позволяет привести уравнение (21) к более простому виду

$$U_{xx} - U_{yy} + c_1 U = 0, c_1 = \frac{1}{4}(4c^2 - a^2 - b^2), -\infty < x < \infty, y > 0 \quad (25)$$

с дополнительными условиями

$$U|_{y=0} = \varphi(x) e^{\frac{a}{2}x} = \varphi_1(x), -\infty < x < \infty, \quad (22')$$

$$U_y U|_{y=0} = (\psi(x) - \frac{b}{2}\varphi(x)) e^{\frac{a}{2}x} = \psi_1(x), -\infty < x < \infty, \quad (23')$$

если только выбрать параметры λ и μ соответствующим образом, пологая

$$\lambda = \frac{a}{2}, \mu = -\frac{b}{2}. \quad (26)$$

Определение функции $U(x, y)$ по начальным данным и уравнению (25) сводится к постоению функции Римана $\vartheta(x, y; \xi, \eta)$.

Функция ϑ должна удовлетворять условиям:

$$\vartheta_{xx} - \vartheta_{yy} + c_1 \vartheta = 0, \quad (27)$$

$$\begin{cases} \vartheta = 1 \text{на характеристике MP,} \\ \vartheta = 1 \text{на характеристике MQ (рис. 28).} \end{cases} \quad (28)$$

Будем искать ϑ в виде

$$\vartheta = \vartheta(z), \quad (29)$$

где

$$z = \sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2} \text{ или } z^2 = (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2. \quad (30)$$

На характеристиках MP и MQ переменная z обращается в нуль, так что $\vartheta(0) = 1$. Далее, левая часть уравнения (27) преобразуется следующим образом:

$$\vartheta_{xx} - \vartheta_{yy} + c_1\vartheta = \vartheta''(z)(z_x^2 - z_y^2) + \vartheta'(z)(z_{xx} - z_{yy}) + c_1\vartheta = 0.$$

Дифференцируя выражение для z^2 дважды по x и y, получим:

$$\begin{gathered} z z_x = x - \xi, \\ z z_y =_(y - \eta), \\ z z_{xx} + z_x^2 = 1, \\ z z_{yy} + z_y^2 = -1. \end{gathered}$$

Отсюда и из формулы (30) находим:

$$z_x^2 - z_y^2 = 1, z_{xx} - z_{yy} = \frac{1}{z}.$$

Уравнение для ϑ принимает следующий вид:

$$\vartheta'' + \frac{1}{z}\vartheta' + c_1\vartheta = 0$$

при условии $\vartheta(0) = 1$. Решением этого уравнения является функция Бесселя нулевого порядка (см. Дополнение II, часть 1, §1)

$$\vartheta(z) = J_0(\sqrt{c_1}z)$$

или

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta) = J_0(\sqrt{c_1[(x-\xi)^2-(y-\eta)^2]}). \tag{31}$$

Воспользуемся теперь для нахождения $U(x,y)$ формулой (10), которая в нашем случае принимает вид

$$U(M) = \tfrac{U(P)+U(Q)}{2} + \tfrac{1}{2}\int_Q^P(\vartheta U_n d\xi - U\vartheta_\eta d\xi) \qquad (d\eta = 0). \tag{32}$$

Вычислим предварительно интеграл по отрезку $PQ(\eta = 0)$:

$$\int_Q^P(\vartheta U_\eta - U\vartheta_\eta)d\xi = \int_{x+y}^{x-y}\{J_0(\sqrt{c_1[(x-\xi)^2-y^2]})U_\eta(\xi,0) -$$

$$-\tfrac{U(\xi,0)\sqrt{c_1}yJ_0'(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2})}{\sqrt{c_1[(x-\xi)^2-y^2]}}\}d\xi. \tag{33}$$

Пользуясь начальными условиями (22′), (23′), находим:

$$U(x,y) = \tfrac{\varphi_1(x-y)+\varphi(x+y)}{2} + \tfrac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y} J_0\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\psi(\xi)d\xi +$$

$$+\tfrac{1}{2}\sqrt{c_1}y\int_{x+y}^{x-y}\tfrac{J_1(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2})\varphi(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}, \tag{34}$$

откуда в силу (24), (22′) и (23′) получаем формулу

$$u(x,y) = \tfrac{\varphi(x-y)e^{-\frac{a-b}{2}y}+\varphi(x+y)c^{\frac{a+b}{2}y}}{2} -$$

$$-\tfrac{1}{2}e^{\frac{b}{2}y}\int_{x+y}^{x-y}\{\tfrac{b}{2}J_0(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}) -$$

$$-\sqrt{c_1}y\tfrac{J_1(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}\}e^{-\frac{a}{2}(}x-\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\tfrac{1}{2}e^{\frac{b}{2}y}\int_{x+y}^{x-y}J_0\sqrt{c_1^3}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}e^{-\frac{a}{2}(}x-\xi)\psi(\xi)d\xi, \tag{35}$$

дающую решение поставленной задачи.