

由“基本事件”看中奖概率

——中学生眼中的“蒙提霍尔”问题

丁 益 (浙江省宁波市第二中学 315010)

1 “蒙提霍尔”问题的背景

“蒙提霍尔(Monty Hall)”问题是由美国电视游戏节目“让我们做一次交易”的主持人的名字来命名的. 该游戏的规则中有三块幕布, 其中一块幕布的后面有一辆新汽车, 其余两块幕布后面是山羊. 游戏是这样进行的: 参赛者选择一块他认为后面有汽车的幕布, 然后主持人 Monty Hall 拉开其余两块幕布中的一块, 让参赛者看到一只山羊. (Monty Hall 可能有不止一只山羊的选择, 这时假定他随机地选择展示其中一只山羊.) 这时, 参赛者可以停在他原来选择的幕布那儿, 或者换到另一块未拉开的幕布那儿. 最后展示汽车的位置, 以此决定参赛者赢得汽车或者另一只山羊. 参赛者想赢得汽车, 那么应不应该换幕布, 或者换不换没有任何区别吗?^[1]

2 基本事件分析法的解答

在选修 2-3 条件概率的教学中, 笔者打算将这个经典的条件概率问题介绍给学生, 激发他们的探究兴趣. 但解答这个问题需要借助于贝叶斯定理(Bayes Theorem)^[2], 而这需要准备许多概率论的预备知识, 这让教师陷入两难的境地. 想起著名数学家华罗庚的一句名言: 善于“退”, 足够地“退”, 退到最原始而不失去重要性的地方, 是学好数学的一个诀窍. 在这句名言的启发下, 笔者与学生不断地“退”, 从条件概率退到古典概型, 最后“退”到了“基本事件”这个最原始而不失去重要性的地方. 以下是运用基本事件方法的分析: 基本事件为(车; 羊 1, 羊 2), (羊 1; 车, 羊 2), (羊 2; 羊 1, 车), 其中分号之前表示参赛者初次选择的幕布后面的情况. 从表 1 中可以得出结论: 更换初次选择将使中奖概率从 $\frac{1}{3}$ 提高至 $\frac{2}{3}$.

表 1

基本事件	(车; 羊 1, 羊 2)	(羊 1; 车, 羊 2)	(羊 2; 羊 1, 车)
概率 P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
在主持人拉开一块幕布之后	(车; 羊 1)	(车; 羊 2)	(羊 1; 车)
概率 P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

3 “蒙提霍尔”问题中常见“等效处理”误区辨析

“蒙提霍尔”问题的背景较易理解, 与人们日常生活中的彩票、抽奖等有着许多相似之处, 容易激发学生的思考兴趣. 在讨论中, 部分学生认为更换初次选择不会增加中奖概率, 而持有这种观点的学生都会构造出相应的“等效处理”手法作为论据. 在这里我们讨论: 针对“蒙提霍尔”问题的两类具有代表性的“等效处理”, 我们仍用基本事件的方法来一一给予分析, 判断它们的对错.

(1) “迟到法”

一部分持不更换观点的学生认为: 既然排除了一块幕布, 汽车在剩余两块幕布中的概率应相等, 都是 $\frac{1}{2}$. 这类学生的思维中, 运用了“迟到法”: 假设“我”是参赛者的参谋, 在主持人揭开一块后面有山羊的幕布后, 问参赛者是否要更换初次选择时, “我”才刚刚到达现场. 那么对于“我”来说, 所有的基本事件就是:

表 2

基本事件	(车; 羊 1)	(车; 羊 2)	(羊 1; 车)	(羊 2; 车)
概率 P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

中奖概率是 $\frac{1}{2}$, 所以更换初次选择不会提高中奖概率. 通过对比之前的分析, 我们发现: “迟到法”中, 自行增加了一个假设: 所有基本事件都是等概率的, 而这个假设在此处不合理. 这个现象引导我们思考:

思考 1 概率的继承性问题: 参赛者原来选

中的那块幕布中奖的概率在主持人拉开幕布前后,有没有发生变化,是继承了原来的 $\frac{1}{3}$,还是突然转变为 $\frac{1}{2}$ 了呢?

(2)“三人竞争法”

另一部分持不更换观点的学生采用以下的“三人竞争法”:将竞猜者从一人增加到三人,让每人选择一块幕布,而后主持人宣布其中一人没有中奖.假设在“蒙提霍尔”问题(以下称原问题)中,采用更换策略能够提高中奖概率,那么现在剩下

的两个人都会争先恐后地与对方交换幕布,因为在他们看来,自己的初选中奖概率只有 $\frac{1}{3}$,而对方初次选择的那块幕布的中奖概率是 $\frac{2}{3}$.更换之后,两人的中奖概率都提高为 $\frac{2}{3}$,但这是明显不可能的.所以原问题中采用更换策略能提高中奖概率是不正确的.

下面我们从基本事件的角度来看一下以上分析过程的具体情况:

表 3

基本事件	(车,羊,羊)		(羊,车,羊)		(羊,羊,车)	
概率 P	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	
在主持人宣布一人淘汰之后	(车,羊,开)	(车,开,羊)	(羊,车,开)	(开,车,羊)	(羊,开,车)	(开,羊,车)
概率 P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

我们将甲、乙、丙三人选择的幕布后的情况按顺序排好,例如(车,羊,羊)表示甲初次选择的幕布后是车,乙、丙选择的幕布后是羊;在主持人宣布淘汰一人后,(车,羊,开)表示丙被淘汰了,剩下甲、乙两人.

在用基本事件分析之后,我们发现“三人竞争法”的模式中,有 $\frac{1}{3}$ 的可能出现将原问题中的参赛者(不妨认为是甲)直接淘汰的情形,而这在原问题中是不可能出现的情形.只可能出现:

表 4

基本事件	(车,羊,羊)		(羊,车,羊)	(羊,羊,车)
概率 P	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
在主持人处理之后	(车,羊,开)	(车,开,羊)	(羊,车,开)	(羊,开,车)
概率 P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

参赛者在初次选择时,三块幕布的地位无疑是对等的.但参赛者选择的这块幕布,由于没有被揭开的可能,所以在之后的游戏过程中与另外两块幕布地位不再对等了.这个现象促使我们思考:

思考 2 未揭开的两块幕布地位对等吗?

正是对这个问题的回答,决定了是否采取更换策略.

4 “蒙提霍尔”问题的等效处理

那么对“蒙提霍尔”问题正确并且最直接的等

效处理是怎样的呢?

(1)“角色互换法”——站在主持人的角度重新观察这个问题.

(2)“抢先交换法”——在作出初次选择之后的第一时间,用选中的幕布与剩余的两块幕布交换(中奖概率由 $\frac{1}{3}$ 提高到 $\frac{2}{3}$),然后参赛者代替主持人揭开换的两块幕布里后面是羊的一块.

5 小结

“基本事件”是概率学习的重要的知识点.在数学学习中,还有许多这样的知识,由于其本身朴实无华往往容易被我们忽视.而在数学的体系中,原始而不失重要性的知识点恰恰就是这些不起眼的知识点.知识点是数学思想本质的凝结点,经过长期教学实践总结、检验并积累下来.我们在解题的过程中,要重视对知识点的梳理与归纳,时刻将知识点作为数学解题中的出发点,往往可事半功倍,许多难题也可迎刃而解.

参考文献

- [1] (美)Michael Mitzenmacher, Eli Upfal. 史道济等译. 概率与计算. 北京:机械工业出版社, 2007.
- [2] 吴宇邀.“蒙提霍尔”问题及其推广与应用. 中学数学月刊, 2009(5).