第24卷 第4期
2008年7月
赤峰学院学报(自然科学版)
Journal of Chifeng University(Natural Science Edition)
Vol. 24 No. 4
Jul. 2008

利用对称性和数学期望计算古典概型概率

肖文华

(娄底职业技术学院 电子信息工程系, 湖南 娄底 417000)

摘 要: 介绍了利用对称性计算古典概型概率和利用随机变量的数字特征——数学期望来计算古典概型的概率.

关键词: 对称性; 数学期望; 古典概型; 概率
中图分类号: O211 文献标识码: A 文章编号: 1673-260X(2008)04A-0024-02

古典概型及其概率论的基础知识, 在概率论中占有相当重要的地位, 由于古典概型所涉及的具体问题往往是复杂多变的, 计算样本空间中基本事件的总数与某一事件所包含的基本事件数的方法又没有固定格式, 而且容易把基本事件重复计算或者遗漏计算.因此, 本文试从如下两个方面进行讨论: 一方面, 由于有些古典概型比较简单, 就利用对称性, 直接进行计算, 对它的讨论有助于直观地理解概率论的基本概念, 另一方面, 因为许多古典概型问题较复杂, 但可以转化为摸球模型, 则利用数学期望计算它的概率, 可以大大降低它的计算难度.

1 利用对称性计算古典概型概率

归根到底, 概率论肇始于如下认识: 对称事件其发生的可能性相等. 对两个结构一致、完全处于对称平等位置的事件, 其发生的概率应该相同. 在古典概型中, 注意到事件的对称性, 能产生简洁的解题思路.

例 1 甲有 n+1 个硬币, 乙有 n 个硬币, 双方投掷之后进行比较, 假设硬币是均匀的, 求甲掷出的正面数比乙掷出的正面数多的概率.

解 利用事件的对称性并选择适当的样本空间, 则能迅速求解.

设 A={甲的正面数 > 乙的正面数}, 则$\overline{A}$={甲的正面数 ≤乙的正面数}, 由于甲比乙多一个硬币这一特殊情况, 故$\overline{A}$又表示 {甲的反面数 > 乙的反面数), 但由于硬币是均匀的, 投掷是随机的, 显然事件{甲的正面数 > 乙的正面数)与事件{甲的反面数 > 乙的反面数)是处于对称平等的位置上, 其发生的概率应该相等.

因此我们可以构造一个只有两个样本点的样本空间 $\Omega=\{A, \overline{A}\}$, 则有 P(A)=1/2.

点评 这里的解法充分利用对称性, 很巧妙, 但仅当甲的硬币比乙的硬币多一个的场合才成立.

例 2 从学生中随意取 13 个人称体重, 依次记为 $X_1, X_2, \cdots, X_{13}$, 求 $\max(X_1, X_2, \cdots, X_{10}) < \min(X_{11}, X_{12}, X_{13})$的概率.

解 依对称性, 看作 13 个不等数的排列, 计有 13! 种, 其中 10! ·3! 满足要求, 故所求概率为 $\frac{10!\ 3!}{13!}=\frac{1}{286}$.

点评 用对称性解决这类问题使答案的含意明朗化.

2 利用数学期望计算古典概型概率

对古典概型的深入理解以及对更复杂的古典概型概率的计算不可避免地要利用到随机变量的数学特征之一——数学期望.

引理 袋中装有 N 只球, 但其中白球数为随机变量, 只知其数学期望为 n, 试证从该袋中摸一

球得到白球的概率为 $\frac{n}{N}$.

证明　记 X 为袋中的白球数, 则由题设得 $n=E(X)=\sum_{k=0}^{N} kp\{X=k\}$.

由此利用全概率公式得

$$P\{摸一球为白球\}=\sum_{k=0}\{摸一球为白球|X=k\}P\{X=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{N} p\{x=k\}\frac{k}{N}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} kp\{X=k\}=\frac{E(X)}{N}.$$

点评　利用引理及递推公式可以解决一些很繁复的古典概型概率计算问题.

例 3　甲袋中有 a 只白球 b 只黑球, 乙袋中装有 α 只白球 β 只黑球, 现从甲袋中摸出 $c(c\leq a+b)$ 只球放入乙袋中, 求从乙袋中再摸一球而为白球的概率.

解　令 X 为从甲袋中所摸 c 只球中的白球数, 则 X 取值 0, 1, …, c, 服从超几何分布, 且 $E(X)=\frac{ca}{a+b}$, 此时乙袋中共有 $\alpha+\beta+c$ 只球, 其中白球数为 $\alpha+X$ 只, 是一个随机变量.

由引理得:

$$P\{从乙袋中再摸一球是白球\}=\frac{E(\alpha+X)}{\alpha+\beta+c}=\frac{\alpha+E(X)}{\alpha+\beta+c}.$$

$$=\frac{1}{\alpha+\beta+c}\left(a+\frac{ac}{a+b}\right)$$

点评　对这类问题用上述引理可直接写出答案.

例 4　罐中有 b 只黑球及 r 只红球, 每次随机取出一只, 把原球放回, 并加进去与抽出球同色的球 c 只, 再摸第二次, 这样下去共摸 n 次之后, 求第 n+1 次摸得红球的概念 P.

解　设 X_i={进行了 i 次摸球后罐中的红球数}, i=0, 1, 2, …, n,

$$Y_i=\begin{cases}1, 第\ i\ 次摸出一只红球,\\ 0, 第\ i\ 次摸出一只黑球,\end{cases}\quad i=1, 2\cdots, n,$$

则　$X_i=X_{i-1}+cY_i$,

$$E(X_i)=E(X_{i-1})+cE(Y_i),$$

在进行 i-1 次后, 罐中共有球 $r+b+(i-1)c$ 只, 其中红球 X_{i-1} 只.由引理, 得

$$E(Y_i)=P\{第\ i\ 次摸出一只红球\}=\frac{E(X_{i-1})}{r+b+(i-1)c},$$

因此, 得

$$E(X_i)=E(X_{i-1})+\frac{cE(X_{i-1})}{r+b+(i-1)c}=\frac{r+b+ic}{r+b+(i-1)c}E(X_{i-1}),$$

i=1,2⋯,n.

已知 $E(X_0)=r$,由此递推可得

$$E(X_n)=\frac{(r+b+nc)r}{r+b},$$

于是　$P=\frac{E(X_n)}{r+b+nc}=\frac{r}{r+b}$.

点评　这个摸型称为波利亚罐模型, 曾被用作传染病的数学摸型.这是很一般的摸球模型.特别取 c=0 则是放回球模型; 取 c=-1 则是不放回球模型.

最后的答案很符合直观, 可利用对称性推测之.

当然, 不管是利用对称性, 还是利用数学期望, 在计算古典概型下事件发生的概率都需注意, 在具体问题中构造恰当的样本空间, 而且在构造样本空间时, 每个样本点出现的可能性必相等.

参考文献:

〔1〕李贤平.概率论与数理统计[M].上海: 复旦大学出版社, 2003.