Теория графов.

Граф!

Обыкновенный (простой) граф – это пара V, E

V – мн-во вершин

E – мн-во рёбер.

$E \subseteq \binom{V}{2}$ – мн-во 2-элементных подмножеств V.

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{\{1,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}\}$

$e = \{u, v\}$ e – ребро

u, v – вершины

u, v – концы e

e соединяет u и v, e инцидентно u

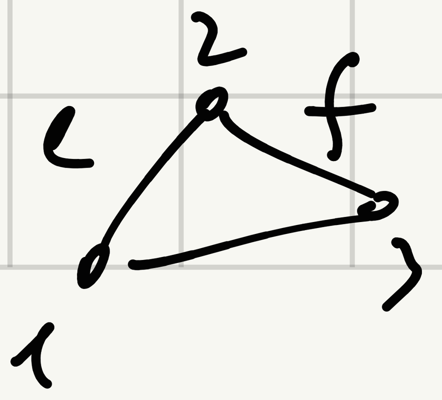
$u, v \in V$ наз смежными, если $\exists e \in E$

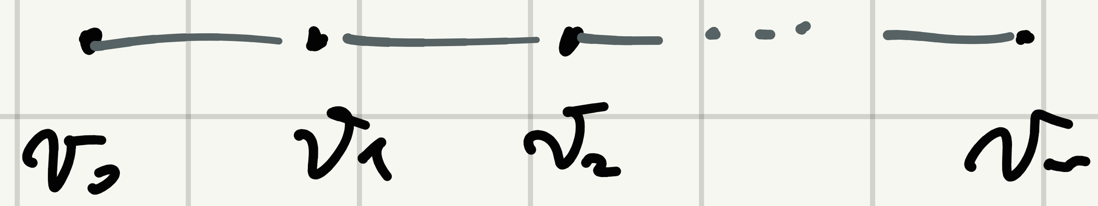
$e = \{u, v\}$

$e, f \in E$ наз. смежными, если $e \cap f \neq \emptyset$

Пути и циклы.

$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 \dots v_n$

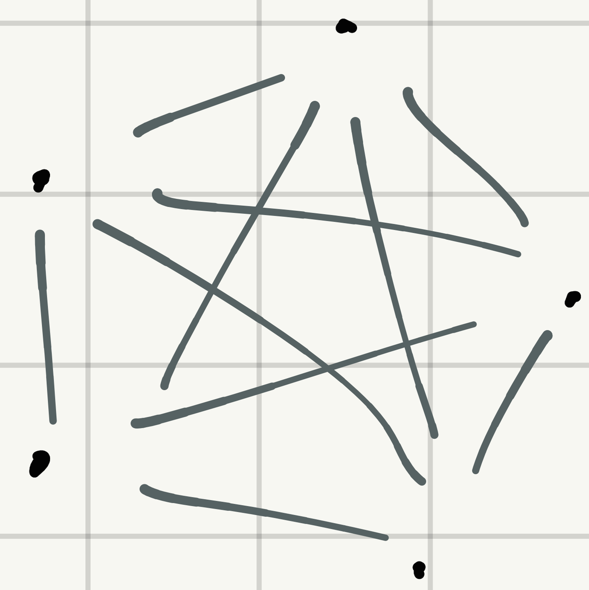


Граф путь:  P_n

из n рёбер

Граф цикл:  C_n

из n рёбер

Полный граф: K_n 

из n рёбер

$= (V, E)$

$|V| = n.\ E = \binom{V}{2}$

Подграф!

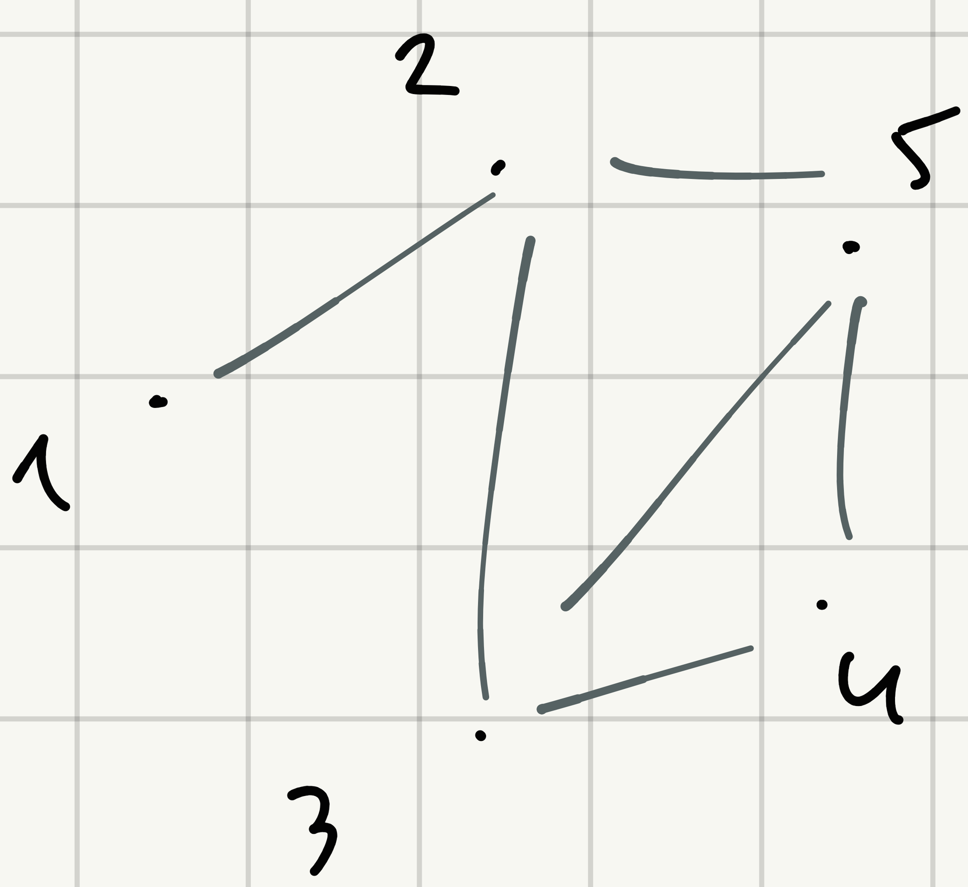
$G = (V, E)$ $\quad G' \subseteq G$, если $V' \subseteq V$

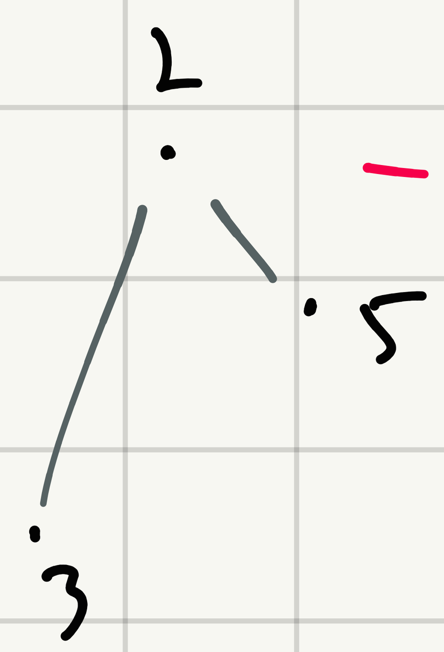
$E' \subseteq V$

(V', E') (реберный) подграф.

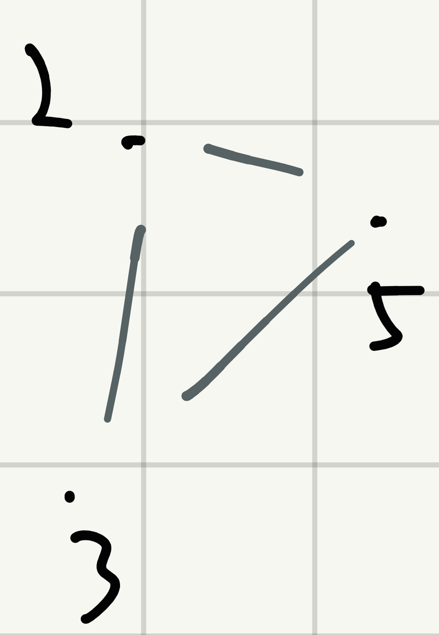
$G' \subseteq G$ наз. индуцированным подграфом, если $V' \subseteq V$, $E' = E \cap \binom{V'}{2}$

Пример:





– подграф (не инд.)



подграф (инд)

Объединение, пересечение, дополнение.

$G=(V,E)$, $H=(W,F) \Rightarrow G\cup H=(V\cup W, E\cup F)$

$G\cap H=(V\cap W, E\cap F)$, $\bar{G}=(V, \binom{V}{2}\setminus E)$

Путь длины n в графе G, это подграф, который "равен" P_n

$G=(V,E)\cong H=(W,F)$

изоморфны, если $\exists$ биекция $f: V\to W$ для которой

$\{u,v\}\in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\}\in F$

Цикл длины n в графе G – это подграф, изоморфный C_n

Степень вершины $d(v)$ – кол-во рёбер с концом в v.

Лемма о рукопожатиях.

$$\sum_{v\in V} d(v)=2|E|$$

$$\sum_{v\in V} d(v)=|\{(v,e) | e \text{ инц } v\}|=2\cdot|E|$$

Следствие. Кол-во вершин нечетной степени чётно.

$$\sum_{\substack{v\in V \\ d(v)-\text{четно}}} d(v) + \sum_{\substack{v\in V \\ d(v)-\text{нечетно}}} d(v) = 2|E|$$

четное кол-во слагаемых.

Клика на n вершинах называется подграф, изоморфный K_n

Независимое мн-во на n вершинах — (анти-клика)

это индуц. подграф, не имеющий рёбер

(по-другому $G=(V,E)$ $\forall u,v\in\tilde{V}$ $\{u,v\}\notin E$

$\tilde{V}$