УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Дифференциальные уравнения**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
10.05.01 «Компьютерная безопасность»,
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»,
16.03.01 «Техническая физика»
физтех-школы: **ФАКТ, ФЭФМ, ФПМИ, ФБМФ, ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 18 часов

Программу составили:
д. ф.-м. н., профессор А. М. Бишаев
к. ф.-м. н., доцент В. Ю. Дубинская
д. ф.-м. н., профессор С. Е. Жуковский
к. ф.-м. н., доцент С. Д. Животов
к. ф.-м. н., доцент А. Ю. Семенов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 17 октября 2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Программа (годовой курс)

1. **Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнения Бернулли и Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
   Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Использование однопараметрических групп преобразований для понижения порядка дифференциальных уравнений (по усмотрению лектора).
2. **Задача Коши.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения n-го порядка в нормальном виде. Теоремы о продолжении решения. Характер зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных данных: непрерывность, дифференцируемость (без доказательства). Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение.
3. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Формула общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части. Уравнение Эйлера.
   Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда неоднородность представлена квазимногочленом (без доказательства).
   Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Преобразование Лапласа и его применение для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (по усмотрению лектора). Исследование краевых задач для линейных уравнений второго порядка при наличии малого параметра при старшей производной (по усмотрению лектора).
4. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши

для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде.

Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Метод вариации постоянных и формула Коши для линейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений n-го порядка.

Теорема Штурма и следствия из нее.

Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений (по усмотрению лектора). Асимптотическое поведение решений при больших значениях аргумента (по усмотрению лектора).

5. **Автономные системы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Свойства решений и фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем. Теорема о выпрямлении траекторий (*доказательство по усмотрению лектора*).

   Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости.

   Поток А.М. Бишаева: групповое свойство автономных систем дифференциальных уравнений. Понятие фазового объема. Формула Лиувилля. Теорема Пуанкаре (*без доказательства*).

6. **Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.** Первые интегралы автономных систем. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.

   Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, задача для функционалов, содержащих производные высших порядков. Условный экстремум: изопериметрическая задача, задача Лагранжа (без доказательства).

Список литературы

Основная

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Москва : URSS, ЛЕНАНД, 2023.
2. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — Москва : URSS : Ленанд, 2022, http://bookfi.org/book/791964.
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва : URSS, 2022.
4. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2020.
5. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Москва : URSS, 2023.
6. *Умнов А. Е., Умнов Е. А.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2021, http://www.umnov.ru.

Дополнительная

7. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961, http://techlibrary.ru/bookpage.htm.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : Физматлит, 2009.
9. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — Москва : Физматгиз, 2005.
10. *Купцов Л. П., Николаев В. С.* Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2015.
11. *Ипатова В. М., Пыркова О. А., Седов В. Н.* Дифференциальные уравнения. Методы решений. — Москва : МФТИ, 2012.

ЗАДАНИЯ

Список литературы

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. Романко В. К. — Москва : ЮНИМЕДИАСТАЙЛ : Физматлит, 2002, 2006. (цитируется — С)
2. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва : ЛКИ, 2008; — Москва : ЛИБРОКОМ, 2011, 2013. (цитируется — Ф)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–21 марта)

I. Зависимость решений от параметра и начальных условий

Ф.: 1064 <u>1068</u>; 1070*.

II. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Ф.: <u>667</u>; 668; 677.

С. §9: 6; 16; 53; 47*; 73 (найти общее решение линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, используя формулу Лиувилля–Остроградского).

Ф. §22: 47.

<u>1</u>. Доказать, что уравнение Бесселя $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$, где $\nu=\mathrm{const}$ на $(0;\infty)$, не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими первыми производными.

2*. Доказать, что для решения задачи Коши $y''+e^{\frac{2}{x+1}}y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$ выполнено неравенство: $|y(x)|\le e^{\frac{x}{x+1}}$ при $x\ge 0$.

III. Теорема сравнения Штурма

Ф.: <u>723</u>; 726.

С. §10: <u>2</u>; <u>3</u>; 6.

<u>3</u>. Пусть функция $q(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $q(x)\le 0$. Доказать, что краевая задача $y''+q(x)y=0, y(x_1)=a$, $y(x_2)=b$, при любых $a,b,x_1\ne x_2$ имеет решение и это решение единственно.

<u>4</u>. Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения

$$y''+2x^2y'+(2x+1)y=0$$

имеет на действительной оси не более трех нулей.

5. Доказать, что для любого решения уравнения

$$y''+(2+\cos 3x)y=0$$

существует точка $\xi\in[-1;6]$ такая, что $y'(\xi)=0$.

6. Доказать, что:

а) любое нетривиальное решение уравнения Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0,\quad \nu=\mathrm{const}$$

имеет бесконечное число нулей на промежутке $(0,+\infty)$;

б)* расстояние между последовательными нулями $|x_{n+1} - x_n|$ любого указанного выше решения стремится к π при $n \to +\infty$.

IV. Исследование поведения фазовых траекторий

Во всех задачах изобразить фазовые траектории, для фокусов и узлов определить, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми.

Ф.: 971; 972; 973; 974; 975; 976*.
С. §13: 39; 48; 57.
Ф. §25: 161.

V. Устойчивость по Ляпунову

Ф.: 894; 920; 889*.

$\boxed{32+6^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–16 мая)

I. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем

С. §14: 2; 12.
Ф.: 1164.

1. Проверить, что функция $u = y + xz^2$ является первым интегралом системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(2xz^2 + 2y + 3z), \\ \dot{y} = xz^3, \\ \dot{z} = z(xz^2 + y + z). \end{cases}$$

Найти все первые интегралы системы.

2. Найти все первые интегралы уравнений и систем уравнений. Затем, используя их, исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости. В пункте в) найти также интегральные кривые системы.

а) $\ddot{x} + \sin x = 0$; б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0$; в) $\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1; \end{cases}$

С. §16: 6; 26.

3*. Дифференциальное уравнение $\ddot{x} + x^5 = 0$ описывает колебания, период T которых зависит от начальных значений: $T = T(x(0); \dot{x}(0))$. Найти отношение $T(1,1)/T(2,2)$.

II. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

С. §17: 4; <u>16</u>; 45; 79; 85.

<u>4</u>. Найти общее решение уравнения $2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Затем в пунктах а), б) и в) решить соответствующую задачу Коши. Объяснить получившиеся результаты:

а) $u = 10$ при $3x - 2y = 5$;
б) $u = e^x$ при $3x - 2y = 5$;
в) $u = \sin y$ при $x = 0$.

5*. Найти поверхность, проходящую через кривую $y = x, z = 2y + y^3$ и обладающую свойством, что любая касательная плоскость пересекает ось Ox в точке с абсциссой, вдвое меньшей абсциссы точки касания.

III. Вариационное исчисление

С. §19: 12; 33; 75; <u>102</u>.
С. §20.1: 2; <u>9</u>; 14.
С. §20.2: 4.
С. §20.3: 5.
С. §21: 7.

6. Исследовать на экстремум при всех значениях вещественного параметра a:
а) $J[y] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - ay^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$;
б)* $J[y] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - ay^2)dx$, $y(0) = 0$.

IV. Повторение

С. §6: 35.
С. §7: 56.
С. §8: 126.
С. §9: 34.
С. §11: 55.
С. §13: 49.
С. §17: 84.
С. §20.1: 8.

$\boxed{34+3^*}$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент С. Д. Животов