УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2025 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Аналитическая механика**
по направлению подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФРКТ**

кафедра: **теоретической механики**
курс: 2
семестр: 4

лекции – 30 часов
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
лабораторные занятия – нет

Экзамен – 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа – 45 часов

Программу и задания составили:
к.ф.-м.н., доцент А. В. Фомичев
к.ф.-м.н., ст. преп. А. С. Дробышева

Программа принята на заседании
кафедры теоретической механики
25 сентября 2024 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н. С. В. Соколов

1. **Равновесие, устойчивость, движение вблизи устойчивого положения равновесия**

   Определение положения равновесия. Условия равновесия системы с идеальными связями (принцип виртуальных перемещений) и доказательство для стационарной системы. Условия равновесия голономных стационарных систем (в терминах обобщенных сил).

   Определение устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия и траектории. Общие теоремы об устойчивости линейных систем. Устойчивость систем с постоянной матрицей. Критерий Рауса–Гурвица (без доказательства). Первый метод Ляпунова исследования устойчивости. Теорема Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по линейному приближению.

   Теоремы прямого метода Ляпунова для автономных систем: теоремы Ляпунова об устойчивости, неустойчивости и асимптотической устойчивости, теорема Четаева о неустойчивости, теорема Барбашина–Красовского об условиях асимптотической устойчивости и неустойчивости.

   Теорема Лагранжа–Дирихле об устойчивости равновесия консервативных механических систем. Условия неустойчивости консервативных систем по квадратичной части потенциальной энергии. Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия. Теорема об асимптотической устойчивости строго диссипативных систем.

   Понятие о бифуркации. Случаи потери устойчивости для систем, зависящих от параметра. Два сценария потери устойчивости: дивергенция и флаттер.

   Малые колебания консервативных систем вблизи устойчивого положения равновесия. Уравнение частот. Главные (нормальные) координаты. Общее решение. Случай кратных корней. Случай нулевого корня в уравнении частот.

   Вынужденные колебания линейной стационарной системы под действием гармонических сил. Частотные характеристики. Явления резонанса и антирезонанса (динамическое гашение колебаний). Реакция линейной стационарной системы на негармоническое воздействие.

2. **Уравнения Гамильтона, вариационные принципы, интегральные инварианты**

   Преобразование Лежандра. Переменные Гамильтона. Функция Гамильтона. Вывод канонических уравнений Гамильтона. Функция Гамильтона для консервативной системы.

   Первые интегралы гамильтоновых систем. Скобки Пуассона. Теорема Якоби–Пуассона. Понижение порядка уравнений Гамильтона в случае циклических координат и для обобщенно консервативных систем. Уравнения Уиттекера.

   Действие по Гамильтону. Вариация действия по Гамильтону в задаче с подвижными концами. Вариационный принцип Гамильтона.

   Преобразование лагранжиана при замене координат и времени. Основные понятия теории однопараметрических групп Ли: ядро, оператор и инвариант группы. Теорема Нётер.

   Интегральные инварианты Пуанкаре–Картана и Пуанкаре. Обратные теоремы теории интегральных инвариантов. Теорема Лиувилля об инвариантности фазового объема системы с нулевой дивергенцией. Сохранение фазового объема гамильтоновой системы. Теорема Ли Хуачжуна об интегральных инвариантах первого порядка гамильтоновых систем.

3. **Канонические преобразования. Уравнение Гамильтона–Якоби**

   Определение канонических преобразований. Критерий каноничности в терминах производящих функций. Виды производящих функций: (q, p), $(q, \tilde{q})$, $(q, \tilde{p})$ и $(p, \tilde{p})$-описания. Правила преобразования гамильтонианов при канонических преобразованиях. Фазовые потоки гамильтоновых систем как однопараметрические семейства канонических преобразований.

   Уравнение Гамильтона–Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби и его использование в задаче интегрирования уравнений движения гамильтоновой системы. Случаи разделения переменных.

Литература

1. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. — 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2001.

2. *Журавлёв В. Ф.* Основы теоретической механики. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2001; 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2008.

3. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика : Учебник для высших учебных заведений. — Изд. 5-е, испр. и доп. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» ; Институт компьютерных исследований, 2024.

4. *Амелькин Н. И.* Курс аналитической механики : учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2023.

5. *Болотин С. В., Карапетян А. В., Кугушев Е. И., Трещев Д. В.* Теоретическая механика. — Москва : Издательский центр «Академия», 2010.

6. *Яковенко Г. Н.* Краткий курс аналитической динамики. — Москва : БИНОМ, 2009, 2010, 2012, 2014.

7. *Трухан Н. М.* Теоретическая механика. Методика решения задач: учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2010.

ЗАДАНИЯ

Первое задание

(срок сдачи с 17 по 22 марта 2025 г.)

Контрольная работа с 10 марта по 15 марта 2025 г.

1. **Равновесие. Принцип виртуальных перемещений**
   14.10, 14.20, 14.29, 14.40

2. **Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости движения**
   17.8

   Исследуйте на устойчивость нулевое решение с помощью прямого метода Ляпунова:
   T1.
$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y^3 + xy^3, \\ \dot{y} = x^3 - y^3 - x^4. \end{cases}$$

T2.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + x^3, \\ \dot{y} = x - y - y^3. \end{cases}$$

T3.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = 6x - 2y. \end{cases}$$

Примечание к задаче Т3
Функцию Ляпунова искать в виде $V = (ax + by)^2 + cx^4$.

3. **Устойчивость равновесия консервативных систем**
   15.2, 15.13, 15.26
   Т4. Материальная точка находится в однородном поле тяжести на гладкой поверхности, определяемой уравнением (ось Oz направлена вертикально вверх):

   $$z = \sin(x + y) - \cos y.$$

   Найдите все положения равновесия материальной точки и исследуйте их устойчивость.

4. **Малые колебания консервативных систем**
   16.6, 16.17, 16.30, 16.51, 16.70

5. **Асимптотическая устойчивость диссипативных систем**
   17.1, 17.26, 17.30
   Т5. Исследуйте на устойчивость все положения равновесия системы при всех значениях параметра a:

   $$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases}$$

6. **Вынужденные колебания**
   18.3, 18.26, 18.38, 18.43(д)

Второе задание

(срок сдачи с 12 по 17 мая 2025 г.)

Контрольная работа с 5 по 10 мая 2025 г.

7. **Функция Гамильтона и канонические уравнения**
   19.12, 19.21, 19.23 *(найти решение в квадратурах)*, 19.47, 19.51

8. **Первые интегралы. Скобки Пуассона**
   20.2, 20.14, 20.24, 20.34, 20.36

9. **Принцип Гамильтона**
   21.10, 21.13, 21.23, 21.32

10. **Интегральные инварианты**
    22.6, 22.20, 22.29, 22.31

11. **Канонические преобразования**
    23.7, 23.20, 23.29, 23.48, 23.71, 23.97

12. **Уравнение Гамильтона–Якоби**
    24.9, 24.18, 24.43, 24.66, 24.87

Номера задач взяты из сборника Пятницкий Е. С., Трухан Н. М., Ханукаев Ю. И., Яковенко Г. Н. Сборник задач по аналитической механике. — 4-е изд. — Москва : МФТИ, 2018.