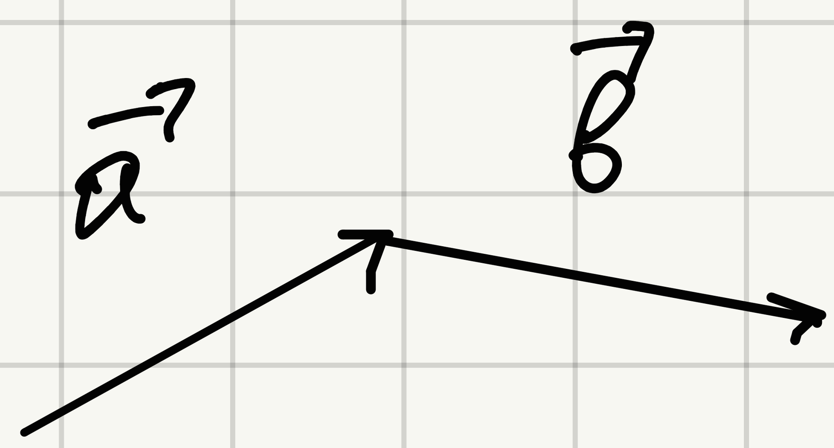
1. Векторы, операции над векторами.



$a+b$, λa $\quad +$, $\quad (\lambda, a) \longmapsto \lambda a$

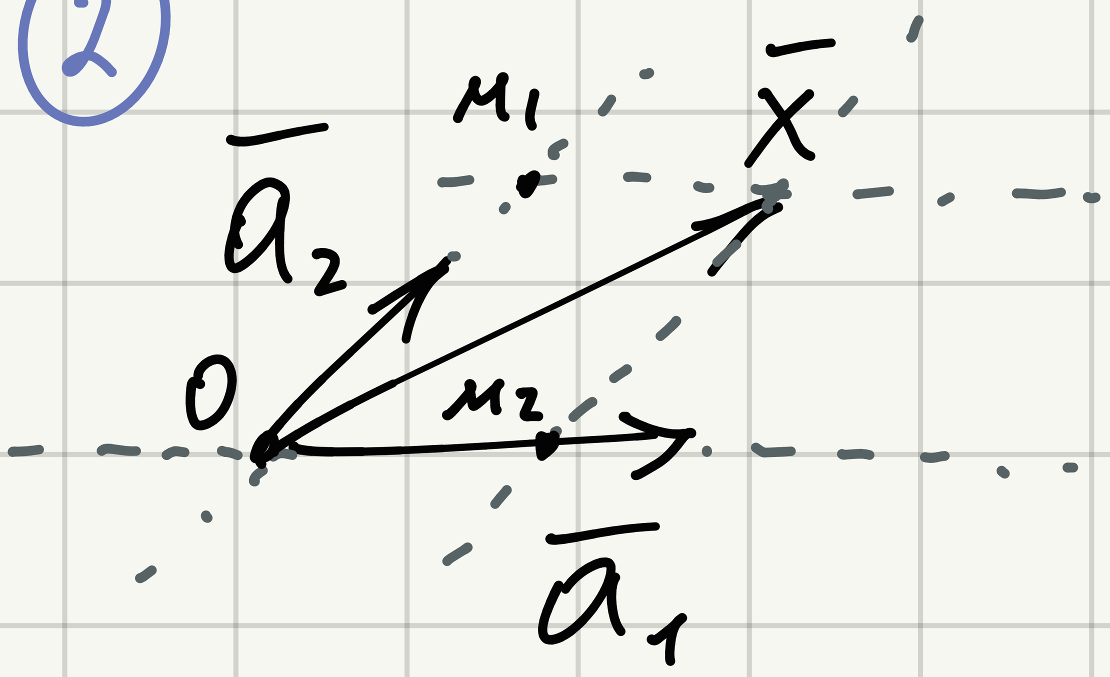
1. $a+b = b+a$; $\forall a, b$
2. $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a, b, c$
3. $\exists\, 0 :$ $a+0 = a$; $\forall a$
4. $\forall a$ $\exists (-a)$: $a+(-a) = 0$
5. $1 \cdot a = a$; $\forall a$
6. $(\lambda\mu)a = \lambda \cdot (\mu a)$; $\forall \mu, \lambda$, $\forall a$
7. $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$; $\forall \mu, \lambda$, $\forall a$
8. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$; $\forall \mu$, $\forall a, b$.

$$\underbrace{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n}_{\text{линейная комбинация}} = b$$

$$E^1 \subset E^2 \subset E^3$$

① $\vec{a}$ $\longrightarrow$ $\quad \vec{x} = \lambda \cdot \vec{a} \longmapsto x_a = \lambda$

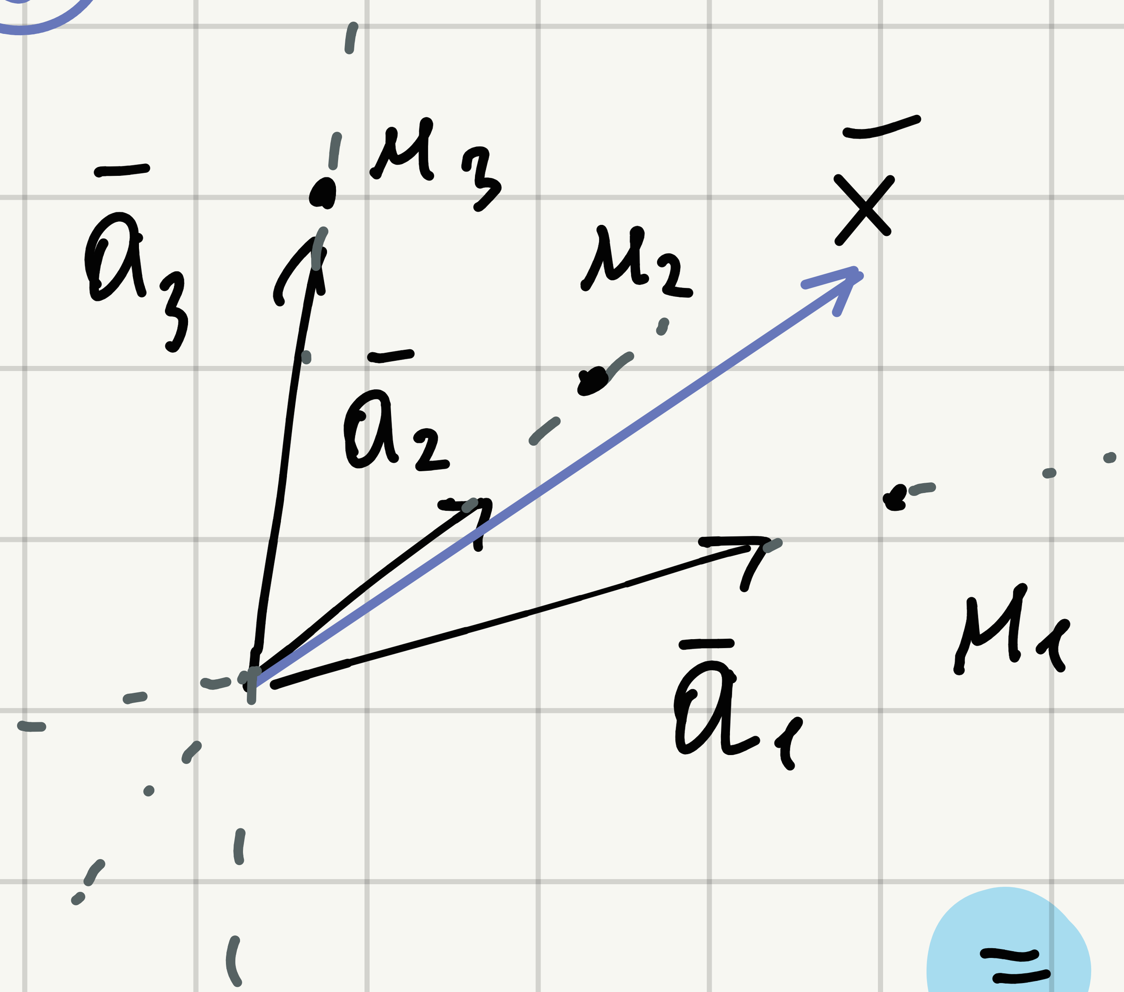
②



$$\bar{x} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2$$

$$\bar{x} \longmapsto (\lambda_1, \lambda_2)$$

③



$$\bar{x} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3 = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \lambda_3 \bar{a}_3$$

$$\bar{x} \longmapsto (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

Линейная независимость.

Система векторов $\bar{a}_1, \dots \bar{a}_n$ наз-ся линейно независимой, если $\lambda_1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = \bar{0}$

$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0$,

$\bar{x} = \lambda \bar{a}$

если $\bar{a} \neq \bar{0}$, то сист. лин. нез.

если $\bar{a}=0$, то сист мн. зависс.

Опр. Система $a_1, \dots a_n$ наз порождающей (полной), если любой вектор пространства может быть разложен по векторам этой системы. $\bar{x} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda_2 \bar{a}_2$

Базис – это лин. нез., порождающая система.

НЕ показатель

$$X = \sum_{i=1}^{n} x^i a_i \longmapsto (x^1, \dots, x^n)$$

$$x + y \longmapsto (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n)$$

$$\lambda x \longmapsto (\lambda x^1, \dots, \lambda x^n)$$

$$x + y = \sum_{i=1}^{n} x^i a_i + \sum_{i=1}^{n} y^i a_i = \sum_{i=1}^{n} (x^i + y^i) a_i \longmapsto$$

$$\longmapsto (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n)$$

1.6. $\bar{a}\{-5, -1\}$ образуют базис
$\bar{b}\{-1, 3\}$ на плоскости

$$\bar{c}\{-1,2\}$$

$$\bar{c}=\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\lambda_1-\lambda_2\\-\lambda_1+3\lambda_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-5\lambda_1-\lambda_2=-1\\-\lambda_1+3\lambda_2=2\end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}-1&3&2\\-5&-1&-1\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\Delta=1+15=16$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-1&2\\-5&-1\end{vmatrix}=11$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&3\\-1&-1\end{vmatrix}=1$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{11}{16}$$

$$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1}{16}$$

1.11.

$\bar{l}=\bar{a}+\bar{b}+c$ $l\ (1\ 1\ 1)$

$\bar{m}=\bar{b}+\bar{c}$ $m\ (0\ 1\ 1)$

$\bar{n}=-\bar{a}+\bar{c}$ $n\ (-1\ 0\ 1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1$$

$$\lambda_1 \bar{l} + \lambda_2 \bar{m} + \lambda_3 \bar{n} = \bar{0}$$

$$\lambda_1 (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) + \lambda_2 (\bar{b} + \bar{c}) + \lambda_3 (-\bar{a} + \bar{c}) = \bar{0}$$

$$(\lambda_1 - \lambda_3)\bar{a} + (\lambda_1 + \lambda_2)\bar{b} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\bar{c} = \bar{0}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$