Изучение статистических закономерностей на примере измерения фона космического излучения (1.1.4)

Манро Эйден

Введение

Цель работы: изучить статические закономерности при измерении однородного во времени случайного процесса; проверить возможность описания интенсивности радиационного фона статистическими законами Пуассона и Гаусса; определить среднее число регистрируемых космических лучей в секунду и определить погрешность результата.

Оборудование: счетик Гейгера-Мюллера, компьютер интерфейсом для связи со счётчиком.

Теоритические сведения

Счетчик Гейгера-Мюллера

Для измерения интенсивности космических лучей используется счетчик Гейгера-Мюллера. Счетчик представляет собой наполненный газом сосуд с двумя электродами. Частицы космических лучей ионизируют газ, которым наполнен сосуд, и выбивают электроны из его стенок. Эти электроны ускоряются электрическим полем и ионизируют молекулы газа. В результате образуется лавина электронов, ток через счетчик резко увеличивается.

В данной работе измеряется величина, которая меняется со временем случайным образом. Методы обработки результатов те же, что и для расчет случайных погрешностей.
Погрешности измерений потока частиц с помощью счетчиков Гейгера-Мюллера малы по сравнению с изменениями самого потока. Погрешности измерений определяются в основном временем, в течение которого восстанавливаются нормальные условия в счетчике после его срабатывания.

В работе используется специальная компьютерная программа, с помощью которой можно получить сведения об экспериментальной установке, провести численный и реальный эксперименты.

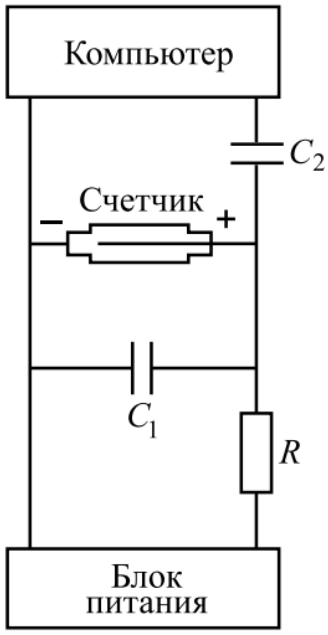

Рис. 1: Схема включения счетчика

Статистические понятия

Считаем, что все ошибки, кроме статистических, пренебрежимо малы и рассматривать их не будем.

Наиболее важной характеристикой измерения является *выборочное среднее* значение числа измерений

$$\langle n \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} n_i$$

При увеличении количества измерений, выборочное среднее будет стремиться к некоторому конечному пределу, но реальное число измерений всегда конечно, поэтому значение среднего всегда содержить *погрешность*

$$\overline{n} = \lim_{N \to \infty} \langle n \rangle$$

Кроме среднего значения важно знать *средний квадрат отклонения* (*выборочная дисперсия*)

$$\sigma_n^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (n_i - \overline{n})^2$$

Аналогично при $N \to \infty$ выборочная дисперсия стремится к некоторому предельному значению

$$\sigma_n^2 = \lim_{N \to \infty} \sigma_n^2 = \overline{(n - \overline{n})^2}$$

Погрешность среднего значения $\langle n \rangle$ при независимых измерениях связана с погрешностью *отдельного* измерения формулой

$$\sigma_{\langle n \rangle} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}}$$

Таким образом, увеличивая количество измерений, среднее значение приближается к «истинному» $\overline{n}$. При конечном N истинное среднее с высокой вероятностью лежит в интервале

$$\overline{n} = \langle n \rangle \pm \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}}$$

Пуассоновский процесс

Если события однородны во времени и каждое следующее событие не зависит от прошлого, то последовательность таких событий называют *пуассоновский процессом.* Для пуассоновского процесса справедливо равенство

$$\sigma = \sqrt{\overline{n}}$$

На практике можно ожидать приближённое равенство для *выборочных* значений

$$\sigma_n \approx \sqrt{\langle n \rangle}$$

Погрешность эксперимента

Если подставить основное свойство распределения Пуассона в формулу погрешности среднего значения, получится *среднеквадратичная* погрешность определения среднего:

$$\sigma_{\langle n \rangle} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\langle n \rangle}{N}}$$

Для *относительного* значения погрешности:

$$\varepsilon_{\langle n \rangle} = \frac{\sigma_{\langle n \rangle}}{\langle n \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\langle n \rangle N}}$$

Задание

Обработка результатов

Для основного эксперимента сгруппируем данные с различными интервалами группировки $\tau = 10$с, 20с, 30с.

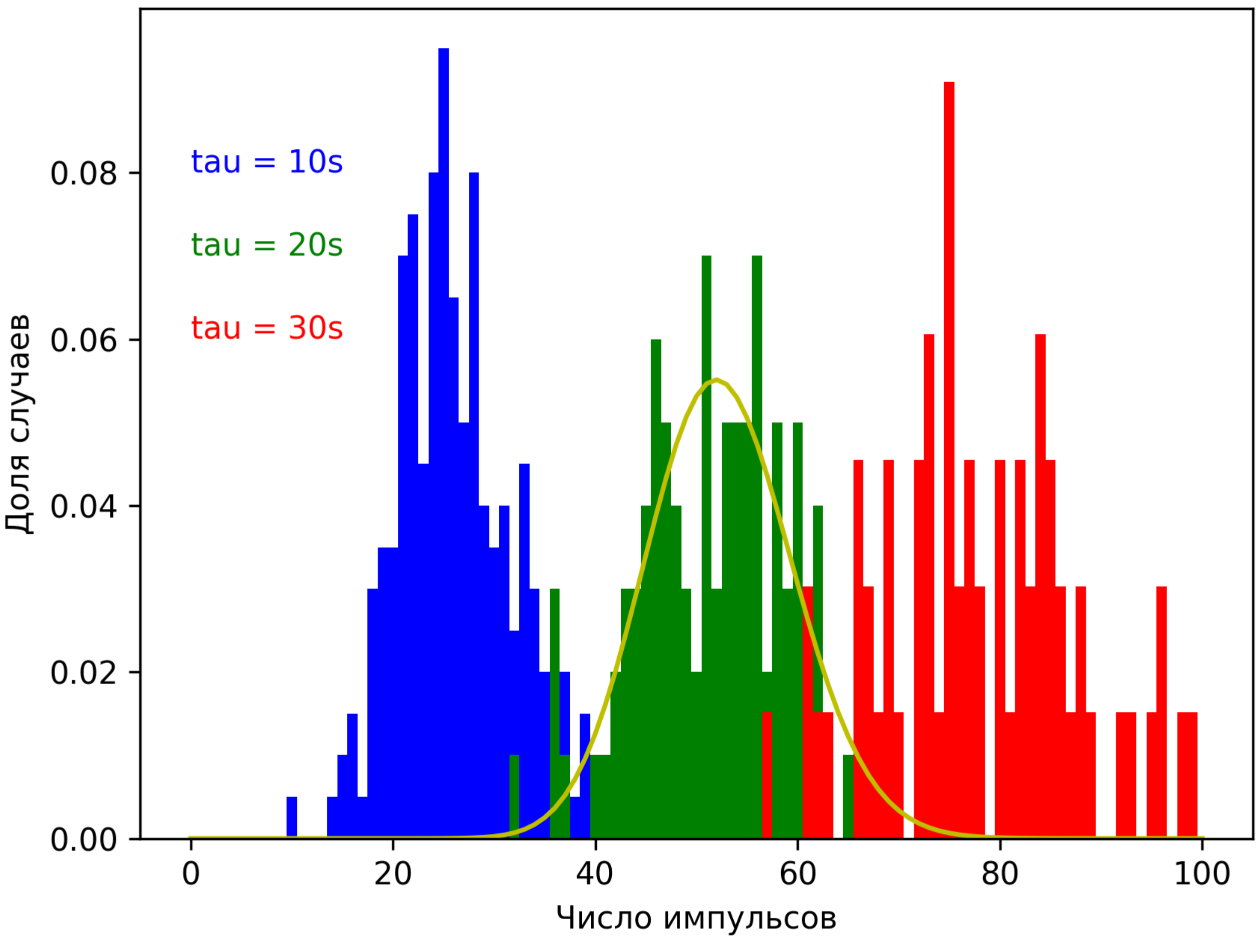

Рис. 2: Гистограмма для числа отсчетов n и w_n

Для каждого τ вычислим среднее число регистрируемых частиц $\langle n \rangle$:

$$\langle n_{10} \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i \approx 26.23 \quad \langle n_{20} \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i \approx 52.45 \quad \langle n_{30} \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i \approx 78.38$$

Для каждого τ вычислим среднеквадратичное отклонение σ_n:

$$\sigma_{n_{10}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(n_i - \overline{n})^2} \approx 5.87 \quad \sigma_{n_{20}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(n_i - \overline{n})^2} \approx 8.10 \quad \sigma_{n_{30}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(n_i - \overline{n})^2} \approx 10.06$$

Для каждого τ вычислим погрешность среднего значения $\sigma_{\langle n \rangle}$:

$$\sigma_{\langle n_{10} \rangle} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}} \approx 0.41 \quad \sigma_{\langle n_{20} \rangle} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}} \approx 0.57 \quad \sigma_{\langle n_{30} \rangle} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}} \approx 0.71$$

Для каждого τ вычислим среднюю интенсивность регистрируемых частиц в секунду j:

$$\langle j_{10} \rangle = \frac{\langle n \rangle}{\tau} \approx 26.23 \quad \langle j_{20} \rangle = \frac{\langle n \rangle}{\tau} \approx 26.23 \quad \langle j_{30} \rangle = \frac{\langle n \rangle}{\tau} \approx 26.13$$
$$\sigma_{\langle 10 \rangle} = \frac{\sigma_n}{\tau} = \approx 0.41 \quad \sigma_{\langle 20 \rangle} = \frac{\sigma_n}{\tau} = \approx 0.29 \quad \sigma_{\langle 30 \rangle} = \frac{\sigma_n}{\tau} = \approx 0.24$$

Можно заметить, что средняя интенсивность регистрируемых частиц в секунду не зависит от величины интервала τ и числа точек $N = t/\tau$

Определим доли случаев, когда отклонение числа отсчётов n от среднего значения не превышает (по модулю) одного, двух и трёх стандартных отклонений:

$$|n - \langle n \rangle| \le \sigma_n \quad w_1 = 0.70$$
$$|n - \langle n \rangle| \le 2\sigma_n \quad w_2 = 0.96$$
$$|n - \langle n \rangle| \le 3\sigma_n \quad w_3 = 0.99$$

Сравним результаты с теоретическими для распределния Гаусса:

$$|n - \langle n \rangle| \le \sigma_n \quad w_1 = 0.68$$
$$|n - \langle n \rangle| \le 2\sigma_n \quad w_2 = 0.96$$
$$|n - \langle n \rangle| \le 3\sigma_n \quad w_3 = 0.99$$

Можно сделать вывод, что при достаточно больших $\overline{n}$ распределение Пуассона приближается к *нормальному распределению (распределению Гаусса)*

Вывод

В ходе выполнения работы познакомился с основными понятиями статистики. Определил среднее число регистрируемых космических лучей в секунду и определил погрешность результата. Выяснил, что средняя интенсивность регистрируемых частиц в секунду не зависит от величины интервала τ и числа точек $N = t/\tau$. Проверил возможность описания исследуемого процесса статистическими законами Пуассона и Гаусса.