

## 第一讲：函数的切线问题

### 题型一、在点问题

1. 求  $f(x) = \ln x$  在  $x=1$  处的切线方程？

2. 求  $f(x) = e^x$  在  $(0,1)$  处的切线方程？

3. 求  $f(x) = \sin x$  在  $(0,0)$  处的切线方程？

4. 已知函数  $y = f(x)$  的图像在点  $M(1, f(1))$  处的切线方程是  $y = \frac{1}{2}x + 2$ , 则  $f(1) + f'(1) =$ \_\_\_\_\_.

5. 直线  $y = kx + 1$  与曲线  $y = x^3 + ax + b$  相切于点  $A(1,3)$ , 则  $2a + b$  的值为\_\_\_\_\_.

6. (2009 安徽) 已知函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上满足  $f(x) = 2f(2-x) - x^2 + 8x - 8$ , 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程是\_\_\_\_\_.

7. 设曲线  $y = x^{n+1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 在点  $(1,1)$  处的切线与  $x$  轴的交点的横坐标为  $x_n$ , 令  $a_n = \lg x_n$ , 则  $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{99}$  的值为\_\_\_\_\_.

8.(2011 江苏)在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知点  $P$  是函数  $f(x) = e^x (x > 0)$  的图像上的动点, 该图像在  $P$  处的切线  $l$  交  $y$  轴于点  $M$ , 过点  $P$  作  $l$  的垂线交  $y$  轴于点  $N$ , 该线段  $MN$  的中点的纵坐标为  $t$ , 则  $t$  的最大值是\_\_\_\_\_.

9. (2014 安徽) 若直线  $l$  与曲线  $C$  满足下列两个条件:

- (1) 直线  $l$  在点  $P(x_0, y_0)$  处与曲线  $C$  相切;
- (2) 曲线  $C$  在点  $P$  附近位于直线  $l$  的两侧, 则称直线  $l$  在点  $P$  处“切过”曲线  $C$ .

下列命题正确的是\_\_\_\_\_.

- ①直线  $l: y = 0$  在点  $P(0,0)$  处“切过”曲线  $C: y = x^3$
- ②直线  $l: x = -1$  在点  $P(-1,0)$  处“切过”曲线  $C: y = (x+1)^2$
- ③直线  $l: y = x$  在点  $P(0,0)$  处“切过”曲线  $C: y = \sin x$
- ④直线  $l: y = x$  在点  $P(0,0)$  处“切过”曲线  $C: y = \tan x$
- ⑤直线  $l: y = x - 1$  在点  $P(1,0)$  处“切过”曲线  $C: y = \ln x$

10. 已知曲线  $y = \frac{1}{e^x + 1}$ , 则曲线的切线的斜率取得最小值时的直线方程为 ( )

- A.  $x + 4y - 2 = 0$       B.  $x - 4y + 2 = 0$   
C.  $4x + 2y - 1 = 0$       D.  $4x - 2y - 1 = 0$

11. (2016 山东理) 若函数  $y = f(x)$  的图像上存在两点, 使得函数的图像在这两点处的切线互相垂直, 则称  $y = f(x)$  具有  $T$  性质. 下列函数中具有  $T$  性质的是 ( )

- A.  $y = \sin x$       B.  $y = \ln x$       C.  $y = e^x$       D.  $y = x^3$

12. (2016 四川) 设直线  $l_1, l_2$  分别是函数  $f(x) = \begin{cases} -\ln x, 0 < x < 1 \\ \ln x, x > 1 \end{cases}$  图象上点  $P_1, P_2$  处的切线,  $l_1, l_2$  垂直相交于点  $P$ , 且  $l_1, l_2$  分别于  $y$  轴相交于点  $A, B$ , 则  $\triangle PAB$  的面积取值范围是 ( )
- A.  $(0, 1)$       B.  $(0, 2)$       C.  $(0, +\infty)$       D.  $(1, +\infty)$

## 题型二、过点问题

13. 过原点作函数  $f(x) = e^x$  的切线, 求切线方程?

14. 过原点作函数  $f(x) = \ln x$  的切线, 求切线方程?

15. 已知函数  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 4$ .

(1) 求曲线  $f(x)$  在点  $(2, f(2))$  处的切线方程;

(2) 求经过点  $A(2, -2)$  的曲线  $f(x)$  的切线方程.

16. 已知曲线  $C: f(x) = x^3 - ax + a$ , 若过曲线  $C$  外一点  $A(1, 0)$  引曲线  $C$  的两条切线, 且它们的倾斜角互补, 则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

17. 直线  $y = \frac{1}{2}x + b$  是曲线  $y = \ln x (x > 0)$  的一条切线, 则实数  $b =$ \_\_\_\_\_.

18.(2009 全国)已知直线  $y = x + 1$  与曲线  $y = \ln(x + a)$  相切, 则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

19.若直线  $y = x$  是曲线  $y = x^3 - 3x^2 + ax$  的切线, 求  $a$  的值.

20.(2010 清华)设函数  $f(x) = e^{ax} (a > 0)$ . 过点  $P(a, 0)$  且平行于  $y$  轴的直线与  $f(x)$  的交点为  $Q$ ,  $f(x)$  过点  $Q$  的切线交  $x$  轴于点  $R$ , 则  $\triangle PQR$  的面积的最小值是 ( )

- A. 1    B.  $\frac{\sqrt{2}e}{2}$     C.  $\frac{e}{2}$     D.  $\frac{e^2}{4}$

### 题型三、距离最值问题

21.已知函数  $f(x) = x^2 - \ln x$ , 求函数  $f(x)$  上的点到直线  $x - y - 2 = 0$  的最小距离\_\_\_\_\_.

22.(2012 全国新课标)设点  $P$  在曲线  $y = \frac{1}{2}e^x$  上, 点  $Q$  在曲线  $y = \ln(2x)$  上, 则  $|PQ|$  的最小值为 ( )

- A.  $1 - \ln 2$     B.  $\sqrt{2}(1 - \ln 2)$     C.  $1 + \ln 2$     D.  $\sqrt{2}(1 + \ln 2)$

23.若实数  $a, b, c, d$  满足  $(b + a^2 - 3\ln a)^2 + (c - d + 2)^2 = 0$ , 则  $(a - c)^2 + (b - d)^2$  的最小值为 ( )

- A.  $\sqrt{2}$     B. 8    C.  $2\sqrt{2}$     D. 2

24. 已知不等式  $(m-n)^2 + (m - \ln n + \lambda)^2 \geq 2$  对任意的  $m, n \in (0, +\infty)$ , 则  $\lambda$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

#### 题型四、公切线问题

25. 已知定义在正实数集上的函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2ax$ ,  $g(x) = 3a^2 \ln x + b$ , 其中  $a > 0$ . 设两曲线  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  有公共点, 且在该点处的切线相同.

(1) 用  $a$  表示  $b$ , 并求  $b$  的最大值;

26. (2016 全国甲卷) 若直线  $y = kx + b$  是曲线  $y = \ln x + 2$  的切线, 也是  $y = \ln(x+1)$  的切线,  $b =$  \_\_\_\_\_.

27. (2009 江西) 若存在过点  $(1, 0)$  的直线与曲线  $y = x^3$  和  $y = ax^2 + \frac{15}{4}x - 9$  都相切, 则  $a$  等于 ( )

- A.  $-1$  或  $-\frac{25}{64}$     B.  $-1$  或  $\frac{21}{4}$     C.  $-\frac{7}{4}$  或  $-\frac{25}{64}$     D.  $-\frac{7}{4}$  或  $7$

28. 设函数  $f(x) = p(x - \frac{1}{x}) - 2\ln x$ ,  $g(x) = \frac{2e}{x}$ , 若直线  $l$  与函数  $f(x)$ ,  $g(x)$  都相切, 且与函数  $f(x)$  的图像相切于点  $(1, 0)$ , 求  $p$  的值.

#### 题型五、切线条数问题

29.(2014 大连二模)过点  $A(2,1)$  作曲线  $f(x)=x^3-3x$  的切线最多有 ( )

- A. 3条      B. 2条      C. 1条      D. 0条

30.已知函数  $f(x)=x^3-3x$ , 过点  $A(1,m)(m \neq -2)$  可作  $f(x)$  的三条切线, 则实数  $m$  的取值范围是

- A.  $(-1,1)$       B.  $(-2,3)$       C.  $(-1,2)$       D.  $(-3,-2)$

31.已知函数  $f(x)=x^3-x$ .

- (1) 求曲线  $y=f(x)$  在点  $M(t, f(t))$  处的切线方程;  
(2) 设  $a>0$ , 如果过点  $(a,b)$  可作曲线  $y=f(x)$  的三条切线, 证明:  $-a < b < f(a)$ .

32.已知函数  $f(x)=a(x-\frac{1}{x})-b\ln x(a, b \in R)$ ,  $g(x)=x^2$ .

(3) 若  $b=2$ , 试探究函数  $f(x)$  与  $g(x)$  的图象在其公共点处是否存在公切线, 若存在, 研究  $a$  的个数; 若不存在, 请说明理由.

33.已知函数  $f(x)=\frac{1}{2}x^2+m\ln x+x$ .

- (1) 求  $f(x)$  的单调区间;  
(2) 令  $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$ , 试问过点  $P(1,3)$  存在多少条直线与曲线  $g(x)$  相切? 并说明理由.

作业:

1. 已知函数  $f(x)$  在  $R$  上满足  $f(2-x) = 2x^2 - 7x + 6$ , 则曲线  $y = f(x)$  在  $(1, f(1))$  处的切线方程是\_\_\_\_\_.

2. 已知点  $A(1, 2)$  在函数  $f(x) = ax^3$  的图像上, 则过点  $A$  的曲线  $f(x)$  的切线方程是 ( )

A.  $6x - y - 4 = 0$

B.  $x - 4y + 7 = 0$

C.  $6x - y - 4 = 0$  或  $x - 4y + 7 = 0$

D.  $6x - y - 4 = 0$  或  $3x - 2y + 1 = 0$

3. 若实数  $a, b, c, d$  满足  $\frac{a^2 - 2\ln a}{b} = \frac{3c - 4}{d} = 1$ , 则  $(a - c)^2 + (b - d)^2$  的最小值为\_\_\_\_\_.

4. 已知函数  $f(x) = ae^x + x^2$ ,  $g(x) = \sin \frac{\pi x}{2} + bx$ , 直线  $l$  与曲线  $y = f(x)$  切于点  $(0, f(0))$ , 且与曲线  $y = g(x)$  切于点  $(1, g(1))$ . 求  $a, b$  的值和直线  $l$  的方程.



## 第二讲：函数单调性含参讨论

### 题型一、导后“一次”型

1. 已知  $f(x) = ax - \ln(x+1) - 1$ , 求  $f(x)$  的单调区间.

2. 已知  $f(x) = ax - (a+1)\ln(x+1)$ ,  $a \geq -1$ , 求  $f(x)$  的单调区间.

3. 已知函数  $f(x) = e^x - ax$ , 讨论函数的单调性.

4. 已知函数  $f(x) = e^x - ax$ , 讨论函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上的单调性.

5. 已知函数  $f(x) = \ln(2-x) + a(x-2) (a \in \mathbb{R})$ , 求  $f(x)$  的单调区间.

## 题型二、导后“二次型”

6. 已知函数  $f(x) = \ln x + x^2 - ax (a \in \mathbb{R})$ , 求  $f(x)$  的单调区间.

7. (2014 山东文) 设函数  $f(x) = a \ln x + \frac{x-1}{x+1}$  其中  $a$  为常数.

(I) 若  $a = 0$ , 求曲线  $f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程.

(II) 讨论函数  $f(x)$  的单调性.

8. 已知函数  $f(x) = x^2 + b \ln(x+1)$ ,  $b \neq 0$ , 讨论函数  $f(x)$  的单调性.

9. 已知函数  $f(x) = m \ln(x+2) + \frac{1}{2}x^2 + 1$ , 讨论函数  $f(x)$  的单调性.

10. 求函数  $f(x) = (1-a) \ln x - x + \frac{ax^2}{2}$  的单调区间.

11.(2010 山东理)已知函数  $f(x) = \ln x - ax + \frac{1-a}{x} - 1 (a \in R)$ .

(1) 当  $a \leq \frac{1}{2}$  时, 讨论  $f(x)$  的单调性;

12.(2016 新课标 I 文)已知函数  $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

13.(2016 山东理)已知  $f(x) = a(x - \ln x) + \frac{2x-1}{x^2}, a \in R$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

14. 已知函数  $f(x) = (ax^2 - x)\ln x - \frac{1}{2}ax^2 + x$ , 讨论  $f(x)$  的单调性.

15. (2017 山东) 已知函数  $f(x) = x^2 + 2\cos x$ ,  $g(x) = e^x(\cos x - \sin x + 2x - 2)$ .

(1) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(\pi, f(\pi))$  处的切线方程;

(2) 令  $h(x) = g(x) - af(x)$  ( $a \in R$ ), 讨论  $h(x)$  的单调性并判断有无极值, 有极值时求出极值.

### 题型三、导后求导型

16. 已知函数  $f(x) = e^x - x^2$ , 求函数的单调性.

17. 函数  $f(x) = \frac{\ln x + 1}{e^x}$ , 求函数的单调性.

18. 已知函数  $f(x) = \ln^2(x+1) - \frac{x^2}{1+x}$ , 求函数  $f(x)$  的单调区间.

**作业：**

1. 已知函数  $f(x) = e^{ax} + 3x$ ，求  $f(x)$  的单调区间.

2. 已知函数  $f(x) = ax^2 + bx - \ln x$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )

(1) 设  $a \geq 0$ ，求  $f(x)$  的单调区间

3. 已知函数  $f(x) = 2\ln x + \frac{1}{2}ax^2 - (2a+1)x$ ，讨论  $f(x)$  的单调性

4. (2015 新课标 2 理) 设函数  $f(x) = e^{mx} + x^2 - mx$ .

(1) 证明:  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  单调递减, 在  $(0, +\infty)$  单调递增.

### 第三讲：已知单调性求参数

1. 若  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + b\ln(x+2)$  在  $(-1, +\infty)$  上是减函数, 则  $b$  的取值范围\_\_\_\_\_.

- A.  $[-1, +\infty)$     B.  $(-1, +\infty)$     C.  $(-\infty, -1)$     D.  $(-\infty, -1]$

2. (2015 重庆) 设函数  $f(x) = \frac{3x^2 + ax}{e^x}$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

(II) 若  $f(x)$  在  $[3, +\infty)$  上为减函数, 求  $a$  的取值范围.

3. (2009 山东) 已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + bx^2 + x + 3$ , 其中  $a \neq 0$ .

(2) 已知  $a > 0$ , 且  $f(x)$  在区间  $(0, 1]$  上单调递增, 试用  $a$  表示出  $b$  的取值范围.

4. 已知函数  $f(x) = (2ax - x^2)e^{ax}$ , 其中  $a \geq 0$ .

(1) 若  $a = 1$ , 求函数  $f(x)$  的极值点;

(2) 若函数  $f(x)$  在区间  $(\sqrt{2}, 2)$  上单调递减, 求实数  $a$  的取值范围.

5. 已知函数  $f(x) = \ln(ax+1) + x^3 - x^2 - ax$  在  $[1, +\infty)$  上为增函数, 求  $a$  的取值范围.

6. 已知函数  $f(x) = \ln x + (x-a)^2$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , 若函数  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上存在单调递增区间, 求实数  $a$  的取值范围.

7. 已知函数  $f(x) = \frac{mx^2}{3} + ax^2 + (1-b^2)x$ ,  $m, a, b \in \mathbb{R}$ . 当  $a=1, b=\sqrt{2}$  时, 函数  $f(x)$  在  $(2, +\infty)$  上存在单调递增区间, 求  $m$  的取值范围.

8. 已知函数  $f(x) = x - ax^2 - \ln x$  在定义域上是单调函数, 求  $a$  的取值范围.

9. (2009 浙江) 已知函数  $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + (a+5)x - 1$  在区间  $(0, 3)$  上不单调, 求  $a$  的范围.

10. 已知函数  $f(x) = -2\ln x + 2x - 3$ , 对任意的  $t \in [1, 2]$ , 函数  $g(x) = x^3 + x^2 \left[ f'(x) + \frac{m}{2} \right]$  在区间  $(t, 3)$  上总不是单调函数, 求  $m$  的取值范围.

11. (2009 全国) 已知函数  $f(x) = (x^3 + 3x^2 + ax + b)e^{-x}$ .

(1) 若  $a=b=-3$ , 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若  $f(x)$  在  $(-\infty, \alpha), (2, \beta)$  内单调递增, 在  $(\alpha, 2), (\beta, +\infty)$  内单调递减, 证明:

$\beta - \alpha > 6$ .

**作业:**

1. 若函数  $f(x) = ax^3 - 3xe^x + 1$  在  $(0,1]$  上是减函数, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

2. 已知  $f(x) = (ax^2 + x)e^x$  在  $[-1,1]$  上是单调递增函数, 求  $a$  的取值范围.

3. 已知  $f(x) = (x^2 - 2ax)e^x$  在  $[-1,1]$  上是单调函数, 求  $a$  的取值范围.



## 第四讲：利用导数研究函数的极值最值问题

### 题型一、极值最值的概念

1. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(b-1)x^2 + b^2x$  在  $x=1$  处取得极值，求  $b$  的值.

2. 已知函数  $f(x) = \frac{ax}{x^2+b}$  在  $x=1$  处取得极值 2，求函数  $f(x)$  的解析式.

3. (2017 全国 II) 若  $x=-2$  是函数  $f(x) = (x^2 + ax - 1)e^{x-1}$  的极值点，则  $f(x)$  的极小值为 ( )

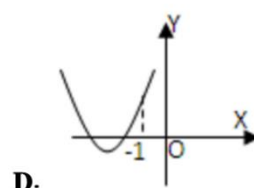
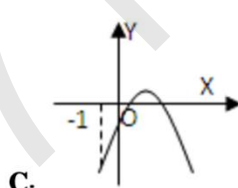
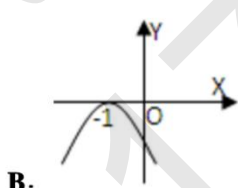
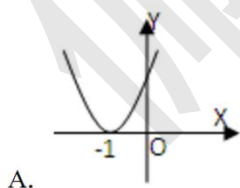
A. -1

B.  $-2e^{-3}$

C.  $5e^{-3}$

D. 1

4. (2011 浙江文) 设函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ )，若  $x=-1$  为函数  $f(x)e^x$  的一个极值点，则下列图象不可能为  $y=f(x)$  的图象是 ( )



5. (2013 全国 II) 已知函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ，下列结论中错误的是 ( )

A.  $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0$

B. 函数  $y = f(x)$  的图象是中心对称图形

C. 若  $x_0$  是  $f(x)$  的极小值点，则  $f(x)$  在区间  $(-\infty, x_0)$  上单调递减

D. 若  $x_0$  是  $f(x)$  的极值点，则  $f'(x_0) = 0$

6. (2013 浙江) 设函数  $f(x)=(e^x-1)(x-1)^k$  ( $k=1,2$ ) 则 ( )

- A. 当  $k=1$  时,  $f(x)$  在  $x=1$  处取到极小值
- B. 当  $k=1$  时,  $f(x)$  在  $x=1$  处取到极大值
- C. 当  $k=2$  时,  $f(x)$  在  $x=1$  处取到极小值
- D. 当  $k=2$  时,  $f(x)$  在  $x=1$  处取到极大值

7. 函数  $y=2x^3-3x^2-12x+5$  在  $[0,3]$  上的最大值、最小值分别是\_\_\_\_\_.

8. (2011 湖南) 设直线  $x=t$  与函数  $f(x)=x^2$ ,  $g(x)=\ln x$  的图象分别交于点  $M, N$ , 则当  $|MN|$  达到最小时  $t$  的值为 ( )

- A. 1
- B.  $\frac{1}{2}$
- C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9. 已知直线  $y=a$  分别与函数  $y=e^{x+1}$  和  $y=\sqrt{x}-1$  交于  $A, B$  两点, 则  $A, B$  之间的最小距离是\_\_\_\_\_.

10. 设函数  $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2ax$ , 其中  $0 < a < 2$ , 若函数  $f(x)$  在  $[1,4]$  上的最小值为  $-\frac{16}{3}$ , 求函数  $f(x)$  在  $[1,4]$  上的最大值.

## 题型二、已知极值最值问题求参

11. 已知函数  $f(x) = \ln x + \frac{a}{x}$ .

(2) 若函数  $f(x)$  在  $[1, e]$  上的最小值是  $\frac{3}{2}$ , 求  $a$  的值.

12. 已知函数  $f(x) = x - \frac{1}{2}ax^2 - \ln(1+x)$ . 若  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上的最大值是 0, 求  $a$  的取值范围.

13. 已知函数  $f(x) = [3x^2 + (2a-6)x + 12 - a] \cdot e^x$  有极大值和极小值, 求实数  $a$  的取值范围.

14. 若函数  $f(x) = x^3 - 3bx + 3b$  在  $(0, 1)$  内有极小值, 则  $b$  的范围是\_\_\_\_\_.

15. 若函数  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1$  有两个极值点  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 \in [-2, -1]$ ,  $x_2 \in [1, 2]$ , 则  $f(-1)$  的取值范围是 ( )

- A.  $[3, 12]$       B.  $\left[-\frac{3}{2}, 6\right]$       C.  $\left[-\frac{3}{2}, 3\right]$       D.  $\left[-\frac{3}{2}, 12\right]$

16. (2013 湖北文) 已知函数  $f(x) = x(\ln x - ax)$  有两个极值点, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, 0)$       B.  $(0, \frac{1}{2})$       C.  $(0, 1)$       D.  $(0, +\infty)$

17. (2013 湖北理) 已知  $a$  为常数, 函数  $f(x) = x(\ln x - ax)$  有两个极值点  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), 则 ( )

- A.  $f(x_1) > 0, f(x_2) > -\frac{1}{2}$       B.  $f(x_1) < 0, f(x_2) < -\frac{1}{2}$   
C.  $f(x_1) > 0, f(x_2) < -\frac{1}{2}$       D.  $f(x_1) < 0, f(x_2) > -\frac{1}{2}$

18. (2011 全国 II) 已知函数  $f(x) = x^3 + 3ax^2 + (3-6a)x + 12a - 4$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

(1) 证明: 曲线  $y = f(x)$  在  $x = 0$  处的切线过点  $(2, 2)$  ;

(2) 若  $f(x)$  在  $x = x_0$  处取得最小值,  $x_0 \in (1, 3)$ , 求  $a$  的取值范围.

19. (2009 全国 II 理) 设  $f(x) = x^2 + a \ln(1+x)$  有两个极值点  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ .

(1) 求实数  $a$  的范围;

(2) 证明:  $f(x_2) > \frac{1-2\ln 2}{4}$ .

20. (2007 全国) 设函数  $f(x) = \ln(x+a) + x^2$ .

(1) 若当  $x = -1$  时,  $f(x)$  取得极值, 求  $a$  的值, 并讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $f(x)$  存在极值, 求  $a$  的取值范围, 并证明所有极值之和大于  $\ln \frac{e}{2}$ .

21. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + a \ln x$  ( $a > 0$ ), 若函数  $f(x)$  存在两个极值点  $x_1, x_2$ , 求证:  $f(x_1) + f(x_2) > \frac{-3-2\ln 2}{4}$ .

22. (2011 湖南文) 设函数  $f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x$  ( $a \in R$ ).

(I) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(II) 若  $f(x)$  有两个极值点  $x_1$  和  $x_2$ , 记过点  $A(x_1, f(x_1))$ ,  $B(x_2, f(x_2))$  的直线的斜率为  $k$ , 问: 是否存在  $a$ , 使得  $k = 2 - a$ ? 若存在, 求出  $a$  的值, 若不存在, 请说明理由.

23. 已知函数  $f(x) = ax^2 - 2x + \ln x$  有两个极值点, 证明:  $f(x)$  的极小值小于  $-\frac{3}{2}$ .

24.(2015 郑州模拟)已知函数  $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 + x, a \in R$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(2) 是否存在实数  $a$ ,使得函数  $f(x)$  的极值大于 0,若存在,求  $a$  的取值范围;若不存在,请说明理由.

25.已知函数  $f(x) = (x^2 + ax + a)e^{-x}, a \in R$ .

(1) 当  $a = 0$  时, 求  $f'(2)$  ;

(2) 若  $f(x)$  在  $x = 0$  时取得极小值, 试确定  $a$  的取值范围 ;

(3) 在 (2) 的条件下, 设由  $f(x)$  的极大值所构成的函数为  $g(a)$ , 将  $a$  换元为  $x$ , 试判断曲线  $y = g(x)$  是否能与直线  $3x - 2y + m = 0$  ( $m$  为确定的常数) 相切, 并说明理由.

### 作业：

1. 已知函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - a^2 - 7a$  在  $x=1$  处取得极大值 10，则  $a+b =$  \_\_\_\_\_.

2. 已知  $f(x) = e^x$ ， $g(x) = \ln x$ ，若  $f(t) = g(s)$ ，则  $s-t$  取得最小值时， $f(t)$  所在的区间是 ( )

- A.  $(\ln 2, 1)$       B.  $(\frac{1}{2}, \ln 2)$       C.  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{e})$       D.  $(\frac{1}{e}, \frac{1}{2})$

3. (2014 湖南) 已知常数  $a > 0$ ，函数  $f(x) = \ln(1+ax) - \frac{2x}{x+2}$ . 若  $f(x)$  存在两个极值点，且  $f(x_1) + f(x_2) > 0$ ，求  $a$  的取值范围.

4. (2014 山东) 设函数  $f(x) = \frac{e^x}{x^2} - k(\frac{2}{x} + \ln x)$  ( $k$  为常数)

(I) 当  $k \leq 0$  时，求函数  $f(x)$  的单调区间；

(II) 若函数  $f(x)$  在  $(0, 2)$  内存在两个极值点，求  $k$  的取值范围.