

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: Гармонический анализ
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладная математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
10.05.01 «Компьютерная безопасность»,
11.03.04 «Электроника и нанoeлектроника»,
16.03.01 «Техническая физика»
физтех-школы: для всех, кроме ФПМИ, ФБВТ, ВШПИ
кафедра: высшей математики
курс: 2
семестр: 4

лекции — 30 часов
практические (семинарские)
занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу составили:

д. ф.-м. н., профессор, С. А. Гриценко
д. ф.-м. н., доцент А. Ю. Петрович
д. ф.-м. н., профессор В. Ж. Сакбаев
к. ф.-м. н., доцент М. О. Сизых

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 17 октября 2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Абсолютно интегрируемые функции. Лемма Римана. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций. Стремление к нулю коэффициентов Фурье. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле. Принцип локализации. Достаточные условия сходимости рядов Фурье в точке. Равномерная сходимость рядов Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. Ряд Фурье в комплексной форме.
2. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
3. Метрические и линейные нормированные пространства. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства, полные линейные нормированные (банаховы) пространства. Полнота пространства $C[a, b]$. Неполнота пространств непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами. Сравнение норм: сравнение равномерной сходимости, сходимостей в среднем и в среднем квадратичном. Полные системы в линейных нормированных пространствах.
4. Бесконечномерные евклидовы пространства. Ряд Фурье по ортонормированной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортонормированный базис в бесконечномерном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Необходимое и достаточное условие того, чтобы последовательность чисел являлась последовательностью коэффициентов Фурье элемента гильбертова пространства с фиксированным ортонормированным базисом. Связь понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы.
5. Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом. Полнота тригонометрической системы, равенство Парсеваля.
6. Собственные интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Несобственные интегралы, зависящие от параметра; равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса и Дирихле. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению несобственных интегралов. Интегралы Дирихле и Лапласа. Интегралы Эйлера – гамма- и бета- функции. Выражение бета-функции через гамма-функцию.

7. Интеграл Фурье. Представление функции интегралом Фурье. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства: равномерная непрерывность, стремление к нулю на бесконечности. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
8. Пространство основных функций D и пространство обобщенных функций D' . Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дельта-функция. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую. Сходимость в пространстве обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций.

Список литературы

Основная

1. Бесов О. В. Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2020.
2. Иванов Г. Е. Лекции по математическому анализу. Ч. 2. — Москва : МФТИ, 2011.
3. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 3. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2006.
4. Петрович А. Ю. Лекции по математическому анализу. Ч. 3. Кратные интегралы. Гармонический анализ. — Москва : МФТИ, 2018.
5. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. — Москва : Лаборатория знаний, 2020.
6. Яковлев Г. Н. Лекции по математическому анализу. Ч. 2, 3. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

7. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 1, 2. — 5-е изд. — Москва : Физматлит, 2000.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2, 3. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2001, 2003, 2006, 2007. — Москва : Физматлит : Лаб. знаний, 2003. — Москва : Физматлит, 2003, 2005, 2008.

ЗАДАНИЯ

Список литературы

1. Сборник задач по математическому анализу. В 3 Т. Т. 2. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2021. (цитируется — С2)
2. Сборник задач по математическому анализу. В 3 Т. Т. 3. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003, 2012. (цитируется — С3)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–21 марта)

I. Тригонометрические ряды Фурье

С.2. §22: 110; 111(1,4).

С.2. §22: 1(1); 8; 12; 24; 25; 28; 41; 45. В каждом примере постройте график суммы ряда Фурье и исследуйте ряд на равномерную сходимость на \mathbb{R} .

С.2. §22: 65; 66; 68; 72.

1. Сходятся ли равномерно ряды Фурье функций $f(x) = \operatorname{sh} x$, $x \in [0; \pi/2]$ и $g(x) = \operatorname{sh} x + 1$, $x \in [0; \pi/2]$ по системам:

а) $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; б) $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$;

б) $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; г) $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$?

Постройте графики сумм этих рядов.

2. Не вычисляя коэффициентов Фурье, определите порядок их убывания, а также порядок убывания остатка ряда для следующих функций, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$:

а) x^{2025} ; б) x^{2024} ; в) $(x^2 - \pi^2)^3$.

С.2. §22: 115; 116. С помощью равенства Парсеваля вычислите суммы

$$\text{рядов: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

3. а) Докажите, что если f — непрерывно дифференцируемая на $[-\pi, \pi]$ функция, такая что $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x) dx.$$

Указание: воспользоваться неравенством Парсеваля. б) Докажите, что если f — непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция, такая что $f(a) = f(b) = 0$, то

$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b f'^2(x) dx.$$

Указание: после сдвига продолжить функцию нечётным образом.

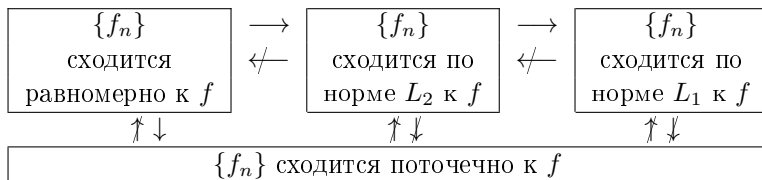
в)* Докажите, что если f — непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция, такая что $f(a) = 0$, то

$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{4(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b f'^2(x) dx.$$

С.2. §16: 47*(2); 48(1, 2).

II. Функциональные пространства

4. Докажите, что если f — функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, а $\{f_n\}$ — последовательность функций, непрерывных на $[a, b]$, то между разными видами сходимости имеются связи, указанные в схеме (при перечеркнутой стрелке приведите контрпример):



С.3. §18: 97; 98.

С.3. §20: 20*; 23*.

5. Полна ли система $\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$ в пространствах
 а) $C[-\pi, \pi]$; б) $CL_1[-\pi, \pi]$; в) $C[-1, 1]$?
6. Докажите, что система функций $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ полна в пространствах $C[a, b]$, $CL_1[a, b]$, $CL_2[a, b]$.

С.3. §19: 116.

7. Полна ли система функций $\{x^{2k-1}\}_{k=1}^\infty$ в пространствах
 а) $C[1; 10]$; б) $C[0; 2]$?
8. Полна ли система функций $\{1\} \cup \{x^{2k-1}\}_{k=1}^\infty$ в пространстве $C[0; 2]$?
9. Полна ли система функций $\{\cos(2k+1)x\}_{k=0}^\infty$ в пространствах
 а) $C[0; \pi/4]$; б) $C[\pi/4; \pi/2]$; в) $C[-\pi/8; \pi/8]$?

43 + 4*

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–16 мая)

I. Собственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §13: 2(1); 4; 14(5); 17; 18(1*, 3).

II. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §14: 1(1) — исследуйте также на множестве $(1; +\infty)$.

1(2) — исследуйте также на множестве $(0; 1)$.

С.3. §14: 6(3, 4); 7(3; 4; 6).

1. Исследуйте на равномерную сходимость на множествах $E_1 = [a_0, +\infty)$ $a_0 > 0$ и $E_2 = (0, +\infty)$ интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx.$$

2. Вычислите интегралы Дирихле и Лапласа:

$$\text{а)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx, \quad \text{б)} \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx, \quad \text{в)} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx.$$

С.3. §15: 2(3); 3(1); 1(3) (с помощью дифференцирования по параметрам); 6(1, 3, 5); 13(4); 15(4).

С.3. §16: 1(3, 4); 7(2); 9(2); 12(8); 13(6)*.

III. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

С.2. §12: 248, 249.

С.3. §17: 1(1); 2(3); 5(1); 6(1).

3. Найдите преобразование Фурье:

$$\text{а)} f(x) = e^{-\alpha|x|}, \alpha > 0; \quad \text{б)} f(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}, \alpha > 0;$$

С.3. §17: 8(1, 2, 5); 10(2, 3); 13; 14(1, 3); 17*(1).

IV. Обобщенные функции

С.3. §21: 58; 60.

4. Докажите, что в D' справедливы равенства:

$$\text{а)} \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{a^2 + x^2} = \pi \delta(x); \quad \text{б)} \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{a} = \pi \delta(x).$$

С.3. §21: 68; 70; 71; 72; 73; 84.

5. Найдите в D'

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{x\xi}{(x^2 + \xi^2)^2}.$$

6. Упростите в D' выражения:

$$\text{а)} (\cos x + e^{2x}) \delta(x);$$

$$\text{б)} (\cos x + e^{2x}) \delta'(x);$$

$$\text{в)} (\cos x + e^{2x}) \delta''(x).$$