4.66. Поворот твердого тела задается углами Эйлера ψ, θ и φ. С помощью кватернионов найти угол и направляющие косинусы оси конечного поворота тела.

углы Эйлера!!!

$\ominus$ i $\oplus$

k j

$$\Lambda_\varphi = \cos\frac{\varphi}{2} + \bar{k}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\Lambda_\theta = \cos\frac{\theta}{2} + \bar{i}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\Lambda_\psi = \cos\frac{\psi}{2} + \bar{k}\sin\frac{\psi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \Lambda = \Lambda_\psi \overset{2}{\circ} \Lambda_\theta \overset{1}{\circ} \Lambda_\varphi =$$

1) $\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \bar{k}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \bar{i}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \bar{j}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

2) $\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \bar{k}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \bar{i}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} -$

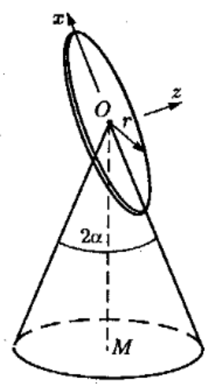
$- \bar{j}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \bar{k}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2} +$

$+ \bar{j}\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \bar{i}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} \\ \lambda_1 &= \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} \\ \lambda_2 &= \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2} \\ \lambda_3 &= \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2} \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 2\arccos\lambda_0}$$

$$\|\Lambda\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{1-\lambda_0^2}}; \; i = 1, 2, 3}$$

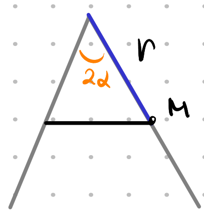
4.70. Тонкий диск обкатывает без скольжения неподвижный конус с углом 90° при вершине так, что линия касания вращается вокруг оси конуса с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$. Найти угол и положение оси конечного поворота диска в момент времени $t = \dfrac{\pi}{\Omega}$.



К задаче 4.70

Некоторые кинематические связи:

$$\Omega r \sin\alpha = \omega_{\text{отн}} \cdot r \Rightarrow \omega_{\text{отн}} = \Omega \sin\alpha$$



$$\bar\omega_{\text{абс}} = \bar\omega_{\text{пер}} + \bar\omega_{\text{отн}} = \bar\Omega + \bar\omega_{\text{отн}}$$

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\Omega t}{2} = \frac{\pi}{2} \to \Lambda_{\text{пер}} = \cos\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\sqrt2}{2}\bar i + \frac{\sqrt2}{2}\bar k\right)\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt2}{2}\bar i + \frac{\sqrt2}{2}\bar k$$

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\omega t}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt2} \to \Lambda_{\text{отн}} = \cos\frac{\pi}{\sqrt8} + \bar k \sin\frac{\pi}{\sqrt8}$$

$$\Lambda = \Lambda_{\text{пер}} \circ \Lambda_{\text{отн}} = \frac{\sqrt2}{2}\left[\bar i \cos\frac{\pi}{\sqrt8} + \bar k \cos\frac{\pi}{\sqrt8} - \bar j \sin\frac{\pi}{\sqrt8} - \sin\frac{\pi}{\sqrt8}\right] \Rightarrow \|\Lambda\| = 1 \ \text{(всё ОК)}$$

$$\gamma_1 = \gamma_3 = \frac{\frac{\sqrt2}{2}\cos\frac{\pi}{\sqrt8}}{\sqrt{1 - \frac12 \sin^2\frac{\pi}{\sqrt8}}} = \frac{\frac{\sqrt2}{2}\cos\frac{\pi}{\sqrt8}}{\frac{\sqrt2}{2}\sqrt{1+\cos^2\frac{\pi}{\sqrt8}}} = \boxed{\frac{\cos\frac{\pi}{\sqrt8}}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\pi}{\sqrt8}}}} \qquad \gamma_2 = \boxed{\frac{-\sin\frac{\pi}{\sqrt8}}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\pi}{\sqrt8}}}}$$

$$\varphi = 2\arccos\lambda_0 \Rightarrow \cos\varphi = 2\cos^2(\arccos\lambda_0) - 1 = 2\cdot\frac12 \sin^2\frac{\pi}{\sqrt8} - 1 = \boxed{-\cos^2\frac{\pi}{\sqrt8}}$$

4.85. Положение твердого тела с неподвижной точкой определяется кватернионом $\Lambda(t) = \cos\frac{\varphi(t)}{2} + \mathbf{e}(t)\sin\frac{\varphi(t)}{2}$, то есть его положение в момент времени t есть поворот из начального положения на угол $\varphi(t)$ вокруг вектора $\mathbf{e}(t)$. Найти угловую скорость тела.

По опр.: $\bar\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi(t,\Delta t)}{\Delta t}\bar e(t,\Delta t) \longrightarrow \delta\Lambda = \cos\frac{\Delta\varphi}{2} + \bar e \sin\frac{\Delta\varphi}{2} =$

$$= 1 + \bar e\frac{\Delta\varphi}{2} + O(\Delta\varphi)^2$$

Из св-в кватернионов: $\Lambda(t+\Delta t) = \delta\Lambda \cdot \Lambda(t) \Rightarrow \Lambda(t+\Delta t) - \Lambda(t) =$

$$= \Lambda(t)(\delta\Lambda - 1) = \Lambda(t)\left(\bar e\frac{\Delta\varphi}{2} + O(\Delta\varphi)^2\right)$$

$$\dot\Lambda = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\Lambda}{\Delta t} = \frac12 \Lambda(t)\circ\omega$$

$$\boxed{\omega = 2\dot\Lambda \circ \bar\Lambda}$$

T3. Доказать свойство ассоциативности кватернионного умножения: для любых кватернионов $\mathit{\Lambda}$, M и N выполняется $\mathit{\Lambda} \circ (M \circ N) = (\mathit{\Lambda} \circ M) \circ N$.

умножение ассоциативно $\Rightarrow$ композиция кватернионов ассоциативна

T4. Решить кинематические уравнения Пуассона $\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda \circ \omega$ и $\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\omega \circ \Lambda$ для $\omega = \mathrm{const}$ и дать геометрическую интерпретацию полученным решениям.