sigma_t^{случ},с$	$\varepsilon_T^{полн}$
57,84	10	5,784	5,774	57,81	5,781	5,776	0,006	0,007
57,64	10	5,764		57,79	5,779			
57,78	10	5,778		57,66	5,766			
57,80	10	5,780		57,80	5,780			
57,65	10	5,765		57,73	5,773			
Ось РР'				Ось РР' (симметричная)				
t,с	N	T,с	$T_{ср,с}$	t,с	T,с	$T_{ср,с}$	$\sigma_t^{случ},с$	$\varepsilon_T^{полн}$
59,35	10	5,935	5,939	59,48	5,948	5,939	0,007	0,007
59,45	10	5,945		59,32	5,932			
59,33	10	5,933		59,45	5,945			
59,43	10	5,943		59,37	5,937			
59,38	10	5,938		59,31	5,931			
Ось ММ'				Ось ММ' (симметричная)				
t,с	N	T,с	$T_{ср,с}$	t,с	T,с	$T_{ср,с}$	$\sigma_t^{случ},с$	$\varepsilon_T^{полн}$
66,84	10	6,684	6,669	66,82	6,682	6,667	0,008	0,006
66,57	10	6,657		66,61	6,661			
66,68	10	6,668		66,63	6,663			
66,72	10	6,672		66,71	6,671			
66,63	10	6,663		66,59	6,659			

Таблица 2: Сравнение периодов колебаний для симметричных осей.

Ось 1й диагонали			Результат		
t,с	N	T,с	$T_{ср,с}$	$\sigma_t^{случ},с$	$\varepsilon_T^{полн}$
60,57	10	6,057	6,048	0,008	0,007
60,58	10	6,058			
60,41	10	6,041			
Ось 2й диагонали					
t,с	N	T,с			
60,45	10	6,045			
60,39	10	6,039			
60,59	10	6,059			
Ось 3й диагонали					
t,с	N	T			
60,62	10	6,062			
60,28	10	6,028			
60,60	10	6,060			

Таблица 3: Измерение периодов колебаний для диагоналей.

### 3.5 Измерение геометрических размеров и расчет главных моментов инерции параллелепипеда

Результаты измерений геометрических размеров параллелепипеда штангенциркулем с соответствующими погрешностями приведены в таблице ??:

a, см	b, см	c, см
10,04	5,05	15,02
$\sigma_a$ , см	$\sigma_b$ , см	$\sigma_c$ , см
0,01	0,01	0,01

Таблица 4: Геометрические размеры параллелипипеда.

Проверим справедливость формул (5) - (8). Результаты предоставлены в таблице ??

Формула	$c^2 \cdot m^2$	$\varepsilon$	$\sigma$
$(a^2 + b^2 + c^2)T_d^2$	1,29	0,01	0,01
$a^2T_x^2 + b^2T_y^2 + c^2T_z^2$	1,27	0,01	0,01
$(b^2 + c^2)T_e$	0,837	0,01	0,008
$b^2T_y^2 + c^2T_z^2$	0,837	0,01	0,008
$(a^2 + c^2)T_p$	1,15	0,01	0,01
$a^2 * T_x^2 + c^2 * T_z^2$	1,15	0,01	0,01
$(a^2 + b^2) * T_m$	0,56	0,01	0,01
$a^2T_m + b^2T_m$	0,55	0,01	0,01

Таблица 5: Проверка справедливости формул

Полученные результаты подтверждают, что формулы (5) - (8) верны в пределах погрешностей.

Вычислим главные моменты инерции по следующим формулам (теоретические значения):

$$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2); \quad (13)$$

$$I_y = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2); \quad (14)$$

$$I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2), \quad (15)$$

где  $m = 2083$  г. – масса исследуемого цилиндра.

Таким образом, получим следующие значения:

- $I_x = 4,36, 10^{-3} \text{ кг*м}^2$
- $I_y = 5,67, 10^{-3} \text{ кг*м}^2$
- $I_z = 2,19, 10^{-3} \text{ кг*м}^2$

### 3.6 Построение сечений эллипсоида инерций главными плоскостями

Построим сечения эллипсоида инерции плоскостями  $xOy$  и  $xOz$ :

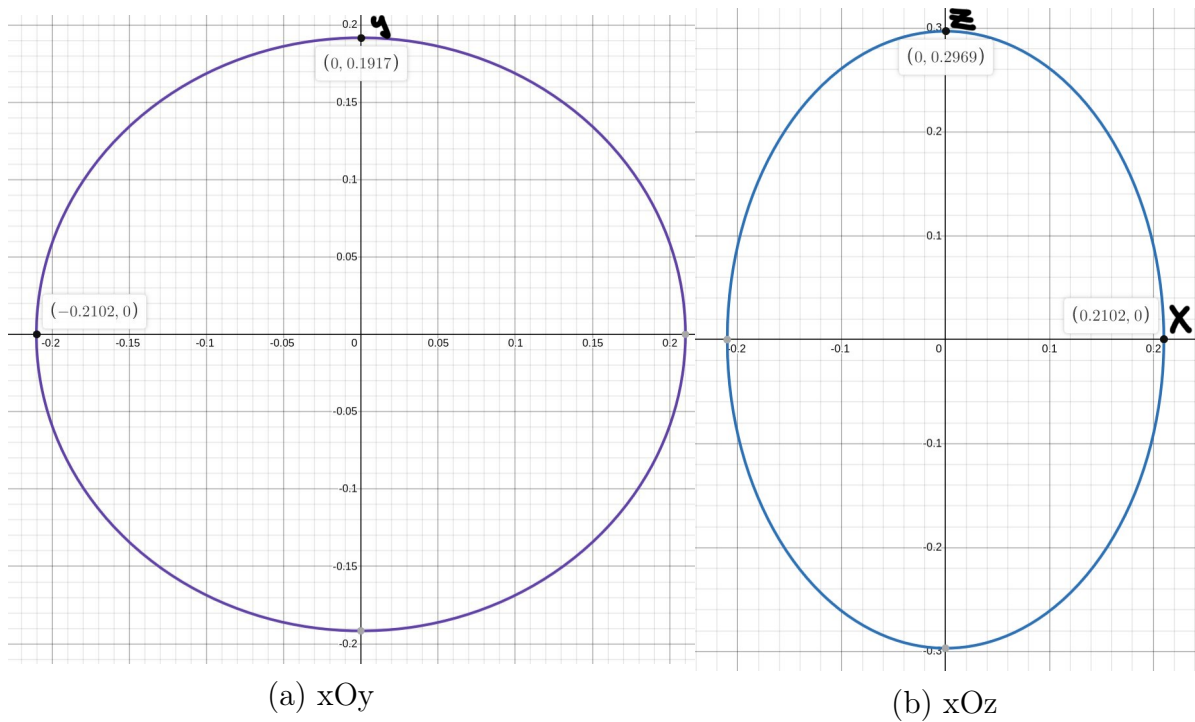


Рис. 3: Сечения эллипсоида инерции главными плоскостями

Из графика можно найти отношения эллипсоидов инерций:

$$I_x/I_y \approx 0,831$$

$$I_x/I_z \approx 1,994$$

Сравним с теоретическими значениями:

$$I_x/I_y \approx 0,769$$

$$I_x/I_z \approx 2,004$$

Значения совпали с неплохой точностью

## 4 Вывод

В результате опыта мы проверили симметрию параллелипипеда, а также экспериментально проверили уравнения (5) - (8), экспериментально нашли отношения моментов импульсов основных осей, которые с хорошей точностью совпали с теоретическими значениями.