Определение модуля кручения (1.3.2)

Манро Эйден

Введение

Цель работы: измерение углов закручивания в зависимости от приложенного момента сил, расчёт модулей кручения и сдвига при статическом закручивании стержня, определение тех же модулей для проволоки по измерениям периодов крутильных колебаний подвешенного на ней маятника (динамическим методом).

Оборудование: в первой части: исследуемый стержень, отсчётная туба со шкалой, рулетка, штангенциркуль, набор грузов; во второй части: проволока из исследуемого материала, грузы, секундомер, штангенциркуль, линейка, рулетка.

Теоретические сведения

При закручивании цилиндрических стержней круглого сечения распределение деформаций и напряжений одинаково по длине стержня только вдали от мест, где прикладываются закручивающие моменты. Для этих областей можно считать, что каждое поперечное сечение поворачивается поворачивается как жесткое, то есть частички материала не сходят с радиальных линий, на которых они были в начале, и все эти линии поворачиваются на один и тот же угол. Такое напряженное состояние назвается чистым кручением.

При такой деформации любая прямая линия, проведенная до закручивания цилиндра по частицам материала и параллельная оси симметрии, при закручивании превращается в спираль (винтовую линию).

Покажем, что касательное напряжение напряжение в поперечном сечении увеличивается пропорцианально расстоянию до оси вращения. Рассмотрим в цилиндре колечко бесконечно малой толщиной dr и высоты dl. При закручивании верхнее колечко поворачивается относительно нижнего на угол $d\varphi$, а образующая наклоняется на угол α. Тогда при малых углах справедливо соотношение:

$$\alpha dl = r d\varphi$$

Касательное наряжение τ связано с углом α линейной зависимостью через модуль сдвига G, и следовательно растет с увеличением расстоянием от оси:

$$\tau = G \cdot \alpha = Gr\frac{d\varphi}{dl}$$

Эти касательные напряжения создают момент сил относительно оси цилиндра:

$$dM = 2\pi r dr \cdot r \cdot \tau$$

Интегрируя это выражение по всем колечкам от оси цилиндра до его радиуса R находим суммарный момент сил:

$$M = \frac{\pi G R^4}{2} \frac{d\varphi}{dl}$$

Так как момент сил не меняется по длине цилиндра. Тогда для связи приложенного момента сил M и угла поворота φ поперечных сечений цилиндра имеем:

$$M = \frac{\pi R^4 G}{2l} \varphi = f\varphi$$

Где f - модуль кручения связанный с модулем сдвига G соотношением:

$$G = \frac{2l}{\pi R^4} f$$

Погрешности

Случайая погрешность измерений:

$$\sigma_{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{N\left(N-1\right)} \sum_{i=1}^{N} \left(x_{\text{ср}} - x_i\right)^2}$$

- Весы: $\Delta_{\text{в}} = 0{,}01$ г
- Линейка: $\Delta_{\text{л}} = 0{,}05$ см
- Штангенциркуль: $\Delta_{\text{шт}} = 0{,}1$ мм

I. Определение модуля кручения стержня статическим методом

Экспериментальная установка

Эту часть работы будем проводить на установке, схематично изображённой ниже. Она состоит из вертикально расположенного стержня С, верхний конец которого прочно закреплён на стойке, а нижний соединён с диском Д. Момент M, закручивающий стержень создают две навитые на диск и перекинутые через блоки Б нити, к концам которых подвешиваются одинаковые грузы Г. Диск снабжён зеркальцем З. Для того, чтобы узнать угол поворота диска, нужно направить зрительную трубу на зеркальце и сделать так, чтобы в неё была чётко видна шкала, укреплённая на том же штативе, что и трубка. По изменению положения шкалы можно определить угол закручивания φ.

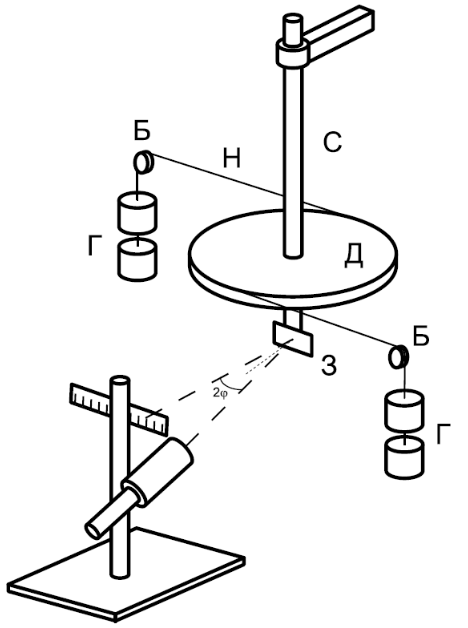

Рис. 1: Схема установки I

Ход работы

$d_{ст}$, мм	6,00 ± 0,01
$d_{д}$, мм	107,2 ± 0,01
L, см	157,0 ± 0,5
l, см	137,0 ± 0,1
m_0, г	50,0 ± 0,1

Таблица 1: Размеры установки

m, гр	$\Delta l_1 \uparrow$, см	$\Delta l_1 \downarrow$, см	$\Delta l_2 \uparrow$, см	$\Delta l_2 \downarrow$, см	$\Delta l_3 \uparrow$, см	$\Delta l_3 \downarrow$, см	$\Delta l_{ср}$, см	$\sigma_{\Delta l}$, см
50	3,0	2,7	3,0	2,6	2,8	2,9	2,833	0,067
100	5,3	5,1	5,4	5,3	5,2	5,5	5,300	0,057
150	8,3	8,1	8,4	7,8	8,0	8,0	8,100	0,089
200	10,5	10,2	10,5	10,2	10,1	10,5	10,333	0,076
300	15,8	16,2	16,0	16,5	16,2	16,1	16,133	0,095
400	20,5	20,5	20,3	20,3	20,3	20,3	20,366	0,042

Таблица 2: Экспериментальные данные

Момент силы грузов будет равен:

$$M = (m_1 + m_0)gR_{диск} + (m_2 + m_0)gR_{диск} \approx 2(m + m_0)gR_{диск} = (m + m_0)gd_{диск}$$

Угол поворота будет равен:

$$\varphi = arctg(\frac{\Delta l}{L}) \approx \frac{\Delta l}{L}(\Delta l \ll L).$$

M, кг$\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$	φ	σ_M	σ_φ
0,105	0,01804	0,001	0,00043
0,157	0,03375	0,001	0,00036
0,210	0,05159	0,001	0,00056
0,262	0,06581	0,001	0,00048
0,368	0,10275	0,001	0,00060
0,473	0,12972	0,001	0,00026

Таблица 3: Данные для графика

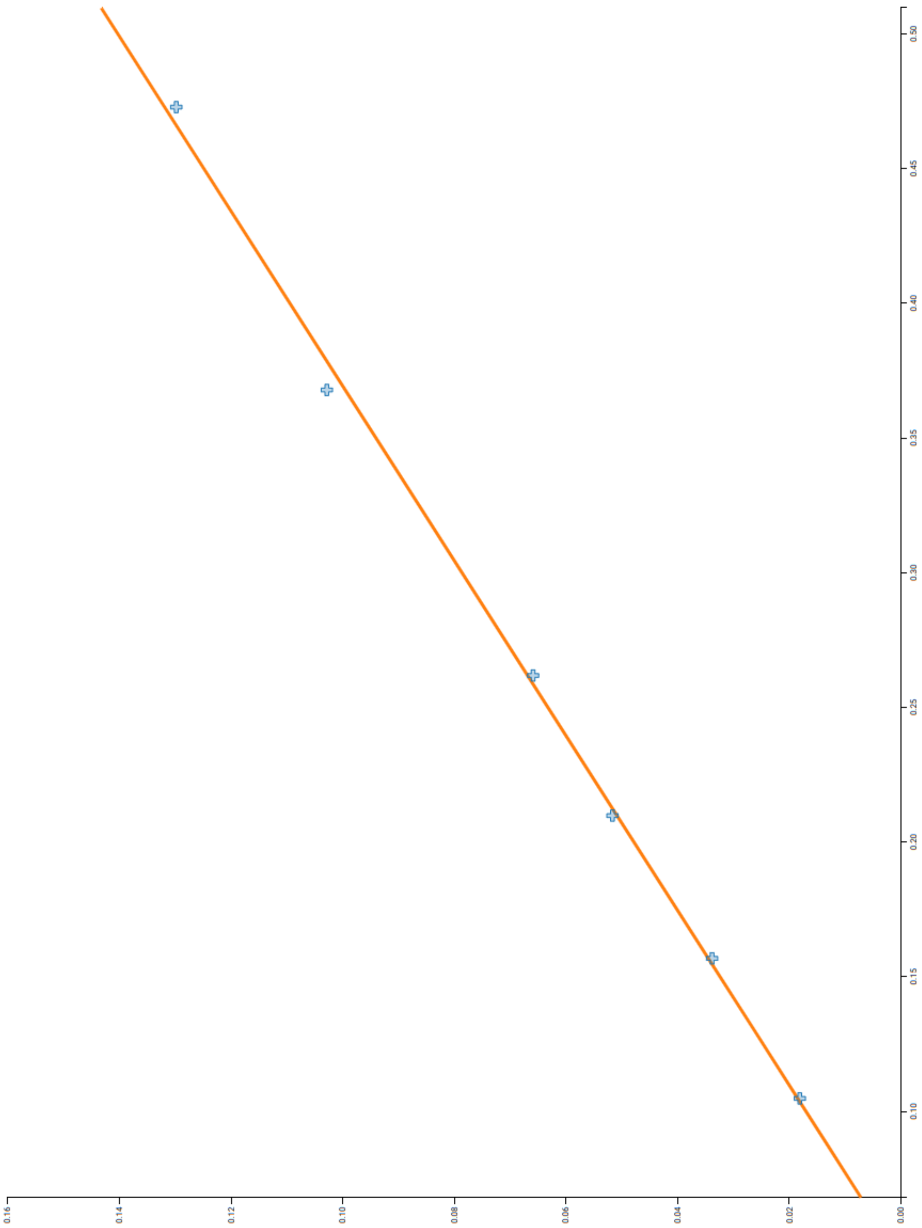

Рис. 2: Зависимость $\varphi = k \cdot M$

Получаем, что:

$$k = (0{,}239 \pm 0{,}016)\frac{\text{рад}}{\text{Н} \cdot \text{м}},\ \varepsilon_k = 6{,}6\%$$

$$f = \tfrac{1}{k} = (4{,}184 \pm 0{,}276)\tfrac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{рад}},\ \varepsilon_f \approx 6{,}6\%.$$

$$G = \frac{2l}{\pi R^4} f$$

Погрешность:

$$\varepsilon_G = \sqrt{(\varepsilon_f)^2 + (\varepsilon_l)^2 + (4\varepsilon_R)^2}$$

Итого: $\underline{\varepsilon_G = 6{,}62\%,\ G = 0{,}442\ \text{ГПа}}$

II. Определение модуля сдвига при помощи крутильных колебаний

Теоретические сведения

В системе можно возбудить крутильные колебания. Вращение стержня с закрепленными на нем грузиками вокрунг вертикальной оси проходит под действием упругого момента M. С учетом выражения для момента M получим, что это вращение описывается уравнением колебаний:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + f\varphi = 0$$

Следовательно период колебаний системы связан с расстоянием r от оси вращения до грузов и моментом инерции стержня I_0 следующим образом:

$$\omega^2 = \frac{f}{I}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}$$

Эти зависимости были получены для незатухающих колебаний. Поэтому для их применения необходимо убедиться, что в рассматриваемой системе диссипативными силами можно пренебречь. Для этого стоит убедиться, что период колебаний не зависит от начальной амплитуды и что амплитуда уменьшется не более чем в 2 раза после около 10 колебаний.
Применяя Теорему Гюйгенса-Штейнера:

$$T^2 = (2\pi)^2\frac{I}{f} = (2\pi)^2\frac{I_0}{f} + (2\pi)^2\frac{(m_1+m_2)r^2}{f},$$

где $I_0 = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$

Экспериментальная установка

Экспериментальная установка, используемая в этой части работы, изображена на рис. 1 и состоит из длинной вертикально висящей право- локи П, к нижнему концу которой прикреплен горизонтальный метал- лический стержень С с двумя симметрично расположенными грузами Г. Их положение на стержне можно фиксировать. Верхний конец право- локи зажать в цангу и при помощи специального приспособления может вместе с цангой поворачиваться вокруг вертикальной оси. Таким спо- собом в системе можно возбуждать крутильные колебания. Вращение стержня С с закрепленными на нем грузами Г вокруг вертикальной оси происходит под действием упругого момента, возникающего в проволоке.

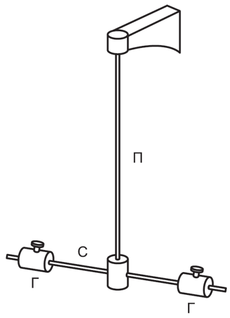

Рис. 3: Схема установки

Ход работы

Масса груза 1, гр	378,0 ± 0,1
Масса груза 2, гр	373,0 ± 0,1
Диаметр проволоки, мм	1,39 ± 0,01
Длина проволоки, мм	1730 ± 2
Длина цилиндра, мм	48 ± 0,1

Таблица 4: Размеры установки

l, см	n	t, с	T, с
12,35	10	36,59	3,659
11,38	10	33,95	3,395
10,34	10	31,26	3,126
9,34	10	28,73	2,873
8,35	10	26,23	2,623
7,33	10	23,70	2,370
6,32	10	21,40	2,140
5,30	10	19,09	1,909
4,50	10	17,49	1,749

Таблица 5: Экспериментальные данные

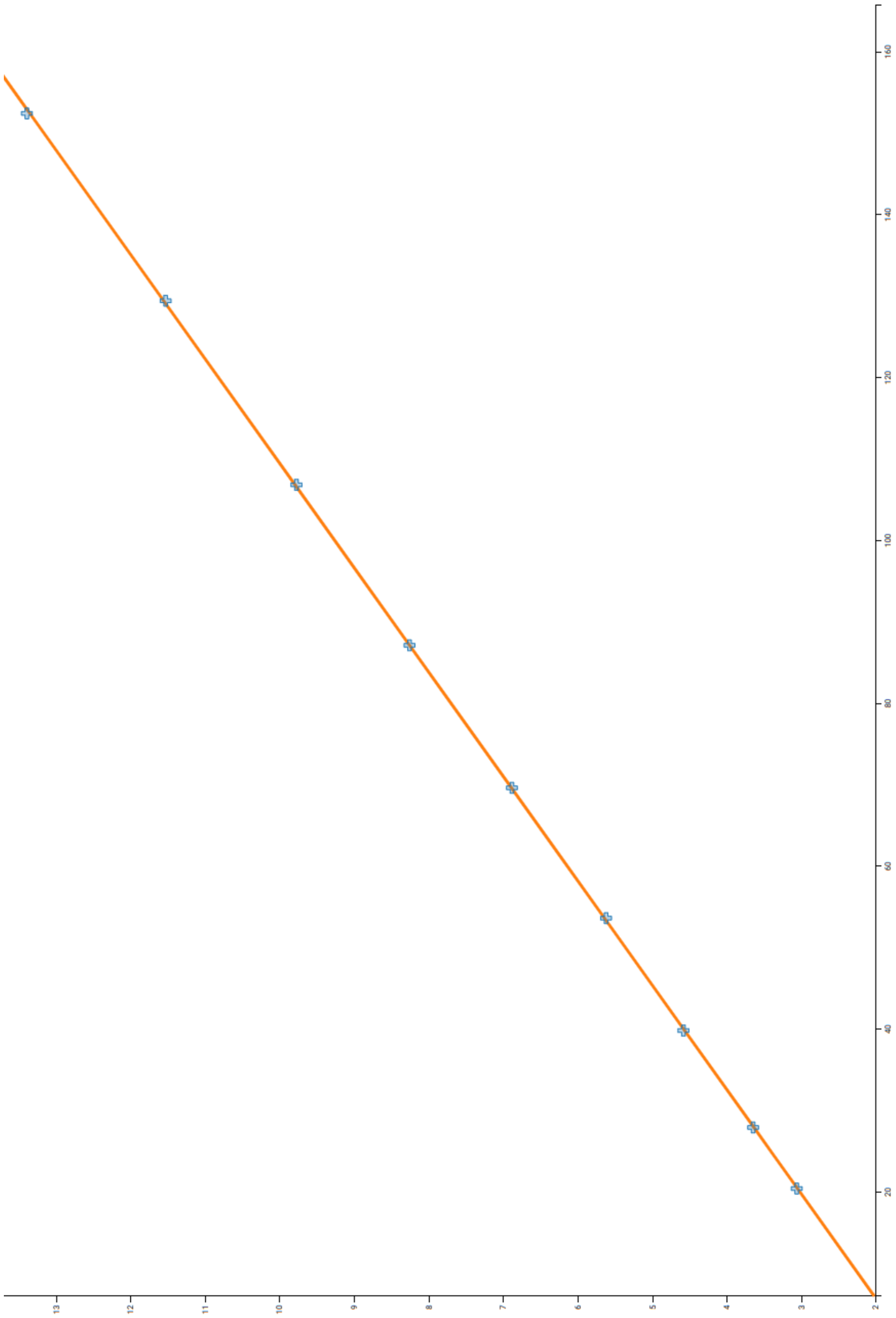

Рис. 4: Зависимость $T^2 = kl^2 + b$

Уравнение графика: $y = 0.078x + 1.449$

Тогда $k = (0{,}078 \pm 0{,}00089),\ \varepsilon_k \approx 1{,}34\%\ \frac{c^2}{\text{см}^2}$

$$f = (2\pi)^2 \frac{(m_1 + m_2)}{k}$$

Погрешность:

$$\varepsilon_f = \sqrt{(\varepsilon_{m_1})^2 + (\varepsilon_{m_2})^2 + (\varepsilon_k)^2}$$

Получаем $\varepsilon_f = 1{,}35\%$ и $f = 0{,}0380$ Н · м.

$$G = \frac{2l}{\pi R^4} f$$

Погрешность:

$$\varepsilon_G = \sqrt{(\varepsilon_f)^2 + (\varepsilon_l)^2 + (4\varepsilon_R)^2}$$

Итого: $\underline{\varepsilon_G = 3{,}16\%,\ G = 17{,}9 \cdot 10^{10}\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}}$

Вывод

Были вычислены модули кручения двумя разными способами и на их основе определены модули сдвига материала.