

Математические основы защиты информации и информационной безопасности. Лабораторная работа №5. Вероятностные алгоритмы проверки чисел на простоту

Лесков Данила Валерьевич: НФИМд-02-21

Преподаватель: Кулябов Дмитрий Сергеевич

11 декабря, 2021, Москва, Россия

Российский Университет Дружбы Народов

Цели и задачи

Цель лабораторной работы

Изучение алгоритмов Ферма, Соловья-Штрассена, Миллера-Рабина.

Программная реализация алгоритмов Ферма,
Соловья-Штрассена, Миллера-Рабина.

Выполнение лабораторной работы

Для построения многих систем защиты информации требуются простые числа большой разрядности. В связи с этим актуальной является задача тестирования на простоту натуральных чисел.

- Вход. Нечетное целое число $n \geq 5$.
 - Выход. «Число n , вероятно, простое» или «Число n составное».
1. Выбрать случайное целое число a , $2 \leq a \leq n - 2$.
 2. Вычислить $r = a^{n-1} \pmod{n}$
 3. При $r = 1$ результат: «Число n , вероятно, простое». В противном случае результат: «Число n составное»..

Тест Соловья-Штрассена

- Вход. Нечетное целое число $n \geq 5$.
 - Выход. «Число n , вероятно, простое» или «Число n составное».
1. Выбрать случайное целое число a , $2 \leq a \leq n - 2$.
 2. Вычислить $r = a^{(\frac{n-1}{2})} \pmod n$
 3. При $r \neq 1$ и $r \neq n - 1$ результат: «Число n составное».
 4. Вычислить символ Якоби $s = \left(\frac{a}{n}\right)$
 5. При $r = s \pmod n$ результат: «Число n , вероятно, простое». В противном случае результат: «Число n составное».

Тест Миллера-Рабина

1. Представить $n - 1$ в виде $n - 1 = 2^s r$, где r - нечетное число
2. Выбрать случайное целое число a , $2 \leq a \leq n - 2$.
3. Вычислить $y = a^r \pmod n$
4. При $y \neq 1$ и $y \neq n - 1$ выполнить действия
 - Положить $j = 1$
 - Если $j \leq s - 1$ и $y \neq n - 1$ то
 - Положить $y = y^2 \pmod n$
 - При $y = 1$ результат: «Число n составное».
 - Положить $j = j + 1$
 - При $y \neq n - 1$ результат: «Число n составное».
5. Результат: «Число n , вероятно, простое».

Пример работы алгоритма Ферма

```
Выберите алгоритм проверки числа на простоту
  1 - Алгоритм Ферма;
  2 - Алгоритм Соловья-Штрассена;
  3 - Алгоритм Миллера-Рабина;
  -----
  0 - Выход из программы
Введите номер операции: 1
Введите нечетное целое число > 5: 9
Число 9 составное
```

Figure 1: Пример работы алгоритма Ферма

Пример работы алгоритма Соловья-Штрассена

```
Выберите алгоритм проверки числа на простоту
  1 - Алгоритм Ферма;
  2 - Алгоритм Соловья-Штрассена;
  3 - Алгоритм Миллера-Рабина;
  -----
  0 - Выход из программы
Введите номер операции: 2
Введите нечетное целое число > 5: 9
Число 9 составное
```

Figure 2: Пример работы алгоритмов для Соловья-Штрассена

Пример работы алгоритма Миллера-Рабина

```
Выберите алгоритм проверки числа на простоту
  1 - Алгоритм Ферма;
  2 - Алгоритм Соловья-Штрассена;
  3 - Алгоритм Миллера-Рабина;
  -----
  0 - Выход из программы
Введите номер операции: 3
Введите нечетное целое число > 5: 7
Число 7, вероятно, простое
```

Figure 3: Пример работы алгоритмов для Миллера-Рабина

Выводы

В ходе выполнения работы были успешно изучены алгоритмы Ферма, Соловья-Штрассена, Миллера-Рабина, а также реализованы данные алгоритмы программно на языке Python.