Effetto Zeeman

Docente: dott. Garfagnini, dott. Lunardon Gruppo 14

Anno accademico 2019/20

- o Aidin Attar 1170698 aidin.attar@studenti.unipd.it
- o Ema Baci 1171107 ema.baci@studenti.unipd.it
- o Alessandro Bianchetti 1162147 alessandro.bianchetti@studenti.unipd.it

SCOPO DELL'ESPERIENZA: STUDIO DELL'EFFETTO ZEEMAN PER ATOMO DI NEON, STIMA DEL FATTORE DI LANDÈ



Descrizione dell'apparato

L'apparato sperimentale si compone di una lampada al Neon, capace di emettere radiazione elettromagnetica associta principlamente a transizioni tra 3p e 2p. In particolare siamo interessati alla transizione da $\lambda=585.3$ nm. Tale lampada è inserita all'interno di una cavità magnetica, per cui ci si aspetta la comparsa di tre righe di emissione: tuttavia, considerando la polarizzazione delle righe, possiamo "sopprimere" la transizione centrale orientando il campo magnetico in modo longitudinale alla linea di osservazione, in modo tale da vedere solo le due righe marginali.

Il raggio di luce emessa attraversa una lente condensante, necessaria per concentrare quanto più possibile il fascio, che passa quindi per una fenditura e successivamente attraverso un prisma, necessario per ruotare di 90° la luce e dividerla nelle sue componenti principali.

A questo punto i raggi incidono sulla lamina di Lummer-Gehrcke, dispositivo interferenziale ad alta risoluzione, in modo quasi radente (faremo in seguito una stima dell'angolo di incidenza) e il fascio emergente viene infine focalizzato sul dispositivo ottico di lettura (un CCD monodimensionale) attraverso la lente di camera.

L'acquisizione dei dati è avvenuta tramite l'interfaccia di controllo dell' apparato, che permette di controllare le diverse componenti appena citate.

Per l'analisi dati sono stati utilizzati programmi scritti in c++, root ed Excel.

Compendio di teoria

L'esperienza è incentrata sull'identificare e misurare lo splitting Zeeman dei livelli di energia e confrontarli con le previsioni teoriche. L'effetto Zeeman è il fenomeno che si verifica nel momento in cui gli atomi di una certa sostanza vengono sottoposti a un campo magnetico esterno, che suddivide i livelli energetici permessi per gli elettroni. In tal modo confrontando lo spettro della prima riga di transizione ($\lambda=585.3$ nm, associata ai termini spettroscopici $^1S^0 \rightarrow ^1P^1$) a campo magnetico spento e a campo acceso vedremo il biforcarsi delle campane in due ulteriori picchi. Misurando la distanza che separa i due picchi causati dalla presenza del campo, otterremo il doppio dello splitting $\Delta \lambda_{Zee}$.

In particolare, si sceglie la transizione indicata sopra perché connette stati con spin nullo, per cui ci assicura l'effetto Zeeman cosiddetto *normale*, cioè quello previsto anche dalla teoria classica, dove il fattore giromagnetico presente nella formula generale (effetto Zeeman *anomalo*) sarà dunque semplicemente $g_l = 1$. Pertanto

$$\Delta E_{Zee} = g_l m \mu_B B = \pm \mu_B B \tag{1}$$

dato che nel nostro caso le due proiezioni del momento angolare totale dello stato di arrivo possibili sono $m=\pm 1$ (0 è escluso grazie all' orientazione del campo magnetico, come accennato sopra).

Inoltre

$$\Delta \lambda_{Zee} = \frac{\lambda^2}{hc} \Delta E_{Zee} \tag{2}$$

rappresenta la formula con cui confronteremo il dato sperimentale ricavato.

Inoltre da opportuni fit dei picchi ricaveremo una stima della larghezza delle campane, da cui ricaveremo il potere risolvente come rapporto

$$R = \frac{\lambda}{\Lambda \lambda} \tag{3}$$

che sarà ben coperto dalla risoluzione dell'apparato, cioè dalla risoluzione offerta dalla lamina di Lummer-Gehrcke, che segue l'ordine del rapporto L/λ , dove L è la lunghezza della lamina. Un altro parametro importante della lamina è il *range di lunghezza d'onda utile* $\Delta\lambda_{r.u.}$, che rappresenta la massima differenza tra due lunghezze d'onda tale che i due massimi consecutivi restino distinguibili. In particolare

$$\Delta \lambda_{r.u.} = \frac{\lambda^2}{2d} \frac{\sqrt{n^2 - \sin(i)^2}}{n^2 - \sin(i)^2 - n\lambda \frac{dn}{d\lambda}}$$
(4)

dove la derivata $dn/d\lambda$ è stata ottenuta fittando alcuni punti $n(\lambda)$ rappresentativi dell'andamento dell'indice di rifrazione della lamina in funzione della lunghezza d'onda. Nello specifico si è scelto il modello della legge di Cauchy fermandosi al primo ordine:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \tag{5}$$

ottenendo il seguente andamento:

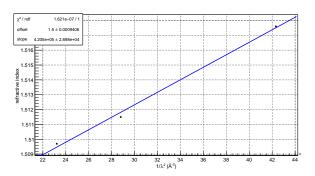


Figura 1: indice di rifrazione

si riporta inoltre anche il grafico dei residui:

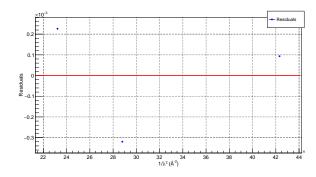


Figura 2: Andamento dei residui

I parametri del fit sono:

$$A = 1.4997 \pm 0.0009$$
 $B = (42 \pm 3) \cdot 10^4 \text{m}^2$

Per $\lambda = 585.3$ nm si ottiene quindi :

$$n(\lambda) = 1.512 \pm 0.001$$
$$\frac{dn}{d\lambda} = (-4.19 \pm 0.03) \cdot 10^{-5} \text{m}^{-1}$$

Aquisizione dati

Calibrazione Prima di procedere con la presa dati si è eseguita una calibrazione dell'apparato; in particolare occorre regolare la posizione della sorgente rispetto all'apertura della fenditura. Il primo passaggio è stato quindi impostare l'apertura della fenditura a $24\mu m$ ed acquisire un primo spettro a lamina disinserita, con il CCD orizzontale. Zoomando sui primi 3/4 picchi dello spettro, saremo in grado di individuare il nostro picco di interesse. Successivamente si è regolata ulteriormente la posizione della sorgente cercando quella che massimizzasse l'intensità e la forma del picco di interesse. Si è quindi fissata la posizione del CCD a 0.93 mm e impostata l'apertura della fenditura a $18\mu m$. Infine si sono regolate le posizioni della lente focale e della lente condensante, scegliendo come posizioni ottimali rispettivamente 15.36 mm e 14.62 mm.

Campo magnetico spento

Dopo la calibrazione si è proseguito con l'acquisizione del primo spettro a campo magnetico spento: dopo aver selezionato il picco di interesse si è inserito la lamina di Lummer-Gerhcker, e, selezionato con i cursori il range dello scanning, si è ruotato il CCD in posizione verticale. Infine si è impostato un tempo di integrazione di 600 ms e si è avviato lo scanning, dopo aver salvato il file nell'opportuna cartella.

Analisi dello spettro Per procedere con l'analisi dello spettro, si è caricata ed eseguita su root la macro ReadZeemanImage.C. Si è ottenuto quindi un istogramma bidimensionale, al quale si è sottratto il segnale di fondo riferendosi alla sua proiezione sull'asse x. Dopo aver sottratto il fondo, migliorando la nitidezza dell'immagine, si sono registrati i limiti della zona del segnale. In questo modo si è quindi ottenuta anche la proiezione di tale regione sull'asse y, in cui si osservano una serie di picchi, di cui si può migliorare la pulizia dell'immagine mediante un rebin.

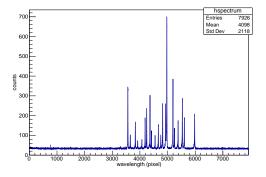


Figura 3: Spettro completo

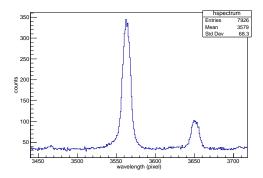


Figura 4: Zoom sulle righe in esame

Analisi dei picchi Per fornire un'analisi estesa dello spettro si è scelto di raggruppare i picchi in 6 terne di picchi consecutivi, e per ciascuna terna l'obiettivo è studiare le spaziature tra i picchi e caratterizzarne in qualche modo la larghezza. In particolare si è scelto di eseguire un fit gaussiano sui picchi per poter individuare con precisione l'ordinata di massimo e per poter dare una stima della larghezza del picco come FWHM.

Riportiamo come esempio il seguente grafico in cui si è scelto di fittare solo uno dei tre picchi per semplicità:

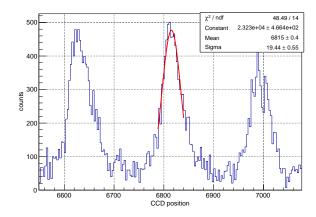


Figura 5: Esempio di fit gaussiano nel caso senza campo magnetico

Si noti il valore del $\chi^{(2)}$ incompatibile con il valore di aspettazione, con compatibilità $\lambda \approx 6.5$. Si è notato che il valore del $\chi^{(2)}$ risulta molto influenzato dalla scelta del range di interpolazione. Alla luce di questa dipendenza, si è cercato di trovare il giusto equilibrio tra una sufficiente larghezza di range e un buon valore di $\chi^{(2)}$, per evitare di fare fit troppo stretti che avrebbero sì migliorato il valore dell'estimatore ma al contempo avrebbero perso informazioni sulla stima della larghezza. Infatti i valori dell'estimatore ottenuti dai vari picchi suggeriscono compatibilità in alcuni casi e non in altri.

Per prima cosa, studiamo l'andamento delle spaziature tra i picchi. Per ciascuna terna, si sono calcolate le due distanze tra i valori medi delle tre gaussiane, considerandone poi la media aritmetica Δx_{ru} , disponendo così di un valore univoco per caiscuna terna. In particolare ci si aspetta per queste distanze un andamento quadratico in funzione della posizione del CCD. Si è effettuata dunque un'interpolazione parabolica, con il fine di stimarne poi l'ordinata di vertice che costituirebbe la distanza minima efficace da usare per la stima corretta dell'angolo di incidenza i. Tale stima corretta di i permette di calcolare $\Delta \lambda_{ru}$ evitando l'approssimnazione $i \approx \pi/2$. Maggiori dettagli sono riportati alla fine di questa sezione. Avendo a disposizione il valore medio della spaziatura tra i picchi per ciascuna terna, si è calcolato il fattore di calibrazione valido per quella regione di spettro, secondo il rapporto

$$F = \frac{\Delta \lambda_{ru}}{\Delta x_{ru}}. (6)$$

Il fattore di calibrazione F rappresenta il fattore di conversione da pixel, ossia l'unità di misura caratteristica del CCD, in metri.

Stima dell'angolo di incidenza sulla lamina di Lummer-Gehrcker Si è accennato in precedenza che i raggi di luce incidono quasi radenti alla lamina. In particolare è possibile effettuare una stima precisa dell'angolo di incidenza. Occorre innanzitutto calcolare l'apertura angolare Δi , pari al rapporto $\Delta x_{ru}/f$, dove f=0.25 m è la distanza focale della lente e il valore di Δx_{ru} è ottenuto dall'ordinata di vertice del fit parabolico, cioè $y_{min}=a-b^2/4c$ nella parabola $y=a+bx+cx^2$.

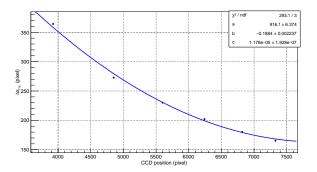


Figura 6: Andamento delle spaziature tra i picchi rispetto alla posizione del CCD

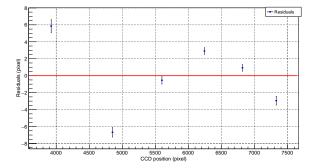


Figura 7: Andamento dei residui

E' evidente che il fit parabolico non può considerarsi ben riuscito: la causa primaria può ricercarsi nelle ridotte dimensioni dell'errore responsabili dell'altissimo valore di $\chi^{(2)}$, ma è anche da considerare che l'ipotesi quadratica è solamente una prima approssimazione: l'andamento delle spaziature dovrebbe coinvolgere ad esempio anche termini sinusoidali. Il grafico dei residui potrebbe in effetti suggerire tale andamento oscillante.

Si precisa che per calcolare l'errore su tale minimo si è tenuto conto, nella propagazione degli errori, dei termini di covarianza tra i parametri del fit parabolico.

Successivamente si applica la relazione

$$\sin(2i) = -\frac{\lambda\sqrt{n^2 - 1}}{d\Delta i} \tag{7}$$

da cui si è potuto ottenere una stima dell'angolo i, in particolare

$$i = (1.568 \pm 0.003)$$
rad = $(89.8 \pm 0.2)^{\circ}$

Il valore è compatibile con l'approssimazione a 90°, e inserendolo in 4 si otterrà la miglior stima del range di lunghezza d'onda efficace usata nel calcolo dei fattori di calibrazione.

In particolare si è ottenuto

$$\Delta \lambda_{ru} = (0.04353 \pm 0.00008) nm$$

$$R_{th}(\lambda) = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda_{Zee}} \approx 36000$$

Per calcolare la risoluzione effettiva dell'apparato sperimentale calcoleremo il rapporto R = λ / $\Delta\lambda$ dove $\Delta\lambda$ è dato dalla FWHM dei fit gaussiani effettuati sui picchi. In particolare la FWHM è stata convertita utilizzando la larghezza del pixel in nm, corrispondente a $0.6875 \cdot 10^{-6}$ m. Eseguendo dunque i vari rapporti per ciascun fit e calcolando infine la media pesata si ottiene

$$R_{sper} = 49015 \pm 637 > R_{th}$$

che è quindi ben compatibile con la richiesta di minima risoluzione necessaria per vedere lo splitting Zeeman con campi magnetici a questo ordine di grandezza.

Riportiamo in grafico le risoluzioni.

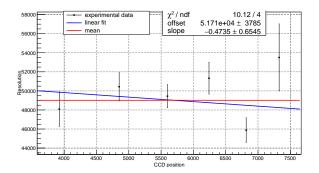


Figura 8: Andamento delle risoluzioni rispetto alla posizione sul CCD

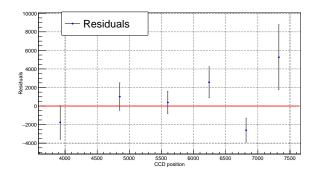


Figura 9: Andamento dei residui

Il fit sulle risoluzioni presenta una compatibilità di $\chi^{(2)}$ data da $\lambda \approx 3$, per cui il fit si può considerare buono, e il valore della pendenza è compatibile con lo zero entro 1σ . Questo autorizza il calcolo della media pesata presentata sopra.

Campo magnetico acceso

Si è proceduto quindi accendendo il campo magnetico: inizialmente si è impostato il valore massimo consentito regolando la corrente in modo da ottenere B= 4950 Gauss. Dopodichè si è eseguita nuovamente una calibrazione della posizione della sorgente, ripetendo i passaggi elencati in precedenza, necessaria poichè la presenza del campo magnetico comporta uno shift dello spettro.

Si è quindi proceduto con l'acquisizione dello spettro inserendo la lamina, ruotando il CCD in verticale, selezionando con i cursori il range e avviando lo scanning, dopo aver un tempo di integrazione pari a 600 ms.

Si ripete quindi la stessa procedura dopo aver modificato il valore della corrente in modo che il campo magnetico abbia un'intensità circa dimezzata rispetto al valore precedente (B= 2610 Gauss).

Campo magnetico massimo

Si procede quindi con l'analisi dello spettro. In particolare, come anticipato nel compendio teorico, ci si aspetta che ogni picco subisca uno splitting dando luogo a due nuove campane, la cui distanza tra i picchi è indicata con $\Delta\lambda_{Zee}$.

Come prima cosa si ripete la procedura di sottrazione del fondo e di rebin della proiezione dell'istogramma bidimensionale sull'asse y, si ottiene quindi lo spettro.

Dunque si individua il range (in pixel) scelto per l'analisi a campo spento e si suddivide nuovamente in sei gruppi, questa volta ciascun gruppo contiene a sua volta sei campane e non tre a causa dell'effetto Zeeman.

Si è scelto di fittare ciascuna coppia di picchi con una somma di gaussiane, come si vede nel seguente grafico:

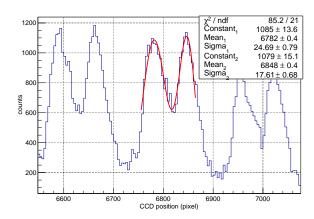


Figura 10: Esempio di fit gaussiano nel caso con campo magnetico B= 4950 Gauss

Ripetuto questo tipo di interpolazione per le coppie di picchi splittati, si è calcolata di volta in volta la distanza in pixel Δx_{Zee} come la differenza tra le ascisse dei centri delle due gaussiane. Tale differenza corrisponde in realtà a due volte lo splitting fisico, per via della configurazione dell'apparato che sopprime la riga centrale.

Riportiamo di seguito un plot dei rapporti $\Delta x_{Zee}/\Delta x_{ru}$, usando le Δx_{ru} calcolate nel caso a campo spento, rispetto alla posizione sul CCD: vediamo come tale quantità resti costante.

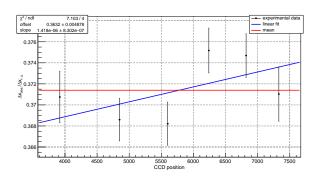


Figura 11: Andamento del rapporto $\Delta x_{Zee}/\Delta x_{ru}$

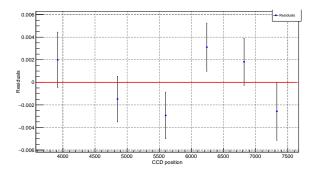


Figura 12: Andamento dei residui

La pendenza della retta con cui si è fittata la distribuzione dei rapporti è effettivamente compatibile con lo zero entro 2σ . Questo autorizza il calcolo della media pesata, per cui la miglior stima del rapporto in questione è data da

$$\frac{\Delta x_{Zee}}{\Delta x_{ru}} = 0.3714 \pm 0.0009$$

Mostriamo anche un grafico equivalente con l'andamento di $\Delta\lambda_{Zee}$, ossia Δx_{Zee} opportunamente convertito con il fattore F caratteristico della relativa regione dello spettro.

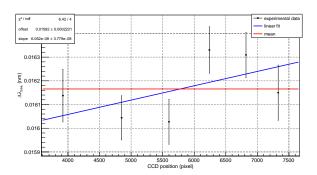


Figura 13: Andamento dello shifting Zeeman

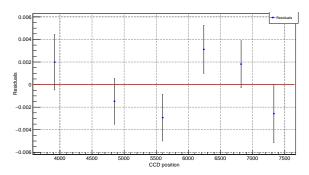


Figura 14: Andamento dei residui

Da cui si ricava per media pesata la miglior stima dello shifting Zeeman

$$\Delta \lambda_{Zee} = (1.616 \pm 0.004) \cdot 10^{-2} nm$$

che corrisponde al valore del rapporto precedentemente fornito moltiplicato per $\Delta \lambda_{ru}$.

Si dispone dunque di tutti gli elementi per calcolare finalmente il fattore di Landé. In particolare

$$\Delta E_{Zee} = g\mu_B B \tag{8}$$

dove μ_B è il magnetone di Bohr. Dal momento che $\Delta E = h\Delta\nu = hc\Delta(1/\lambda) = (hc/\lambda^2)\Delta\lambda$, allora vale

$$g = \frac{hc}{\mu_B B \lambda^2} \frac{\Delta \lambda_{Zee}}{2} \tag{9}$$

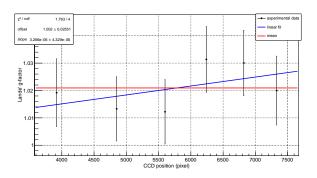


Figura 15: Andamento del fattore giromagnetico

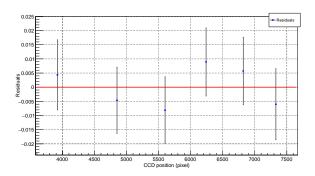


Figura 16: Andamento dei residui

Si vede subito che la pendenza del fit lineare è compatibile con lo zero entro 1σ .

Si presenta dunque il fattore g ottenuto dal $\Delta \lambda_{zee}$ pesato.

$$g = 1.02 \pm 0.01$$

che risulta compatibile con il valore atteso g = 1. Lo scarto corrisponde infatti circa a 2σ .

Campo magnetico dimezzato

Si ripete un'analisi del tutto analogo anche per il caso con campo magnetico di intensità dimezzata.

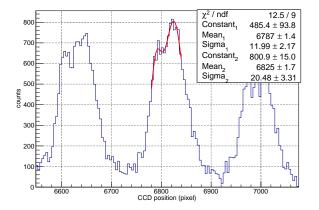


Figura 17: Esempio di fit gaussiano nel caso con campo magnetico B= 2610 Gauss

Riportiamo di nuovo un plot dei rapporti $\Delta x_{Zee}/\Delta x_{ru}$, usando le Δx_{ru} calcolate nel caso a campo spento, rispetto alla posizione sul CCD: vediamo come tale quantità resti costante.

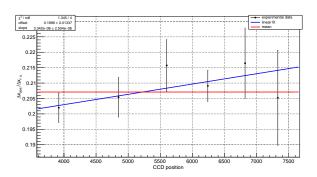


Figura 18: Andamento del rapporto $\Delta x_{Zee}/\Delta x_{ru}$

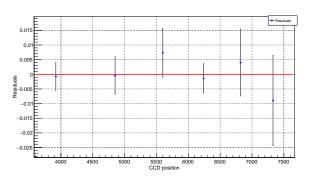


Figura 19: Andamento dei residui

La pendenza della retta con cui si è fittata la distribuzione dei rapporti è effettivamente compatibile con lo zero entro 2σ . Questo autorizza il calcolo della media pesata, per cui la miglior stima del rapporto in questione è data da

$$\frac{\Delta x_{Zee}}{\Delta x_{ru}} = 0.207 \pm 0.003$$

Mostriamo anche un grafico equivalente con l'andamento di $\Delta\lambda_{Zee}$, ossia Δx_{Zee} opportunamente convertito con il fattore F caratteristico della relativa regione dello spettro.

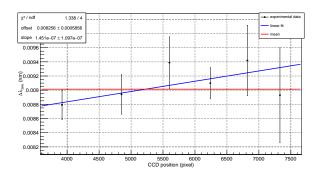


Figura 20: Andamento dello shifting Zeeman

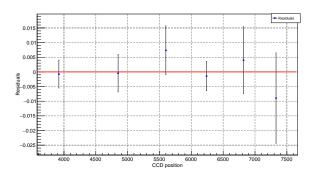


Figura 21: Andamento dei residui

Da cui si ricava per media pesata la miglior stima dello shifting Zeeman

$$\Delta \lambda_{Zee} = (0.0090 \pm 0.0001) nm$$

che corrisponde al valore del rapporto precedentemente fornito moltiplicato per $\Delta \lambda_{ru}$.

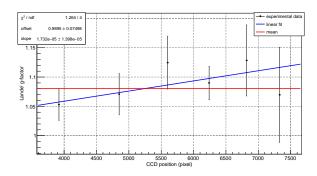


Figura 22: Andamento del fattore giromagnetico

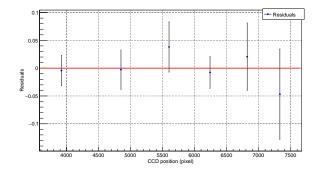


Figura 23: Andamento dei residui

Si vede subito che la pendenza del fit lineare è compatibile con lo zero entro 1σ .

Si presenta dunque il fattore g ottenuto dal $\Delta \lambda_{zee}$ pesato.

$$g = 1.08 \pm 0.02$$

che presenta uno scarto di circa 4σ dal valore atteso, segno di una pessima compatibilità.

Stima complessiva di g

Al termine dell'analisi è quindi giunti a due stime separate di g, una proveniente dall'analisi a campo massimo e una dall'analisi a campo dimezzato. Entrambe le stime di g si possono considerare compatibili con il valore teorico, alla luce degli scarti in σ calcolati precedentemente. La compatibilità tra i due valori sperimentali, $\lambda=2.8$, ci permette il calcolo della media pesata:

$$g = 1.036 \pm 0.009$$
 $\sigma_{\%} = 0.88\%$

Conclusioni

Il fattore giromagnetico calcolato nel caso del campo ridotto risulta impreciso e distante circa 4σ dal valore atteso, come già precedentemente espresso. Pertanto la media dei due valori esposta poco sopra risulta difettata da tale contributo.

Alla luce di ciò si è scelto di considerare come miglior stima del valor vero il risultato figlio dell'analisi a campo massimo. Presentiamo dunque la nostra stima conclusiva

$$g = 1.02 \pm 0.01$$
 $\sigma_{\%} = 1.04\%$

La stima risulta soddisfare l'aspettativa teorica entro i 2σ . L'esclusione del fattore di campo dimezzato si può imputare a difetti strumentali, oltre che all'imprecisione legata a uno splitting poco definito nel caso di campo magnetico tenue, che rende lacunoso il fit dei picchi.

A Appendici

A.1 Costruzione dell'errore sulle misure

A.2 Tabella delle compatibilità

$$\lambda = \frac{|a-b|}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}} \quad \begin{array}{c} & \text{Compatibilità} \\ \hline 0 \leq \lambda < 1 & \text{Ottima} \\ 1 \leq \lambda < 2 & \text{Buona} \\ 2 \leq \lambda < 3 & \text{Accettabile} \\ 3 \leq \lambda < 5 & \text{Pessima} \\ \lambda \geq 5 & \text{Non compatibile} \end{array}$$

Tabella 1: indicazioni lettura compatibilità

A.3 Scelta dei ranges e principali valori

A.3.1 Campo spento

set	Range(pixel)	c (pixel)	F (nm/pixel)
1	3330 - 4400	364.2 ± 0.8	$0.0001195 \pm 5 \cdot 10^{-7}$
2	4400 - 5250	272.808 ± 0.6	$0.0001595 \pm 7 \cdot 10^{-7}$
3	5250 - 5950	230.143 ± 0.5	$0.00018913 \pm 8 \cdot 10^{-7}$
4	5950 - 6550	202.179 ± 0.4	$0.0002153 \pm 9 \cdot 10^{-7}$
5	6550 - 7075	180.317 ± 0.4	$0.000241 \pm 1 \cdot 10^{-6}$
6	7075 - 7600	165.349 ± 0.4	$0.000264 \pm 1 \cdot 10^{-6}$

A.3.2 Campo acceso massimo

	set	Range (pixcel)	$\Delta \lambda_{Zee}$ (nm)	g
ĺ	1	3330 - 4400	$0.0161 \pm 1 \cdot 10^{-4}$	1.02 ± 0.01
	2	4400 - 5250	$0.01604 \pm 9 \cdot 10^{-5}$	1.01 ± 0.01
İ	3	5250 - 5950	$0.01602 \pm 9 \cdot 10^{-5}$	1.01 ± 0.01
İ	4	5950 - 6550	$0.0163 \pm 1 \cdot 10^{-4}$	1.03 ± 0.01
İ	5	6550 - 7075	$0.0163 \pm 1 \cdot 10^{-4}$	1.03 ± 0.01
İ	6	7075 - 7600	$0.0161 \pm 1 \cdot 10^{-4}$	1.02 ± 0.01

A.3.3 Campo acceso dimezzato

set	Range (pixcel)	$\Delta \lambda_{Zee} (\mathrm{nm})$	g
1	3330 - 4400	0.009 ± 0.0002	1.05 ± 0.03
2	4400 - 5250	0.0089 ± 0.0003	1.07 ± 0.04
3	5250 - 5950	0.0094 ± 0.0004	1.12 ± 0.05
4	5950 - 6550	0.0091 ± 0.0002	1.09 ± 0.03
5	6550 - 7075	0.0094 ± 0.0005	1.13 ± 0.06
6	7075 - 7600	0.0089 ± 0.0007	1.07 ± 0.08