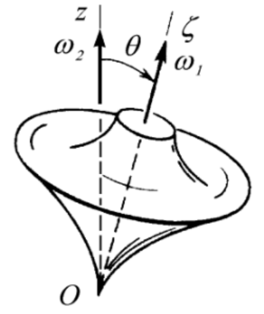
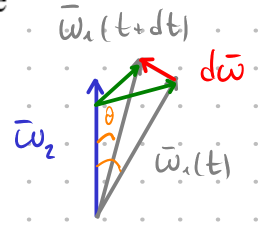
4.4. Юла вращается вокруг своей оси симметрии $O\zeta$ с постоянной по величине угловой скоростью ω_1. Ось $O\zeta$ равномерно вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$, образуя с ней постоянный угол θ (регулярная прецессия). Найти угловую скорость и угловое ускорение юлы.



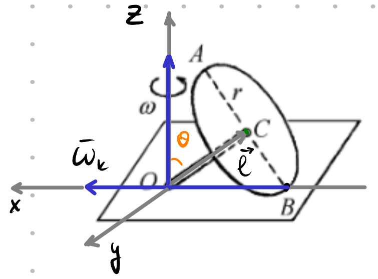
К задаче 4.4



$$\bar\omega_{м.м} = \bar\omega_1 + \bar\omega_2 \qquad \boxed{\omega = \sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2-2\omega_1\omega_2\cos\theta}}$$

$$\bar\varepsilon = \dot{\bar\omega}_1 + \cancel{\dot{\bar\omega}_2}^{\,0} = (\omega_1\hat\omega_1)^{\cdot} = \cancel{\dot\omega_1}\hat\omega_1 + \omega_1\dot{\hat\omega}_1 = \omega_1\dot{\hat\omega}_1 = \bar\omega_1\times\bar\omega_2 \qquad \boxed{\varepsilon = \omega_1\omega_2\sin\theta}$$

4.10. Тонкое колесо радиуса r, жестко насаженное под прямым углом на стержень OC длины $l = r\sqrt3$, катится по плоскости без скольжения. В рассматриваемый момент угловая скорость и угловое ускорение стержня OC, описывающего коническую поверхность с неподвижной вершиной O, равны по величине ω и ε. Определить величины угловой скорости, углового ускорения колеса, а также величины ускорений его точек A и B.



К задаче 4.10

$$\bar v_C = \cancel{\bar v_0}^{\,0} + \bar\omega\times\bar{OC} \Rightarrow \bar v_C = \bar\omega\times\bar l; \quad \bar v_C = \cancel{\bar v_B}^{\,0} + \bar\omega_k\times\bar{BC} \Rightarrow \omega_k = \omega\frac{l}{r} = \boxed{\omega\sqrt3}$$

$$\bar\varepsilon_k = (\omega_k\hat\omega_k)^{\cdot} = \dot\omega_k\hat\omega_k + \omega_k\dot{\hat\omega}_k = \varepsilon\sqrt3\,\hat\omega_k + \omega_k\dot{\hat\omega}_k = \varepsilon\sqrt3\,\hat\omega_k + \bar\omega\times\bar\omega_k$$

$$\bar W_B = \cancel{\bar W_0}^{\,0} + \bar\varepsilon_k\times\bar{OB} + \bar\omega_k\times(\cancel{\bar\omega_k\times\bar{OB}}^{\,0}) = \begin{pmatrix}\sqrt3\varepsilon\\ -\sqrt3\omega^2\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\sqrt{l^2+r^2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \qquad \boxed{\varepsilon = \sqrt{3(\varepsilon^2+\omega^4)}}$$

$$\bar\omega\times\bar\omega_k = \begin{pmatrix}0\\0\\ \omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\sqrt3\omega\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -\sqrt3\omega^2\\ 0\end{pmatrix}; \qquad = \begin{pmatrix}0\\0\\ \sqrt3\omega^2\sqrt{l^2+r^2}\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{W_B = 2\sqrt3\,\omega^2 r}$$

$$\bar W_A = \bar W_B + \overbrace{\bar\varepsilon_k\times\bar{BA}}^{1} + \overbrace{\bar\omega_k\times(\bar\omega_k\times\bar{BA})}^{2} = \begin{pmatrix}0\\0\\ 2\sqrt3\omega^2 r\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\omega^2 r\\ 3\varepsilon r\\ -\sqrt3\omega^2 r\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\ -3\sqrt3\omega^2 r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\omega^2 r\\ 3\varepsilon r\\ -2\sqrt3\omega^2 r\end{pmatrix}$$

$$\sin\theta = \frac{l}{\sqrt{l^2+r^2}} = \frac12$$

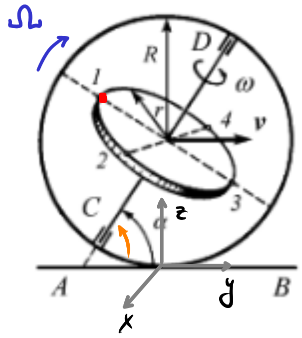
1) $$\begin{pmatrix}\sqrt3\varepsilon\\ -\sqrt3\omega^2\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2r\sin\theta\\ 0\\ 2r\cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\omega^2 r\\ 3\varepsilon r\\ -\sqrt3\omega^2 r\end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix}\sqrt3\omega\\0\\0\end{pmatrix}\times\left[\begin{pmatrix}\sqrt3\omega\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2r\sin\theta\\0\\2r\cos\theta\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix}\sqrt3\omega\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\ 3r\omega\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ -3\sqrt3 r\omega^2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{W_A = \sqrt{21\omega^2+9\varepsilon^2}\; r}$$

4.12. Тонкий обруч радиуса R катится без скольжения по прямой AB. Скорость центра обруча постоянна и равна $\mathbf{v}$. В плоскости обруча укреплена ось CD, вокруг которой с постоянной по величине угловой скоростью ω вращается диск радиуса r. Центры диска и обруча совпадают, плоскость диска перпендикулярна CD. В положении, когда ось CD образует угол α с прямой AB, найти скорость и ускорение точек 1, 3 и 2, 4 диска, соответственно расположенных на концах диаметра, лежащего в плоскости обруча, и диаметра, перпендикулярного плоскости обруча.



К задаче 4.12

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\frac{v}{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar\omega_0 = \bar\omega + \bar\Omega = \begin{pmatrix} -\frac{v}{R} \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\bar v_1 = \bar v_0 + \bar\omega_0 \times \overline{OO_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{v}{R} \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega r \\ +\frac{v}{R} r\cos\alpha \\ +\frac{v}{R} r\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$v_1^2 = \left(v + v\frac{r}{R}\cos\alpha\right)^2 + \left(v\frac{r}{R}\sin\alpha\right)^2 + \omega^2 r^2 = v^2 + 2v^2\frac{r}{R}\cos\alpha + v^2\frac{r^2}{R^2} + \omega^2 r^2$$

$$\boxed{v_1 = \sqrt{v^2 + 2v^2\frac{r}{R}\cos\alpha + \left(v\frac{r}{R}\right)^2 + \omega^2 r^2}}$$

$$\bar w_1 = \cancelto{0}{\bar w_0} + \cancelto{0}{\bar\varepsilon_0 \times \overline{OO_1}} + \bar\omega_0 \times (\bar\omega_0 \times \overline{OO_1}) = \bar\omega_0 \times (\bar\omega_0 \times \overline{OO_1}) = \begin{pmatrix} -\frac{v}{R} \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega r \\ v\frac{r}{R}\cos\alpha \\ v\frac{r}{R}\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(-\frac{v^2}{R^2}r - \omega^2 r\right)\sin\alpha \\ \left(-\frac{v^2}{R^2}r - \omega^2 r\right)\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\boxed{w_1 = \left(\frac{v^2}{R^2} + \omega^2\right) r}$$

4.23. При движении прямой (оси Ox) известны ускорения $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ точек с координатами x_1 и x_2 соответственно. Найти ускорение точки этой прямой с произвольным значением координаты x.

$$\bar w_2 = \bar w_1 + \bar\varepsilon \times \overline{X_1X_2} + \bar\omega \times (\bar\omega \times \overline{X_1X_2}) \Rightarrow \bar w_2 - \bar w_1 = \bar\varepsilon \times \overline{X_1X_2} + \bar\omega \times (\bar\omega \times \overline{X_1X_2})$$

$$\overline{X_1X_2} = k\,\overline{XX_1} \Rightarrow k = \frac{x_2 - x_1}{x - x_1}$$

$$\bar w = \bar w_1 + \bar\varepsilon \times \overline{XX_1} + \omega \times (\omega \times \overline{XX_1}) = \bar w_1 + \frac{1}{k}\left[\bar\varepsilon \times \overline{X_1X_2} + \bar\omega \times (\bar\omega \times \overline{X_1X_2})\right] =$$

$$= \bar w_1 + \frac{1}{k}(w_2 - \bar w_1) = \bar w_1\left(\frac{k-1}{k}\right) + \bar w_2\frac{1}{k} = \boxed{\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\bar w_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\bar w_2}$$

4.30. В рассматриваемый момент угловая скорость и угловое ускорение тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, равны $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ соответственно. Показать, что вращательная компонента ускорения какой-либо точки тела совпадает с касательной, а осестремительная компонента – с нормальной в том и только в том случае, когда эта точка лежит в плоскости, содержащей векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$.

$$\bar{w}_\tau = \dot{u}\cdot\bar{\tau} = \left([\bar{\varepsilon}\times\bar{r}]\cdot\bar{\tau}\right)\cdot\bar{\tau} \Rightarrow \bar{\varepsilon}\times\bar{r} = \left([\bar{\varepsilon}\times\bar{r}]\cdot[\bar{\omega}\times\bar{r}]\right)\cdot\frac{\bar{\omega}\times\bar{r}}{|\bar{\omega}\times\bar{r}|^2} \qquad \bar{\varepsilon}\cdot|$$

$$w_{вр} = \bar{\varepsilon}\times\bar{r}$$

$$\bar{\varepsilon}\cdot(\bar{\varepsilon}\times\bar{r}) = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{w}_{вр} = \bar{w}_\tau}$$

$$\bar{w} = \bar{w}_{вр} + \bar{w}_{oc} = \bar{w}_\tau + \bar{w}_n \Rightarrow \boxed{\bar{w}_n = \bar{w}_{oc}}$$

4.56. Ориентация осей $Oxyz$, жестко связанных с твердым телом, относительно поступательно движущейся системы отсчета $OXYZ$ может быть задана ортогональной матрицей $A(t)$ – таблицей направляющих косинусов. Показать, что угловое перемещение твердого тела из начального положения в конечное может быть осуществлено одним поворотом (теорема Эйлера).

Указание. При решении воспользоваться тем фактом, что орт $\mathbf{u}$ оси конечного поворота удовлетворяет уравнению $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

$$A\bar{u}_1 = \bar{u}_1$$

$$A\bar{u}_2 = \bar{u}_2\cos\varphi + \bar{u}_3\sin\varphi \qquad Ox \longleftrightarrow Ou_1 \Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}$$

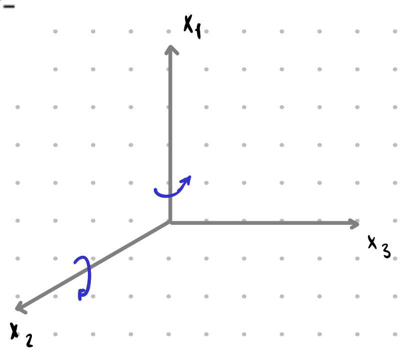
$$A\bar{u}_3 = \bar{u}_3\cos\varphi - \bar{u}_2\sin\varphi$$

матрица поворота вокруг u_1 на φ

Следствие (Теорема Эйлера). Любое перемещение твердого тела с одной неподвижной точкой может быть заменено плоским поворотом вокруг некоторой оси на некоторый угол.

T2. Твердое тело поворачивают на угол $\pi/2$ относительно оси x_1 неподвижного базиса x, а затем – на угол $\pi/2$ вокруг оси x_2 того же базиса. Найти матрицу ориентации базиса ξ, связанного с телом, относительно x, если в начальный момент базисы x и ξ совпадают. Найти вектор соответствующего конечно поворота и углы Эйлера.

Активная т.з.



$$A_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{x_2} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = A_{x_2} \cdot A_{x_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Пассивная т. з.