

# POLITECNICO DI TORINO

Elettromagnetismo Applicato



Tesina

## ELETROSTATICA

Gruppo 2

Componenti  
Alex Aiello 336698  
Eduardo Cipolletta 294530  
Andrea Campanella 286921

Anno Accademico 2024-2025

# Indice

<b>1 Cenni teorici sull'elettrostatica</b>	2
1.1 Carica elettrica . . . . .	2
1.2 Legge di Coulomb . . . . .	2
1.3 Campo elettrico . . . . .	2
1.4 Potenziale elettrico . . . . .	3
1.5 Energia potenziale elettrica . . . . .	3
1.6 Capacità e condensatori . . . . .	3
1.7 Princípio di sovrapposizione . . . . .	3
<b>2 Esercizio 1a: Conduttore cilindrico indefinito</b>	4
2.1 Dati . . . . .	4
2.2 Formule . . . . .	5
2.3 Verifiche . . . . .	5
2.3.1 Calcolo del campo elettrico in due punti . . . . .	5
2.3.2 Il campo elettrico ha solo componente radiale . . . . .	6
2.3.3 Potenziale sulla superficie dell'elettrodo $r = 0.11\text{ m}$ . . . . .	6
2.3.4 Differenza di potenziale tra due punti . . . . .	7
2.4 Valutazione effetti . . . . .	8
2.4.1 Reticolatura . . . . .	8
2.4.2 Potenziale sulla condizione esterna . . . . .	9
<b>3 Esercizio 1b: Conduttore cilindrico indefinito</b>	11
3.1 Dati . . . . .	11
3.2 Modello . . . . .	11
3.3 Verifiche . . . . .	12
3.3.1 Confronto critico con il caso 1a . . . . .	12
3.3.2 Valutazione dell'effetto dell'altezza dell'elettrodo sul valore di potenziale . . . . .	14
<b>4 Esercizio 2: Condensatore cilindrico</b>	17
4.1 Dati . . . . .	17
4.2 Modello . . . . .	17
4.3 Verifiche . . . . .	19
<b>5 Esercizio 3: Condensatore a facce piane e parallele di forma cilindrica</b>	20
5.1 Dati: . . . . .	20
5.2 Modello . . . . .	20
5.3 Analisi . . . . .	21
5.4 Verifiche . . . . .	24

# Capitolo 1

## Cenni teorici sull'elettrostatica

L'elettrostatica è la disciplina della fisica che si occupa dello studio delle cariche elettriche in equilibrio statico e delle forze che esse esercitano l'una sull'altra in assenza di moti relativi significativi. Essa rappresenta una parte essenziale dell'elettromagnetismo classico, descrivendo le interazioni fondamentali tra cariche attraverso il campo elettrico e il potenziale.

### 1.1 Carica elettrica

La carica elettrica, denotata solitamente con  $q$ , è una proprietà intrinseca di alcune particelle subatomiche, tra cui protoni ed elettroni. Le cariche si manifestano in due polarità, positiva e negativa, e sono quantizzate in multipli della carica elementare  $e = 1.602 \times 10^{-19}$  C. Il principio di conservazione della carica afferma che la carica totale di un sistema isolato rimane costante.

### 1.2 Legge di Coulomb

La forza elettrostatica tra due cariche puntiformi è descritta dalla legge di Coulomb:

$$\vec{F} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

dove  $q_1$  e  $q_2$  sono le cariche dei corpi,  $r$  è la distanza tra esse e  $\hat{r}$  è il versore lungo la linea che le congiunge. La costante  $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9$  Nm<sup>2</sup>/C<sup>2</sup> dipende dalla permittività del vuoto  $\epsilon_0$ . La forza agisce lungo la direzione di  $\hat{r}$  ed è repulsiva per cariche dello stesso segno e attrattiva per cariche di segno opposto.

### 1.3 Campo elettrico

Il campo elettrico  $\vec{E}$  è definito come la forza per unità di carica esercitata su una carica di prova infinitesimale  $q$ , in modo da non alterare il sistema:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Il campo elettrico prodotto da una carica puntiforme  $q$  è descritto da:

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Il campo elettrico è una grandezza vettoriale e le sue linee di forza sono orientate radialmente uscendo dalle cariche positive e convergendo verso le cariche negative.

## 1.4 Potenziale elettrico

Il potenziale elettrico  $V$  in un punto dello spazio è definito come il lavoro necessario per portare una carica positiva di prova da un punto di riferimento, solitamente l'infinito, fino a quel punto:

$$V = k_e \frac{q}{r}$$

La relazione tra il campo elettrico e il potenziale è espressa dal gradiente:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Il potenziale elettrico è una grandezza scalare e la sua unità di misura è il volt (V).

## 1.5 Energia potenziale elettrica

L'energia potenziale elettrica  $U$  associata a una carica  $q$  in un campo elettrico è data da:

$$U = qV$$

L'energia potenziale descrive il lavoro necessario per assemblare un sistema di cariche partendo da una configurazione di riferimento (generalmente l'infinito).

## 1.6 Capacità e condensatori

La capacità  $C$  di un condensatore è la misura della sua abilità di immagazzinare carica in relazione al potenziale elettrico applicato. È definita come:

$$C = \frac{Q}{V}$$

dove  $Q$  è la carica accumulata sulle piastre del condensatore e  $V$  è la differenza di potenziale tra esse. L'unità di misura della capacità è il Farad (F), equivalente a Coulomb su Volt (C/V).

## 1.7 Principio di sovrapposizione

Il principio di sovrapposizione afferma che, in un sistema di più cariche, il campo elettrico totale in un punto è la somma vettoriale dei campi elettrici generati da ciascuna carica individualmente:

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{E}_i$$

Questo principio si applica anche alle forze e ai potenziali, rendendo l'elettrostatica lineare.

## Capitolo 2

# Esercizio 1a: Conduttore cilindrico indefinito

### 2.1 Dati

$$\text{Raggio conduttore: } R_c = 0.1 * \left(1 + \frac{2}{20}\right) = 0.11m$$

Raggio regione aria 1: 1m

$$\text{Raggio regione aria 2: } R_{ext} = 5 * \left(1 + \frac{2}{20}\right) = 5,5m$$

Assegnazione potenziale elettrico superficie esterna = 0V

Assegnazione carica su regione conduttore  $q = 1e - 9$  (pari alla carica distribuita per unità di lunghezza)

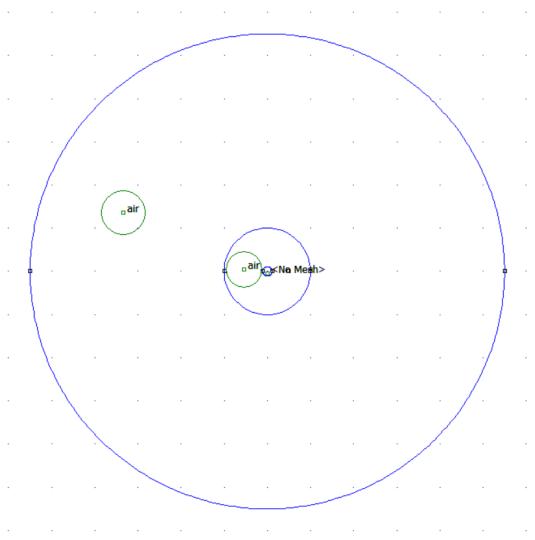


Figura 2.1: Modello FEMM conduttore cilindrico

## 2.2 Formule

Calcolo del campo elettrico:

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Potenziale elettrico:

$$V = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + k = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + k$$

Nel caso in esame, ponendo  $V(r = 5.5) = 0$ :

Il valore della costante di integrazione risulta:

$$k = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(r = 5.5) = 30.64V$$

Differenza di potenziale elettrico tra due punti  $r_A$  ed  $r_B$ :

$$\Delta V = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{r_A}{r_B}\right)$$

## 2.3 Verifiche

I valori calcolati per il campo elettrico nei punti  $r = 1,1\text{ m}$  e  $r = 0,11\text{ m}$ , rispettivamente pari a  $16,34\text{ V/m}$  e  $163,41\text{ V/m}$ , risultano leggermente diversi da quelli ottenuti nella simulazione FEMM, che fornisce invece  $16,32\text{ V/m}$  e  $161,07\text{ V/m}$ . Questa discrepanza può essere attribuita a piccoli errori di calcolo o approssimazioni introdotte dal software durante la simulazione numerica. Tali differenze sono comuni nelle analisi basate su metodi numerici, dove la discretizzazione del dominio e la qualità della mesh possono influenzare la precisione dei risultati.

### 2.3.1 Calcolo del campo elettrico in due punti

- Per  $r = 1.1\text{ m}$ ,  $E = 16.34\text{ V/m}$



Figura 2.2: Risultati simulazioni per  $r=1.1\text{m}$

- Per  $r = 0.11 \text{ m}$ ,  $E = 163.41 \text{ V/m}$

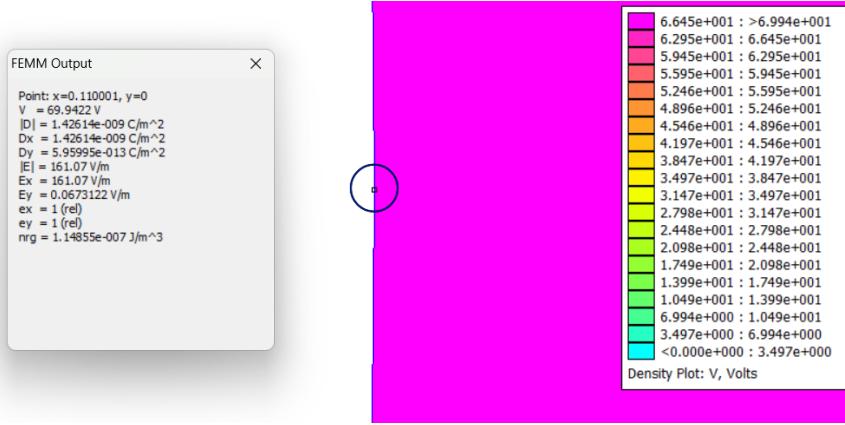


Figura 2.3: Risultati simulazioni per  $r=0.11\text{m}$

### 2.3.2 Il campo elettrico ha solo componente radiale

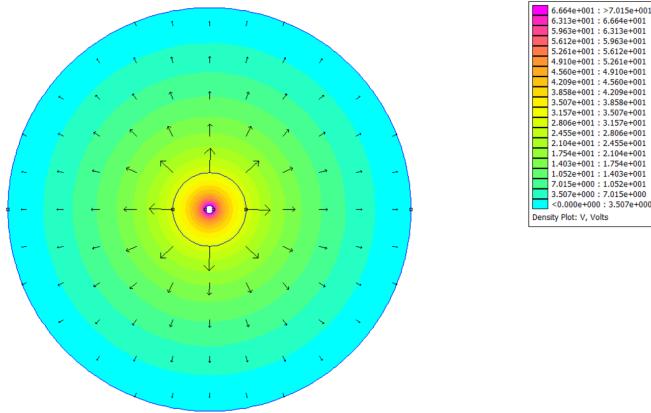


Figura 2.4: Campo radiale

### 2.3.3 Potenziale sulla superficie dell'elettrodo $r = 0.11 \text{ m}$

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{1}{r = 0.11} \right) + k = 70.31V$$

### 2.3.4 Differenza di potenziale tra due punti

- Tra  $r_A = 0.11 \text{ m}$  e  $r_B = 0.5 \text{ m}$ :

$$\Delta V = \frac{1 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{0.11}{0.5} \right) = -27.22V$$

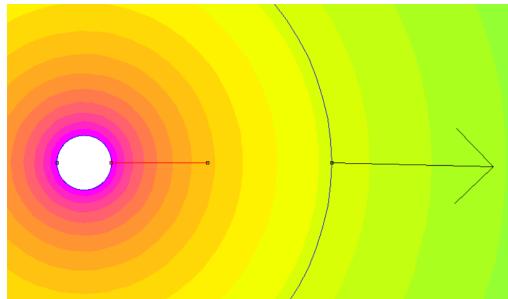


Figura 2.5: Gradiente caso 1

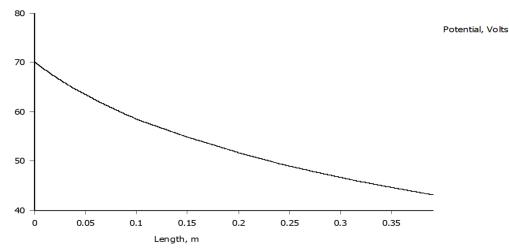


Figura 2.6: Grafico  $r=0.11 - r=0.5$

- Tra  $r_A = 0.5 \text{ m}$  e  $r_B = 1 \text{ m}$ :

$$\Delta V = \frac{1 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{0.5}{1} \right) = -12.46V$$

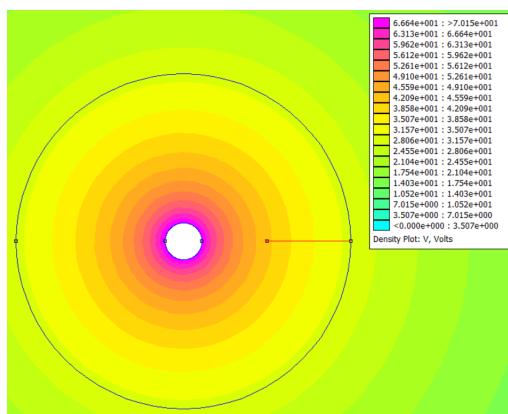


Figura 2.7: Gradiente caso 2

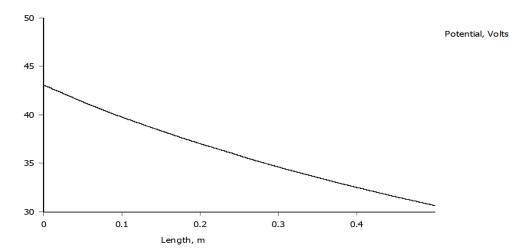


Figura 2.8: Grafico  $r=0.5 - r=1$

## 2.4 Valutazione effetti

### 2.4.1 Reticolatura

La reticolatura (o mesh) è un passo cruciale nell'analisi numerica tramite il metodo degli elementi finiti (FEM) in FEMM (Finite Element Method Magnetics). Essa consiste nel suddividere il dominio di calcolo in elementi più piccoli, che consentono di rappresentare con precisione le variazioni di campo elettrico, magnetico o termico. La qualità della mesh influenza direttamente sulla precisione dei risultati e sulla qualità delle immagini generate.

#### Mesh Fitta

Una mesh fitta è caratterizzata da una densità elevata di elementi piccoli. Essa consente di catturare con maggiore precisione le variazioni locali dei campi fisici, producendo immagini dettagliate e contorni ben definiti. Questo tipo di mesh è particolarmente utile in zone con variazioni rapide o geometrie complesse. Tuttavia, l'uso di una mesh fitta richiede maggiori risorse computazionali e tempi di calcolo più lunghi.

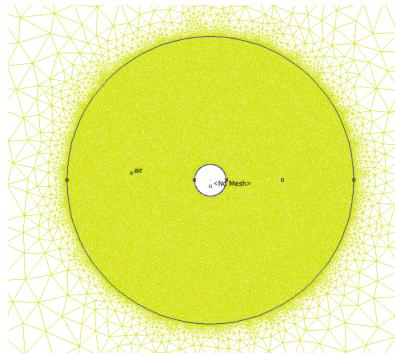


Figura 2.9: Mesh Min Angle:30, Mesh Size:0.005



Figura 2.10: Gradiente Min Angle:30, Mesh Size:0.005

#### Mesh Scarna

Al contrario, una mesh scarna presenta pochi elementi grandi. Questo approccio riduce i tempi di calcolo e l'uso di risorse, ma compromette la qualità delle immagini. Le variazioni dei campi fisici possono essere approssimate in modo impreciso, risultando in contorni meno definiti e dettagli mancanti. Sebbene possa essere accettabile in aree con cambiamenti lenti o uniformi del campo, una mesh scarna può generare artefatti visivi e rappresentazioni imprecise in regioni più complesse.

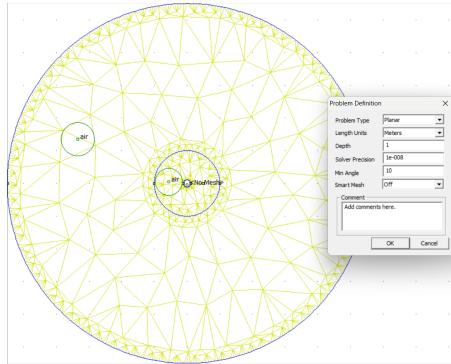


Figura 2.11: Mesh Min Angle:10, Mesh Size:1



Figura 2.12: Gradiente Min Angle:10, Mesh Size:1

#### 2.4.2 Potenziale sulla condizione esterna

In un sistema in cui un conduttore carico è circondato dall'aria, si stabilisce un potenziale elettrico che varia in base alla distribuzione del campo elettrico generato dal conduttore. Quando si introduce un boundary a una distanza di 5,5 metri con potenziale fissato a  $-100 V$ , il potenziale elettrico del sistema diminuisce progressivamente fino a raggiungere questo valore al confine.

La transizione osservata nel grafico, dove il potenziale mostra un salto verticale da  $-100 V$  a  $0 V$ , si verifica perché il potenziale è imposto a  $-100 V$  solo fino al boundary. Oltrepassato questo limite, il potenziale torna immediatamente a un valore di riferimento, come  $0 V$ , poiché non ci sono ulteriori forze o condizioni di potenziale da considerare nel dominio esterno.

Questo comportamento evidenzia l'impatto delle condizioni al contorno sulla distribuzione del potenziale elettrico e sul campo elettrico nel sistema, generando discontinuità nel grafico quando si superano i confini impostati.

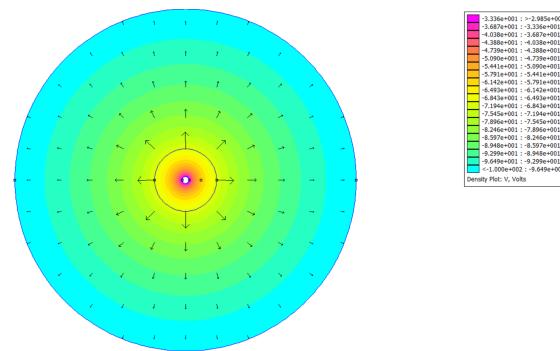


Figura 2.13: Potenziale Esterno -100V

Esercizio 1a: Conduttore cilindrico indefinito

---

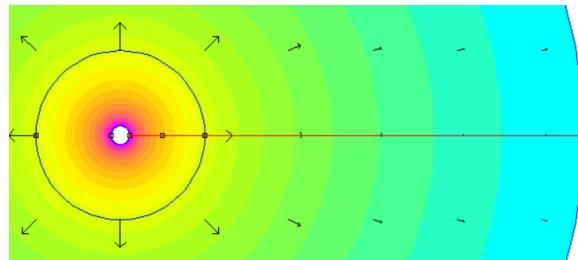


Figura 2.14: Zona grafico

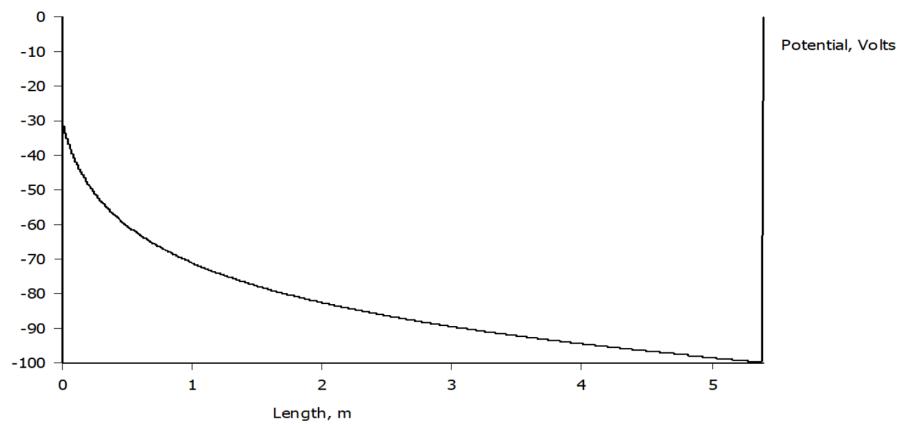


Figura 2.15: Grafico da  $r=0.11\text{m}$  a  $r=5.5\text{m}$

# Capitolo 3

## Esercizio 1b: Conduttore cilindrico indefinito

### 3.1 Dati

- Raggio conduttore:  $R_c = 0.1 * (1 + \frac{2}{20}) = 0.11m$
- Altezza elettrodo:  $A_e = 2 * (1 + \frac{2}{20}) = 2.2m$
- Raggio regione aria 1:  $R_{a1} = 1m$
- Raggio regione aria 2:  $R_{ext} = 5 * (1 + \frac{2}{20}) = 5.5m$
- Assegnazione potenziale elettrico superficie esterna:  $V_{ext} = 0$
- Carica sul conduttore per unità di lunghezza:  $q = 1 * 10^{-9}C$
- Densità superficiale di carica:  $\rho_s = \frac{q}{2\pi R_c} = 1.447 * 10^{-9} \frac{C}{m^2}$

### 3.2 Modello

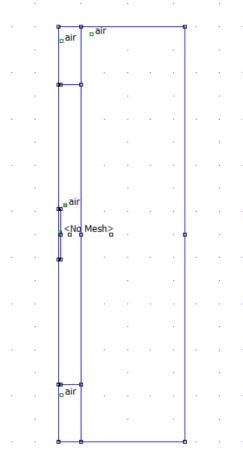


Figura 3.1: Modello FEMM conduttore cilindrico indefinito

### 3.3 Verifiche

#### 3.3.1 Confronto critico con il caso 1a

**Altezza conduttore**  $A_e = 2.2m$ : Si riportano distribuzione potenziale e valori delle grandezze di simulazione.

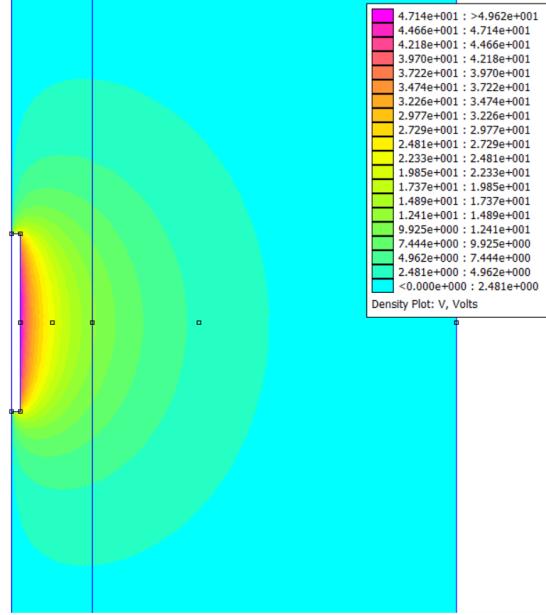


Figura 3.2: Distribuzione potenziale per  $A_e=2.2m$

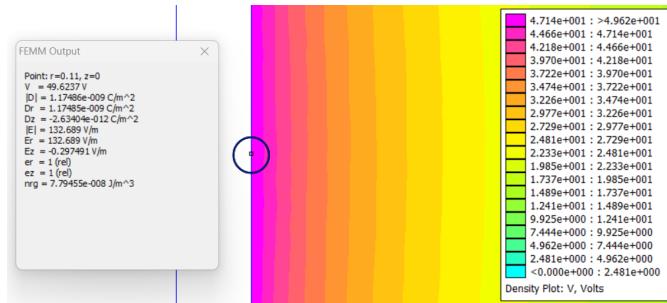


Figura 3.3: Risultati simulazione per  $A_e=2.2m$

**Altezza conduttore**  $A_e = 22m$ : Si riportano distribuzione potenziale e valori delle grandezze di simulazione.

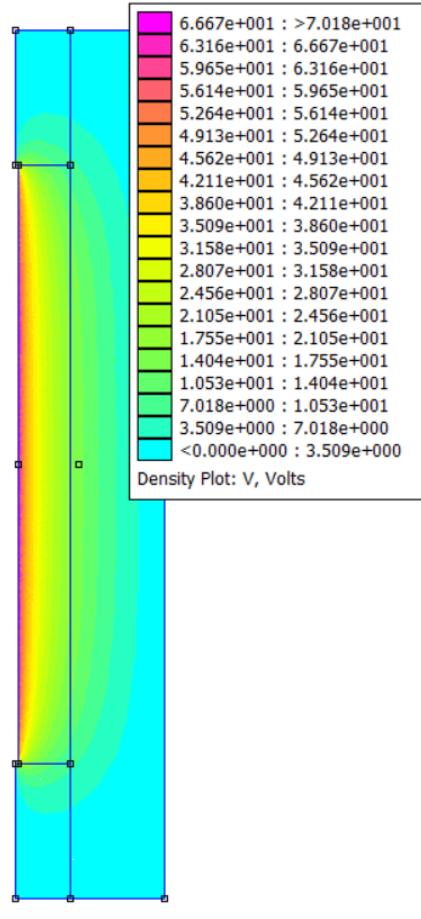


Figura 3.4: Distribuzione potenziale per  $A_e=22m$

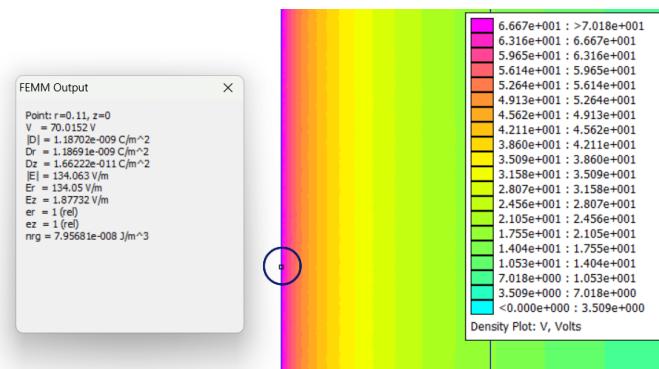


Figura 3.5: Risultati simulazione per  $A_e=22m$

Nel secondo scenario analizzato, in cui l'altezza del conduttore è stata moltiplicata per un fattore dieci, si osserva un progressivo avvicinamento all'idealità tipica del modello di traslazione invariabile, rappresentato da un conduttore cilindrico di lunghezza infinita. Questa configurazione consente di esaminare le proprietà elettriche del sistema in modo più accurato.

In particolare, si nota che il potenziale elettrico sulla superficie del conduttore tende a corrispondere al valore di potenziale ottenuto nello stesso punto all'interno del modello planare descritto nell'esercizio 1A. Tale comportamento evidenzia la validità delle assunzioni teoriche fatte nel contesto del modello cilindrico.

Inoltre, all'aumentare dell'altezza del conduttore, si registra una significativa riduzione della componente assiale del campo elettrico lungo l'asse . Questo fenomeno può essere attribuito all'effetto di schermatura che si verifica con strutture di maggiore altezza, dove il campo elettrico si distribuisce in modo più uniforme, contribuendo a una diminuzione dell'intensità della componente assiale.

Tali osservazioni suggeriscono che, per conduttori di altezza considerevole, le caratteristiche elettriche tendono a stabilizzarsi, avvicinandosi sempre di più a quelle previste per un conduttore cilindrico ideale di lunghezza infinita.

### 3.3.2 Valutazione dell'effetto dell'altezza dell'elettrodo sul valore di potenziale

$P_1 = 0.22m$ : Valori delle grandezze in  $P_1$

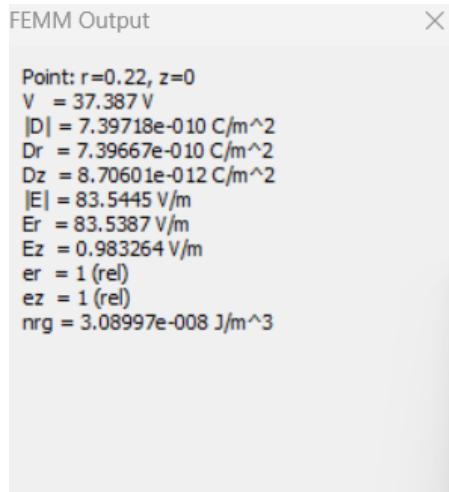


Figura 3.6: Valori delle grandezze in  $P_1$

Esercizio 1b: Conduttore cilindrico indefinito

---

$P_2 = 1.1m$ : Valori delle grandezze in  $P_2$

FEMM Output

```
Point: r=1.101, z=0
V  = 11.7115 V
|D| = 9.48649e-011 C/m^2
Dr = 9.48643e-011 C/m^2
Dz = 3.35053e-013 C/m^2
|E| = 10.7141 V/m
Er = 10.7141 V/m
Ez = 0.0378412 V/m
er = 1 (rel)
ez = 1 (rel)
nrg = 5.08198e-010 J/m^3
```

Figura 3.7: Valori delle grandezze in  $P_2$

$P_3 = 2.2m$  : Valori delle grandezze in  $P_3$

FEMM Output

```
Point: r=2.201, z=0
V  = 4.85271 V
|D| = 2.96397e-011 C/m^2
Dr = 2.96382e-011 C/m^2
Dz = 2.93751e-013 C/m^2
|E| = 3.34753 V/m
Er = 3.34737 V/m
Ez = 0.0331765 V/m
er = 1 (rel)
ez = 1 (rel)
nrg = 4.96098e-011 J/m^3
```

Figura 3.8: Valori delle grandezze in  $P_3$

---

Esercizio 1b: Conduttore cilindrico indefinito

---

Di seguito si riporta l'andamento del potenziale in funzione del raggio.

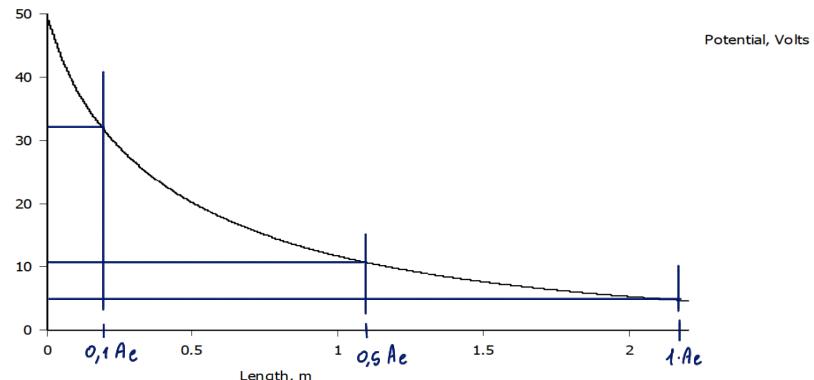


Figura 3.9: Andamento potenziale in funzione del raggio

## Capitolo 4

# Esercizio 2: Condensatore cilindrico

### 4.1 Dati

- Raggio interno elettrodo:  $R_{int} = 0.25(1 + \frac{2}{20})m = 0.275m$
- Raggio esterno elettrodo:  $R_{ext} = 0.5(1 + \frac{2}{20})m = 0.55m$
- Lunghezza:  $L = 1m$
- Assegnazione potenziale elettrico all'elettrodo interno:  $V_{int} = 0$
- Assegnazione potenziale elettrico all'elettrodo esterno:  $V_{ext} = 1000V$

### 4.2 Modello

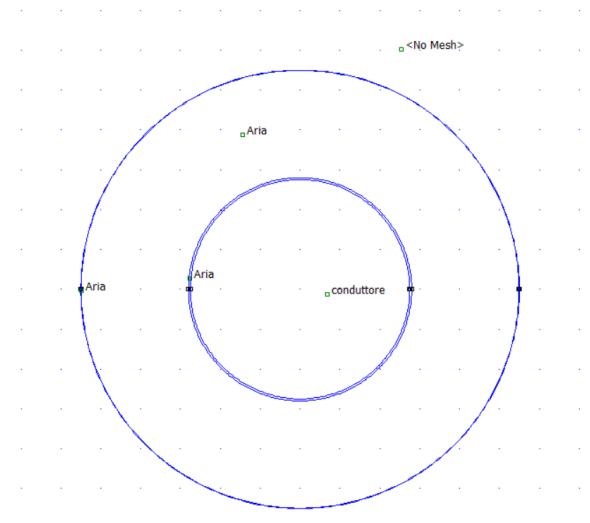


Figura 4.1: Modello FEMM condensatore cilindrico

### Esercizio 2: Condensatore cilindrico

Si ottiene il grafico che mostra la distribuzione del potenziale elettrico tra i due elettrodi. In esso sono riportate anche le linee del campo elettrico, radiali ed entranti nell'armatura interna.

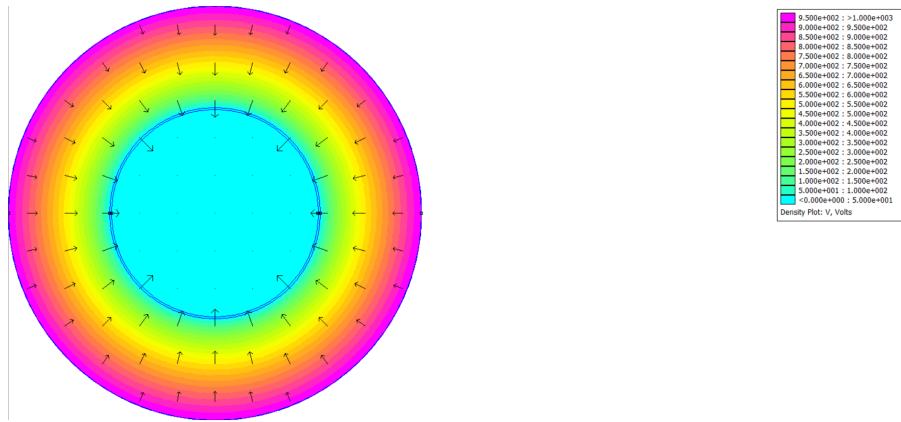


Figura 4.2: Distribuzione del potenziale e linee di campo elettrico

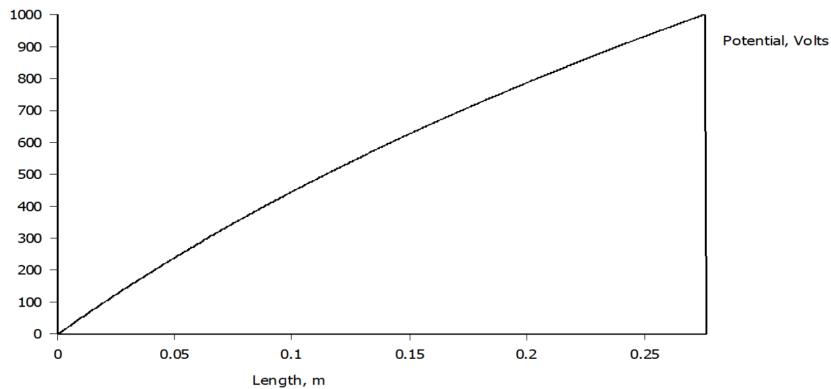


Figura 4.3: Andamento del potenziale in funzione del raggio

Definiti i due conduttori (armatura interna e armatura esterna) tramite l'apposita funzione, si calcola la carica disposta su ciascuno di essi.

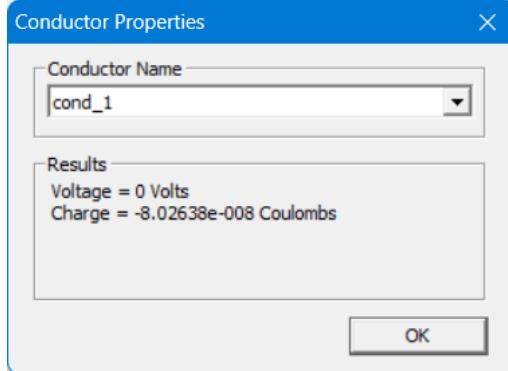


Figura 4.4: Calcolo carica armatura interna

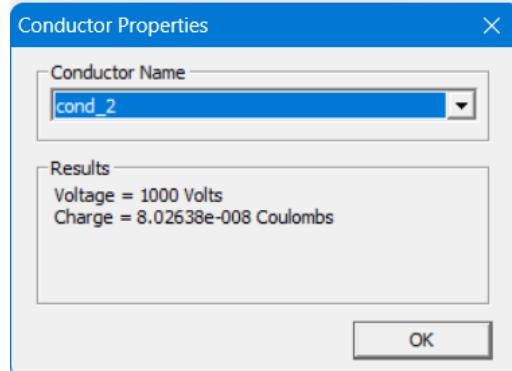


Figura 4.5: Calcolo carica armatura esterna

A questo punto è possibile usare il valore di carica  $Q = 8.02638 \times 10^{-8} C$  nel calcolo della capacità.

### 4.3 Verifiche

L'obiettivo è quello di confrontare il risultato analitico con quello ricavato tramite la simulazione.

**Formula analitica:**

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} = 80.259 pF \quad (4.1)$$

**Calcolo della capacità:**

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{8.02638 \times 10^{-8}}{1000} = 80.264 pF \quad (4.2)$$

I due risultati sono pressoché identici, dunque il modello può considerarsi verificato.

## Capitolo 5

# Esercizio 3: Condensatore a facce piane e parallele di forma cilindrica

### 5.1 Dati:

Problema assialsimmetrico.

- Raggio elettrodo:  $0.5 * (1 + \frac{2}{20})m = 0.55m$
- Spessore elettrodo:  $0.01m$
- Raggio dominio:  $d = 2m$
- Distanza armature:  $d = 0.2 * (1 + \frac{2}{20})m = 0.22m$
- Materiale tra le armature: aria

### 5.2 Modello

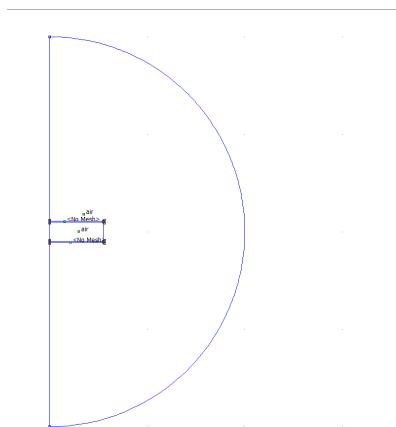


Figura 5.1: Geometria modello condensatore a facce piane e parallele di forma cilindrica.

Si assegna potenziale nullo sull'arco di confine. Sull'asse di simmetria invece non si assegna alcuna condizione.

Per quanto riguarda le armature si assegna un potenziale al contorno dell'elettrodo superiore pari a -1V; invece, al contorno dell'elettrodo inferiore un potenziale di +1V. Inoltre, si definisce una mesh di grandezza pari a 0.01m in aria e nelle zone "nomesh".



Figura 5.2: Armature del condensatore.

### 5.3 Analisi

Viene analizzato il comportamento del potenziale. In Fig.5.3 è mostrato il risultato dell'analisi, in Fig.5.4 invece è plottato l'andamento dello stesso.

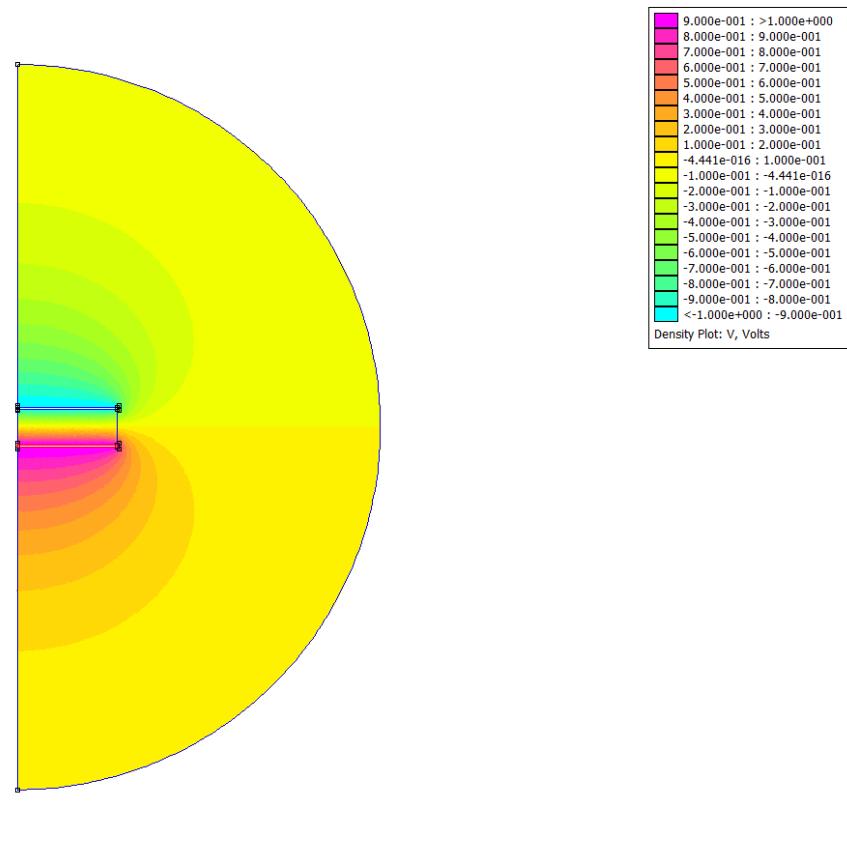


Figura 5.3: Analisi potenziale elettrico.

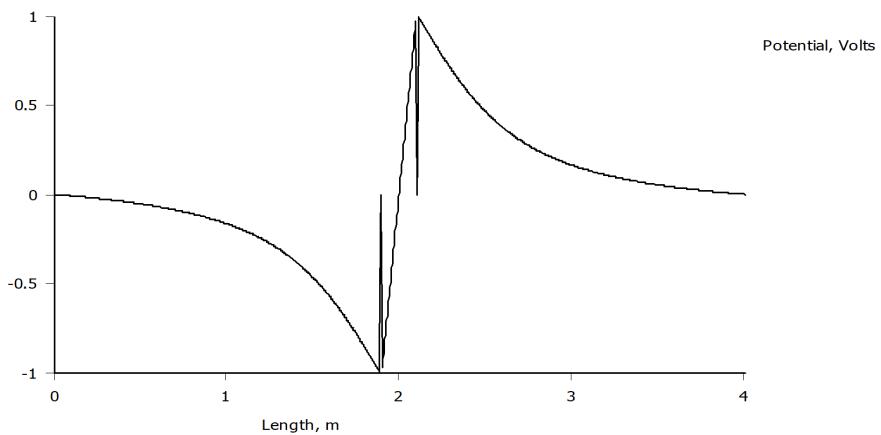


Figura 5.4: Andamento potenziale elettrico.

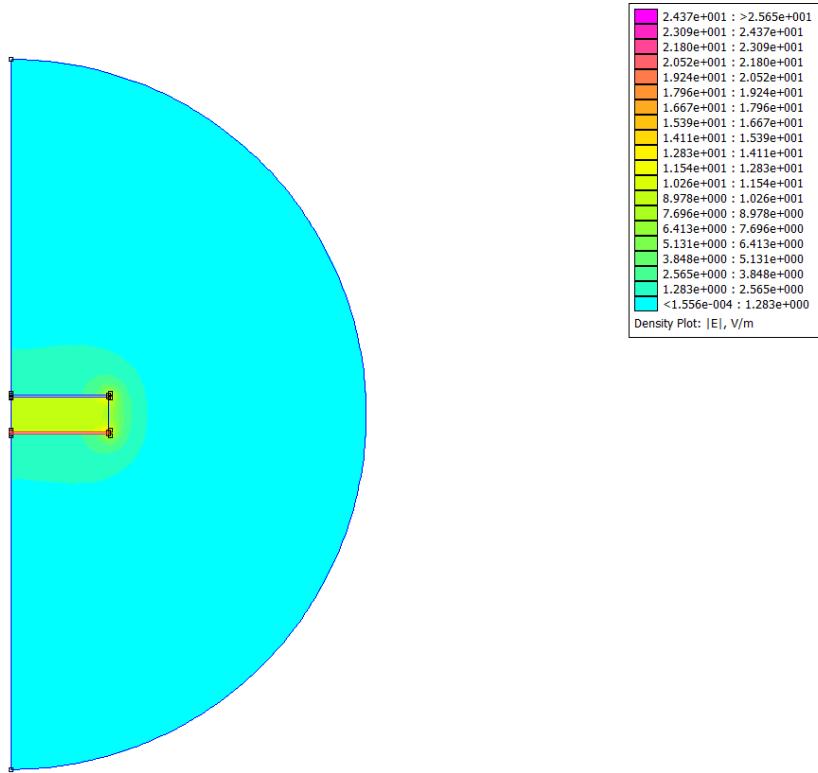


Figura 5.5: Analisi intensità campo elettrico.

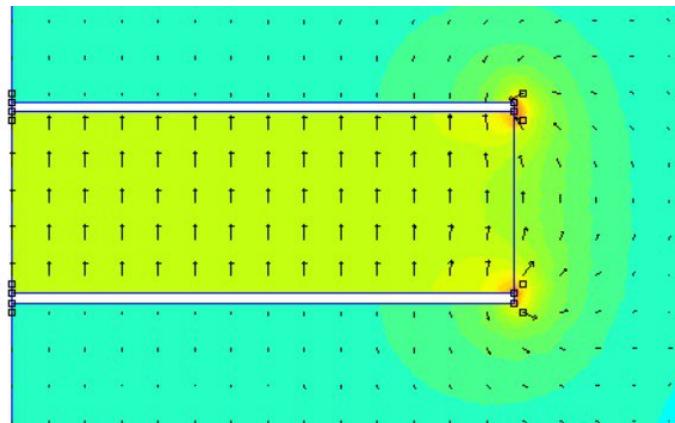


Figura 5.6: Andamento linee di campo

Si può notare come le linee di capo sui bordi delle armature presentino una componente assiale non nulla, di conseguenza all'esterno dell'armatura il campo elettrico è non nullo.

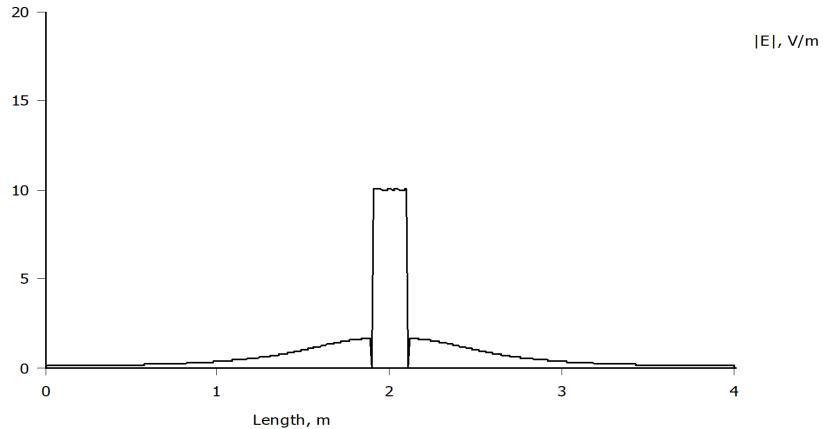


Figura 5.7: Andamento campo elettrico.

## 5.4 Verifiche

Si procede con il calcolo della carica attraverso il calcolo dell'integrale D.n, andando a definire una superficie poco distante dagli elettrodi.

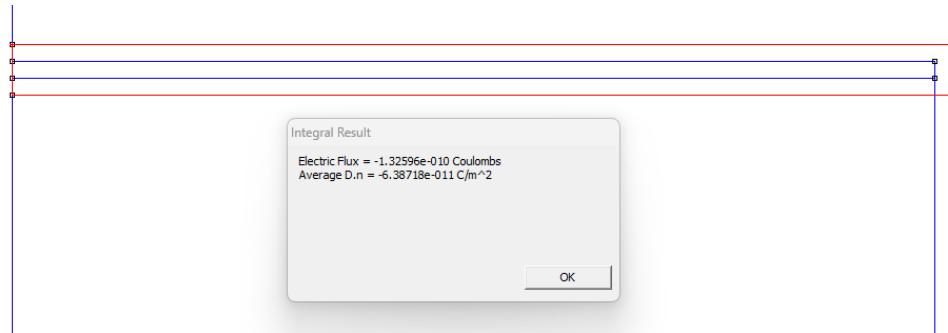


Figura 5.8: Carica sull'elettrodo superiore.

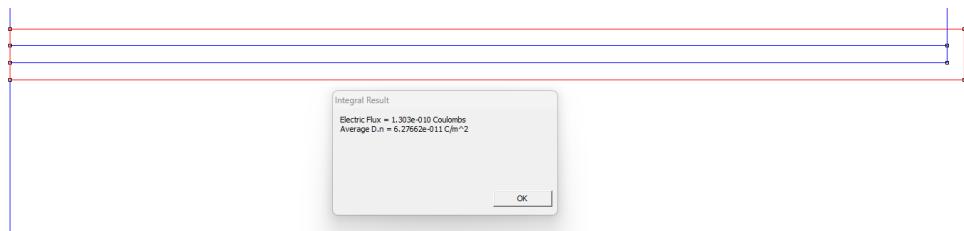


Figura 5.9: Carica sull'elettrodo inferiore.

Inoltre si verifica che se il calcolo viene effettuato direttamente sulla superficie dell'elettrodo si ottiene un errore.

Successivamente si è calcolata la carica sugli elettrodi

Esercizio 3: Condensatore a facce piane e parallele di forma cilindrica

---

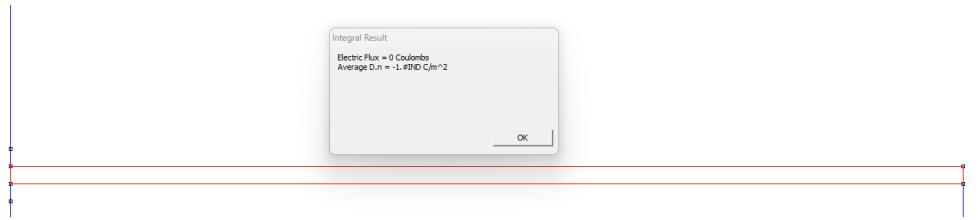


Figura 5.10: Calcolo integrale sulla superficie di armatura.

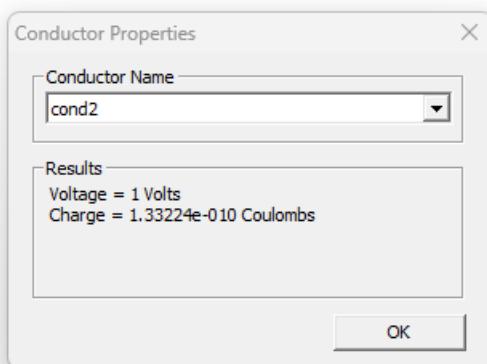


Figura 5.11: Proprietà armatura inferiore.

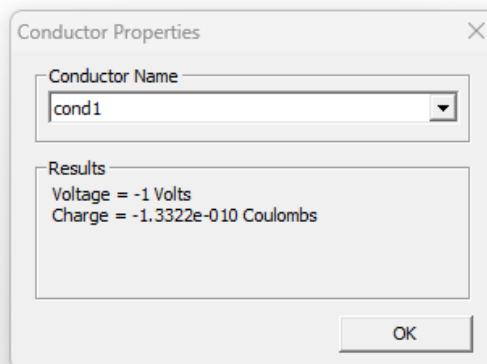


Figura 5.12: Proprietà armatura superiore.

Si verifica così la capacità, che risulta essere, usando la carica dell'armatura inferiore

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 66.61 \text{ pF} \quad (5.1)$$

Sfruttando invece il calcolo dell'energia interna su tutta la superficie la capacità risulta essere

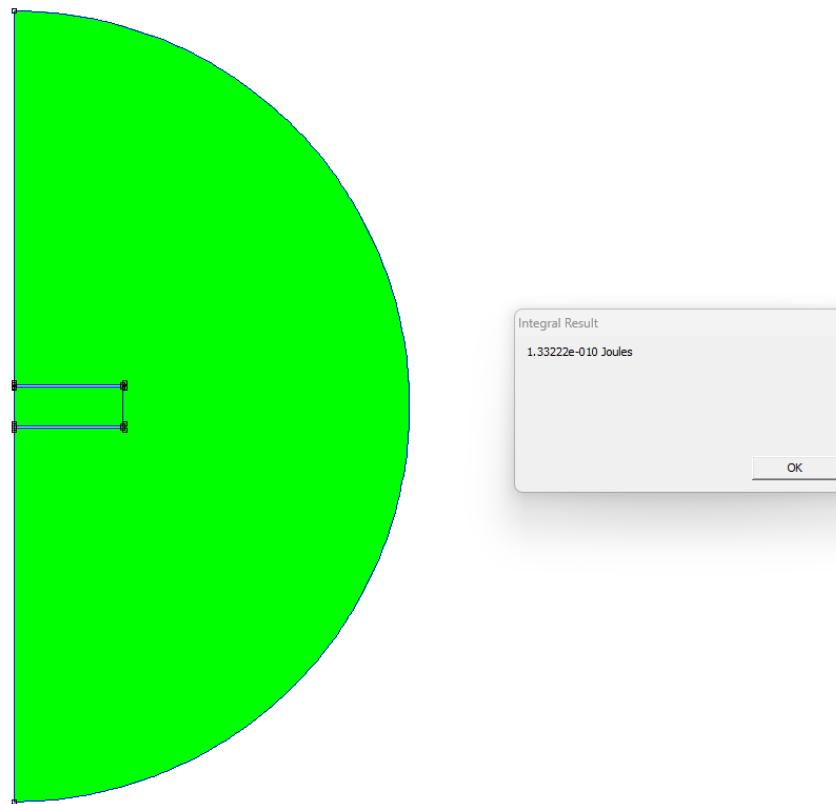


Figura 5.13: Caption

si ottiene

$$C = \frac{2 * W}{\Delta V^2} = 66.61 \text{ pF} \quad (5.2)$$

Osservando i risultati ottenuti si nota che andando a considerare anche l'area esterna i risultati coincidono.

Esercizio 3: Condensatore a facce piane e parallele di forma cilindrica

---

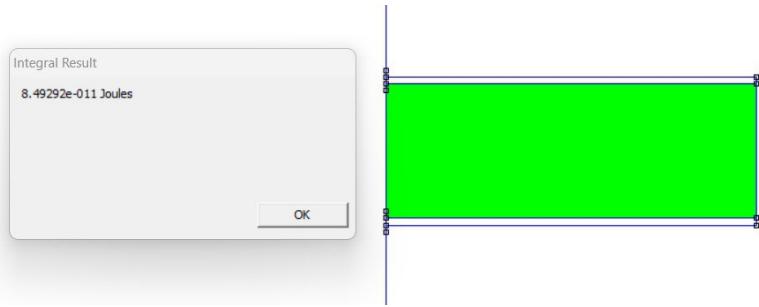


Figura 5.14: Energia interna condensatore

Se invece viene analizzata la sola energia presente nell'area interna al condensatore, come mostrato in Fig.14, si ottiene un valore di capacità pari a

$$C = \frac{2 * W_{int}}{\Delta V^2} = 42.46 \text{ pF} \quad (5.3)$$

che se confrontiamo tale valore con la soluzione analitica

$$C = \epsilon_a \frac{S}{d'} = 8.854 * 10^{-12} \frac{\pi 0.55^2}{0.2} = 42.07 \text{ pF} \quad (5.4)$$

osserviamo che sono valori simili in quanto sono valori ideali dato che non viene considerata l'energia esterna al condensatore.