另一种思考

2021-09-25

1. 目标函数推导

1.1. 两种距离

函数距离：

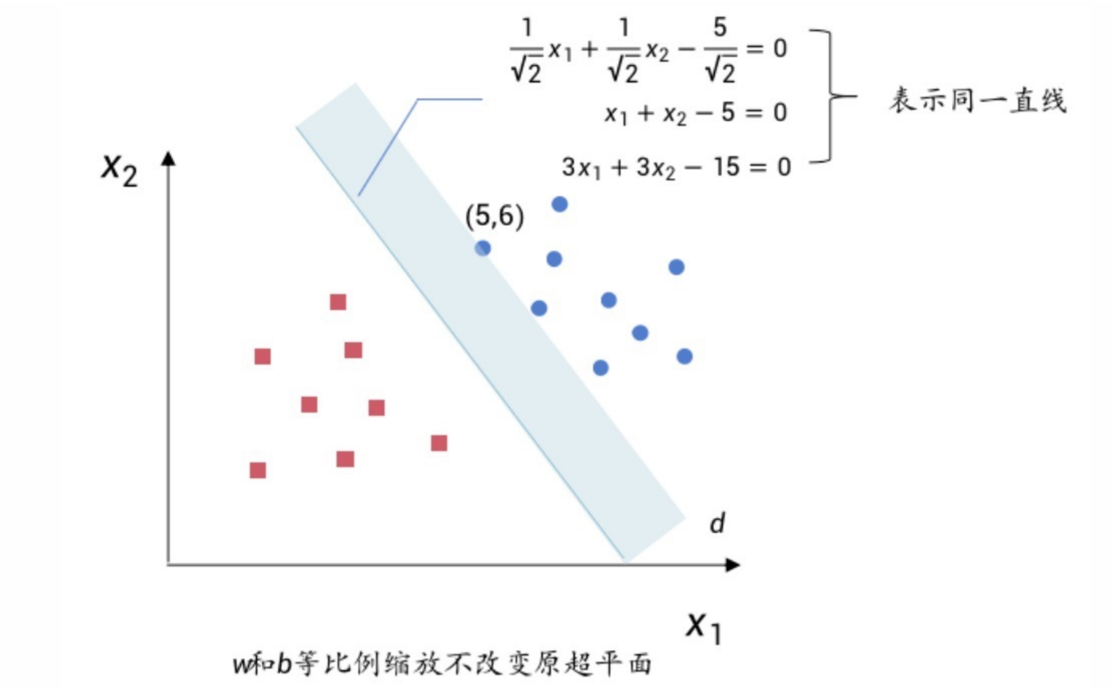
$$y_i(w^Tx_i+b) \tag{1}$$

几何距离：

$$\frac{y_i(w^Tx_i+b)}{\|w\|_2} \tag{2}$$

性质：同比例缩放(w,b)仅影响函数间隔，不会影响几何间隔。

等比例缩放示例：



1.2. 定义优化目标

求解目标：最小的几何距离最大化

$$\begin{aligned} &\max_{w,b} \left\{ \min_i \frac{y_i(w^T x_i + b)}{\|w\|_2} \right\} \\ \Leftrightarrow &\max_{w,b} \left\{ \frac{1}{\|w\|_2} \min_i y_i(w^T x_i + b) \right\} \end{aligned} \tag{3}$$

优化目标的含义：对不同的(w,b)，比较最小几何距离，然后选择使得最小几何距离最大的(w,b)作为目标解。

如何对优化目标进行简化？对于给定的(w,b)，$\min\limits_i y_i(w^T x_i + b)$为任意的正数，同时也对应一个确定的超平面。但是，因为同比例缩放超平面的参数(w,b)并不改变超平面的位置，即同比例缩放后仍是同一超平面，因此，给定一个超平面，可以有无数个(w,b)与之对应。这就意味着，公式（3）优化目标的解不唯一，需要增加约束条件，以限定唯一的超平面。

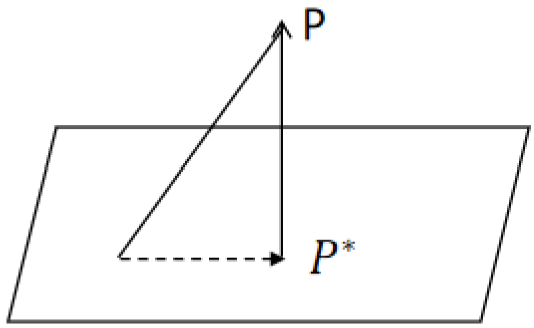
比如，限定$\|w\|_2 = 1$，但该约束不能简化公式（3）。

实际中采用的约束是**限制最小的函数距离为1**，即距离超平面最近最近的那个点，其函数距离为1。在该条件下，(w,b)也能唯一被确定。

加入约束条件后的求解目标：

$$\begin{aligned} &\max_{w,b} \frac{1}{\|w\|_2} \\ s.t. \quad & y_i(w^T x_i + b) \geq 1 \end{aligned} \tag{4}$$

2. 几何距离推导



平面方程为$\mathbf{w}^T x + b = 0$，点P^*为平面上一点，点P为平面为一点，向量$P - P^*$垂直于平面。

$\therefore P - P^* = \alpha \mathbf{w}$

两边同时乘以$\mathbf{w}^T$得：

$\mathbf{w}^T P - \mathbf{w}^T P^* = \alpha \mathbf{w}^T \mathbf{w} = \alpha \|\mathbf{w}\|_2^2$

$\therefore \mathbf{w}^T P + b = \alpha \|\mathbf{w}\|_2^2$

$\therefore \alpha = \frac{\mathbf{w}^T P + b}{\|\mathbf{w}\|_2^2}$

$\therefore \|P - P^*\|_2 = |\alpha| \cdot \|\mathbf{w}\|_2 = \frac{|\mathbf{w}^T P + b|}{\|\mathbf{w}\|_2^2} \cdot \|\mathbf{w}\|_2 = \frac{|\mathbf{w}^T P + b|}{\|\mathbf{w}\|_2}$

3. 参考文档

1. SVM最大间隔超平面学习笔记及对函数间隔设置为1的思考 - 知乎 (zhihu.com)