
The TEXbook
TEX

总目录

第　一　册

第 二 册

第 三 册

习 题 集

高等学校试用教材

数 学 分 析

第 一 册

北京大学数学系　方企勤　编

高等教育出版社

内容简介

本书分三册出版，第一册讲述函数、极限理论、一元函数微积分，第二册讲述实数理论、级数和广义积分，第三册讲述 m 维 Euclid 空间中微积分和微分形式. 一元部分较系统讲述了凸函数和上、下极限. 分两步严格处理了实数与极限理论：一元微积分前严格讲述极限定义、性质、运算；一元微积分后，从空间的连通性、紧性、完备性观点讲述实数定义和实数理论以及连续函数的基本定理.

本书讲述细致，引进概念注意讲清实际问题背景，定理证明、公式推演作了必要地分析，并提出一些值得思考的问题；通过大量不同类型例题介绍解题基本方法和特殊技巧.

本书配有习题集，由我社与教材同时出版发行.

本书由理科数学教材编审委员会函数论编审组委托欧阳光中副教授，董延闿教授复审，可作为综合大学、师范院校数学系试用教材或教学参考书.

高等学校试用教材

数 学 分 析

第一册

北京大学数学系　方企勤　编

*

高等教育出版社 出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 9.75　　字数 208000

1986年2月第1版　1988年1月第2次印刷

印数 15111—25410

ISBN 7-10-001214-6 / O·364

定价 1.45元

第一册前言

这套教材分三册出版. 第一、二册讲述一元函数微积分,它的内容包括:实数、极限理论,一元微积分,级数和广义积分. 前六章和第九章的实数空间由我撰写,一元的其余部分由沈燮昌教授撰写. 第三册讲述 m 维 Euclid 空间中的微积分,由廖可人副教授和李正元副教授撰写.

教材内容的选取,基本上没有超出经数学、力学、天文学教材编审委员会 1980 年审订的教学大纲的范围. 但由于对内容的理解和要求不同,在讲述上也会有所差别. 我们对内容的要求比我校六十年代教材要高些. 比如一元部分较系统地讲述凸函数和上、下极限,多元部分严格地讲述 m 元微积分和微分形式. 个别可以不讲的内容用星号 $*$ 标出.

本册教材的内容属于传统的内容,但希望在系统性、严格性、逻辑性上能处理得更好些. 比如讲述初等函数的连续性时,为了严格处理指数函数的连续性,有的教材把它放在定积分之后讲,有的教材虽把它放在微积分之前讲,但讲得较麻烦. 本书对指数函数的处理,是为了解决上述的矛盾,而又保持逻辑上严格性的一个尝试. 又比如利用导数研究函数性质时,先讲 Cauchy 中值定理的两个应用,然后讲 Lagrange 中值定理的两个应用(函数的升降与凹凸),最后讲函数升降与凹凸的两个应用,这样逻辑上一环扣一环,使问题讲述显得干净、利索.

我们特别希望在内容讲法上有所突破,使它能帮助教师怎样去讲授这些内容,能指导学生应该怎样去理解和掌握这些内容.

在讲授概念时,不仅讲概念的实际背景,还要求通过实际背景,把概念的每一个符号、每一个式子的涵义揭示出来. 比如讲序列极限时,通过求曲边三角形的面积,分析为什么要"存在 N",为什么要"任给 ε",和极限定义中"四句话"的意义. 又比如讲微分时,通过求瞬时速度,分析为什么要求改变量的线性主部及其系数,并指出线性主部和高阶无穷小项的意义,这样做更有利于学生理解概念的实质.

在讲定理的证明和公式的推导时,不仅要逻辑上清楚和注意表达的艺术,还要求讲出内容之间的有机联系,分析证明的想法和揭露问题的本质. 比如当极限四则运算和幂指运算条件不满足时极限怎么求,引出 L'Hôpital 法则; 证明无穷与无穷之比的不定型时,先分析证明困难所在和指出解决问题的办法; 又比如由一次

逼近(微分)的充要条件和逼近式的唯一性,引出高次逼近(Taylor 公式)无充要条件和逼近式的唯一性;对 Peano 余项公式证明的分析,引出 Lagrange 余项公式证明的方法. 这种从学生原有基础出发,引出不断地提出问题、分析问题的讲法,使学生能更好地掌握证明的思想和方法.

一元微积分的一些概念和方法,差不多都可以从几何上给予解释,这样做不仅使概念讲解得更活,也使学生的思维更加活跃. 比如讲一致连续与不一致连续时,结合曲线图形来看,如果曲线有一处坡度最陡则一致连续,如果曲线无限地变陡,且没有坡度最陡的地方则不一致连续. 这种"看图识字"的讲法,可以使学生记得牢,学得活.

教材中配有大量例题,既有几何、物理方面的应用题,也有相当数量的计算和推理题;既注意了演算的数量,也注意了解题的基本方法和特殊的技巧. 在前面各章、节附有一些思考题,这是考虑到学生初学微积分时,理解概念不深,这样做有利于培养学生独立思考的能力.

对实数与极限理论的处理,我们是分为两步进行教学的. 在一元微积分之前,严格讲述极限的定义、性质和运算. 而在一元微积分之后,再讲述实数定义、确界和极限存在性、连续函数性质证明. 这时可以从一般空间观点来讲,即从空间的连续性、紧性、完备性的观点来讲述. 比如用连通性引入无理数,用连通的全序域定义实数空间. 根据几年来的教学实践,分两步教学的效果还是比较满意的. 教材中也为另一种讲法作了安排,可以把第二章的确界与第九章的实数公理系统作为预备知识,把区间套和连续函数中间值定理的证明放到第三章,第九章只保留紧性、完备性及其应用和上、下极限,这种讲法也是可取的. 如果把紧性及其应用也放到第三章,从逻辑顺序上看是完整些,学生接受来说也不会有什么困难,但对训练来说可能难以保证.

作者二十几年来一直从事数学分析课程的教学工作,曾与许多同事一起工作过,从他们那里学到不少有益的东西. 特别在七十年代,教研室组织过多次极限和微分概念的讨论,这些讨论使我受益匪浅. 在这里向他们表示感谢.

本书由李正元副教授初审,沈燮昌教授统一全书. 他们对本书提出了一些修改的意见,书稿送出版社后,又经欧阳光中副教授与董延闿教授对本书作了认真细致的审阅,提出了许多宝贵的修改意见,对他们的宝贵意见,我谨表示深深地谢意.

方企勤

1985 年于北京大学数学系

第一册目录

第〇章　预备知识

§0.1 逻辑符号

为了书写方便,我们常采用以下一些逻辑符号.

设 S_1, S_2 是两个陈述句,它们可以指命题也可以指条件. 符号

$$S_1 \Longrightarrow S_2$$

表示命题(或条件) S_1 蕴涵命题(或条件) S_2; 符号

$$S_1 \Longleftrightarrow S_2$$

表示命题(或条件) S_1 与命题(或条件) S_2 等价.

符号 $\forall$ 表示任意取定,而符号 $\exists$ 表示存在.

孤立地看这些符号没有什么意思,但组合起来可以表示一句话,这句话可以是正确的,也可以是错误的. 比如

$\exists x$,使得 $\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{5}{2}$ (正确);　　$\forall x, \exists y$,使得 $x + y = 1$ (正确);

$\forall x, \exists y$,使得 $x > y$ (正确);　　$\exists x, \forall y$,使得 $x > y$ (错误).

后一句话是说,可以找到一实数,它比任何实数都大,这显然是错误的.

§0.2 集合初步

自 Cantor 在十九世纪末创建集合论以来,集合论的概念和方法已渗入到数学的各个分支,成为数学的一种语言. 集合论本身也发展成数学的一个分支,内容十分丰富.

集合不能给予严格的定义,因为定义是用已知的概念去定义未知的概念. 比如有理数去定义无理数,这里我们认为有理数是已知的,若有人喜欢刨根问底,觉得有理数是什么也不清楚,我们可以用整数来定义有理数,进一步用自然数来定义整数,用集合来定义自然数. 这个过程不可能无穷无尽下去,总有一个概念不能定义,在数学里集合概念就到头了,不能再用其它的数学概念来定义. 虽然如此,我

们可以给集合一个描述. 先看几个集合的例子:

(1) 所有自然数的全体为一集合,记作 $\mathbb{N}$;

(2) 所有小于 10 并且是偶数的自然数全体为一集合;

(3) 方程 $x^2+5x+4=0$ 的根全体为一集合;

(4) 具有北京市户口的人全体为一集合.

尽管集合没有定义,但我们能理解到它是什么意思. 一般来说,把具有某种共同特征的事物的全体叫**集合**,属于集合的每个个体叫作该集合的**元素**.

例 (1) 中集合的特性是正整数,例 (4) 中集合的特性是具有北京市户口. 根据给定的特性,我们可以判断每一个元素是属于这个集合,还是不属于这个集合. 前面三个例子是数集,例 (4) 是非数集. 以后我们只讨论数集.

集合用大写字母 A,B,C,X,Y,Z 表示,元素用小写字母 a,b,c,x,y,z 表示.

设 A 是一个集合,a 是 A 的元素,记作

$$a\in A;$$

反之,a 不是 A 的元素,记作

$$a\,\overline{\in}\,A \quad \text{或} \quad a\notin A.$$

0.2.1 集合表示法

集合有两种表示法: 一是列举法,例如集合

$$A=\{2,4,6,8\},$$

这种表示法是将集合的元素在花括弧内一一列举出来; 另一种是描述法,例如集合

$$A=\left\{x\,\middle|\,x^2-5x+4=0\right\},$$

这种表示法将花括弧分两部分,用记号 | 隔开,前面为元素的代表符号,用 x 或其它符号,后面为元素具有的性质.

第一种表示法在数学分析中用处不大,因为我们常用的集合为无穷个元素组成,无法一一列出,例如所有实数的集合就不可能写出来.

集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记作 $[a,b]$; 集合 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为**开区间**,记作 (a,b); 记号 $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$ 可作类似理解.

0.2.2 集合的子集、包含、相等

两个集合 A,B,若对任意 $a\in A$,都有 $a\in B$,这时集合 A 包含于集合 B,称 A 是 B 的**子集**,记作

$$A\subseteq B \quad \text{或} \quad B\supseteq A.$$

例如 $A=\{1,2,3,4,5\}$,则集合

$$\{1},\quad \{1,2\},\quad \{1,3,5\}$$

是 A 的子集. 集合 $\{1\}$ 表示由 1 这一元素组成的集合,概念上不同于元素 1 本身,

我们可以记

$$\{1\} \subseteq A, \quad 1 \in A.$$

为了运算方便，我们把不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 例如

$$\left\{x \,\middle|\, x^2+1=0,\ x \text{ 是实数}\right\} = \varnothing.$$

空集包含于任一集合，即

$$\varnothing \subseteq A.$$

否则，至少有一元素属于 $\varnothing$ 而不属于 A，显然这是不可能的.

根据集合包含关系 $\subseteq$ 的定义，显然有：$A \subseteq A$；若 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$.

若两集合 A, B 满足 $A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记作

$$A = B.$$

例如

$$\{1,2,3,4\} = \{4,3,2,1\} = \{1,1,2,3,4\}.$$

若 $A \subseteq B$，且 $A \neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A \subsetneqq B$.

0.2.3 集合的运算

集合除包含关系外，还可以考虑集合之间的并，交，差等运算.

给定集合 A, B，集合 A, B 的**并**记为 $A \cup B$，它是 A, B 全部元素组成的集合，定义为

$$A \cup B := \left\{x \,\middle|\, x \in A \text{ 或 } x \in B\right\}.$$

用平面图形表示集合，图形的点表示集合的元素，则 A, B 图形合在一起就是并集 $A \cup B$ 的图形. 如图 0.2.1 所示.

由并集的定义，显然有：$A \cup \varnothing = A$；$A \cup A = A$；

$$A \cup B = B \cup A; \qquad \text{（交换律）}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C). \qquad \text{（结合律）}$$

给定集合 A, B，两集合的**交**记为 $A \cap B$，它由 A, B 的公共元素组成，定义为

$$A \cap B := \left\{x \,\middle|\, x \in A \text{ 与 } x \in B\right\}.$$

集合 A, B 图形的公共部分（见图 0.2.2）就是交集的图形.

图 0.2.1　并集

图 0.2.2　交集

图 0.2.3　补集

由交集的定义，显然有：$A \cap \varnothing = \varnothing$；$A \cap A = A$；

$$A \cap B = B \cap A; \qquad \text{（交换律）}$$
$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cap C). \qquad \text{（结合律）}$$

并且，若 $A \subseteq B$，则 $A \cap B = A$.

给定集合 A, B，两集合的**差**记为 $A - B$ 或 $A \backslash B$，它是在 A 内而不在 B 内的元素组成的集合（见图 0.2.3），定义为

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \overline{\in} B\}.$$

显然有

$$A - A = \varnothing; \quad A - \varnothing = A; \quad \varnothing - A = \varnothing; \quad A - B = A - (A \cap B).$$

假设我们所考察的集合都是更大集合 X（如实数集）的子集，这时我们把 A 对 X 的差集称为 A 的**补集**，记为 $\complement A$，即

$$\complement A := X - A.$$

思考题　证明：

$$\complement A \cap \complement B = \complement(A \cup B); \quad \complement A \cup \complement B = \complement(A \cap B).$$

§0.3 绝对值与不等式

设 x 是实数，x 的**绝对值**为一非负实数，记为 $|x|$，定义为：

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

例如 $|3.5| = 3.5$，而 $|-3.5| = 3.5$.

图 0.3.1　数轴

为说明绝对值的几何意义，我们作一直线，在直线上取定方向，原点 O 和单位长度以后，就称此直线为一**数轴**. 实数可以与数轴上的点建立起一一对应，每一实数可用数轴上一点来表示，不同的实数用数轴上不同的点表示，因此数与点可以不加区分（严格来说，这一看似显然的事实只有在第九章对实数理论进行严格讨论后才能成立，在这里，我们不妨先承认之）. 这时，$|x|$ 就表示点 x 到原点 O 的距离.

由图 0.3.1 可见：若 $r > 0$，点 x 位于区间 $(-r, r)$ 上时，则点 x 到原点的距离小于 r；反之，若点 x 到原点的距离小于 r，则点 x 位于区间 $(-r, r)$ 上，即得

性质 0.3.1　若 $r > 0$，则

$$|x| < r \iff -r < x < r.$$

容易证明

性质 0.3.2　给定实数 x, y，有

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|,$$

当且仅当 x 与 y 同号时,上式等号成立.

用数学归纳法容易得到

推论 0.3.1 对任意 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

推论 0.3.2

$$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|.$$

证明 由

$$|x| = |x-y+y| \leqslant |x-y|+|y|,$$

可得

$$|x|-|y| \leqslant |x-y|.$$

同理

$$|y|-|x| \leqslant |y-x| = |x-y|,$$

所以

$$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|.$$ ■

性质 0.3.3

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

分情况讨论易知上式成立.

需要注意的是

$$\sqrt{x^2} = |x|,$$

因为左边取算术平方根是一个非负实数.

复习题〇

1. 用数学归纳法证明下列各题.

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)} = 1-\dfrac{1}{n+1}$;

(2) $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

(3) $|\sin nx| \leqslant n|\sin x|$;

(4) $\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cdots \cdot \cos 2^n\alpha = \dfrac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$,其中 $\alpha \neq k\pi$, k 为整数.

2. 证明,如果论断

$$1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$$

对 $n=k$ 是成立的,则这个论断对 $n=k+1$ 也是成立的. 解释这个论断不是对任意 n 成立.

3. 设 $x>-1$,且 $x\neq 0$,$n\geqslant 2$,证明,

$$(1+x)^n>1+nx.$$

4. 证明,

(1) 对于 $n\geqslant 2$,有

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1};$$

(2) 对于 $n\geqslant 2$,有

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;$$

(3) 对于 $n\geqslant 1$,有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4.$$

5. 设 $n\geqslant 1$,证明,

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

6. 证明 $|a-b|\leqslant|a|+|b|$. 判断并说明下面证法的正确性.

$$|a-b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

7. 证明,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\geqslant|a_1|-\sum_{k=2}^{n}|a_k|.$$

8. 解下列不等式.

(1) $|x-1|<3$;　(2) $|3-2x|<1$;　(3) $|1+2x|\leqslant 1$;

(4) $\left|5-\dfrac{1}{x}\right|<1$;　(5) $|x-1|>2$;　(6) $|x+2|>5$;

(7) $|x^2-2|\leqslant 1$;　(8) $|x-5|<|x+1|$.

9. 设 $a<c<b$,证明,

$$|c|\leqslant\max\{|a|,|b|\}.$$

10. 证明,

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

11. 证明,

$$\max\{a,b\}=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2},\quad \min\{a,b\}=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}.$$

并解释其几何意义.

12. 证明,

$$|a+b|^p\leqslant 2^p\max\{|a|^p,|b|^p\},\quad p>0.$$

13. 设 $a,b>0$,证明,

(1) $(a+b)^p\geqslant a^p+b^p$, $p>1$;　(2) $(a+b)^p\leqslant a^p+b^p$, $0<p<1$.

14. 证明,对任意实数 a,b,有

$$\max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\} \geqslant \frac{1}{2}.$$

15. 证明,

$$\frac{1}{4n} < \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}\right)^2 < \frac{1}{2n}.$$

16. 令 $A_n=\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)$, $B_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\big(1+|a_k|\big)$,证明,

$$|A_n-1| \leqslant B_n-1.$$

第一章　函　数

§1.1 函数概念

高等数学与初等数学的区别,在于研究的对象和研究的方法不同. 初等数学研究的对象主要是常量,例如追赶问题中,已知甲、乙的速度与出发时间,要求甲追上乙的时间,这里要求的只是一个数量——时间; 而高等数学所研究的对象是事物的运动规律和现象的变化规律. 比如考察初速度为零的物体,在真空中自由下落时,Galileo 发现物体下落的距离与下落的时间平方成正比. 怎么由这一运动规律,求出物体速度和加速度时间的变化规律. 这里我们要求的已不是一个数,而是物体的运动规律. 在某种意义上,我们可以说初等数学主要是常量的数学,高等数学是变量的数学.

1.1.1 变量与常量

在生产与生活中,我们接触到各种各样的量. 有些量在考察过程中是变化的,取着不同的数值,我们称之为**变量**; 有些量在考察过程中是不变化的,取相同的值,我们称之为**常量**.

比如火车出战、进站、过桥、拐弯时,速度是在变的,速度时快时慢,所以从考察全行程来说,火车的速度为一变量. 若考察火车行驶在两站之间某一行程时,火车的速度也可以是常量. 又比如地面两观察站,观察空中卫星的位置时,观察站与卫星间的距离及联线间的角度是变量,但构成三角形的内角和是不变的,为一常量.

需要指出的是,常量与变量是相对的. 一是指实践中把一个量究竟作为变量处理,还是作为常量处理是相对的. 比如重力加速度 g,在有的问题中我们把各地的 g 看成常量,但在重力探矿中就必须把 g 看成变量. 一是指数学上常量与变量的区分也是相对的,常量我们也把它看作变量,但这变量在变化过程中总是取同一个数值. 这样一来,我们可以说两个变量之和仍为一变量. 否则我们只能说,两个变量之和,一般来说是变量,但在特殊情况下也可以为一常量,显然这对讨论问题带来很大的不便.

习惯上,变量常用字母 x, y, t 来表示,常量常用字母 a, b, c 等表示.

还需要指出的是,严格的讲法,应该是从集合出发,只有元素属于或不属于集合的区分,没有常量与变量的区分,所谓“变量”不过是集合元素的代表符号. 我们这里采用常量、变量等术语,是为了使问题显得形象、直观,以便于初学者理解,而不拘泥于术语上的严格性.

1.1.2 函数定义

在实际问题中,我们关心的不是孤立的量,而是量与量之间的依赖关系,即每一量如何随着另一量的变化而变化. 这里我们暂时只限于讨论两个变量的情形,并从几个具体的例子来说明量与量之间存在的依赖关系.

例 1.1.1 在重力作用下,物体从离地面高为 h 米处自由下落,不计空气阻力时,下落路程 s 与时间 t 满足关系式:

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{1.1.1}$$

这里 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ 是重力加速度,它是常量. t 与 s 是物体下落过程中的两个变量,当 $t = 0$ 时,$s = 0$; 当 $t = \sqrt{2h/g}$ 时,得 $s = h$,表示物体已经到达地面. 所以 t 的变化范围是从 0 到 $\sqrt{2h/g}$,在这范围内,g 的每一个值,由公式 (1.1.1) 即可得到对应 s 的值. 公式 (1.1.1) 给出了变量 s 与变量 t 之间的依赖关系,即所谓的函数关系.

图 1.1.1

例 1.1.2 气象台用自动记录器画出了当地某一天的气温变化图(图 1.1.1),图中纵轴表示气温 T (°C),横轴表示时间 t (小时).

从 0 到 24 小时内的任一时刻 t 的值,根据这条曲线,就可以找出气温 T 的唯一确定的值与之对应. 这条曲线给出了变量 T 与变量 t 之间的函数关系.

例 1.1.3 给定正实数 x,考虑所有不超过 x 的素数个数 N.

对于区间 $(0, +\infty)$ 内每一 x,根据上述对应规则,总有唯一的非负整数 N 与其对应,为了表示 N 依赖于 x,我们记作 $N = \pi(x)$. 显然 N 与 x 没有确切的公式,也没有 N 与 x 的图象曲线,但 N 与 x 的对应关系是客观存在的,所以我们说这个对应关系,给出了 N 与 x 之间的函数关系.

由上面例子可以看出,变量间有没有函数关系,在于有没有对应关系,不在于有没有公式或图象. 这样,就有函数的如下定义.

定义 1.1.1 给定集合 X,若存在某种对应规则 f,对于 X 中每一元素 $x \in X$,都有实数集 $\mathbb{R}$ 中唯一的元素 y 与之对应,则称 f 是从 X 到 $\mathbb{R}$ 的一个**函数**,记作

$$f: X \to \mathbb{R}.$$

函数 f 在 x 点的值记作 $y = f(x)$,而 X 称为函数 f 的**定义域**,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**.

例 1.1.1 中对应规则 f 为:
$$\frac{1}{2}g(\quad)^2,$$
即先对自变量作平方运算,然后再乘常数 $g/2$,函数的定义域为闭区间 $[0,\sqrt{2h/g}]$;

例 1.1.2 中对应规则 f 为给定的曲线,函数的定义域为 $[0,24]$;

例 1.1.3 中对应规则 f 为不超过自变数的素数个数,函数的定义域为开区间 $(0,+\infty)$.

函数定义中包含两个要素,对应规则与定义域. 对应规则比能求值的公式更为一般,有了能求值的公式当然就有对应规则,但有对应规则不一定存在能求值的公式. 所以在函数定义中我们只说:“有实数集 $\mathbb{R}$ 中唯一的元素 y 与之对应”,而不说“能求出实数 y 与之对应”. 从函数定义来说,没有求定义域的问题,但在习惯上函数往往是通过公式给出的,这时候,使式子有意义的自变量取值范围就称为函数的定义域.

在定义中,我们把对应规则 f 称为函数,而把 $f(x)$ 称为函数值. 严格来说,对应规则不是数,是某种规则,而函数值是数,这两者是不同的. 例如 $y=\sin x$,无论 y 或 $\sin x$ 都不能说是 x 的函数,而是函数值,函数是 sin. 知道函数我们可以确定各点的函数值; 反之,知道各点的函数值,也就确定了一个函数. 比如给定 $y=f(x)$, $x\in X$,则由它所确定的函数的平方记为 f^2,
$$f^2: x\longmapsto \big(f(x)\big)^2,\quad x\in X.$$

在分析范围内,除去今后要讲的微分概念及外微分概念之外,我们常把函数与函数值不加区分,函数可以用 f,也可以用 $f(x)$ 或 $y=f(x)$ 来表示,函数值则用 $f(x)$ 表示.

设 A 是 X 的子集,函数 f 在 X 上定义,我们称函数
$$\varphi: x\longmapsto f(x),\quad x\in A,$$
为函数 f 在 A 上的**限制函数**,记作 $f\big|_A$; 相反,函数 f 就称为函数 φ 在 X 上的**扩充或延拓**.

如果两个对应关系有相同的定义域和相同的对应规则,不管变量采用什么记号,都认为是同一个函数. 例如
$$y=\pi x^2,\ \ x\in[0,+\infty),\qquad A=\pi R^2,\ \ R\in[0,+\infty),$$
应认为是同一个函数.

对不同的函数,可以用不同的字母如 g,h 或 φ,ψ 等表示. 如果 $f(x)$ 表示某一函数,而 $g(x)$ 为另一函数,若它们的定义域 X 相同,且对任意 $x\in X$,都有
$$f(x)=g(x),$$
则称这两个函数**相等**. 例如在 $\mathbb{R}$ 上,函数 $f(x)=2\cos^2x-1$ 与 $g(x)=1-2\sin^2x$ 是相等的.

下面再举几个函数的例子.

例 1.1.4　绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

这个函数的对应规则是：在 $x \geqslant 0$ 时按公式 $y = x$ 计算函数值；在 $x < 0$ 时按公式 $y = -x$ 计算函数值. 从函数定义来看，它是定义在 $\mathbb{R}$ 上的一个函数，称为分段定义的函数，而不是两个函数.

例 1.1.5　取整函数 $y = [x]$，记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

当 $x = 3.5$ 时，$[3.5] = 3$；当 $x = 3$ 时，$[3] = 3$；当 $x = -3.5$ 时，$[3.5] = -4$. 一般有

$$[x] \leqslant x < [x] + 1.$$

这个例子中，事实上我们先给出了对应规则，然后用记号 [ ] 表示这一对应规则，记号用熟了以后，也可以说是公式. 所以，一些最基本的公式，实质上是对应规则的符号表示. 例如 $y = \sin x$，是先有角边对应规则，然后引入符号 sin 表示这一对应规则.

例 1.1.6　常值函数 $y = C$.

它的对应规则是：对于自变量 x 的每一个值，都用常数 C 与之对应. 这个例子说明函数定义中“有唯一的 y 值与之对应”，指的是单值的意思，即只有一个 y 值与之对应，不是指一一对应，即不要求对不同的 x，有不同的 y 与之对应.

1.1.3　函数的图象

函数的公式表示法，有它的优缺点. 优点是便于计算、便于推理，但缺点是不直观、不形象. 而我们考虑的问题，寻找方法时，常常凭借函数的直观形象，所以有必要讨论函数的图象表示.

给定 $x \in X$，求出函数值 $f(x)$，以 x 为横坐标，以 $f(x)$ 为纵坐标，可以画出平面上一点 $\big(x, f(x)\big)$. 然后让点 x 在定义域 X 上变化，相应的点 $\big(x, f(x)\big)$ 就画出平面上一条曲线 $y = f(x)$，这条曲线就称为函数 $f(x)$ 的图象.

定义 1.1.2　称平面上点集

$$D = \left\{ \big(x, f(x)\big) \,\middle|\, x \in X \right\}$$

为函数 $f(x)$ 的**图象**.

一般来说，函数的图象为一曲线，函数不同，所画出的曲线也不同. 给定一曲线（设曲线与垂直线最多只有一个交点），也就是给定一个函数，所以函数与上述曲线可以不加区分，把函数说成曲线，也可以把曲线说成函数.

图 1.1.2，图 1.1.3 和 图 1.1.4 分别给出了例 1.1.4，例 1.1.5 和例 1.1.6 的图象.

并不是每一个函数的图象都能画出来. 比如数学上有名的 Dirichlet 函数，它

图 1.1.2

图 1.1.3

图 1.1.4

对人们提高函数概念的认识是有意义的,其定义为:

$$D(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x):=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q};\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}.\end{cases}$$

函数也可以解释成变换、映照或映射,它把集合 X 中的点,变为集合

$$\{\,f(x)\,|\,x\in X\,\}$$

中的点. 上述集合称为函数的**值域**,记作 $f(X)$. 设点 $x\in X$,称 $y=f(x)$ 是 x 的**象**,而 x 则称为 y 的**原象**. 这时例 1.1.4,例 1.1.5 和例 1.1.6 的函数可分别用图 1.1.5,图 1.1.6 和 图 1.1.7 来表示.

图 1.1.5

图 1.1.6

图 1.1.7

习 题 1.1

1. 判断并说明下列函数是否相等.

(1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$, $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$; (2) $f(x)=x$, $g(x)=(\sqrt{x})^2$;

(3) $f(x)=\log_a x^2$, $g(x)=2\log_a x$; (4) $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x^2-1}$.

2. 设

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 1;\\ x^2, & x>1.\end{cases}$$

求 $f(x)$, $f\big(f(1)\big)$.

3. 设 $f(x)=2x^2+2x-4$. 求 $f(1)$, $f\big(f(1)\big)$, $f(x^2)$, $f^2(x)$, $f(-x^2)$, $f(a+b)$, $f(a)+f(b)$.

4. 设 $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$.

(1) 求 $f(1)$, $f\big(f(1)\big)$, $f\Big(f\big(f(1)\big)\Big)$; (2) 求 $f(\sqrt{2})$;

(3) 证明,对任意 $x>0$,且 $x\neq\sqrt{2}$,有 $|f^2(x)-2|<|x^2-2|$.

5. 确定下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{\log\frac{1}{4}(5x-x^2)}$; (2) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{2x^2+5x+3}$;

(3) $y=\sqrt{\cos x^2}$;　(4) $y=\log\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

6. 确定函数 $y=\sqrt{x-x^2}$ 的定义域和值域.

7. 作出下列函数的图象.

(1) $y=|x-1|$;　(2) $y=x-[x]$;　(3) $y=\log(1+x)$;

(4) $y=\log ax$, $a=\pm 2$;　(5) $y=3\sin 2\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$;　(6) $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{8}\right)$.

8. 作出函数 $y=|x-a|+\dfrac{1}{2}|x-b|$ 的图象,其中 $a<b$.

9. 设 $f(x)$ 如图 1.1.8 所示,试写出其表达式,并作出下列函数的图象.

(1) $y=f(-x)$;　(2) $y=-f(x)$;　(3) $y=|f(x)|$;

(4) $y=f(|x|)$;　(5) $y=f\left(\dfrac{x}{2}\right)$;　(6) $y=f(2x)$.

10. 某水渠的横断面是一个等腰梯形(见图 1.1.9),底宽 2 米,坡度为 1 : 1 (即倾角为 45°),称 $ABCD$ 为过水断面,确定过水断面的面积 S 与水深 h 的函数关系.

图 1.1.8

图 1.1.9

图 1.1.10

图 1.1.11

11. 一窗户(见图 1.1.10)下面为矩形,上面为半圆形,周长为 ℓ,试将窗户的面积表示成底边 x 的函数.

12. 梯形如图 1.1.11 所示,当一垂直于 x 轴的直线扫过该梯形时,若直线的垂足为 x $(x\in\mathbb{R})$,试将扫过面积表示为 x 的函数.

§1.2　函数的几种特性

1.2.1　函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 X 关于原点对称,即 $x\in X$ 时,有 $-x\in X$. 若函数满足,对任意 $x\in X$,都有

$$f(-x)=-f(x), \tag{1.2.1}$$

则称 $f(x)$ 是**奇函数**; 若函数满足,对任意 $x\in X$,都有

$$f(-x) = f(x), \tag{1.2.2}$$

则称 $f(x)$ 是**偶函数**.

奇函数的图象是关于原点对称的. 因为由 (1.2.1),若 $\big(x, f(x)\big)$ 在图象上,则它的关于原点对称的点 $\big(-x, -f(x)\big) = \big(-x, f(-x)\big)$ 也在图象上(见图 1.2.1).

偶函数的图象是关于 y 轴对称的. 因为由 (1.2.2),若 $\big(x, f(x)\big)$ 在图象上,则它的关于 y 轴对称的点 $\big(-x, f(x)\big) = \big(-x, f(-x)\big)$ 也在图象上(见图 1.2.2).

图 1.2.1 奇函数

图 1.2.2 偶函数

例如函数 $y = \cos x$, $y = x^2$ 是偶函数,函数 $y = \sin x$, $y = x^3$ 是奇函数,而函数 $y = \sin x + \cos x$ 既非奇函数也非偶函数.

1.2.2 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义,若对任意 $x_1, x_2 \in X$,且 $x_1 < x_2$ 时,有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad \big(f(x_1) \geqslant f(x_2)\big),$$

则称 $f(x)$ 在此区间上**单调上升或单调递增**(**单调下降或单调递减**).

又若 $x_1 < x_2$ 时,有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \big(f(x_1) > f(x_2)\big),$$

则称 $f(x)$ 在此区间上**严格单调上升或严格单调递增**(**严格单调下降或严格单调递减**).

上述函数统称为**单调函数**.

例如 $y = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调上升,在 $(-\infty, 0)$ 上严格单调下降; $y = x^3$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调上升; $y = [x]$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调上升.

1.2.3 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义,若存在 $M > 0$,使得对于任意 $x \in X$,都有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上是**有界的**.

例如 $y = \sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上是有界的,因为取 $M = 1$,对任意 $x \in \mathbb{R}$,都有 $|\sin x| \leqslant 1$.

函数在 X 上有界,从几何上看,即它的图象(见图 1.2.3)位于直线 $y = -M$ 与 $y = M$ 之间. 那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界,即找不到直线 $y = M$ 和 $y = -M$,使曲线全部落在两直线之间. 这么说不好检验,为了便于检验,我们不妨换一种方式来

说：函数 $f(x)$ 在 X 上无界，即任意取直线 $y=M$ 和 $y=-M$，曲线不全落在两直线之间(若曲线全落在两直线之间，必然导致函数有界)，而曲线不全落在两直线之间，意味着总有一点落在两直线之外. 于是，我们就得到了函数 $f(x)$ 在 X 上无界的定义：

设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义，若对于任意 $M>0$，都存在 $x'\in X$，使得

$$|f(x')|>M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上是**无界的**.

例如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是无界的. 因为对任意 $M>0$，可以取 $x'=\dfrac{1}{2M}\in(0,+\infty)$，则

$$f(x')=2M>M,$$

图 1.2.3　有界函数

所以函数在 $(0,+\infty)$ 上无界.

我们可以发现一条规律，只要把有界定义中的“存在”换成“任意”，“任意”换成“存在”，“$\leqslant$”换成“$>$”，就是函数无界的定义.

1.2.4　函数的周期性

设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义，若存在 $\ell>0$，使得对任意 $x\in\mathbb{R}$，都有

$$f(x+\ell)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 是周期函数，而 ℓ 称为函数 $f(x)$ 的一个**周期**.

显然周期函数有无穷多个周期. 假如 ℓ 是函数的周期，则有

$$f(x+2\ell)=f\big((x+\ell)+\ell\big)=f(x+\ell)=f(x),$$

所以 2ℓ 也是 $f(x)$ 的周期. 一般地，有

$$f(x+k\cdot\ell)=f(x),$$

其中 k 为正整数.

若无穷多个周期 ℓ 中，有一个最小的正数 T，则称 T 为周期函数 $f(x)$ 的**最小正周期**，简称**周期**.

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 是周期为 2π 的函数，因为

$$\sin(x+2\pi)=\sin x.$$

不在整个实轴上定义的函数，也可以讨论它的周期性. 比如正切函数 $t=\tan x$ 的定义域为实轴除去点

$$x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\dots,$$

同样可以讨论它的周期性. 因为

$$\tan(x+\pi)=\tan x,$$

所以 $\tan x$ 是周期为 π 的周期函数.

既然周期函数的值每隔一个周期都是相同的,所以给周期函数作图时,只要作出一个周期的图象,然后周而复始的画这图象,即得整个周期函数的图象.

对 Dirichlet 函数 $D(x)$ 而言,任何有理数 ℓ 都是它的周期. 因为有理数之和为有理数,无理数与有理数之和为无理数,所以

$$D(x+\ell)=D(x),$$

但它没有最小的正周期.

习 题 1.2

1. 对下列函数

(1) $y=|\sin x|$; (2) $y=x-[x]$; (3) $y=\tan|x|$;

(4) $y=\sec 2x$; (5) $y=\cos x+\sin x$; (6) $y=\sqrt{x(2-x)}$,

分别讨论

(1) 函数的定义域和值域; (2) 函数的奇偶性;

(3) 函数的周期性; (4) 作出函数的图象.

2. 证明 $y=\log\bigl(x+\sqrt{1+x^2}\bigr)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是奇函数,且严格单调上升.

3. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为奇函数,且在 $[0,+\infty)$ 上严格单调上升,证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调上升.

4. 设 $f(x)=\sqrt{x}$ $(0\leqslant x<1)$.

(1) 将 $f(x)$ 延拓到 $(-1,1)$ 上,使其成为偶函数;

(2) 将 $f(x)$ 延拓到 $\mathbb{R}$ 上,使其成为周期为 1 的周期函数.

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,a)$ 上有定义,这里 $a>0$.

(1) 将 $f(x)$ 延拓到 $(-a,a)$,使其成为偶函数;

(2) 将 $f(x)$ 延拓到 $\mathbb{R}$ 上,使其成为周期为 a 的周期函数.

6. 证明,两个奇函数之积为偶函数,而奇函数与偶函数之积为奇函数.

7. 证明,任一在 $\mathbb{R}$ 上定义的函数都可分解为奇函数与偶函数之和.

8. 设 $f(x)$ 是周期为 T $(T>0)$ 的周期函数,证明,$f(-x)$ 也是周期为 T 的周期函数.

9. 设 $f(x),g(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的单调函数,证明,$f\bigl(g(x)\bigr)$ 也是 $\mathbb{R}$ 上的单调函数.

10. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上定义,$x_1,x_2>0$. 证明,

(1) 若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调下降,则 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$;

(2) 若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调上升,则 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$.

11. 设 $x_1,x_2>0$. 证明,

(1) $(x_1+x_2)^p\leqslant x_1^p+x_2^p$, $0<p\leqslant 1$; (2) $(x_1+x_2)^p\geqslant x_1^p+x_2^p$, $p>1$.

12. 设 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 上单调上升. 证明,$\max\{f(x),g(x)\}$ 和 $\min\bigl(f(x),g(x)\bigr)$ 也在 (a,b) 上单调上升.

13. 用肯定语气叙述,在 $\mathbb{R}$ 上,

(1) $f(x)$ 不是奇函数; (2) $f(x)$ 不是周期函数;

(3) $f(x)$ 不是单调上升函数; (4) $f(x)$ 不是单调函数.

14. 用肯定语气叙述,

(1) $f(x)$ 在 (a,b) 上无上界; (2) $f(x)$ 在 (a,b) 上没有零点;

(3) $f(x)$ 在 (a,b) 上没有比中点函数值更大的点；

(4) $f(x)$ 在 (a,b) 上没有左边函数值比右边函数值都小的点.

§1.3　复合函数与反函数

这节我们将讨论函数的运算. 函数除加、减、乘、除四则运算外,还有复合函数与反函数的运算. 有了函数的运算,才能使我们从几个已知函数出发,构造出许许多多新的函数.

设 $f(x),g(x)$ 在 X 上定义,则

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\ \big(g(x)\neq 0\big)$$

也是 X 上的函数. 四则运算没有什么新的内容,需要讨论的是复合函数与反函数.

1.3.1　复合函数

例如函数

$$y=\sin x^2,$$

可以看成是函数 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 的复合,这时函数 $\sin x^2$ 就称为函数 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 的复合函数. 一般地,有如下的定义.

定义 1.3.1　设函数 $y=f(u)$ 的定义域包含函数 $u=g(x)$ 的值域,则在函数 $g(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数

$$y=f\big(g(x)\big),$$

称为 g 与 f 的**复合函数**,有时也记作 $f\circ g$.

变量 u 称为中间变量,给定自变量 $x\in X$,通过对应规则 g,确定中间变量 u,再通过对应规则 f,确定出因变量 y,这样就建立起自变量 x 与因变量 y 之间的对应规则 $f\circ g$.

我们知道,函数概念中主要是对应规则、定义域和值域. 至于自变量和因变量采用什么记号是无关紧要的. 所以只要 $f(x)$ 的定义域包含 $g(x)$ 的值域,就可以讨论复合函数 $f\big(g(x)\big)$.

若函数 $f(x)$ 的定义域包含 $g(x)$ 的值域,并且函数 $g(x)$ 的定义域包含 $f(x)$ 的值域,那么复合函数 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 存在. 一般来说,

$$f\circ g\neq g\circ f.$$

例如 $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^2$,则

$$\sin x^2\neq(\sin x)^2.$$

这说明复合函数与四则运算不同,它没有交换律. 容易证明结合律是成立的,即

$$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h.$$

以后应用时,既要会把几个简单函数复合成一个函数,也要会把一个函数拆成几个简单函数的复合.

1.3.2 反函数

在圆面积公式

$$S=\pi R^2$$

中,R 是自变量,而 S 为因变量,表示圆的面积随半径的变化而变化. 事实上,半径 R 与面积 S 同时发生变化,很难说哪个先变,哪个后变,因此没有理由一定要把 R 取作自变量,也可以把面积 S 取作自变量,这时半径 R 就是面积 S 的函数

$$R=\sqrt{\frac{S}{\pi}},$$

这个函数就称为原来面积函数的反函数.

讨论复合函数运算时,我们对函数的定义域和值域加以限制,而对对应规则没有什么限制. 讨论反函数时,我们需要对对应规则加以限制,只有具有一一对应的函数才能求反函数.

一一对应其实不是新的概念. 例如如所有实数与实轴上的点是一一对应的;班上每个同学与其学号是一一对应的. 确切说有下面的定义.

定义 1.3.2 设 $f(x)$ 在 X 上有定义. 对任意 $x_1,x_2\in X$,若

$$x_1\neq x_2 \implies f(x_1)\neq f(x_2),$$

或

$$f(x_1)=f(x_2) \implies x_1=x_2,$$

则称函数 f 在 X 上是**一一对应**的.

所以,一一对应的函数就是把不同的 x 变成不同的 y,具体证明时,常采用等号形式比较方便.

一一对应的函数必有反函数存在.

定义 1.3.3 设 $y=f(x)$ 在 X 上一一对应,值域为 Y,对于任意 $y\in Y$,用满足 $f(x)=y$ 的唯一确定的 $x\in X$ 与之对应,由这样的对应关系所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$,就称为原来函数 $y=f(x)$ 的**反函数**.

函数与反函数的对应规则、定义域和值域是不同的,反函数的定义域和值域,恰好是原来函数的值域和定义域,即

$$f: X\to Y \implies f^{-1}: Y\to X.$$

显然有

$$f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_X,\quad f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_Y,\quad (f^{-1})^{-1}=f: X\to X,$$

其中 id_X 表示集合 X 上的恒等变换.

易知严格单调函数是一一对应的,所以严格单调的函数,必有反函数存在. 反之,一一对应的函数,不一定是严格单调的. 例如下列函数(见图 1.3.1)

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1; \\ 3-x, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

在 $[0,2]$ 上是一一对应的,但不是单调函数. 这个函数的反函数仍是它自己.

图 1.3.1

图 1.3.2

下面讨论反函数的图象. 因为从方程的观点来看,函数与反函数没有什么区别,点 (x,y) 满足方程 $y=f(x)$,也一定满足方程 $x=f^{-1}(y)$. 所以,取 x 为自变量画出的函数曲线 $y=f(x)$,若改取 y 为自变量,它就是反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的曲线(见图 1.3.2). 这样观察反函数曲线时,就要沿着 y 轴去看,很不方便. 习惯上我们把自变量轴放在水平位置,为此,只要把 xy 平面绕直线 $y=x$ 选择 180°, y 轴就转到水平位置, x 轴转到垂直位置,旋转后的曲线就是反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图象(见图 1.3.3). 又一个习惯,当单独讨论反函数时,总是把自变量用 x 来记,因变量用 y 来记,所以旋转后,再把记号改过来,把 x 改成 y, y 改成 x,即为反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象(见图 1.3.4). 反函数与原函数放在一起讨论时,仍将反函数记为 $x=f^{-1}(y)$.

图 1.3.3

图 1.3.4

需要指出的是,变量记号不是本质的,我们可以把 $x=f^{-1}(y), y\in Y$,称为 $y=f(x)$ 的反函数,同样,我们也可以把 $y=f^{-1}(x), x\in Y$,称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

反函数还有另一种定义,正如实数 a 的倒数有两种定义(一种是: $a\neq 0$,称 $1/a$ 为 a 的倒数; 令一种是: 若存在 $b\in\mathbb{R}$,使得 $a\cdot b=1$,则称 b 为 a 的倒数)一样,反函数也可以用复合函数来定义. 我们把它写成定理.

定理 1.3.1　给定函数 $y=f(x)$,其定义域和值域分别记作 X 和 Y,若在集合 Y 上存在函数 $g(y)$,满足对任意 $x\in X$,都有

$$g\big(f(x)\big)=x,$$

则对任意 $y \in Y$,有

$$g(y) = f^{-1}(y).$$

证明　问题是要证 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 存在,且等于 $g(y)$.

先证明反函数存在,即要证 $f(x)$ 在 X 上是一一对应的. 事实上,对于任意 x_1, $x_2 \in X$,若 $f(x_1) = f(x_2)$,由定理条件

$$g\big(f(x_1)\big) = x_1, \quad g\big(f(x_2)\big) = x_2.$$

由于函数 $g(y)$ 在同一点的函数值应相同,因此 $x_1 = x_2$,这就确保了函数 $f(x)$ 在 X 上是一一对应的.

其次证明 $g(y) = f^{-1}(y)$. 事实上,对于任意 $y \in Y$,因 y 属于 $f(x)$ 的值域,所以存在 $x \in X$,使得

$$y = f(x).$$

由反函数定义

$$x = f^{-1}(y),$$

又由定理条件可知

$$g(y) = g\big(f(x)\big) = x,$$

结合以上两式,即可得到

$$g(y) = f^{-1}(y). \qquad \blacksquare$$

习 题 1.3

1. 设 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$,证明,$f\big(f(x)\big) = x$.

2. 设 $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$,确定 $f\big(f(x)\big) = x$ 的条件.

3. 确定下列函数的反函数及其定义域.

(1) $y = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right),\ x \in (0, +\infty)$;　　(2) $y = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}),\ x \in \mathbb{R}$.

4. 在下列指定定义域上确定函数 $y = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ 的反函数.

(1) $0 < |x| < 1$;　　(2) $|x| > 1$.

5. 若 $f(x)$ 是一一对应的奇函数,证明其反函数也是奇函数.

6. 讨论函数 $y = x - \varepsilon \sin x$ $(0 < \varepsilon < 1)$ 的反函数的存在性.

7. 设 $f(x) = \arccos x$,而 $g(x) = \sin x$. 确定复合函数 $f\big(g(x)\big)$ 和 $g\big(f(x)\big)$ 的定义域和值域,并作出它们的图象.

8. 设

$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & x \leqslant 0; \\ x, & x > 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0; \\ -x^2, & x > 0. \end{cases}$$

确定复合函数 $f\big(g(x)\big)$ 和 $g\big(f(x)\big)$.

9. 设 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,确定 n 次复合函数 $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x)$.

10. 设 $f(x) = |1+x| - |1-x|$,确定 n 次复合函数 $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x)$.

11. 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上定义,且 $f\big(f(x)\big) \equiv x$.

(1) 确定这种函数的数量;

(2) 在要求 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格上升的条件下,重新确定这种函数的数量.

12. 若 $f(x), g(x)$ 可以按两种顺序复合，且 $f\circ g = g\circ f$，判断并说明 f 与 g 是否互为反函数.

13. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X，值域为 Y，函数 $z=g(y)$ 的定义域为 Y，值域为 Z. 证明，函数 $z=g\big(f(x)\big)$ 有反函数当且仅当 $f(x)$ 和 $g(y)$ 都有反函数，且 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

§1.4　基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，这六种函数统称为**基本初等函数**.

基本初等函数经过有限次加，减，乘，除，复合运算所得到的函数，称为**初等函数**. 要研究初等函数，首先就要熟悉基本初等函数的性质. 基本初等函数的简单性质，在初等数学中已经讨论过，这里只是结合图象把它们的性质复习一下.

一、常数函数

常数函数 $y=C\ (x\in\mathbb{R})$ 的图象是通过 $(0,C)$ 点，且平行于 x 轴的直线（见图 1.4.1）.

二、幂函数

图 1.4.2 是幂函数 $y=x^\alpha, (0<x<+\infty, \alpha\neq 0)$ 的图象.

当 $\alpha>0$ 时，函数 $y=x^\alpha$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格上升；而当 $\alpha<0$ 时，函数 $y=x^\alpha$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下降.

函数 $y=x^\alpha$ 与 $y=x^{\frac{1}{\alpha}}$ 互为反函数.

图 1.4.1　常数函数

图 1.4.2　幂函数

图 1.4.3　指数函数

图 1.4.4　对数函数

三、指数函数

图 1.4.3 是指数函数 $y=a^x, (a>0, a\neq 1)$ 的图象.

当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格上升；而当 $a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上

严格下降.

四、对数函数

图 1.4.4 是对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1,0<x<+\infty)$ 的图象.

当 $a>1$ 时 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格上升；而当 $a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下降.

函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数.

五、三角函数

图 1.4.5 是正弦函数 $y=\sin x$ $(x\in\mathbb{R})$ 的图象，余弦函数 $y=\cos x$ $(x\in\mathbb{R})$ 的图象为图 1.4.6.

正切函数 $y=\tan x\,\big(x\neq(k+1/2)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\dots\big)$ 的图象为图 1.4.7，而图 1.4.8 是余切函数 $y=\cot x$ $(x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\dots)$ 的图象.

图 1.4.5　正弦函数

图 1.4.6　余弦函数

图 1.4.7　正切函数

图 1.4.8　余切函数

六、反三角函数

反三角函数不是一一对应的，为了讨论反函数，我们需要取定一个严格单调分支. 对于正弦函数，我们取 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上这一严格上升分支；对于余弦函数，我们取 $[0,\pi]$ 上这一严格下降分支；对于正切函数，取 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上这一严格上升分支；对于余切函数，取 $(0,\pi)$ 上这一严格下降分支. 每个分支都是一一对应的函数，所以保证了反函数存在.

反正弦函数 $y=\arcsin x\left(x\in[-1,1],-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象为图 1.4.9；反余弦函数 $y=\arccos x\,\big(x\in[-1,1],0\leqslant y\leqslant\pi\big)$ 的图象为图 1.4.10.

反正切函数 $y=\arctan x\left(x\in\mathbb{R},-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象为图 1.4.11；反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x\,\Big(x\in\mathbb{R},0<y<\pi\Big)$ 的图象为图 1.4.12.

图 1.4.9　反正弦函数

图 1.4.10　反余弦函数

图 1.4.11　反正切函数

图 1.4.12　反余切函数

例 1.4.1　作出函数 $y=1+2\sin\pi x$ 的图象.

解　注意到

$$2\sin\pi(x+2)=2\sin\pi x,$$

由此可知函数 $2\sin\pi x$ 是以 2 为周期的周期函数,振幅为 2,因此可以先画出 $2\sin\pi x$ 一个周期的图形(见图 1.4.13),然后将此图象再往上平移 1 个单位,即为所求函数的图象(见图 1.4.14). ■

图 1.4.13

图 1.4.14

图 1.4.15

例 1.4.2　作出函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象.

解　把这个函数与 $y=\sin x$ 比较,发现这两个函数振幅相同,周期也相同,而函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在 $x=-\dfrac{\pi}{4}$ 处的值正好等于函数 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 处的值,所以函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象,可以由函数 $y=\sin x$ 的图象往左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位而得到(见图 1.4.15). ■

例 1.4.3　证明,$y_n=\cos(n\arccos x)$ 是 $[-1,1]$ 上的 n 次代数多项式.

证明　容易看出 $y_0=1$,而 $y_1=\cos(\arccos x)=x$.

若结论对 $k=0,1,\ldots,n-1$ 已成立,要证 $k=n$ 时也成立. 由恒等式

$$y_n+y_{n+2}=\cos(n\arccos x)+\cos\big((n-2)\arccos x\big)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\cos\big((n-1)\arccos x\big)\cos(\arccos x) \\
&= 2x \cdot y_{n-1}
\end{aligned}
$$

由此可得

$$y_n = 2x \cdot y_{n-1} - y_{n-2}, \quad n \geqslant 2.$$

由归纳假设，y_{n-1} 和 y_{n-2} 分别为 $n-1$ 次和 $n-2$ 次代数多项式，所以 y_n 是 n 次代数多项式. ■

例 1.4.3 中多项式 y_n 称为 **Чебышёв** 多项式.

例 1.4.4 设 $f(x) = \arctan x$，$g(x) = \tan x$，确定复合函数 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$，并作出它们的图象.

证明 当 $g(x)$ 在 f 的值域 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上考虑时，g 与 f 互为反函数，所以

$$g\big(f(x)\big) \equiv x, \quad x \in \mathbb{R},$$

图象为图 1.4.16.

图 1.4.16

图 1.4.17

为了确定 $f\big(g(x)\big)$，注意在 g 的定义域上，f 不是 g 的反函数，但由 g 的周期性可证 $f \circ g$ 的周期性. 因为 $g(x+\pi) = g(x)$，所以

$$f\big(g(x+\pi)\big) = f\big(g(x)\big),$$

即 $f\big(g(x)\big)$ 也是周期为 π 的周期函数，只要作出函数在一个周期上的图象即可. 当限制自变量在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 区间时，f 是 g 的反函数，由反函数定义

$$f\big(g(x)\big) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

所以函数 $f\big(g(x)\big)$ 的图象（见图 1.4.17）为无穷多条平行的直线段. 利用取整函数的记号，可以统一表达式为

$$f\big(g(x)\big) = x - \left[\frac{1}{\pi}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]\pi, \quad x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

上式中，$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. ■

复习题一

1. (1) 有一个身高为 a 的人,在离路灯杆 b 处沿一直线以匀速 c 在路灯下行走,设路灯高为 $h\ (h>a)$,确定他的头影的轨迹;

(2) 如果这个人沿着曲线 $y=f(x)$ 行进,重新确定他的头影的轨迹.

2. (1) 在同一坐标系上画出 $y_1=\sin x$ 和 $y_2=\dfrac{2}{\pi}x$ 在 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 部分 的图象,并观察 y_1,y_2 的图象位置关系;

(2) 通过以上观察证明,在非钝角 $\triangle ABC$ 中,有 $\sin A+\sin B+\sin C>2$.

3. 证明 $f(x)=\sin x+\cos\sqrt{2}x$ 不是一个周期函数.

4. 设 $R(x)$ 为一有理函数. 证明,

(1) 若 $R(-x)=R(x)$,则 $R(x)=R_1(x^2)$,这里 R_1 为某一有理函数;

(2) 若 $R(-x)=-R(x)$,则 $R(x)=xR_2(x^2)$,这里 R_2 为某一有理函数.

5. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义,若 $f\big(f(x)\big)$ 存在唯一的不动点,证明 $f(x)$ 也存在唯一的不动点.

6. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义,若 $f\big(f(x)\big)$ 有且仅有两个相异的不动点 a,b,证明只存在下列两种情况:

(1) a 和 b 都是 f 的不动点; (2) $f(a)=b$, $f(b)=a$.

第二章　极　限

高等数学与初等数学的差别,除了研究对象不同外,主要是研究方法上的不同. 我们知道,初等数学的方法建立在有限观念上,而高等数学的方法则是建立在无限观念之上. 比如初等数学中要求一个数,通过有限步的代数运算,即可求出它的准确值. 但在客观上存在着这样一种数,若只进行有限步的代数运算,则无法求得其准确的值. 例如圆的面积和周长,用有限步代数运算就不能求得其准确值,必须通过无限步逼近,即所谓极限方法,才能求出它的准确值,这就是高等数学的方法. 又比如初等数学要确定数的性质(如是否是素数),理论上通过有限步运算,就能断定它是否具有这一性质; 而高等数学要确定函数的性质,就要通过极限方法才能确定它是否具有此性质.

所以理解极限概念、掌握极限方法,是能否学好高等数学的关键. 只有掌握极限这把钥匙,才能打开通向微积分的大门,变门外汉为驾驭微积分工具的主人.

§2.1　序列极限的定义

2.1.1　概念引入

试求由抛物线 $y = x^2$、x 轴、直线 $x = 1$ 所围成的曲边三角形的面积.

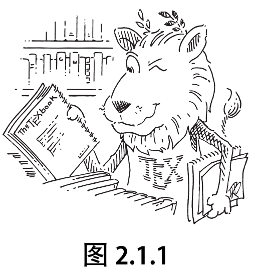

图 2.1.1

我们会求直边形的面积,不会求曲边形的面积. 但是我们可以分两步来求出曲边形面积: 先是通过以直代曲,得到一系列越来越逼近曲边三角形面积的近似值; 然后考察这一系列近似值的变化趋势,从而确定出曲边三角形面积的准确值. 为此,如图 2.1.1 所示,用分点

$$x = 0,\ \ \frac{1}{n},\ \ \frac{2}{n}, \dots\dots, \frac{n-1}{n}, 1,$$

把区间 $[0,1]$ 分成 n 个小区间,相应的把曲边三角形分成 n 个细长的小曲边梯形. 每一个小曲边梯形,用具有同底和左端点函数值为高的矩形近似代替,因而得到曲边三角形面积的近似值

$$\begin{aligned} a \approx x_n &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).\text{①} \end{aligned}$$

其中 x_n 表示图中阶梯形的面积,n 越大阶梯越多,近似程度也就越高,但不管 n 多大总是近似的. 要想从曲边三角形面积 a 的这一系列近似值 x_n 得到准确值 a,就必须考察 n 趋于无穷的过程. n 无限增大时,阶梯形面积 x_n 无限逼近于所求的面积 a. 令 $n \to \infty$,得到

$$x_n = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{3}.$$

即通过考察 n 趋于无穷时,一系列近似值 x_n 的变化趋势,确定出曲边三角形的面积 $a = 1/3$.

在这个例子中,我们求出了值 $a = 1/3$,但我们目的不只是为了求 a 的值,也不只是关心如何以直代曲得到近似值 x_n 或 x_n 的具体表示形式,而是要从考察 n 趋于无穷时,由 x_n 的变化趋势确定出值 a 这一步中,抽象出序列极限的定义.

2.1.2 序列极限定义

一个接一个排起来的一串数叫作**序列**. 例如

$$1,2,3,4,\ldots; \quad 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots; \quad 1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\ldots; \quad 1,-1,1,-1,\ldots \tag{2.1.1}$$

都是序列. 我们只写出序列的前几项,后面用三点来表示未写出无穷多项. 一般用

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

来表示序列,简单记作 $\{x_n\}$,这里 x_n 称为序列的**通项**. 给定序列的通项公式,就可以写出序列的每一项; 反之,给定一个序列,即给出一个映射 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,一般来说可以归纳出通项公式. 比如 (2.1.1) 中第一个序列的通项公式为 x_n; 第二个序列为 $x_n = 1/n$; 第三个序列为 $x_n = 1/2^{n-1}$; 第四个序列为 $x_n = (-1)^{n-1}$. 但序列

$$1.4, 1.41, 1.414, \ldots$$

的第 n 项是 $\sqrt{2}$ 取小数点后 n 位的近似值. 虽然通项的意义是明确的,但不能用明显的公式表示出来.

在求曲边三角形面积的例子中,我们遇到了通项为

$$x_n = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

的序列 $\{x_n\}$,并看出 n 趋于无穷时,通项 x_n 趋于 $a = 1/3$. 在其它问题中,也要考察 n 趋于无穷时,序列变化的趋势. 为此我们引出序列极限的定性描述:

---

① 利用

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} k^2 &= \sum_{k=1}^{m} k(k-1) + \sum_{k=1}^{m} k = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{m+1}\left(k(k-1)(k-2)-(k-1)(k-2)(k-3)\right) + \sum_{k=1}^{m} k \\ &= \frac{1}{3}(m+1)m(m-1) + \frac{1}{2}m(m+1) = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1). \end{aligned}$$

给定序列 $\{x_n\}$,当 n 无限增大时,若 x_n 无限的接近 a,则称 a 为 n 趋于无穷时序列的极限,记作 $x_n \to a\ (n \to \infty)$,或

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

这种描述显然是很不够的,因为"无限增大","无限接近"并未给出确切的含义,只当作一般性用语来理解. 要想给出极限的定义,必须分析一下"无限增大","无限接近"的确切含义是什么.

再回到曲边三角形的例子. 所谓 n 无限增大,x_n 无限接近于 a,是指阶梯形面积 x_n 与曲边三角形面积 a 的误差要多小就能多小,只要 n 充分大. 具体来说,给定误差 $1/100$,只要去 $n=100$,即把 $[0,1]$ 区间 100 等分,每一个小曲边梯形与矩形的误差加起来,就是 x_n 与 a 的误差. 要估计小曲边梯形与矩形误差总和,只需如图 2.1.1 所示,将表示误差的图形平移到以 1 为高,以 $1/100$ 为底的该图左边的矩形上,显然误差总和不超过矩形面积的 $1/100$,所以

$$|x_{100}-a| < \frac{1}{100}.$$

若给定误差 $1/1000$,则只要取 $n=1000$,就有

$$|x_{1000}-a| < \frac{1}{1000}.$$

由此可见,x_n 与 a 的误差要多小就能多小,只要 x_n 充分大. 用希腊字母 ε 表示误差,我们先试着给出极限的定义如下:

若给定 $\varepsilon>0$,总能找到自然数 n,使得

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称序列 x_n 的极限是 a,或 a 是序列的极限.

这个定义是否妥当呢? 从字面上看,它只告诉我们序列有一项 x_n 与 a 的误差小于 ε,这项以后的各项与 a 的误差是否小于 ε 呢? 定义没有说,如果这项以后的项与 a 误差很大,则不能反映出 x_n 无限接近 a,所以定义应修改如下:

如果给定 $\varepsilon>0$,存在 N,使得当 $n>N$ 时,就有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称 x_n 的极限时 a.

这样修改后,保证自某一项以后各项与 a 的误差都小于 ε,究竟是否妥当了呢? 可能想法是对的,但表达还有问题. 给定 $\varepsilon>0$,只是说对一个误差 ε 能找到 N,对别的误差能否找到 N 呢? 定义反映不出来. 如果对于更小的误差 ε_1,不能保证序列自某一项以后各项与 a 的误差小于 ε_1,也不能反映出 x_n 无效接近与 a. 因此,我们就得到了严格的极限定义.

定义 2.1.1 如果对于任意 $\varepsilon>0$,都存在非负整数 N,使得当 $n>N$ 时,就有

$$|x_n-1|<\varepsilon,$$

则称序列 $\{x_n\}$ 的**极限**为 a,记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

或者 $x_n \to a\ (n\to\infty)$.

极限的几何意义为: 作以 a 为中心,以 ε 为半径的邻域 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$,当 $n > N$ 时,有

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon,$$

即随着 n 的变化,观察序列 x_n 在数轴上的变化时,发现开头有限项可能落在邻域外面,或一会儿落在邻域里边,一会儿又落在邻域外边,但当标号大于 N 后,序列的项总在邻域里变动,再也不会落在邻域外边. 从静态来看,以 a 为中心,以任意 ε 为半径作一邻域,若序列在邻域外边只有有限项,则序列的极限是 a.

例 2.1.1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

证明 对于任意 $\varepsilon>0$,则

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \impliedby n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

因此,取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有 $\left|\dfrac{1}{n}\right|<\varepsilon$,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0. \qquad \blacksquare$$

这个例子说明 N 是依赖于 ε,ε 越小,N 越大. 具体找 N 时,可以用分析法,即要使结论成立,看 n 应多大.

例 2.1.2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0\ (0<q<1)$.

证明 对于任意 $\varepsilon>0$,不妨假定 $\varepsilon<1$,则

$$|q^n| = q^n < \varepsilon \impliedby n\log q < \log\varepsilon \impliedby n > \frac{\log\varepsilon}{\log q}.$$

因此,取 $N=\left[\dfrac{\log\varepsilon}{\log q}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有 $|q^n|<\varepsilon$,即

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0. \qquad \blacksquare$$

例 2.1.3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}\ (a>1)$.

证明 因为

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{[a]}\cdot\frac{a}{[a]+1}\cdots\frac{a}{n} < \frac{a^{[a]}}{[a]!}\cdot\frac{a}{n} =: c\cdot\frac{a}{n},$$

所以对于任意 $\varepsilon>0$,有

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{a^n}{n!} < \varepsilon \impliedby \frac{ca}{n} < \varepsilon \impliedby n > \frac{ca}{\varepsilon}.$$

取 $N=\left[\dfrac{ca}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有 $\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|<\varepsilon$,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}, \quad a>1. \qquad \blacksquare$$

在极限定义中,我们关心的不是 N 的具体值,而是 N 的存在性. 所以做题时,不一定直接去解不等式,可以用适当放大法来找 N. 例如从不等式

$$\frac{a^n}{n!}<\varepsilon$$

出发解 n 大于什么很困难,而放大后求出 N 就很容易. 要注意,运用放大法时,不要把含有变数 n 的因子移到不等式的右端,只允许将左端逐步放大. 还应注意反推法书写时,是由后面不等式成立,推出前面不等式成立; 而不是前面不等式成立,推后面不等式成立.

例 2.1.4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>1)$.

证法 1 对于任意 $\varepsilon>0$,有

$$|\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon \Longleftarrow \sqrt[n]{a}<1+\varepsilon \Longleftarrow \frac{1}{n}\log a<\log(1+\varepsilon)$$
$$\Longleftarrow n>\frac{\log a}{\log(1+\varepsilon)}.$$

因此取 $N=\left[\dfrac{\log a}{\log(1+\varepsilon)}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$,即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\quad a>1.$$ ■

证法 2 令 $\sqrt[n]{a}-1=h_n$,为了对 h_n 用适当放大法,我们先估计 h_n. 因为

$$a=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2!}h_n^2+\cdots+h_n^n>nh_n,$$

所以

$$0<h_n<\frac{a}{n}.$$

因此,对任意 $\varepsilon>0$,

$$|\sqrt[n]{a}-1|=h_n<\varepsilon \Longleftarrow \frac{a}{n}<\varepsilon.$$

取 $N=\left[\dfrac{a}{n}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$. ■

习 题 2.1

1. 用 $\varepsilon-N$ 方法验证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2-1}=0,$$

并分别对 $\varepsilon=0.1,0.01$ 确定相应的 N.

2. 用 $\varepsilon-N$ 方法验证下列极限为零.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+n}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4-n}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n-3}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^n}{n!}$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}\ (a>1)$; (8) $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\log(n+1)-\log n\big)$.

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

4. 设 $x_n>0\ (n\geqslant 1)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{x_n}=\sqrt[3]{a}$.

6. 设 $x_n \leqslant a \leqslant y_n\ (n \geqslant 1)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

7. 设 n, p 均为正整数. 证明,

(1) $n^p < \dfrac{(n+1)^{p+1} - n^p}{p+1} < (n+1)^p$; (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p$;

(3) 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p$.

8. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,而 ℓ 为确定的自然数. 证明,$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+\ell} = a$. 试讨论相反的情况.

9. (1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$;

(2) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}$ 都存在,试讨论 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 的存在性.

10. 在序列极限定义中,对于 N 请说明下列问题.

(1) N 是否唯一; (2) N 是否是 ε 的函数;

(3) 前 N 项是否有 $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$.

11. 判断并说明序列极限定义改成下面形式是否可以.

(1) 对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $N > 0$,使得当 $n \geqslant N$ 时,有 $|x_n - a| < \varepsilon$;

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $N > 0$,使得当 $n > N$ 时,有 $|x_n - a| \leqslant \varepsilon$;

(3) 对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $N > 0$,使得当 $n > N$ 时,有 $|x_n - a| < M\varepsilon$,这里 M 为某固定常数.

12. 若对任意 $N > 0$,存在 $\varepsilon > 0$,使得当 $n > N$ 时,有 $|x_n - a| < \varepsilon$,则序列 $\{x_n\}$ 具有什么性质?

13. 若存在 $N > 0$,对任意 $\varepsilon > 0$,使得当 $n > N$ 时,有 $|x_n - a| < \varepsilon$,则序列 $\{x_n\}$ 具有什么性质?

14. 判断并说明下述对 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 的证明的正确性.

证明 对任意 $\varepsilon > 0$,有

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon \iff \frac{1}{n}\log n < \log(1+\varepsilon) \iff \frac{1}{n} < \frac{\log(1+\varepsilon)}{\log n} \leqslant \frac{\log(1+\varepsilon)}{\log 2}.$$

取 $N = \left[\dfrac{\log 2}{\log(1+\varepsilon)}\right]$,则当 $n > N$ 时,有

$$1 - \varepsilon < 1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon,$$

由此即可得到 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. □

§2.2 序列极限的性质与运算

有了极限定义后,自然会问极限有什么性质和怎么求极限. 为此,我们要讨论极限的唯一性、有界性,极限的四则运算和极限不等式.

定理 2.2.1（唯一性） 若序列 $\{x_n\}$ 的极限存在,则极限值是唯一的.

这个定理保证了不管用什么方法求极限,得到的极限值应该是一样的.

证明 我们用反证法. 假设序列极限不唯一,至少有两个不相等的极限值,设为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b,$$

且 $a \neq b$. 不妨设 $a < b$,取 $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$,由极限的定义,存在 N_1,使得当 $n > N_1$ 时,有

$$|x_n - a| < \varepsilon \implies x_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2}.$$

并且存在 N_2，使得当 $n > N_2$ 时，有

$$|x_n - b| < \varepsilon \implies x_n > a - \varepsilon = \frac{a+b}{2}.$$

所以当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时，就有

$$x_n > \frac{a+b}{2} > x_n.$$

显然，这是一个矛盾（见图 2.2.1）. 因此极限值确实是唯一的. ■

图 2.2.1

从函数观点来看，序列就是定义在自然数集合上的函数 $x_n = f(n)$，由函数有界定义，可以得到序列有界的定义.

若存在 $M > 0$，使得对任意 n，都有 $|x_n| \leqslant M$，则称序列 $\{x_n\}$ 有界.

定理 2.2.2（有界性） 若序列 $\{x_n\}$ 有极限，则 $\{x_n\}$ 有界.

证明　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，取 $\varepsilon_0 = 1$，则存在 N，使得当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < 1$，那么

$$|x_n| - |a| \leqslant |x_n - a| < 1 \implies |x_n| < |a| + 1.$$

令

$$M = \max\{1 + |a|, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\},$$

则对任意 n，均有

$$|x_n| \leqslant M,$$

即序列 $\{x_n\}$ 确实是有界的. ■

在证明时必须分清什么时候取定 ε，什么时候任意给定 ε. 上面证明中就必须取定 ε，不能任意给定 ε. 如果改为任意给定 $\varepsilon > 0$，则 N 随 ε 在变，找到的 M 也随 ε 在变，这时的界 M 的意义就不明确，有界性就难以保证.

定理 2.2.3（极限的四则运算） 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$；　　**(2)** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$；

(3) 若 $b \neq 0$，且 $y_n \neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

证明　**(1)** 任给 $\varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，存在 N_1，使得当 $n > N_1$ 时，有

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2};$$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，存在 N_2，使得当 $n > N_2$ 时，有

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，就有

$$\big|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)\big| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

(2) 要使得 $n > N$ 时,$|x_n \cdot y_n - ab| < \varepsilon$,常用的方法是插入一项,这项的两个因子,一个因子与第一项的因子相同,另一个因子与第二项的因子相同. 这样的话,
$$|x_n \cdot y_n - ab| = |x_n \cdot y_n - y_n \cdot a + y_n \cdot a - ab| \leqslant |y_n| \cdot |x_n - a| + |a| \cdot |y_n - b|,$$
所以要使结论成立,只要 $n > N$ 时,利用 $\{y_n\}$ 有界证明
$$|y_n| \cdot |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a| \cdot |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$
即可. 这样我们就得到了下面的证明.

由定理 2.2.2,存在 $M_1 > 0$,使得对任意 n,均有 $|y_n| \leqslant M_1$,令
$$M = \max\{M_1, |a|\} > 0.$$

对任意 $\varepsilon > 0$,由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,存在 $N_1 > 0$,使得当 $n > N_1$ 时,有
$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M};$$
又由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,存在 $N_2 > 0$,使得当 $n > N_2$ 时,有
$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$
取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,则当 $n > N$ 时,就有
$$\begin{aligned}|x_n \cdot y_n - ab| &\leqslant |y_n| \cdot |x_n - a| + |a| \cdot |y_n - b| \leqslant M|x_n - a| + M|y_n - b| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,\end{aligned}$$
即
$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b.$$

(3) 由 (2) 可知,只要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b}$ 即可. 要使 $n > N$ 时
$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{y_n - b}{y_n \cdot b}\right| < \varepsilon,$$
就要先估计 $\{y_n\}$ 的下界. 为此,对于 $\dfrac{|b|}{2} > 0$,由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,存在 N_1,使得当 $n > N_1$ 时,有
$$|b| - |y_n| \leqslant |y_n - b| < \frac{|b|}{2} \implies \frac{|b|}{2} \leqslant |y_n|.$$

对任意 $\varepsilon > 0$,仍由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,存在 N_2,使得当 $n > N_2$ 时,有
$$|y_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon.$$
取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,则当 $n > N$ 时,就有
$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{y_n - b}{y_n \cdot b}\right| \leqslant \frac{2|y_n - b|}{|b|^2} < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{|b|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$
即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=\frac{1}{b}.$$

再由 (2),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\frac{1}{y_n}=a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}.\qquad\blacksquare$$

定理 2.2.3 的结论可以推广至有限个序列的情形. 例如如果每个序列极限都存在,则有

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n+y_n+z_n\right)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n+\lim_{n\to\infty}z_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n\cdot y_n\cdot z_n\right)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n\cdot\lim_{n\to\infty}z_n.$$

例 2.2.1　求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-6n+1}{3n^2+n+7}.$$

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-6n+1}{3n^2+n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\dfrac{6}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{7}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\dfrac{6}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{7}{n^2}\right)}=\frac{4}{3}.\qquad\blacksquare$$

例 2.2.2　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+a+\cdots+a^n\right)$ $(0<a<1)$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+a+\cdots+a^n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-a}-\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{1-a}$$
$$=\frac{1}{1-a}.\qquad\blacksquare$$

思考题 1　**(1)** 判断并说明下面推导是否正确.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=1\times1\times\cdots\times1=1;$$

(2) 在证明定理 2.2.3 的结论 (3) 时,如果令 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=c$,则

$$a=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\cdot y_n=c\cdot b\implies c=\frac{a}{b},$$

判断并说明上述推导的正确性.

定理 2.2.4　给定序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$,若 $x_n\leqslant y_n$ $(n\geqslant1)$,且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\quad\lim_{n\to\infty}y_n=b,$$

则 $a\leqslant b$.

证明　用反证法. 不妨假定 $a>b$,取

$$\varepsilon=\frac{a-b}{2}>0,$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,存在 N_1,使得当 $n>N_1$ 时,

$$|x_n-a|<\varepsilon\implies x_n>a-\varepsilon=\frac{a+b}{2};$$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，存在 N_2，使得当 $n > N_2$ 时，有

$$|y_n - b| < \varepsilon \implies y_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2}.$$

因此，当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时，得到

$$x_n > \frac{a+b}{2} > y_n.$$

这与条件矛盾(见图 2.2.2)．所以 $a \leqslant b$. ■

下面我们来讨论极限的所谓夹逼原理.

图 2.2.2

定理 2.2.5　给定序列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$，满足

$$x_n \leqslant z_n \leqslant y_n, \quad n \geqslant 1,$$

且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

证明　对任意 $\varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，存在 N_1，使得当 $n > N_1$ 时，有

$$|x_n - a| < \varepsilon \implies a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon;$$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，存在 N_2，使得当 $n > N_2$ 时，有

$$|y_n - a| < \varepsilon \implies a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，就有

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < a + \varepsilon \implies |z_n - a| < \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. ■

例 2.2.3　设 $a, b > 0$，证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}.$$

证明　因为

$$\Big(\big(\max\{a,b\}\big)^n\Big)^{\frac{1}{n}} \leqslant \big(a^n + b^n\big)^{\frac{1}{n}} \leqslant \Big(2\big(\max\{a,b\}\big)^n\Big)^{\frac{1}{n}},$$

即

$$\max\{a,b\} \leqslant \sqrt[n]{a^n + b^n} \leqslant \max\{a,b\} \cdot \sqrt[n]{2}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ 及定理 2.2.5 即可得到

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}. \qquad ■$$

思考题 2　**(1)** 在定理 2.2.4 中若将条件改为 $x_n < y_n$，结论能否改为 $a < b$?

(2) 考虑能否利用定理 2.2.4 直接得到定理 2.2.5，即

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} z_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

作为序列极限的特殊情形，我们引入无穷小量的概念及其运算.

定义 2.2.1　极限为零的变量称为**无穷小量**.

若变量以序列形式表示,若序列极限为零,则称序列就叫作无穷小量. 例如

$$\left\{\frac{1}{n}\right\},\quad \{q^n\}\ (0<q<1),\quad \left\{\frac{a^n}{n!}\right\}\ (a>0)$$

都是无穷小量. 所以无穷小量不是很小的量,而是极限值为零的变量.

推论 2.2.1 **(1)** 无穷小量的绝对值是无穷小量;

(2) 无穷小量与有界变量的乘积是无穷小量.

证明 **(1)** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$,即对任意 $\varepsilon>0$,存在 N,使得当 $n>N$ 时,有

$$|x_n-0|=|x_n|<\varepsilon \Longrightarrow \big||x_n|-0\big|=|x_n|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$.

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$,而 $|y_n|\leqslant M$,则

$$|x_ny_n|\leqslant M|x_n| \Longrightarrow -M|x_n|\leqslant x_n\cdot y_n\leqslant M|x_n|.$$

由 (1) 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} M|x_n|=\lim\limits_{n\to\infty}(-M|x_n|)=0$,利用定理 2.2.5 可得

$$\lim_{n\to\infty} x_n\cdot y_n=0. \qquad \blacksquare$$

推论 2.2.2 变量有极限 a 当且仅当变量可以分解成 a 与无穷小量之和.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$,则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-a)=0.$$

令 $\alpha_n=x_n-a$,由定义可知 $\{\alpha_n\}$ 是无穷小量,并有 $x_n=a+\alpha_n$.

反之,若 $x_n=a+\alpha_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$,则

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}(a+\alpha_n)=a. \qquad \blacksquare$$

例 2.2.4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明 令 $\sqrt[n]{n}=1+h_n$,只要证明 h_n 是无穷小量. 事实上,

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots+h_n^n\geqslant\frac{n(n-1)}{2}h_n^2,$$

所以

$$0<h_n<\frac{2}{\sqrt{n-1}},\quad n>1,$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n-1}}=0$ 以及定理 2.2.5,可得 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$,再由推论 2.2.1 就可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1. \qquad \blacksquare$$

习 题 2.2

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$. 判断并说明下述证法的正确性.

$$0=\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)=\lim_{n\to\infty}y_n-\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n-a\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}y_n=a.$$

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$;   (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a+\cdots+a^{n-1}}\ (a>0)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}\ (0<a<1)$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}\ (a>1,k>0)$.

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$. 证明,

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\max\{x_n,y_n\}=\max\{a,b\}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\min\{x_n,y_n\}=\min\{a,b\}$.

4. 证明序列 $\{\cos n\}$ 的极限不存在.

5. 证明序列 $\{\tan n\}$ 与 $\{1/\tan n\}$ 的极限不存在.

6. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{\sqrt[3]{1-n^2}}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\cdot\log n}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}\right)^{\frac{1}{n}}$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

7. 若 $|x_{n+1}|\leqslant k|x_n|\ (0<k<1)$ 对任意 n 成立. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

8. 设 $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$, 而 $x_0=1$, $x_{n+1}=f(x_n)\ (n\geqslant 0)$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

9. 设 $x_1=1$, 而 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\ (n\geqslant 1)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

10. 设 $x_0=1$, 而 $x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n}\ (n\geqslant 0)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

11. (1) 设 $b>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 证明, 对任意 ε, $0<\varepsilon<1$, 存在 N, 使得当 $n>N$ 时, 有

$$\log_b(1-\varepsilon)<x_n<\log_b(1+\varepsilon);$$

(2) 设 $b>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}b^{x_n}=1$;

(3) 设 $0<b<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}b^{x_n}=1$;

(4) 设 $b>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}b^{x_n}=b^a$.

12. (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$. 证明, 对任意 ε, $0<\varepsilon<1$, 存在 N, 使得当 $n>N$ 时, 有 $\mathrm{e}^{-\varepsilon}<y_n<\mathrm{e}^{\varepsilon}$;

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\log y_n=0$;

(3) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\ (b>0)$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\log y_n=b$;

(4) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\ (b>0)$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n^{x_n}=b^a$.

13. (1) 设 $x_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=q<1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$;

(2) 设 $x_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\ell>1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$.

14. 设 $\{x_n\}$ 为无穷小量. 判断并说明,

(1) $\{x_n^n\}$ 是否为无穷小量; (2) $\{\sqrt[n]{x_n}\}\ (x_n>0)$ 是否为无穷小量.

§2.3 确界与单调有界序列

在这一节中，我们将讨论极限的存在性. 给定序列 $\{x_n\}$，怎么判定它有没有极限呢? 用极限定义判定，就必须先要看出极限值，这对稍微复杂的序列是办不到的，所以只能通过序列本身来判断它有没有极限. 判定一般序列是否有极限，我们以后再讨论. 对单调序列有简单的判别准则. 这个准则要用到所谓确界的概念，为此，我们先讨论集合的确界.

设有实数集合 $E\subseteq\mathbb{R}$，若存在实数 M，使得对任意 $x\in E$，均有

$$x\leqslant M,$$

则称 M 是集合 E 的一个**上界**. 集合 E 有一个上界，显然就有无穷个上界，那么这些上界中有没有最小上界呢?

若集合 E 由无限个元素组成，那么它的最大元素就是集合的最小上界. 若 E 是无限集，这时 E 可以没有最大集合，那么它的最小上界是什么意思呢? 它有没有最小上界呢? 首先我们给出最小上界的定义.

定义 2.3.1 给定实数集合 E，若实数 M 满足

(1) M 是集合 E 的上界;

(2) 若 M' 是集合 E 的一个上界，则必有 $M\leqslant M'$，

则称 M 是集合 E 的**上确界**或**最小上界**，记作

$$M=\sup E \quad 或 \quad M=\sup_{x\in E}\{x\}.$$

容易看出，集合 E 不可能有两个上确界，如果有两个上确界 M_1,M_2，由定义可得 $M_1\leqslant M_2$ 及 $M_2\leqslant M_1$，即得 $M_1=M_2$.

既然上确界是集合的最小上界，那么比它更小的数就不可能是集合的上界，我们把它写成如下定理.

定理 2.3.1 M 是集合 E 的上确界当且仅当

(1) M 是集合 E 的上界;

(2) 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $x'\in E$，使得 $x'>M-\varepsilon$.

证明 **必要性** 用反证法. 假设 (2) 不成立，即存在 $\varepsilon_0>0$，对任意 $x\in E$，均有

$$x\leqslant M-\varepsilon_0,$$

这说明 $M-\varepsilon_0$ 是 E 的一个上界，由上确界的定义 2.3.1 有

$$M\leqslant M-\varepsilon_0 \implies 0<\varepsilon_0\leqslant 0.$$

这是一个矛盾，所以结论 (2) 成立.

充分性 用反证法. 假设定义 2.3.1 的条件 (2) 不成立，即存在 M' 是 E 的上界，但 $M>M'$. 令

$$\varepsilon = M - M' > 0,$$

有定理条件 (2),存在 $x' \in E$,使得

$$x' > M - \varepsilon = M',$$

这与 M' 是 E 的上界矛盾,所以定义的条件 (2) 成立. ■

定义 2.3.2 给定实数集合 E,若实数 m 满足

(1) m 是集合 E 的下界,即对任意 $x \in E$,都有 $x \geqslant m$;

(2) 若 m' 是集合 E 的一个下界,则必有 $M \leqslant M'$,

则称 m 是集合 E 的**下确界或最大上界**,记作

$$M = \inf E \quad 或 \quad M = \inf_{x \in E}\{x\}.$$

下面这个例子讨论三个集合 $\{f(x) \mid x \in X\}$,$\{g(x) \mid x \in X\}$ 和 $\{f(x)+g(x) \mid x \in X\}$ 的上、下确界之间的关系.

例 2.3.1 设 $f(x), g(x)$ 是定义在 $X = [a,b]$ 上的有界函数,证明

$$\sup_{x\in X}\big\{f(x)+g(x)\big\} \geqslant \sup_{x\in X}\{f(x)\} + \sup_{x\in X}\{g(x)\}.$$

证明 有上确界定义中的 (2) 及下确界定义中的 (1),对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $x' \in X$,使得

$$f(x') > \sup_{x\in X}\{f(x)\} - \varepsilon, \quad g(x') \geqslant \inf_{x\in X}\{g(x)\}.$$

相加得到

$$f(x') + g(x') \geqslant \sup_{x\in X}\{f(x)\} + \inf_{x\in X}\{g(x)\} - \varepsilon.$$

再由上确界定义中的 (1)

$$\sup_{x\in X}\big\{f(x)+g(x)\big\} \geqslant f(x') + g(x'),$$

所以

$$\sup_{x\in X}\big\{f(x)+g(x)\big\} \geqslant \sup_{x\in X}\{f(x)\} + \inf_{x\in X}\{g(x)\} - \varepsilon.$$

又由于上、下确界是确定的数和 ε 的任意性,令 $\varepsilon \to 0$,就得到结论. ■

定理 2.3.2 (确界原理) 一个非空的、有上(下)界的集合,必有上(下)确界.

从直观上看,这个所谓的确界原理是很显然的. 但仔细一想,承认这件事相当于承认由上界组成的无穷集合必有最小值,这又不是十分明显的. 定理的证明牵涉到什么叫实数,等严格讨论过实数定义以后,我们再给出定理的证明.

有了确界概念之后,就可以解决单调序列极限的存在问题.

若序列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots,$$

则称 $\{x_n\}$ 是**单调上升的**; 若满足

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots,$$

则称 $\{x_n\}$ 是**单调下降的**.

定理 2.3.3（单调有界定理） 如果序列单调上升（下降）并且有上（下）界，那么序列极限存在.

证明　已知序列单调上升，即

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots,$$

且有上界，即存在 M，使得

$$x_n \leqslant M, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

现在考虑集合 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$，它是一个非空的、有上界集合，由定理 2.3.2 可知集合 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 有上确界，记为

$$a := \sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}.$$

对任意 $\varepsilon > 0$，由上确界性质，存在 N，使得 $a - \varepsilon < x_N$. 故当 $x > N$ 时，由序列单调上升可得

$$a - \varepsilon < x_N \leqslant x_n.$$

再由上确界定义，有

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon,$$

也就是说

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}.$$

同理，若序列 $\{x_n\}$ 单调下降、有下界，可得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}.$$ ■

例 2.3.2　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}\ (a > 1)$.

证明　注意到

$$0 < x_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \cdot x_n \leqslant x_n, \quad x > [a],$$

这说明 $n > [a]$ 以后，序列单调下降、有下界，因此序列极限存在，记极限值为 ℓ. 为了确定出 ℓ，我们对等式

$$x_{n+1} = \frac{a}{n+1} \cdot x_n$$

取极限，得到 $\ell = 0 \cdot \ell$，即 $\ell = 0$. ■

例 2.3.3　证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 存在.

证明　先证明序列单调上升. 事实上

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + 1 \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-(n-1))}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\\&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots\\&\quad+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).\end{aligned}$$

比较 x_n 与 x_{n+1},x_n 有 $n+1$ 项,x_{n+1} 有 $n+2$ 项,其中前 $n+1$ 项分别比 x_n 中相应的项要大或相等,最后一项大于 0,所以序列 $\{x_n\}$ 单调上升.

再证明序列有上界. 事实上

$$\begin{aligned}x_n &\leqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leqslant 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\&= 1+\frac{1-1/2^n}{1-1/2}<3.\end{aligned}$$

由定理 2.3.3 可知序列极限存在,其值记为 e,它是一个无理数. 即

$$\mathrm{e}:=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.718\,281\,828\,459\ldots. \qquad \blacksquare$$

称以数 e 为底的对数为**自然对数**,这时记作 $\log_{\mathrm{e}} x =: \log x$.

习 题 2.3

1. 确定下列集合的上、下确界.

(1) $E=\left\{\left(1+(-1)^n\frac{n+1}{n}\right)\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$; (2) $E=\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\, 0<m<n,\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$;

(3) $E=\left\{\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n}{3}\pi\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$; (4) $E=\left\{\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$;

(5) $E=\left\{x-[x]\,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}$.

2. 设 $f(x),g(x)$ 在 D 上定义,且对任意 $x\in D$,有 $f(x)\leqslant g(x)$. 证明

(1) $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}\leqslant\sup\limits_{x\in D}\{g(x)\}$; (2) $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)\}\leqslant\inf\limits_{x\in D}\{g(x)\}$.

3. 设 $f(x)$ 在 D 上定义. 证明

(1) $\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\inf\limits_{x\in D}\{f(x)\}$; (2) $\inf\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}$.

4. 设 $f(x),g(x)$ 在 D 上有界. 证明

$$\begin{aligned}\inf_{x\in D}\{f(x)\}+\inf_{x\in D}\{g(x)\}&\leqslant\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\inf_{x\in D}\{f(x)\}+\sup_{x\in D}\{g(x)\}\\&\leqslant\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\sup_{x\in D}\{f(x)\}+\sup_{x\in D}\{g(x)\}.\end{aligned}$$

5. 设 $f(x),g(x)$ 在 D 上有界且大于 0. 证明

$$\begin{aligned}\inf_{x\in D}\{f(x)\}\cdot\inf_{x\in D}\{g(x)\}&\leqslant\inf_{x\in D}\{f(x)\cdot g(x)\}\leqslant\inf_{x\in D}\{f(x)\}\cdot\sup_{x\in D}\{g(x)\}\\&\leqslant\sup_{x\in D}\{f(x)\cdot g(x)\}\leqslant\sup_{x\in D}\{f(x)\}\cdot\sup_{x\in D}\{g(x)\}.\end{aligned}$$

6. 求下列序列的极限.

(1) $\sqrt{2},\sqrt{2\sqrt{2}},\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ldots$; (2) $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ldots$.

7. 利用单调有界定理,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

8. 设 $0<a_1<b_1$,对 $n=1,2,\ldots$,令

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n\cdot b_n},\quad b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}.$$

证明序列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 极限存在且相等.

9. 设 $0<a_1<b_1<c_1$,对 $n=1,2,\ldots$,令

$$a_{n+1}=\frac{1}{\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{c_n}},\quad b_{n+1}=\sqrt[3]{a_n\cdot b_n\cdot c_n},\quad c_{n+1}=\frac{a_n+b_n+c_n}{3}.$$

证明序列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 极限存在且相等.

10. 证明,

(1) $\dfrac{1}{n+1}<\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$;

(2) 序列 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\log n$ 的极限存在;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}\right)=\log 2$.

11. 设 $A>0,x_1>0,x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{A}{x_n}\right)$. 证明序列 $\{x_n\}$ 的极限存在,并求出此极限.

12. 设 $A>0,0<x_1<\dfrac{1}{n},x_{n+1}=x_n(2-Ax_n)$. 证明序列 $\{x_n\}$ 的极限存在,并求出此极限.

13. 设序列 $\{q_n\}$ 满足 $0<q_n<1$ 且 $(1-q_n)q_{n+1}>\dfrac{1}{4}$. 证明 $\{q_n\}$ 单调上升,且 $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=\dfrac{1}{2}$.

14. 设 $\{a_n\}$ 单调下降收敛于 0,令

$$b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

证明,

(1) $\{b_n\}$ 单调下降; (2) $b_{2n}\leqslant\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

§2.4 函数的极限

先考察一个实例: 求自由落体

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

在 t_0 时刻的瞬时速度.

我们会求匀速运动的速度,现在自由落体不是作匀速运动,而是变速运动,下落的速度愈来愈快,怎么来求 t_0 时刻的瞬时速度呢? 回顾一下求曲边三角形面积的方法,那时我们遇到直与曲的矛盾,解决这个矛盾分两步,第一步在局部上以直代曲得到阶梯形面积,它是曲边三角形面积的近似值; 第二部通过取极限,由近似值得到准确值. 现在解决速度匀速与不匀速的矛盾,仍用同样办法处理,并从第二步中抽象出函数极限的定义.

考虑时间间隔 $[t_0,t]$,若在间隔较短情况下,速度变化不大,可以近似看作匀速运动,求出该时间间隔内的平均速度

$$\overline{v}=\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{t-t_0}=\frac{1}{2}g(t+t_0),$$

这个速度是要求速度的近似值,若时间间隔取得越小,近似程度就越高,但不管间隔多小,总有一个近似值,而取间隔为 0,得到 0/0,什么也得不到.

要想得到 t_0 时刻的瞬时速度,必须让 t 趋向于 t_0,这时平均速度就趋向于 gt_0,

$$\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=gt_0.$$

通过极限过程,我们求出了瞬时速度为 gt_0.

在给出函数定义前,为了叙述方便,先定义两个名词.

称集合

$$\{x\mid |x-x_0|<h\}$$

为 x_0 的一个**邻域**,记作 $U(x_0;h)$; 称集合 $U(x_0;h)-\{x\}$ 为 x_0 的一个**空心邻域**,记作 $U_0(x_0;h)$. 当不需要知道邻域半径时,我们用 $U(x_0)$ 和 $U_0(x_0)$ 分别表示 x_0 的邻域和 x_0 的空心邻域.

定义 2.4.1　设 $f(x)$ 在 $U_0(x_0)$ 上定义,如果对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 x 趋向于 x_0 时,**函数 $f(x)$ 的极限**为 A,记作 $f(x)\to A\ (x\to x_0)$,或

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,$$

函数定义的几何意义是,任给一 A 为中心的 ε 邻域,总可找出以 x_0 为中心的 δ 空心邻域,当动点落在空心邻域 $U_0(x_0;\delta)$ 中时,动点函数值落在 $U(A;\varepsilon)$ 内(见图 2.4.1).

图 2.4.1

例 2.4.1　证明 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

证明　对任意 $\varepsilon>0$,有

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon \Longleftarrow |x+1-2|=|x-1|<\varepsilon,$$

取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|x-1|<\delta$ 时,就有

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.\qquad\blacksquare$$

例 2.4.2　证明 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\ (a>0)$.

证明　对任意 $\varepsilon>0$,有

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|<\varepsilon \Longleftarrow \left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{a}}|x-a|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\sqrt{a}\,\varepsilon$,则当 $0<|x-a|<\delta$ 时,就有

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a},\quad a>0.$$ ■

例 2.4.3　证明 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a}\ (a\neq 0)$.

由定义 2.4.1 的几何意义可以看出，对任意 $\varepsilon>0$ 找到符合定义要求的 δ 时，那么比 δ 小的正数也符合定义的要求. 所以在找 δ 前，可以先限制小于某正数. 如这个例子中分母有 x，为了防止 x 接近原点，我们先对 δ 作一限制.

证明　考虑 x 满足

$$|x-a|<\frac{|a|}{2}\implies |x|>|a|-\frac{|a|}{2}=\frac{|a|}{2}.$$

那么对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|<\varepsilon\impliedby\left|\frac{x-a}{xa}\right|\leqslant\frac{2|x-a|}{|a|^2}<\varepsilon.$$

取

$$\delta=\min\left\{\frac{|a|}{2},\ \frac{|a|^2}{2}\varepsilon\right\},$$

则当 $0<|x-a|<\delta$ 时，就有

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x}=\frac{1}{a},\quad a\neq 0.$$ ■

函数 $1/x$ 当 $x\to 0$ 时无限增大，所以极限 $\lim\limits_{x\to 0}1/x$ 不存在，函数 $\sin 1/x$ 当 $x\to 0$ 时，其值不停地在 -1 与 1 之间振荡，所以极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin 1/x$ 也不存在.

关于函数极限，同样有唯一性、局部有界性、四则运算和极限的不等式，因为证法与序列相同，我们只挑选两个予以证明.

定理 2.4.1　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则极限值唯一.

定理 2.4.2　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则函数在 x_0 的某一空心邻域上有界.

证明　取 $\varepsilon_0=1$，由条件，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<1\implies |f(x)|<|A|+1.$$

这说明函数在 $U_0(x_0;\delta)$ 上有界，界为 $|A|+1$. ■

注 2.4.1　函数在原定义域上不一定有界，所以我们只称函数局部有界.

定理 2.4.3　设 $\lim\limits_{x\to x_0}=A$，而 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\pm g(x)\big)=A\pm B$；　**(2)** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

证明　这里只证明 (3)，而由 (2)，只需证明

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{B}.$$

事实上,取 $\varepsilon_0 = \dfrac{|B|}{2} > 0$,由 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$,存在 δ_1,当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,有

$$\big||g(x)| - |B|\big| \leqslant |g(x) - B| < \frac{|B|}{2} \Longrightarrow |g(x)| \geqslant |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}.$$

对任意 $\varepsilon > 0$,同样由 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$,存在 δ_2,当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,有

$$|g(x) - B| < \frac{|B|^2}{2}\varepsilon.$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$,所以当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,就有

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|g(x) - B|}{g(x)\cdot B} \leqslant \frac{2}{|B|^2}|g(x) - B| < \frac{2}{|B|^2}\cdot\frac{|B|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}.$$ ■

定理 2.4.4 设在 $U_0(x_0)$ 上有 $f(x) \leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$,则

$$A \leqslant B.$$

定理 2.4.5 设在 $U_0(x_0)$ 上有 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$,且

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A = \lim_{x\to x_0} g(x),$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

类似序列情形,若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$,则称 $x \to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 是无穷小量. 序列中关于无穷小量的结论,相应地对 $f(x)$ 也成立.

习 题 2.4

1. 判断并说明函数极限定义与下列形式是否等价.

(1) 对任意 $\dfrac{1}{2^n}$,都存在 $\delta > 0$,当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,有 $|f(x) - A| < \dfrac{1}{2^n}$;

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$,都存在 $\dfrac{1}{n} > 0$,当 $0 < |x - a| < \dfrac{1}{n}$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon$;

(3) 对任意 $\varepsilon > 0$,都存在 $\delta > 0$,当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon^2$;

(4) 对任意 $\varepsilon > 0$,都存在 $\delta > 0$,当 $0 < |x - a| < \varepsilon\cdot\delta$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon^2$;

(5) 对任意 $\varepsilon > 0$,都存在 $\delta > 0$,当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon\cdot\delta$.

2. 用 $\varepsilon - \delta$ 方法验证下列各题.

(1) $\lim\limits_{x\to a} |x| = |a|$; (2) $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$; (3) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}\ (a > 0)$;

(4) $\lim\limits_{x\to a} x^3 = a^3$; (5) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a}\ (a \neq 0)$.

3. 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$,用 $\varepsilon - \delta$ 方法验证下列各题.

(1) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |A|$; (2) $\lim\limits_{x\to a} f^2(x) = A^2$;

(3) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}\ (A > 0)$; (4) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{A}$;

(5) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{A}}\ (A > 0)$.

4. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-4x+8}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$.

§2.5　函数极限的推广

2.5.1　自变量趋于无穷的情形

求曲线的渐近线时,遇到自变量趋于无穷时的极限.

图 2.5.1

设有一伸展到无穷的曲线 $y=f(x)$. 当点 (x,y) 沿曲线趋于无穷时,若它到定直线 $y=kx+b$ 的距离趋于零,则称该直线为曲线的**斜渐近线**(见图 2.5.1).

曲线上的点 $\big(x,f(x)\big)$ 到直线 $y=kx+b$ 的距离为

$$\frac{|f(x)-kx-b|}{1+k^3},$$

所以直线是曲线的斜渐近线当且仅当

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{|f(x)-kx-b|}{1+k^3}=0\quad 或\quad \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\big(f(x)-kx-b\big)=0.$$

怎么求出曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线呢? 即怎么确定出常数 k 与 b 的值.

由斜渐近线定义

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-kx-b\big)=0, \tag{2.5.1}$$

即得

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-kx\big)=b. \tag{2.5.2}$$

若知道 k,即可由上式确定出 b. 那么怎么求出 k 呢? 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 和极限的乘法运算,可得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k\right)=0,$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k. \tag{2.5.3}$$

具体做题时,先由 (2.5.3) 求出 k,再由 (2.5.2) 求出 b. 因为 (2.5.2) 蕴涵 (2.5.1). 这表明所求出的直线 $y=kx+b$ 确实为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线. 若 $k=0$,则称直线 $y=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**水平渐近线**.

在叙述自变量趋于无穷时的函数极限之前,我们先引入几个名词.

(1) 称集合 $\big\{x\,\big|\,|x|>h\big\}$ 为 ∞ **的邻域**,记作 $U(\infty;h)$ 或 $U(\infty)$;

(2) 称集合 $\{x\mid h<x<+\infty\}$ 与 $\{x\mid -\infty<x<h\}$ 为 ∞ **的单侧邻域**,记作 $U^+(\infty;h)$ 与 $U^-(\infty;h)$ 或记作 $U^+(\infty)$ 与 $U^-(\infty)$.

定义 2.5.1 设 $f(x)$ 在 $U^+(\infty)$ 上定义,如果存在 A,使得对任意 $\varepsilon>0$,存在 X,当 $x>X$ (自然要求 $X\in U^+(\infty)$)时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $x\to+\infty$ 时,**函数 $f(x)$ 的极限为 A**,记作 $f(x)\to A\ (x\to+\infty)$,或

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

(1) 设 $f(x)$ 在 $U^-(\infty)$ 上定义,式子 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 的定义为:对任意 $\varepsilon>0$,存在 X,使得当 $x<X$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

(2) 设 $f(x)$ 在 $U(\infty)$ 上定义,式子 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的定义为:对任意 $\varepsilon>0$,存在 $X>0$,使得当 $|x|<X$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

对于这类极限,同样有极限的唯一性、局部有界性、四则运算和极限不等式,就不再一一赘述.

例 2.5.1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$.

证明 对任意 $\varepsilon>0$,有

$$\left|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right|<\varepsilon \Longleftarrow \left|\frac{1/x^2}{\sqrt{1+1/x^2}+1}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x^2}\right|<\varepsilon \Longleftarrow x^2>\frac{1}{\varepsilon}.$$

取 $X=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$,则当 $|x|>X$ 时,就有

$$\left|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right|<\varepsilon.$$ ■

例 2.5.2 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-3x+2}{x^2+4x-3}$.

解

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-3x+2}{x^2+4x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}}=4.$$ ■

例 2.5.3 求曲线 $y=\sqrt{1+x^2}$ 的渐近线.

解 先确定 k,

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1;$$

再确定 b,

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0.$$

所以曲线有渐近线 $y=x$.

又因为

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{-\sqrt{x^2}}=-1,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-(-1)\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=0,$$

所以 $y=-x$ 也是曲线的渐近线. ■

2.5.2 无穷大量

图 2.5.2

曲线除斜渐近线外,还可能有垂直渐近线,如图 2.5.2,$x=x_0$ 是它的垂直渐近线. 当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 的值无限增大(见图 2.5.2),这时我们说函数极限不存在,但函数有确定的变化趋势,于是我们有下面的定义.

定义 2.5.2 设 $f(x)$ 在 $U_0(x_0)$ 上有定义. 如果对任意 $M>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有
$$f(x)>M,$$
则称 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限为 $+\infty$. 记为 $f(x)\to+\infty\ (x\to x_0)$,或
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty.$$

(1) 记号 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$ 的定义为: 对任意 $M>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有
$$f(x)<M.$$

(2) 记号 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 的定义为: 对任意 $M>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有
$$|f(x)|<M.$$

对序列类似可以定义:
$$\lim_{x\to+\infty}x_n=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}x_n=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}x_n=\infty.$$

极限为无穷时,我们数极限不存在. 因为它与极限为有限数情形有本质的不同. 极限为无穷情形自然没有局部有界性. 极限的四则运算与极限不等式是否存在,要具体问题具体分析. 极限为无穷或有限时,我们称**广义极限存在**. 极限不等式成立的条件,可以改为只要变量的广义极限存在.

例 2.5.4 证明 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

证明 对任意 $M>0$,取 $\delta=\dfrac{1}{M}>0$,当 $0<|x|<\delta$ 时,有
$$\left|\frac{1}{x}\right|>\frac{1}{\delta}=M,$$
即
$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty.$$ ■

例 2.5.5 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty\ (|q|>1)$.

证明 对任意 $M>0$,有

$$|q^n|>M \Longleftarrow n\log|q|>\log M.$$

取 $N=\left[\dfrac{\log M}{\log|q|}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有 $|q^n|>M$,即

$$\lim_{n\to\infty} q^n=\infty,\quad |q|>1.$$ ■

定义 2.5.3 极限为无穷(包括 $+\infty$ 或 $-\infty$)的变量称为**无穷大量**.

若变量不取零值,显然变量为无穷大量当且仅当它的倒数为无穷小量.

思考题 1 **(1)** 无界变量是否是无穷大量;

(2) 定义 2.5.2 中"任意 $M>0$",是否可改为"任意 M".

2.5.3 单侧极限

为了更好地考察函数的变化趋势,特别是对单调函数和分段定义的函数讨论其变化趋势时,我们需要单侧极限的概念.

称集合 $\{x\mid x_0\leqslant x_0+h\}$ 和 $\{x\mid x_0-h<x\leqslant x_0\}$ 为点 x_0 的**右邻域和左邻域**,记作 $U^+(x_0;h)$ 和 $U^-(x_0;h)$. 若上面集合除去 x_0 点,就称为 x_0 的**空心右邻域和空心左邻域**,记作 $U_0^+(x_0;h)$ 和 $U_0^-(x_0;h)$. 不必指明邻域半径时,记号中可省略 h.

定义 2.5.4 设 $f(x)$ 在 $U_0^+(x_0)$ 上定义. 若存在 A,使得对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<x-x_0<\delta$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 点的**右极限**存在,记作

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A,$$

右极限 A 也记作 $f(x_0+0)$.

设 $f(x)$ 在 $U_0^-(x_0)$ 上定义. 若存在 B,使得对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<x_0-x<\delta$ 时,有

$$|f(x)-B|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 点的**左极限**存在,记作

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=B,$$

左极限 B 也记作 $f(x_0-0)$.

例如

$$\lim_{x\to 0+0}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2};\qquad \lim_{x\to n+0}[x]=n;$$

$$\lim_{x\to 0-0}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2};\qquad \lim_{x\to n-0}[x]=n-1.$$

容易看出有下面定理.

定理 2.5.1 函数在 x_0 点极限存在当且仅当函数在 $x-0$ 点的左、右极限存在且相等.

思考题 2 (1) 讨论定理 2.5.1 中极限存在是否可改为广义极限存在，给出定理 2.4.1 的证明；

(2) 函数极限定义中，自变量有 6 种变化方式，函数有 4 种变化方式，共有 24 种组合. 表 2.5.1 中打“$\surd$”的表示这种组合的极限定义已经给出，试写出其它组合的极限定义；

$f(x)$ \ x	x_0	x_0+0	x_0-0	$+\infty$	$-\infty$	∞
A	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$+\infty$	$\surd$					
$-\infty$	$\surd$					
∞	$\surd$					

表 2.5.1

(3) 对于单侧极限，分别讨论极限的唯一性、局部有界性、四则运算和极限不等式是否成立.

2.5.4 极限存在性

单调有界序列有极限的定理，可以推广到函数情形，不过只对单侧极限和自变量趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 情形才有意义.

为了叙述更一般，我们规定无上界的集合 E，虽无上确界，仍记 $\sup E=+\infty$；无下界的集合 E，虽无下确界，仍记 $\inf E=-\infty$.

定理 2.5.2 设 $f(x)$ 在 $U_0^-(x_0)$ 上定义，且 $f(x)$ 单调上升，则

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\sup_{x\in U_0^-(x_0)}\{f(x)\}.$$

证明 考虑集合

$$\{f(x)\mid x\in U_0^-(x_0)\}\quad 和\quad A=\sup_{x\in U_0^-(x_0)}\{f(x)\}.$$

分两种情形讨论.

(1) $A<+\infty$ 的情形

对任意 $\varepsilon>0$，由上确界定义，存在 $x'\in U_0^-(x_0)$，使得

$$f(x')>A-\varepsilon.$$

取 $\delta=x_0-x'>0$，则当 $0<x_0-x<\delta$ 时，由函数的上升性，得

$$f(x)\geqslant f(x')>A-\varepsilon,$$

再结合上确界定义，有

$$A+\varepsilon>f(x)>A-\varepsilon\implies |f(x)-A|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A = \sup_{x\in U_0^-(x_0)} \{f(x)\}.$$

(2) $A=+\infty$ 的情形(见图 2.5.3)

对任意 $M>0$,因为集合无上界,存在 $x'\in U_0^-(x_0)$,使得

$$f(x') > M.$$

取 $\delta = x_0 - x' > 0$,则当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时,就有

$$f(x) \geqslant f(x') > M,$$

即

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty = \sup_{x\in U_0^-(x_0)} \{f(x)\}. \qquad \blacksquare$$

同样,若 $f(x)$ 在 $U_0^-(x_0)$ 上单调下降,则有

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \inf_{x\in U_0^-(x_0)} \{f(x)\}.$$

图 2.5.3

若 $f(x)$ 在 $U_0^+(x_0)$ 上定义,且 $x\to x_0+0$ 时,函数单调上升(作为自变量由小变大变化趋势来看,函数是单调下降的),则有

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \sup_{x\in U_0^+(x_0)} \{f(x)\};$$

若当 $x\to x_0+0$ 时,函数单调下降,则有

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \inf_{x\in U_0^+(x_0)} \{f(x)\}.$$

2.5.5　复合函数求极限

求函数极限比求序列极限多了一种变换的方法. 例如,求极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x},$$

我们不能直接用极限的除法运算,这时可以作 $1+x=t$ 的变换来求此极限. 即

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt[3]{t}-1}{t-1} = \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt[3]{t}-1}{\left(\sqrt[3]{t}-1\right)\left(\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{t}+1\right)}$$
$$= \lim_{t\to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{t}+1} = \frac{1}{3}.$$

但是,这样做的理论依据是什么呢? 为了说清楚起见,令

$$f(t) = \frac{\sqrt[3]{t}-1}{t-1}, \quad t = g(x) = x+1.$$

即已知

$$\lim_{t\to 1} f(t) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 1,$$

则由下面定理 2.5.3 得复合函数极限:

$$\lim_{x\to 0} f\left(g(x)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{3}.$$

下面证明复合函数求极限定理.

定理 2.5.3　设 $f(t)$ 在空心邻域 $U_0(t_0)$ 上定义,且

$$\lim_{t\to t_0} f(t)=A;$$

$t=g(x)$ 在 $U_0(x_0)$ 上定义. 当 $x\in U_0(x_0)$ 时,$t=g(x)\in U_0(t_0)$,且

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=t_0,$$

则

$$\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big)=A.$$

证明　对任意 $\varepsilon>0$,由 $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)=A$,存在 $\eta>0$,当 $0<|t-t_0|<\eta$ 时,有

$$|f(t)-A|<\varepsilon.$$

对任意 $\eta>0$,由 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=t_0$,存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|g(x)-t_0|<\eta.$$

根据 $x\in U_0(x_0)$ 时 $g(x)=t\in U_0(t_0)$,所以上式可写成

$$0<|g(x)-t_0|=|t-t_0|<\eta,$$

这样当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,就有

$$|f(t)-A|=\big|f\big(g(x)\big)-A\big|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big)=A. \qquad \blacksquare$$

定理只对自变量、中间变量、因变量趋于有限情形加以证明,事实上每个量都可以趋于有限或无穷,组合以后共有 8 种可能. 若考虑单侧极限,组合情形就更多,每种组合的复合函数求极限形式,以后都可以应用.

思考题 3　若 $f(t)$ 在邻域 $U(t_0)$ 上定义,讨论关于函数 $g(x)$ 的条件能否改为:当 $x\in U_0(x_0)$ 时,$g(x)\in U(t_0)$.

习 题 2.5

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-x\right)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0+0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$;　(2) $\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{[x]^2-4}{x^2-4}$;　(3) $\lim\limits_{x\to2-0}\dfrac{[x]^2-4}{x^2-4}$;　(4) $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{[4x]}{1+x}$.

3. 讨论下列有理函数的极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m},\quad a_0\cdot b_0\neq0.$$

4. 求下列曲线的渐近线.

(1) $y=\dfrac{2x^2+4x+3}{x-1}$;　(2) $y=\sqrt{4x^2+2x+3}$;　(3) $y=\sqrt{\dfrac{x^2}{x+1}}$.

5. 设 $a>1, k>0$,用极限不等式证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0$.

6. 用变量替换求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log x}{x^\alpha}\ (\alpha>0)$;　(2) $\lim\limits_{x\to0+0}x^\alpha\log x\ (\alpha>0)$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$;　(4) $\lim\limits_{x\to0+0}x^x$.

7. 设函数 $f(x)$ 在集合 X 上定义,则 $f(x)$ 在 X 上无界当且仅当存在 $x_n\in X\ (n=1,2,\ldots)$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$.

8. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调上升,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$,证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ (A 可以为无穷).

9. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调上升. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

10. 设 $f(x),g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上定义,且 $g(x)$ 单调. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}g\big(f(x)\big)=\infty$,证明 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

11. 叙述 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ 的定义,并证明

(1) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$,且 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=+\infty$;

(2) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$,且 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\ (A>0)$,则 $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=+\infty$.

12. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的周期函数,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,证明 $f(x)\equiv0$.

13. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足函数方程 $f(2x)=f(x)$,及 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$. 证明 $f(x)\equiv\ell$.

14. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$. 证明,对任意 $\varepsilon>0$,存在 X,使得当 $x_1,x_2>X$ 时,有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 判断下面证法的正确性.

证明　对任意 $\varepsilon>0$,由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,存在 X_1,当 $x_1>X_1$ 时,有

$$|f(x_1)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,存在 X_2,当 $x_2>X_2$ 时,有

$$|f(x_2)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $X=\max\{X_1,X_2\}$,则当 $x_1,x_2>X$ 时,就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-A|+|f(x_2)-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$ □

§2.6 两个重要极限

有两个函数的极限是以后求导数的基础,这节我们讨论这两个极限.

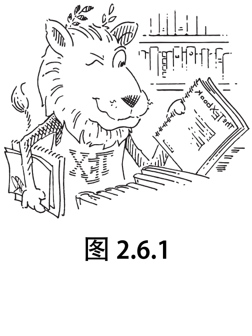

图 2.6.1

定理 2.6.1

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

定理 2.6.1 有鲜明的几何意义. 作单位圆,且 x 表示以弧度为单位的圆心角 $\angle AOB$ (见图 2.6.1),则

$$x=\overset{\frown}{AB},\quad \sin x=\overline{BC}.$$

为了明显起见,在上半圆上取与 B 对称的点 B',则

$$2x = 2\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BB'}, \quad 2\sin x = 2\overline{BC} = \overline{BB'},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\overset{\frown}{BB'}}{\overline{BB'}} = 1.$$

即当圆心角趋于零时,对应的弧长与弦长之比趋于 1.

证明 设 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$,显然有面积关系

$$S_{\triangle OAB} < S_{\overset{\frown}{OAB}} < S_{\triangle OAD}A,$$

即

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x \implies \sin x < x < \tan x.$$

因此,当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时,有

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

利用偶函数的性质,上式在 $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ 上也成立. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ (证明可利用下面的推论 2.6.1) 以及定理 2.4.5可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad \blacksquare$$

若 x 的单位是度,则极限为

$$\lim_{x\to 0^\circ}\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}.$$

所以我们在今后凡角度都取弧度为单位,可以使结果简单明了.

推论 2.6.1 对任意 $x \in \mathbb{R}$,有

$$|\sin x| \leqslant |x|,$$

等式当且仅当 $x = 0$ 时成立.

证明 上面已经证得,当 $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ 时,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{|\sin x|}{|x|} < 1 \implies |\sin x| < |x|.$$

而 $|x| \geqslant \dfrac{\pi}{2} > 1$ 时,显然上式成立. 所以当 $|x| > 0$ 时,有

$$|\sin x| < |x|.$$

而 $x = 0$ 时等式成立,且只有 $x = 0$ 时等式成立. $\blacksquare$

定理 2.6.2

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

证明 先证明 $x \to +\infty$ 的情形. 事实上,当 $x > 1$ 时,显然有

$$1 + \frac{1}{[x]+1} \leqslant 1 + \frac{1}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{[x]}.$$

利用幂函数的递增性,可得

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^x;$$

再由指数函数(底数大于 1)的递增性,可得

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$,可知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right) = \mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1} = \mathrm{e},$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

再证 $x\to-\infty$ 的情形. 为此,令 $x=-y$,则 $y\to+\infty$. 所以

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = \mathrm{e}.$$

最后由单侧极限与极限的关系,得到

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}. \qquad \blacksquare$$

推论 2.6.2

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = \mathrm{e}.$$

证明 令 $t=\dfrac{1}{x}$,则

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}. \qquad \blacksquare$$

习 题 2.6

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{\tan5x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x-\sin2x}{x^3}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos5x-\cos3x}{x^2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}\ (m,n\in\mathbb{Z})$;

(5) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\tan x-1}{x-\pi/4}$;

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(n\arccos x)}{x}$ (x 为奇数);

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\sqrt{n+1}-\cos\sqrt{n}\right)$;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{-x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{a}{x}\right)^{x^2}\ (a\neq0)$;

(5) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\tan x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^n$; (8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+\log n}{n-\log n}\right)^{\frac{n}{\log n}}$.

§2.7 无穷小量的阶以及无穷大量的阶的比较

两个无穷小量或两个无穷大量怎么比较其变化的速度呢? 例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

我们可以说当 $x\to 0$ 时,两个无穷小量 $\sin x$ 与 x 趋于零的快慢一样. 再例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2},$$

我们说当 $x\to 0$ 时,两个无穷小量 $1-\cos x$ 与 x^2 趋于零的速度成正比例. 例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=0,$$

我们说当 $x\to 0$ 时,$\sin^2 x$ 趋于零的速度比 x 要快. 又例如

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1/(x+x^2)}{1/x^2}=1,$$

我们说当 $x\to +\infty$ 时,两个无穷小量 $\dfrac{1}{x+x^2}$ 与 $\dfrac{1}{x^2}$ 趋于零的速度一样.

类似有两个无穷大量的比较. 例如

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{(1/\sqrt{x})\mathrm{e}^{-x}}{1/\sqrt{x}}=1,$$

我们说当 $x\to 0+0$ 时,两个无穷大量 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}$ 与 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 趋于无穷的速度一样. 又例如

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n}=\frac{a_n}{b_n},\quad a_n,b_n\neq 0.$$

我们说当 $x\to +\infty$ 时,上述两个多项式趋于无穷的速度称比例. 这样我们就有如下定义.

定义 2.7.1 设 $f(x),g(x)$ 在 $U_0(x_0)$ 上定义(x_0 可以是无穷),且 $g(x)\neq 0$.

(1) 如果

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0,$$

则记作

$$f(x)\sim Ag(x),\quad x\to x_0.$$

当 $f(x),g(x)$ 是无穷小(大)量时,称为**同阶无穷小(大)量**,特别 $A=1$ 时,称为**等价无穷小(大)量**;

(2) 如果

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

则记作

$$f(x)=o\big(g(x)\big),\quad x\to x_0.$$

当 $f(x), g(x)$ 是无穷小(大)量时,称为 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**高(低)阶无穷小(大)量**;

(3) 如果

$$|f(x)| \leqslant M|g(x)|, \quad x \in U_0(x_0),$$

则记作

$$f(x) = O\big(g(x)\big), \quad x \to x_0.$$

由定义我们可以写

$$\sin x \sim x \ (x \to 0), \qquad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \ (x \to 0),$$

$$\frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2} \ (x \to +\infty), \qquad \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \ (x \to 0+0),$$

$$\sin^2 x = o(x) \ (x \to 0), \qquad \sin x \sin\frac{1}{x} = O(x) \ (x \to 0).$$

当 $x \to x_0$ 时,若 $f(x)$ 与 $(x-x_0)^k$ 为同阶无穷小量,则称 $f(x)$ 是 **k 阶无穷小量**. 若 k 不是自然数,而是大于零的实数时,极限过程只等考虑 $x \to x_0+0$. 当 $x \to +\infty$ 时,若 $f(x)$ 与 $1/x^k$ 是同阶无穷小量,称 $f(x)$ 是 k 阶无穷小量. 类似将无穷大量 $f(x)$ 与基本无穷大量比较,可以定义无穷大量的阶.

由定义看出,若 $f(x) = o\big(g(x)\big)$,必有 $f(x) = O\big(g(x)\big)$,特别当 $g(x) \equiv 1$ 时,任一无穷小量总可以写成 $o(1)$,任一有界变量总可写成 $O(1)$.

当然不是任意两个无穷小量或无穷大量都可以比较. 例如 $x \to 0$ 时,无穷小量

$$x\sin\frac{1}{x} \quad 与 \quad x$$

就不能比较.

为了找 $f(x)$ 的等价无穷小(大)量,我们给出下面定理.

定理 2.7.1 在定义 2.7.1 条件下,$f(x) \sim g(x)$ 当且仅当

$$f(x) = g(x) + o\big(g(x)\big), \quad x \to x_0.$$

证明 若 $f(x) \sim g(x)$,即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \implies \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0.$$

按定义 2.7.1

$$f(x)-g(x) = o\big(g(x)\big) \implies f(x) = g(x) + o\big(g(x)\big) \ (x \to x_0).$$

反之,若上式成立,只要把上面步骤倒回去即得所求. ■

要把无穷小量 $f(x)$ 的等价无穷小量,根据定理 2.7.1,只要把 $f(x)$ 拆成 $g(x)$ 加上高于 $g(x)$ 的无穷小量,则 $f(x)$ 就等价于无穷小量 $g(x)$. 怎么把 $f(x)$ 拆成 $g(x)$ 和 $o\big(g(x)\big)$ 呢? 一方面需要后面将要讲到的 Taylor 公式,另一方面需要关于符号 o 的运算. 其实符号 o 也正是为了这个需要才引进的. 因为对高于 $g(x)$ 的无穷小量,我们关心的不是它具体的值,而是它趋于零的速度比 $g(x)$ 要快,这样当几个高于 $g(x)$ 的无穷小量进行运算时,可以避免不必要地数值运算,而直接去判断运

算结果是高于 $g(x)$ 的无穷小量.

关于符号 o 和 O 的运算,我们有下面的定理.

定理 2.7.2　(1)

$$o\big(g(x)\big) \pm o\big(g(x)\big) = o\big(g(x)\big), \quad x \to x_0. \tag{2.7.1}$$

(2)

$$O\big(g_1(x)\big) \cdot o\big(g_2(x)\big) = o\big(g_1(x) \cdot g_2(x)\big), \quad x \to x_0.$$

(3)

$$o\Big(O\big(g(x)\big)\Big) = o\big(g(x)\big), \quad x \to x_0;$$
$$O\Big(o\big(g(x)\big)\Big) = o\big(g(x)\big), \quad x \to x_0.$$

证明　(1) 令 $\alpha(x) = o\big(g(x)\big)$, $\beta(x) = o\big(g(x)\big)$,即

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{g(x)} = 0, \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{g(x)} = 0.$$

则

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x) \pm \beta(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{g(x)} \pm \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{g(x)} = 0,$$

即

$$\alpha(x) \pm \beta(x) = o\big(g(x)\big).$$

(2) $\alpha(x) = O\big(g_1(x)\big)$, $\beta(x) = o\big(g_2(x)\big)$,即已知 $x \in U_0(x_0)$,

$$\left|\frac{\alpha(x)}{g_1(x)}\right| \leqslant M, \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{g_2(x)} = 0,$$

要证

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x) \cdot \beta(x)}{g_1(x) g_2(x)} = 0.$$

根据推论 2.2.1 之 (2),上式显然是成立的.

(3) 只证第一式. 令 $\alpha(x) = O\big(g(x)\big)$, $\beta(x) = o\big(\alpha(x)\big)$,即

$$\left|\frac{\alpha(x)}{g(x)}\right| \leqslant M, \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0.$$

要证

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{g(x)} = 0.$$

显然结论成立. ■

注 2.7.1　等式 (2.7.1) 意义与通常意义不同. 等式左端为条件,右端为结论,等式两端的意义是不一样的. 如果把等式两端交换一下,写成

$$o\big(g(x)\big) = o\big(g(x)\big) \pm o\big(g(x)\big),$$

这样,等式就失去了意义. 另外,等式 (2.7.1) 反映的是某种性质,不是指数值关系,所以当然不能说 $o\big(g(x)\big) - o\big(g(x)\big)$ 等于零.

例如

$$o(\sin x) = o\Big(O\big(g(x)\big)\Big) = o(x), \quad x \to 0.$$

又例如,当 $x \to 0$ 时,要求 $1 - \cos(\sin x)$ 的等价无穷小量,可以利用符号 o 运

算. 因为

$$1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2),$$

所以

$$\begin{aligned}1-\cos(\sin x)&=\frac{1}{2}\sin^2 x+o(\sin^2 x)=\frac{1}{2}\big(x+o(x)\big)^2+o\big(O(x^2)\big)\\&=\frac{1}{2}x^2+x\cdot o(x)+o(x)\cdot o(x)+o(x^2)\\&=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+o(x^2)+o(x^2)=\frac{1}{2}x^2+o(x^2).\end{aligned}$$

故 $1-\cos(\sin x)$ 的等价无穷小量为 $\frac{1}{2}x^2$.

思考题 讨论下面等式是否成立.

(1) $o(x)=O(x), o(x^2)/x=o(x)\ (x\to x_0)$;

(2) $O\big(g_1(x)\big)\cdot O\big(g_2(x)\big)=O\big(g_1(x)\cdot g_2(x)\big)\ (x\to x_0)$;

(3) $o\big(g_1(x)\big)\cdot o\big(g_2(x)\big)=o\big(g_1(x)\cdot g_2(x)\big)\ (x\to x_0)$;

(4) $o\big(o\big(g(x)\big)\big)=o\big(g(x)\big)\ (x\to x_0)$;

(5) $O\big(O\big(g(x)\big)\big)=O\big(g(x)\big)\ (x\to x_0)$.

习 题 2.7

1. 确定下列量的等价无穷小量 $(x\to 0)$.

(1) $\log(1+x)$; (2) e^x-1;

(3) $\sqrt[n]{1+x}-1$; (4) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

2. 求下列量的等价无穷大量.

(1) $2x^3+3x^2-5x-6\ (x\to\infty)$; (2) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\ (x\to+\infty)$;

(3) $\dfrac{x+1}{x^2+3x-3}\ (x\to 0)$; (4) $\dfrac{\arctan x}{x^2}\ (x\to 0)$.

3. 当 $x\to 0$ 时, 讨论下面等式的正确性.

(1) $o(x^2)=o(x)$; (2) $O(x^2)=o(x)$; (3) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$;

(4) $\dfrac{o(x^2)}{x}=o(x)$; (5) $\dfrac{o(x^2)}{o(x)}=o(x)$; (6) $o(x)=O(x^2)$.

4. 设 $x\to a$ 时, $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为等价无穷小, $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 为等价无穷大, 且 $\lim\limits_{x\to a}f_2(x)\cdot g_2(x)$ 存在. 证明

$$\lim_{x\to a}f_1(x)\cdot g_1(x)=\lim_{x\to a}f_2(x)\cdot g_2(x).$$

5. 设 $x\to a$ 时, $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为同阶无穷小, $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 为等价无穷小, 且 $f_1(x), f_2(x)>0$, 并设 $\lim\limits_{x\to a}f_2(x)^{g_2(x)}=A\ (A>0)$. 证明

$$\lim_{x\to a}f_1(x)^{g_1(x)}=A.$$

§2.8 用肯定语气叙述极限不是某常数

2.8.1 极限不是某常数的肯定描述

已知序列 $\{x_n\}$ 的极限为 a 的几何意义是：以 a 为中心，以任意给定的 $\varepsilon>0$ 为半径作一邻域，在邻域外最多只有序列的有限项. 反之有这一性质时，我们说序列的极限为 a.

现在我们问，序列 $\{x_n\}$ 的极限不是 a，应该怎么表述呢? 是否以 a 为中心，以任意 ε 为半径的邻域之外，序列有无穷多项呢? 当然不是. 因为所有邻域外只有有限多项的反面，应该是存在一个邻域，在该邻域之外序列有无穷多项.

设该邻域半径为 $\varepsilon_0>0$，在邻域 $U(a;\varepsilon_0)$ 外有无穷多项又是什么意思呢? 是否从某一标号 N 以后，序列的项都在该邻域之外呢? 当然不是. 因为邻域外有无穷多项，不等于说邻域内只有有限多项，邻域内也可以有无穷多项. 所以邻域外有无穷多项的确切意思是：任意给定一个标号 N，总可以找到比 N 大的元素 x_n 在邻域之外，即

$$|x_n-a|\geqslant\varepsilon_0.$$

总结上面的叙述，我们得到序列 $\{x_n\}$ 的极限不是 a 的肯定描述：

存在 $\varepsilon_0>0$，对任意 N，存在 $n>N$，使得 $|x_n-a|\geqslant\varepsilon_0$.

把它与序列极限为 a 的定义

对任意 $\varepsilon>0$，存在 N，使得当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

加以比较，我们发现两者是何等相似，只是把“任意”换成“存在”，“存在”换成“任意”，“$<$”换成“$\geqslant$”即成. 掌握这一特点，我们不难写出 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 极限不是 A 的肯定语气描述：

存在 $\varepsilon_0>0$，对任意 $\delta>0$，存在 x'，即使 $0<|x'-x_0|<\delta$，但

$$|f(x')-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

它的几何意义是：存在以 $y=A$ 为中心线，宽为 $2\varepsilon_0$ 的带子，对任一以 x_0 为中心，以 δ 为半径的空心邻域，在该邻域内总可以找到一点 x'，使 x' 点的函数值落在带子的外边.

2.8.2 序列极限与函数极限的关系

设 $f(x)$ 在 $U_0(x_0)$ 上定义，且

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A. \tag{2.8.1}$$

在邻域 $U_0(x_0)$ 内任取一个序列 $\{x_n\}$，且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0, \tag{2.8.2}$$

则有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A. \tag{2.8.3}$$

事实上,对任意 $\varepsilon > 0$,由 (2.8.1),存在 $\delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

对于 $\delta > 0$,再由 (2.8.2),存在 N,当 $n > N$ 时,有

$$|x_n - x_0| < \delta.$$

因为序列在空心邻域内,所以当 $n > N$ 时,有 $0 < |x_n - x_0| < \delta$,也就有

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

反之,对任一位于 $U_0(x_0)$ 内的序列,若满足 (2.8.2),且有 (2.8.3) 成立,则可得 (2.8.1) 成立. 否则的话,假设 (2.8.1) 不成立,即 $x \to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 不趋于 A. 根据上面所述,存在 $\varepsilon_0 > 0$,对任意 $\delta > 0$,存在 $x' \in U_0(x_0)$,即使 $0 < |x' - x_0| < \delta$,但

$$|f(x') - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

现在利用 δ 的任意性,取定 $\delta = \dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$,存在 $x_n \in U_0(x_0)$,使得

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n},$$

而

$$|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

即找到位于 $U_0(x_0)$ 内的序列 $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,但是

$$|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0,$$

这与条件 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ 矛盾,所以 (2.8.1) 成立.

这样我们就得到所谓函数极限的归结原则.

定理 2.8.1（归结原则） 设 $f(x)$ 在 $U_0(x_0)$ 上定义,则

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

成立当且仅当对于 $U_0(x_0)$ 内任一序列,若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 时都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

归结原则说明了函数极限与序列极限的联系. 我们也可以用序列极限来定义函数极限. 由归结原则我们可以得到判断函数极限不存在的方法.

若在空心邻域 $U_0(x_0)$ 内能找出两个趋于 x_0 的序列 $\{x_n'\}$ 与 $\{x_n''\}$,相应的函数序列 $\{f(x_n')\}$ 与 $\{f(x_n'')\}$ 的极限不等:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n''),$$

则 $x \to x_0$ 时,函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在. 因为如果极限存在,根据归结原则就有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} f(x_n''),$$

这显然是一个矛盾.

例 2.8.1 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

证明 对于 $n=1,2,\ldots$,取

$$x_n'=\frac{1}{2n\pi},\quad x_n''=\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi},$$

则

$$\lim_{n\to\infty}x_n'=0=\lim_{n\to\infty}x_n''.$$

但

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=\lim_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n''}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi=1,$$

所以由归结原则,函数极限不存在. ■

习 题 2.8

1. 用肯定语气叙述 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq+\infty$.

2. 用肯定语气叙述 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

3. 证明下列极限不存在.

(1) $x_n=\dfrac{n-1}{n+2}\cos\dfrac{2n}{3}\pi$; (2) $x_n=\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$; (3) $x_n=\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

复习题二

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,将序列 $\{x_n\}$ 的项进行重新排列后,得到新的序列 $\{x_n'\}$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=a$.

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\ (a_n>0)$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}=a$.

4. 设 $a_n>0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

5. 证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$.

6. 设 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,而且

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=o(x).$$

证明 $f(x)=o(x)$.

7. 设 $f(x)$ 在 $x>a$ 上定义,并且在每一有限区间 (a,b) 上有界. 证明,如果

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=+\infty,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty.$$

8. (1) 设 $0<a_1,a_2,\ldots,a_n<1$. 证明

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) \geqslant 1-(a_1+a_2+\cdots+a_n);$$

(2) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e};$$

(3) 证明

$$\frac{1}{(n+1)!} < \mathrm{e}-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n!\cdot n};$$

(4) 证明

$$\mathrm{e} = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!\cdot n},\quad \frac{n}{n+1} < \theta_n < 1.$$

9. 证明 e 是无理数.

10. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!\,\mathrm{e}) = 2\pi$.

第三章　连　续

事物的运动和变化有两种形式：一种是渐变，一种是突变．比如公共汽车行驶时，车速是连续变化的，或称渐变．遇到急刹车时，车速有一突变．反映自然界的渐变与突变，人们提出了连续与间断的概念．这些概念虽然不能用来描述自然界中一切渐变与突变现象（如脉冲现象等），但能很好地描述自然界中一类渐变与突变现象．

§3.1　连续与间断

怎么去刻画连续性呢？能否说函数在每一点极限存在，它就表示一条连续曲线呢？不能．比如在 $\mathbb{R}$ 上定义的函数

$$f(x)=\begin{cases}2, & x=1;\\ 1, & x\neq 1,\end{cases}$$

它在每一点 x_0 的极限都存在，且

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=1.$$

但函数的图形不是一条连续的直线，而是在 $(1,1)$ 点有一点窟窿的直线加上一点 $(1,2)$，显然不能认为函数是连续的．原因是在 $x=1$ 处极限值不等于函数值：

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1\neq 2=f(1).$$

于是我们有如下定义．

定义 3.1.1　在 (a,b) 上给定函数 $f(x)$，$x_0\in(a,b)$，若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \tag{3.1.1}$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续，x_0 称为**连续点**，否则就称 x_0 为**间断点**．

直观地说，就是当动点 x 趋于定点 x_0 时，若动点函数值趋于定点的函数值，则函数在 x_0 点连续．若 x_0 是连续点，则当自变量在 x_0 点有无限小的变化，引起因变量的变化也无限的小．

(a,b) 上给定的函数 $f(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 连续的定义改用“$\varepsilon-\delta$”说法，就是对任

意 $\varepsilon>0$,都存在 $\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

例 3.1.1 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q};\\ 0, & x\in\mathbb{Q}.\end{cases}$$

证明 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的连续点.

证明 对任意 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,当 $|x-0|=|x|<\delta$ 时,

$$|f(x)-f(0)|=|f(x)|\leqslant|x|<\varepsilon,$$

由定义 3.1.1 可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续. ■

注 3.1.1 容易看出,当 $x_0\neq 0$ 时,极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在,即 x_0 不是 $f(x)$ 的连续点. 所以函数在一点连续,不能保证在该点的一个邻域内也连续.

(3.1.1) 可以拆成下面三个式子

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0-0} f(x)&=f(x_0-0);\\ \lim_{x\to x_0+0} f(x)&=f(x_0+0);\\ f(x_0-0)=f(x_0)&=f(x_0+0). \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

这三个式子也可以合并成 (3.1.1) 一个式子. 即函数在 x_0 点连续,等价于函数在 x_0 点的左、右极限存在,且左、右极限等于该点的函数值. (3.1.2) 中只要有一个式子不成立,(3.1.1) 就不成立. 所以,对于一点,只要 (3.1.2) 中有一个不成立,该点就是间断点. 根据 (3.1.2) 不成立的情形,我们可以把间断点加以分类.

定义 3.1.2 **(1)** 若函数在 x_0 点左、右极限存在并相等,但不等于该点的函数值,则称 x_0 为**可去间断点**;

(2) 若函数在 x_0 点左、右极限存在但不相等,则称 x_0 为**第一类间断点**;

(3) 若函数在 x_0 点左、右极限至少有一个不存在,则称 x_0 为**第二类间断点**.

例如,函数

$$f(x)=\begin{cases} \arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

在 $x_0=0$ 点的左、右极限分别为 $-\dfrac{\pi}{2}$ 和 $\dfrac{\pi}{2}$,所以 $x=0$ 是函数的第一类间断点(见图 3.1.1).

又例如,函数

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

在 $x_0=0$ 点的左、右极限不存在,所以 $x=0$ 是函数的第二类间断点(见图 3.1.2).

再例如,函数

$$f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

图 3.1.1

图 3.1.2

图 3.1.3

在 $x_0=0$ 点的左、右极限不存在,所以 $x=0$ 也是函数的第二类间断点(见图 3.1.3).

关于间断点有下面定理.

定理 3.1.1 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调,则 $f(x)$ 只有第一类间断点.

证明 不妨设 $f(x)$ 单调上升. 那么对任意 $x_0\in(a,b)$,当 $x\to x_0-0$ 时,函数值 $f(x)$ 上升,并有上界 $f(x_0)$,所以极限存在,且

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)\leqslant f(x_0).$$

同理,当 $x\to x_0+0$ 时,函数值 $f(x)$ 下降,并有下界 $f(x_0)$,所以极限存在,且

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)\geqslant f(x_0).$$

若 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$,则 x_0 是函数的连续点; 若 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$,则 x_0 是函数的第一类间断点. 由于 x_0 的任意性,所以区间上每一点不是连续点就是第一类间断点. ■

注 3.1.2 定理 3.1.1 中条件改为闭区间 $[a,b]$ 时,结论仍成立. 比如在 $x=a$ 点,有

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)\geqslant f(a).$$

若等号成立,则称 a 为连续点; 否则为第一类间断点.

由函数一点连续的定义可得函数在区间上连续的定义.

定义 3.1.3 若函数 $f(x)$ 在区间上每一点连续(闭区间情形,区间端点指单侧连续),则称函数在**区间上连续**.

记号 $C(a,b)$ 表示区间 (a,b) 上所有连续函数的集合,记号 $f(x)\in C(a,b)$ 表示 $f(x)$ 是 (a,b) 上的连续函数. 记号 $f(x)\in C[a,b]$ 作类似理解.

思考题 **(1)** 讨论单调函数能否有无穷多个间断点;

(2) 试举出每一点都是第二类间断点的函数.

习 题 3.1

1. 研究下列函数的连续性,并指出间断点的类型.

(1) $f(x)=\operatorname{sgn} x$; (2) $g(x)=x-[x]$;

(3) $f\big(g(x)\big)$, $g\big(f(x)\big)$; (4) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)\Big/\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$.

2. 指出下列函数的间断点,并说明间断点的类型.

(1) $y=\dfrac{x}{(1+x)^2}$;　　(2) $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$;

(3) $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$;　　(4) $y=1\Big/\left[\dfrac{1}{x}\right]\ (0<x\leqslant 1)$.

3. 适当选取常数 a,使得下列函数 $f(x)$ 连续.

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0;\\ a+x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

4. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续,$g(x)$ 在 $x=x_0$ 间断. 判断 $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $x=x_0$ 的连续性.

5. 设 $f(x),g(x)$ 在 $x=x_0$ 间断. 判断 $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $x=x_0$ 的连续性.

6. 举出处处都不连续,但取绝对值后却是处处连续的函数的例子.

7. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续,且 $f(x_0)>0$. 证明,存在 $\delta>0$,当 $x\in U(x_0;\delta)$ 时,$f(x)>0$. 并判断下面证法的正确性.

证明 对任意 $\varepsilon>0$,不妨设 $0<\varepsilon<f(x_0)$. 由函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续,存在 $\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即有

$$f(x)>f(x_0)-\varepsilon>0,\quad x\in U(x_0;\delta).$$ □

§3.2 连续函数的运算

连续是极限的一种特殊情形,由极限运算即可得到连续函数的运算.

定理 3.2.1 设 $f(x),g(x)$ 在 x_0 点连续,则

(1) $f(x)\pm g(x)$ 在 x_0 点连续;　　**(2)** $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 点连续;

(3) 若 $g(x_0)\neq 0$,$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 x_0 点连续.

由此可得,若 $f(x),g(x)\in C(a,b)$,则

$$f(x)\pm g(x)\in C(a,b);\quad f(x)\cdot g(x)\in C(a,b).$$

若对任意 $x\in(a,b)$,均有 $g(x)\neq 0$,则

$$\frac{f(x)}{g(x)}\in C(a,b).$$

定理 3.2.2 设 $y=f(t)$ 在 $t=t_0$ 点连续,$t=g(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续,且 $t_0=g(x_0)$,则 $y=f\big(g(x)\big)$ 在 $x=x_0$ 点连续.

证明 对任意 $\varepsilon>0$,由 $f(t)$ 在 t_0 点连续,存在 $\eta>0$,当 $|t-t_0|<\eta$ 时,有

$$|f(t)-f(t_0)|<\varepsilon;$$

对于 $\eta>0$,由 $g(x)$ 在 x_0 点连续,存在 $\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|g(x)-g(x_0)|=|t-t_0|<\eta.$$

所以,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(t)-f(t_0)|=\left|f\big(g(x)\big)-f\big(g(x_0)\big)\right|<\varepsilon,$$

即函数 $f\big(g(x)\big)$ 在 x_0 点连续. ■

注 3.2.1　有定理 3.2.2 可得,若 $g(x)\in C(a,b)$,值域属于 (α,β),$f(t)\in C(\alpha,\beta)$,则 $f\big(g(x)\big)\in C(a,b)$.

下面讨论一些初等函数的连续性.

(1) 多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in C(\mathbb{R});$$

(2) 有理函数

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

其中分子、分母分别为 n 次和 m 次多项式. 定义域可能要除去分母为零的点,记作 D,则 $R(x)\in C(D)$.

上面两条结论由常数与 x 在 $\mathbb{R}$ 上连续及连续函数的四则运算即可看出.

(3) 三角函数 $y=\sin x\in C(\mathbb{R})$.

证明　对任意 $x_0\in\mathbb{R}$ 和任意 $\varepsilon>0$,要使

$$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon,$$

只要

$$\left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\varepsilon$,则当 $|x-x_0|<\delta$ 时,就有 $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$. 所以 $\sin x$ 在 x_0 点连续. 由于 x_0 的任意性,得 $\sin x\in C(\mathbb{R})$. ■

由正弦函数 $\sin x$ 的连续性可知

$$y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\in C(\mathbb{R});\quad y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\in C(D),$$

这里 D 为 $\mathbb{R}$ 除去点

$$x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\quad 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

的集合.

习 题 3.2

1. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 证明

(1) $|f(x)|\in C[a,b]$;　　(2) $\max\{f(x),g(x)\}\in C[a,b]$;

(3) $\min\{f(x),g(x)\}\in C[a,b]$.

2. 设 $f(x)\in C[a,b]$,证明 $f_t(x)\in C[a,b]$,其中

$$f_t(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\{x\mid f(x)>t\};\\ t, & x\in\{x\mid f(x)\leqslant t\}.\end{cases}$$

3. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续,且满足

$$f(x^2)=f(x),\quad x>0.$$

证明 $f(x)$ 为一常数.

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，有

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

证明，$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，且 $f(x)=f(1)\cdot x$.

5. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上只有第一类间断点，且对任意 $x,y\in(a,b)$，有

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续.

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $0\leqslant f(x)\leqslant x\ (x\geqslant 0)$. 设 $a_1\geqslant 0$，而 $a_{n+1}=f(a_n)\ (n=1,2,\ldots)$. 证明，

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在；

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ell$，则 $f(\ell)=\ell$；

(3) 如果将条件改为 $0\leqslant f(x)<x\ (x>0)$，则 $\ell=0$.

§3.3 连续函数的中间值性质

我们叙述连续函数的零点性质，它的证明以后再给出.

定理 3.3.1 设 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(a)f(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)=0.$$

定理 3.3.1 的几何意义是，若连续曲线由 x 轴之下跑到 x 轴之上，则中间至少要经过 x 轴一次（见图 3.3.1）.

图 3.3.1

图 3.3.2

定理 3.3.2（中间值定理） 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 η 介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\eta.$$

证明 若 η 等于 $f(a)$ 或 $f(b)$，取 $\xi=a$ 或 b 即可.

若 η 严格介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间，即

$$f(a)<\eta<f(b)\quad 或\quad f(a)>\eta>f(b).$$

作函数 $F(x)=f(x)-\eta\in C[a,b]$. 显然

$$F(a)\cdot F(b)=\big(f(a)-\eta\big)\cdot\big(f(b)-\eta\big)<0,$$

根据定理 3.3.1，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$F(\xi)=0\Longrightarrow f(\xi)=\eta.\qquad\blacksquare$$

定理 3.3.2 说明,连续函数可以取得 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值. 反之,若一个函数能取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值,它是否一定连续呢? 例如函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1);\\ 3-x, & x\in[1,2];\\ x, & x\in(2,3],\end{cases}$$

它取到 $f(0)=0$ 与 $f(3)=3$ 之间的一切值,但显然函数 $f(x)$ 不连续(见图 3.3.2).

例 3.3.1　证明方程

$$x^3+4x^2-3x-1=0$$

在 $\mathbb{R}$ 上有三个根.

证明　令

$$f(x)=x^3-x^2-3x-1\in C(\mathbb{R}).$$

(1) 因为 $f(0)=-1<0$,而 $f(1)=1>0$,所以多项式 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 有一个零点,即方程 $f(x)=0$ 有一个实根;

(2) 因为 $f(-1)=5>0$,所以方程在 $(-1,0)$ 内有一个实根;

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,故存在 x_2,使得 $f(x_2)<0$,所以方程在 $(-x_2,-1)$ 内有一个实根. ■

定理 3.3.3　设 $y=f(x)\in C(a,b)$,且严格上升,记

$$\alpha:=\inf_{a<x<b}\{f(x)\},\quad \beta:=\sup_{a<x<b}\{f(x)\},$$

其中 α 可以使 $-\infty$,而 β 可以为 $+\infty$,则

(1) 在 (α,β) 上存在反函数 $x=\varphi(y)$;

(2) $x=\varphi(y)$ 在 (α,β) 上严格单调上升;

(3) $\varphi(y)\in C(\alpha,\beta)$.

证明　**(1)** 因为 $y=f(x)$ 严格上升,所以反函数一定存在,需要证明的是反函数的定义域恰好为 (α,β),也就是要证明区间上的严格单调函数,如果函数连续,则其值域一定是区间.

事实上,对任意 $y_0\in(\alpha,\beta)$,由上、下确界的定义,存在 $x',x''\in(\alpha,\beta)$,使得

$$f(x')<y_0<f(x'').$$

在 $[x',x'']$ (或 $[x'',x']$)上应用定理 3.3.2,则存在 $x_0\in(x',x'')\subseteq(a,b)$,使得 $f(x_0)=y_0$,即 y_0 是 $f(x)$ 的函数值. 由 y_0 的任意性,得到 (α,β) 为 $f(x)$ 的值域(α,β 不可能是 $f(x)$ 的函数值),即 (α,β) 为 $x=\varphi(y)$ 的定义域.

(2) 设 $y_1,y_2\in(\alpha,\beta)$,且 $y_1<y_2$,往证

$$x_1=\varphi(y_1)<\varphi(y_2)=x_2.$$

事实上,假若 $x_1\geqslant x_2$,由反函数定义及 $f(x)$ 的严格上说,得到

$$y_1=f(x_1)\geqslant f(x_2)=y_2,$$

这与 $y_1 < y_2$ 矛盾,所以 $\varphi(y)$ 严格上升.

(3) 已知 $\varphi(y)$ 在 (α,β) 上严格上升,值域为区间 (a,b),要证明 $\varphi(y)\in C(\alpha,\beta)$,也就是要证明区间上的严格单调函数,如果函数的值域为一个区间,则函数一定连续.

事实上,设 $\varphi(y)$ 在 $y_0\in(\alpha,\beta)$ 点不连续. 由定理 3.1.1 可知

$$\lim_{y\to y_0-0}\varphi(y)=\varphi(y_0-0)\leqslant\varphi(y_0),\qquad \lim_{y\to y_0+0}\varphi(y)=\varphi(y_0+0)\geqslant\varphi(y_0).$$

以上两式必有一式不等号成立,不妨设 $\varphi(y_0-0)<\varphi(y_0)$,则函数的值域包含在两个不相交的区间 $\big(\varphi(\alpha+0),\varphi(y_0-0)\big)$ 与 $\big[\varphi(y_0),\varphi(\beta-0)\big]$内,这与值域为一区间 (a,b) 矛盾,这矛盾说明 $\varphi(y)\in C(\alpha,\beta)$. ■

注 3.3.1 定理 3.3.3 中条件改为 $f(x)\in(a,b)$,且严格上升,令 $f(a)=\alpha$,而 $f(b)=\beta$,则结论中的开区间 (α,β) 相应地改为闭区间 $[\alpha,\beta]$ 即可. 对严格下降函数,可以同样讨论.

利用定理 3.3.3,我们可以得出反三角函数的连续性.

(1) $y=\arcsin x\in C[-1,1]$.

因为 $x=\sin y$ 在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上严格上升、连续,由定理 3.3.3 的证明及注 3.3.1 可知 $\sin y$ 的值域为 $[-1,1]$,且 $y=\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上严格上升、连续.

(2) $y=\arccos x\in C[-1,1]$.

因为 $x=\cos y$ 在 $[0,\pi]$ 上严格下降、连续,故其值域为 $[-1,1]$,且 $y=\arccos x$ 在 $[-1,1]$ 上严格下降、连续.

(3) $y=\arctan x\in C(\mathbb{R})$.

因为 $x=\tan y$ 在 $(-\pi/2,\pi/2)$ 上严格上升、连续,故其值域为 $\mathbb{R}$,且 $x=\arctan x$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格上升、连续.

习 题 3.3

1. 证明方程 $x^3+x+q=0\ (p>0)$ 有且只有一个实根.

2. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续,而 $x_1,x_2,\dots,x_n\in(a,b)$. 证明,存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i).$$

3. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续,若 $x_n,y_n\in(a,b)\ (n\geqslant1)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A,\qquad \lim_{n\to\infty}f(y_n)=B\ (B>A).$$

证明,对任意 $\eta\in(A,B)$,存在 $\{z_n\}\subseteq(a,b)$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=b$,并且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=\eta$.

4. 设 $f(x)\in C[a,b]$,而 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上单调. 证明 $f(x)$ 也在 $[a,b]$ 上单调.

5. 设 $f(x)\in C[a,b]$,且对任意$x_1,x_2\in[a,b]$,当 $x_1\neq x_2$ 时,有 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 证明,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调上升或严格单调下降.

6. 设 $f(x)\in C(\mathbb{R})$,并且对任意 $x,y\in\mathbb{R}$,函数 $f(x)$ 满足

$$|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|,\quad 0<k<1.$$

证明,

(1) 函数 $kx - f(x)$ 单调上升; (2) 存在 $\xi \in \mathbb{R}$,使得 $f(\xi) = \xi$.

§3.4 初等函数的连续性

前面我们已知多项式、有理函数、三角函数与反三角函数在其定义域上是连续的. 这节我们讨论指数函数、对数函数和幂函数的连续性.

由定理 3.3.3 的证明,我们可得出如下结论: 区间上的单调函数,它连续当且仅当其值域为一区间. 当讨论指数函数 a^x $(a > 0)$ 的连续性时,如果用到正实数的对数存在,实质上是用到单调函数 a^x 的值域为一区间,而 a^x 的值域为一区间时用到 a^x 的连续性,这无异于用 a^x 的连续性来证其连续性. 为了避免这个逻辑上的毛病,我们从指数定义出发来证明其连续性.

在给出指数函数定义之前,我们需要下面的引理. 同时,为了叙述简单起见,只考虑 $a > 1$ 情形.

引理 3.4.1 设 $a > 1$,n 为正整数,则存在实数 $b > 1$,使得 $a = b^n$ 或者 $\sqrt[n]{a} = b$.

证明 在区间 $[1, a]$ 上考虑函数

$$f(x) = x^n.$$

显然它是连续的,且

$$f(1) = 1 < a < f(a) = a^n.$$

由连续函数中间值定理(见图 3.4.1),存在 $b \in (1, a)$,使得

$$a = b^n \quad 或 \quad \sqrt[n]{a} = b. \qquad \blacksquare$$

图 3.4.1

引理 3.4.1 保证大于 1 的实数的 n 次算术根总是存在的,且算术根也大于 1. 这样就有下面定义.

定义 3.4.1 若正有理数 $q = \dfrac{m}{n}$,其中 n, m 为正整数且互素,定义

$$a^q := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m;$$

若 q 为负有理数,定义

$$a^q := \frac{1}{a^{-q}};$$

而定义 $a^0 := 1$.

若 λ 无理数,定义

$$a^\lambda := \sup_{q<\lambda}\{a^q\}, \quad q \in \mathbb{Q}.$$

还需说明定义 3.4.1 中上确界的存在性. 不难证明,当 q 为有理数时,a^q 仍满足熟知的指数的三条性质,所以当有理数 $q_1 < q_2$ 时,

$$\frac{a^{q_2}}{a^{q_1}} = a^{q_2 - q_1} > 1 \Longrightarrow a^{q_2} > a^{q_1}.$$

由此即可看出定义中上确界存在,且不管 x 是无理数还是有理数,总有

$$a^x := \sup_{q<x}\{a^q\}, \quad q \in \mathbb{Q}.$$

这样我们就得到在 $\mathbb{R}$ 上定义的指数函数 a^x.

首先证明 a^x 严格上升.

设给定实数 x_1, x_2,且 $x_1 < x_2$,总可以找到有理数 q_1, q_2,使得

$$x_1 < q_1 < q_2 < x_2,$$

因此

$$a^{x_1} = \sup_{q\leqslant x_1}\{a^q\} \leqslant a^{q_1} < a^{q_2} \leqslant \sup_{q\leqslant x_2}\{a^q\} = a^{x_2},$$

即 a^x 在 $\mathbb{R}$ 上严格上升.

其次证明 $f(x) = a^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

对任意 $\varepsilon > 0$,存在自然数 N,使得

$$a < (1+\varepsilon)^N.$$

对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$,总可以找到有理数 q_1, q_2,使得

$$q_1 < x_0 < q_2, \quad q_2 - q_1 = \frac{1}{N}.$$

事实上,用 k/N 的点把实轴分成无穷个小区间,这里 $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$,若 x_0 落在某一小区间内部,则把该小区间的左、右端点即为 q_1 和 q_2;若 x_0 正好是小区间端点,只要把小区间平移 $1/(2N)$,即化为内点情形. 由定理 3.1.1 可知

$$f(x_0) \leqslant f(x_0+0) \leqslant a^{q_2}, \quad f(x_0) \geqslant f(x_0-0) \geqslant a^{q_1}.$$

所以

$$1 \leqslant \frac{f(x_0+0)}{f(x_0-0)} \leqslant \frac{a^{q_2}}{a^{q_1}} = a^{q_2-q_1} = a^{\frac{1}{N}} < 1+\varepsilon,$$

由 ε 的任意性,即得

$$f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0) = a^{x_0},$$

这说明函数 a^x 在 x_0 点连续. 由 x_0 的任意性可知 a^x 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

利用函数 a^x 的连续性,已知性质 $a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$ 对有理数 x_1, x_2 成立,通过取极限,即得上述性质对任意实数 x_1, x_2 成立.

进一步可得出对数函数与幂函数的连续性.

(1) $y = \log_a x \in C(0, +\infty)$.

因为 $x = a^y$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格上升、连续,故其值域为 $(0, +\infty)$,且 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格上升、连续.

(2) $y = x^\alpha \in C(0, +\infty)$.

因为 $y = x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \log x}$,由复合函数连续性即可看出.

最后可得结论:**一切初等函数在其定义域上是连续的.**

例 3.4.1 若 $u(x), v(x)$ 在 x_0 点连续,且 $u(x_0) > 0$,则 $u(x)^{v(x)}$ 也在 x_0 点连续

(在 x_0 附近考虑).

证明　注意到, $u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\log u(x)}$. 因为 $u(x)$ 在 x_0 点连续, $\log t$ 在 $t=u(x_0)$ 点连续, 由复合函数的连续性, 可知 $\log u(x)$ 在 x_0 点连续. 由乘积的连续性, 可得 $v(x)\log u(x)$ 在 x_0 点连续. 又 e^y 在 $y=v(x_0)\log u(x_0)$ 点连续, 再用复合函数的连续性, 得

$$u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\log u(x)}$$

在 x_0 点连续. ■

例 3.4.2　若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b$, 则

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^b.$$

证明　补充定义

$$u(x_0)=a,\quad v(x_0)=b,$$

则函数 $u(x), v(x)$ 在 x_0 点连续. 由例 3.4.1 可得

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=u(x_0)^{v(x_0)}=a^b.$$

当 $x_0=+\infty$ 或 $-\infty$ 时, 利用变换 $x=1/t$, 就可以化为 $t=0$ 情形, 所以这时候结论仍成立. ■

求极限我们讨论过加、减、乘、除四条运算法则, 现在又多了一条幂指运算法则, 这样共有五条求极限的法则.

例 3.4.3

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^x.$$

证明　注意到

$$\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^x=\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin(1/x)}\cdot\frac{\sin(1/x)}{1/x}},$$

令

$$u(x)=\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin(1/x)}},\quad v(x)=\frac{\sin(1/x)}{1/x}.$$

由

$$\lim_{x\to+\infty}u(x)=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to+\infty}v(x)=1,$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}.$$ ■

习 题 3.4

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\arctan x)^{\cos\frac{1}{x}}$.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

3. 证明, 方程 $x^\alpha=\log x\ (\alpha<0)$ 在正实轴上有且仅有一根.

§3.5 有界闭区间上连续函数的性质

这节我们讨论连续函数的最大最小值与一致连续性,它们的证明以后再给出.

定理 3.5.1 (最大最小值定理) 设 $f(x)\in C[a,b]$,则 $f(x)$ 一定有最大值与最小值. 即存在 $x_1,x_2\in[a,b]$,使得对任意 $x\in[a,b]$,有

$$f(x)\leqslant f(x_1)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\},\quad f(x)\geqslant f(x_2)=\min_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}.$$

此时,x_1,x_2 分别称为函数的**最大值点与最小值点**.

从几何上看,若连续曲线有最左、最右的点,则必有最高、最低的点.

注意定理 3.5.1 中闭区间条件不能减弱. 例如,函数 $f(x)=1/x$ 在 $(0,1)$ 上连续,但函数在开区间上没有最大值和最小值.

下面介绍一致连续的概念.

设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续,即指每一点连续. 例如,它在 x_1 点连续,则对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1=\delta(\varepsilon,x_1)>0$,当 $|x-x_1|<\delta_1$ 时,有

$$\big|f(x)-f(x_1)\big|<\varepsilon.$$

由它在 x_2 点连续,则对上述 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_2=\delta(\varepsilon,x_2)>0$,当 $|x-x_2|<\delta_2$ 时,有 $|x-x_1|<\delta_1$ 时,有

$$\big|f(x)-f(x_2)\big|<\varepsilon.$$

我们发现,对同一个 $\varepsilon>0$,由于函数在每一点连续,多以每一点都存在 $\delta(\varepsilon,x)>0$,但对不同的点 x,找到的 δ 的大小是不同的,δ 不仅依赖于 ε,也依赖于 x. 在曲线平坦部分(比如 x_1 点附近)找到的 δ 可以大一些,而在曲线陡的部分(比如 x_2 点附近)找到的 δ 必须小一些. 从图形上看,在陡处的点适用的 δ,对平坦处的点也是适用的,如 x 落在 x_1 的 δ_1 邻域时,$f(x)$ 落在 $f(x_1)$ 的 ε 邻域,则 x 落在 x_1 的 δ_2 时,$f(x)$ 更落在 $f(x_1)$ 的 ε 邻域. 但在平坦处的点适用的 δ,对陡处的点不一定适用(见图 3.5.1). 这样,就提出一个问题,对任意 $\varepsilon>0$,能否找到对每一个 x 都适用的公共 δ 呢?

定义域上有无穷个 x,也就有无穷个 δ,若只有有限个 δ,则最小的 δ 就是公共的 δ,现在无穷个 δ 里面,不一定有大于零的最小 δ,也就不一定存在公共的 δ. 从几何直观来看,如果曲线有一个地方最陡,则最陡处的 δ,对其它点也适用,这时就找到了公共的 δ; 若曲线无限地变陡,没有一处坡度最陡的地方,这时就找不到公共的 δ.

图 3.5.1

对于用公共 δ 的函数,我们给出如下定义.

定义 3.5.1 设 $f(x)$ 在区间 I 上定义,若对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得对任意 $x_1,x_2\in I$,当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,有

$$\left|f(x-1)-f(x_2)\right|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 I 上**一致连续**.

显然,函数在区间 I 上一致连续,必在区间 I 上连续.

例 3.5.1　证明 $y=x^2$ 在 $[0,a]$ 上一致连续.

证明　对任意 $\varepsilon>0$,当 $x_1,x_2\in[0,a]$ 时,有

$$\left|x_1^2-x_2^2\right|<\varepsilon \iff |x_1+x_2|\cdot|x_1-x_2|\leqslant 2a|x_1-x_2|<\varepsilon.$$

去 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2a}$,则当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,就有

$$\left|x_1^2-x_2^2\right|<\varepsilon.$$

由定义可知函数在 $[0,a]$ 上一致连续. ■

例 3.5.2　证明 $y=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

由图 3.5.2 看出,函数在 $x=0$ 处坡度最陡,$x=0$ 处的 δ 即可最为公共的 δ.

证明　对任意 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon^2>0$,当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$,$|x_1-x_2|<\delta$,我们分两种情形讨论.

(1) $\max\{x_1,x_2\}\geqslant\varepsilon^2$ 时,

$$\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|=\left|\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\right|\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{\varepsilon^2}}<\frac{\delta}{\varepsilon}=\varepsilon;$$

(2) $\max\{x_1,x_2\}<\varepsilon^2$ 时,无妨设 $x_1\geqslant x_2$ 时

$$\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|\leqslant\sqrt{x_1}<\sqrt{\varepsilon^2}=\varepsilon.$$

所以函数 $\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续. ■

图 3.5.2

从图形可以看出,闭区间上的连续函数,总有一处坡度最陡,在这一处坡度最陡,在这一处使用的 δ 即为公共的 δ,于是有如下定理.

定理 3.5.2　设函数 $f(x)\in C[a,b]$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

有没有不一致连续的连续函数呢? 有的. 例如,函数 $y=1/x$,当 $x\to0$ 是,曲线无限地变陡,且没有最陡的点,因此没有公共的 δ,也就在 $(0,1)$ 上不一致连续. 又例如 $y=\sin(1/x)$,当 $x\to0$ 时,也无限地变陡,且没有最陡的点,因此不可能找出公共的 δ,所以在 $(0,1)$ 上也不一致连续. 上面只是直观叙述,怎么来严格论证呢? 为此我们还是从一致连续开始.

一致连续是说,对区间上任意两点,不管这两点位置在哪儿,只要这两点距离小于 δ,相应的曲线高度之差总小于 ε. 根据这一点,要检查曲线是否一致连续,可以作一形象的说法,把曲线比作工厂的产品,一致连续表示合格品. 我们是用如下办法检查产品是否是合格品. 用一系列直径为 ε 的空心圆管,若对每一直径为 ε 的空心圆管,总能锯下长为 δ 的一小段,把这小段圆管套进曲线一端,允许小段管子

上下评语，而不允许倾斜或侧转，如果圆管能从曲线一端进去，平行移动从另一端出来，而不碰到曲线，就认为检查通过．对每一直径为 ε 的圆管，检查都能通过，产品就是合格品，即曲线一致连续．

所以，不一致连续，即产品是不合格品，那么总有一道检查手续通不过，即存在 $\varepsilon_0>0$ 的圆管，不可能锯下一小段使得上面的检查通过．也就是是，对任意 $\delta>0$，总可以锯下长为 δ' 的一小段（$\delta>\delta'$），不可能从曲线一端套进去，平行移动从另一端出来，而不碰到曲线，这意味着小圆管总要在曲线的某个地方被卡住（见图 3.5.3），即存在 x',x''，$|x'-x''|=\delta'<\delta$，但

图 3.5.3

$$\left|f(x')-f(x'')\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

综上所述，就可以得到不一致连续的"$\varepsilon-\delta$"说法：

存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任意 $\delta>0$，都存在 $x',x''\in I$，即使 $|x'-x''|<\delta$，但是

$$\left|f(x')-f(x'')\right|\geqslant\varepsilon_0. \tag{3.5.1}$$

形式上把"任意"与"存在"交换一下，由一致连续的说法就变为不一致连续的说法．

在 (3.5.1) 中取 $\delta_n=1/n\ (n=1,2,\dots)$，就可以把不一致连续改述如下：

存在 $\varepsilon_0>0$，存在 I 内的序列 $\{x_n'\},\{x_n''\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，但

$$\left|f(x_n')-f(x_n'')\right|\geqslant\varepsilon_0. \tag{3.5.2}$$

反之，若 (3.5.2) 成立，则 (3.5.1) 也成立，所以不一致连续的两种说法是等价的．

把序列看成动点所取得值，不一致连续就是说，存在两个动点，动点变动时距离趋于零，而动点的函数值总保持一定距离 ε_0．

利用 (3.5.2) 判别不一致连续，我们还嫌不便，事实上可以改得更简便些：

存在 I 内的序列 $\{x_n'\}$ 和 $\{x_n''\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，而

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=C\neq 0, \tag{3.5.3}$$

则函数在 I 内不一致连续．

(3.5.3) 蕴涵 (3.5.2)．事实上，令 $\varepsilon_0=|C|/2>0$，当 $n>N$ 时，

$$\left||f(x_n')-f(x_n'')|-|C|\right|\leqslant\frac{|C|}{2},$$

所以

$$\left|f(x_n')-f(x_n'')\right|\geqslant|C|-\frac{|C|}{2}=\frac{|C|}{2}.$$

再令 $\tilde{x}_n'=x_{N+n}'$ 和 $\tilde{x}_n''=x_{N+n}''$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\tilde{x}_n'-\tilde{x}_n''\right)=\lim_{n\to\infty}\left(x_{n+N}'-x_{n+N}''\right)=0,$$

但是

$$\left|\tilde{x}_n'-\tilde{x}_n''\right|\geqslant\frac{|C|}{2}=\varepsilon_0.$$

这就是说找到了 (3.5.2) 所要求的 ε_0 与序列 $\{\tilde{x}_n'\}$ 和 $\{\tilde{x}_n'\}$.

这样,判断不一致连续,就归结为寻找符合 (3.5.3) 的两个序列即可.

例 3.5.3　证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

证明　对于 $n=1,2,\dots$,取

$$x_n'=\frac{1}{n+1},\quad x_n''=\frac{1}{n+2},$$

则

$$x_n'-x_n''=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\to 0,$$

但

$$f(x_n')-f(x_n'')=(n+1)-(n+2)\to -1\neq 0,$$

所以 $1/x$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续. ■

例 3.5.4　证明 $f(x)=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续.

证明　对于 $n=1,2,\dots$,取 $x_n'=\sqrt{n}$,$x_n''=\sqrt{n+1}$,则

$$x_n'-x_n''=\sqrt{n}-\sqrt{n+1}=\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\to 0,$$

但是

$$f(x_n')-f(x_n'')=n-(n+1)=-1\to -1\neq 0,$$

所以 x^2 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续. ■

习 题 3.5

1. 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

2. 设 $f(x)\in C(\mathbb{R})$,且 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$. 证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上取到它的最小值.

3. 设 $f(x)\in C[a,b)$,且 $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=B$.

(1) 若存在 $x_1\in[a,b)$,使得 $f(x_1)>B$,证明 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上达到最大值;

(2) 若存在 $x_1\in[a,b)$,使得 $f(x_1)=B$,讨论 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上能否达到最大值.

4. 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$. 证明

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f(x)+g(x)|\}\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f(x)|\}+\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|g(x)|\}.$$

5. 设 $f(x)\in C(\mathbb{R})$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f\big(f(x)\big)=\infty$. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

6. 设 $f(x)\in C[0,1]$,且 $f(x)>0$. 令

$$M(x):=\max_{0\leqslant t\leqslant x}\{f(t)\},\quad x\in[0,1].$$

证明函数

$$Q(x):=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(x)}{M(x)}\right)^n$$

连续当且仅当 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上时单调上升的.

7. 设 $f(x)\in C[a,b]$,记

$$g(x):=\max_{a\leqslant t\leqslant x}\{f(t)\},\quad x\in[a,b].$$

证明 $g(x)\in C[a,b]$.

8. 设 $f(x)\in C[a,b]$,并且对任意 $x\in[a,b]$,存在 $y\in[a,b]$,使得 $|f(y)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(x)|$. 证明,存在 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=0$.

9. 设 $f(x)\in C(\mathbb{R})$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，且 $f(x)$ 的最小值 $f(a)<a$. 证明 $f\big(f(x)\big)$ 至少在两点取到最小值.

10. 设 $f(x)\in[-1,1]$，$f(0)>0$，$f(\pm1)=0$. 证明，存在常数 $a>0$ 和 b，使得

$$g(x)=-a|x|+b\geqslant f(x),\quad x\in[-1,1];$$

且存在 c $(-1<c<1)$，使得 $g(c)=-a|c|+b=f(c)$.

11. 证明 $y=x$ 和 $y=\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

12. 证明 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

13. 证明下列函数在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续.

(1) $y=x^3$； (2) $y=x\cdot\sin x$.

14. 证明 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ 在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上一致连续，但是在 $0<|x|<1$ 上并非一致连续.

15. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续. 证明，

(1) $f(x)$ 在 (a,b) 上有界； (2) $y=\log x$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

16. 设 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 上一致连续. 证明 $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)\cdot g(x)$ 也在 (a,b) 上一致连续.

17. 若周期函数 $f(x)\in C(\mathbb{R})$，证明

(1) $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续； (2) $f(x)=\sin^2x+\sin x^2$ 不是周期函数.

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件，即对任意 $x,y\in[a,b]$，有

$$\big|f(x)-f(y)\big|\leqslant k|x-y|,$$

这里 k 为常数. 证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

19. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上满足 Lipschitz 条件，证明 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

20. 设 $f(x)\in C(\mathbb{R})$，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续，并判断下述证明的正确性.

证明 对任意 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，存在 $X_1>0$，使得当 $x>X_1$ 时，有

$$\big|f(x)-A\big|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以当 $x_1,x_2>X_1$ 时，有

$$\big|f(x_1)-f(x_2)\big|\leqslant\big|f(x_1)-A\big|+\big|f(x_2)-A\big|<\varepsilon.$$

由此即可得到 $f(x)$ 在 $[X_1,+\infty)$ 上一致连续.

同理，由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B$，存在 $X_2<0$，当 $x_1,x_2<X_2$ 时，有

$$\big|f(x_1)-f(x_2)\big|<\varepsilon.$$

由此即可得到 $f(x)$ 在 $[-\infty,X_2)$ 上一致连续.

又因为 $f(x)$ 在闭区间 $[X_2,X_1]$ 上连续，故在闭区间 $[X_2,X_1]$ 上一致连续.

综上所述就得到 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续. □

21. 证明 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续必一致连续，并判断下述证明的正确性.

证明 用反证法. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一致连续，则存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任意 $\delta_1>0$，存在 $x_1,x_2\in[a,b]$，即使 $|x_1|x_2<\delta_1$，但是

$$\big|f(x_1)-f(x_2)\big|\geqslant\varepsilon_0. \tag{3.5.4}$$

由 $f(x)$ 在 $x=x_2$ 点连续，对上述 ε_0，存在 $\delta>0$，使得当 $|x-x_2|<\delta$ 时，有

$$\big|f(x_1)-f(x_2)\big|<\varepsilon_0. \tag{3.5.5}$$

由于 (3.5.4) 对任意 $\delta_1>0$ 成立，取 $\delta_1=\delta$，则当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right| \geqslant \varepsilon_0. \tag{3.5.6}$$

又因为 (3.5.5) 对任意满足 $|x-x_2|<\delta$ 的 x 成立. 取 $x=x_1$, 则当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right| < \varepsilon_0. \tag{3.5.7}$$

(3.5.6) 与 (3.5.7) 矛盾, 这说明反证法假设不成立, 从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续. □

复习题三

1. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调, 且对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 都满足函数方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

证明,

(1) $f(nx)=nf(x)\ (n\in\mathbb{Z})$;　　(2) $f\left(\dfrac{x}{n}\right)=\dfrac{1}{n}f(x)\ (n\in\mathbb{Z}-\{0\})$;

(3) $f(\alpha x)=\alpha f(x)\ (\alpha\in\mathbb{Q})$;　　(4) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

(5) $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续;　　(6) $f(x)=f(1)\cdot x$.

2. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调, 且对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 都满足函数方程

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

证明 $f(x)=f(0)+f(1)\cdot x$.

3. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 且对任意 $x,y\in(a,b)$, 有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

证明,

(1) 对任意 $x_1,x_2,\dots,x_n\in(a,b)$, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}\big(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\big);$$

(2) 对任意 $t\in(0,1)$ 和任意 $x_1,x_2\in(a,b)$, 有

$$f\big(tx_1+(1-t)x_2\big)\leqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2).$$

4. 证明 Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n}, \text{且 } (m,n)=1;\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q},\end{cases}$$

在任一有理点间断, 而在任一无理点连续.

5. 设 $f(x)\in C[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$, 并且 $f(x)$ 有正的最大值. 证明, 存在二次多项式

$$Q(x)=ax^2+bx+c\ (a<0),$$

使得 $Q(x)\geqslant f(x)\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 且 $Q(\alpha)=f(\alpha)\ (0<\alpha<1)$.

6. 设 $f(x)\in C(\mathbb{R})$,且 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f\big(f(x)\big)=+\infty$. 证明 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$.

7. 证明,方程 $x^2+3x^3+7x^4-5x^6-8x^7=0$ 有且仅有一个正实数根.

8. 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$. 证明,

(1) 若 $f(x_0)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f(x)|\}>\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{|g(x)|\}$,则 $f(x_0)>g(x_0)$;

(2) 若 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f(x)|\}>\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{|g(x)|\}$,则 $f(x)$ 与 $f(x)-g(x)$ 在 $|f(x)|$ 的最大值点处有相同的符号.

9. 设在 $[-1,1]$ 上,对于 $n=1,2,\ldots,$ 有

$$T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x).$$

证明,

(1) $|T_n(x)|$ 在 $n+1$ 个点 $x_k=\cos\dfrac{k}{n}\pi\ (k=0,1,\ldots,n)$ 上达到最大值;

(2) 对任一首项系数为 1 的 n 次多项式 $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$,必有

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\{|P(x)|\}\geqslant\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\{|T_n(x)|\}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义. 对 $[a,b]$ 上任一闭区间 $[x_1,x_2]\subseteq[a,b]$ 和介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的任一常数 ℓ,方程 $f(x)=\ell$ 在 $[x_1,x_2]$ 上有且仅有有限个解. 证明 $f(x)\in C[a,b]$.

11. 证明,在 $x\geqslant 0$ 上有非零基本初等连续函数 $f(x)$ 满足

$$f(2^2x)=f(2x)+f(x).$$

第四章　导数与微分

从微积分发展的历史来看,先有积分概念,后有导数概念,最后才有极限理论. 但从教学顺序来说,我们正好把它倒过来,先讲极限,然后讲导数、积分.

导数概念最早是法国数学家 Fermat,为了解决极大、极小问题,引入了导数的思想. 但与导数概念密切相联的是以下两个问题: 已知运动规律求运动的速度和已知曲线求它的切线. Newton 和 Leibniz 就是在研究这些问题中,发现了微积分这一重要工具.

例如,行星绕太阳作椭圆轨道运行,运行的速度是在不断变化的. 天文学家 Kepler 经二十年的观察,总结出行星运行的三大定律,Newton 就是根据三大定律发现了万有引力定律,并由万有引力定律出发,利用他总结得到的微积分这一工具,从理论上证明了 Kepler 三大定律,这是微积分发展史上第一次显示了它的威力. 若除太阳的引力外,再考虑木星、土星、天王星之间的相互引力,算出的椭圆轨道的偏差,对木星和土星与观察所得是一致的,而对天王星存在不可忽视的差别. Hadamard 与 Le Verrier 提出解决这一矛盾的设想: 存在一颗未被发现的行星干扰着天王星的运行. 他们经过大量的计算,独立地推算出新行星的方位,果然在他们所指示的方位上,找到了这颗行星——海王星. 这是微积分发展史上一个重大的胜利,也使微积分理论真正站住了脚. 又例如,天文观察中离不开望远镜,Galileo 发明了第一架天文望远镜,为了改进望远镜,就需要研究曲线的法线,而求曲线的法线相当于求曲线的切线. 所以求一般曲线的切线问题,也导致了导数概念的建立.

Newton 时期的导数概念,建立在"无穷小"的基础之上."无穷小"是个似零非零的量,在逻辑上并未说清楚. 所以,一方面由于微积分在应用中显示的威力,获得了迅猛的发展; 一方面对它的基础——"无穷小"展开了激烈的争论. 直到十八世纪有了极限理论之后,"无穷小"是作为极限为零的变量,微积分才在逻辑上有了坚实的基础.

§4.1 导数概念

习 题 4.1

1.

§4.2 导数的几何意义与极限

习 题 4.2

1.

§4.3 导数的四则运算

习 题 4.3

1.

§4.4 复合函数求导

4.4.1 复合函数求导

4.4.2 隐函数微分法

4.4.3 对数微分法

习 题 4.4

1.

§4.5 反函数与参数式求导

4.5.1 反函数求导

4.5.2 参数式求导

4.5.3 极坐标式求导

习 题 4.5

1.

§4.6 微　分

4.6.1 微分定义

4.6.2 微分与导数

4.6.3 微分的几何意义

4.6.4 一阶微分形式的不变形

4.6.5 微分的应用

习 题 4.6

1.

§4.7 高阶导数与高阶微分

4.7.1 高阶导数

4.7.2 Leibniz 公式

4.7.3 其它函数关系的高阶导数

4.7.4 高阶微分

习 题 4.7

1.

复习题四

1.

第五章　利用导数研究函数

---

§5.1 微分中值定理

习 题 5.1

1.

§5.2 L'Hôpital 法则

5.2.1 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式

5.2.2 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式

5.2.3 其它类型不定式

习 题 5.2

1.

§5.3 Taylor 公式

5.3.1 Peano 余项的 Taylor 公式

5.3.2 Lagrange 余项的 Taylor 公式

5.3.3 应用

习 题 5.3

1.

§5.4 函数的升降与极值

5.4.1 函数的升降

5.4.2 极值

5.4.3 函数在一点的升降

习 题 5.4

1.

§5.5 函数的凹凸与拐点

5.5.1 函数的凹凸性

5.5.2 应用

5.5.3 拐点

习 题 5.5

1.

§5.6 函数作图

习 题 5.6

1.

§5.7 方程求根

习 题 5.7

1.

复习题五

1.

第六章　不定积分

§6.1 不定积分概念

习 题 6.1

1.

§6.2 积分表与线性性质

习 题 6.2

1.

§6.3 换元法

6.3.1 第一换元法

6.3.2 第二换元法

习 题 6.3

1.

§6.4 分部积分法

习 题 6.4

1.

§6.5 有理函数的积分

习 题 6.5

1.

§6.6 三角函数有理式的积分

习 题 6.6

1.

§6.7 无理函数的积分

6.7.1 $\int R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ 型积分

6.7.2 二项式微分式积分

6.7.3 $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$ 型积分

习 题 6.7

1.

复习题六

1.

高等学校试用教材

数 学 分 析

第 二 册

北京大学数学系 沈燮昌 编

高等教育出版社

内容简介

本书是北京大学数学系同志合编《数学分析》一书的第二册（全书共三册，另配备习题集一册）. 内容包括定积分及应用，实数空间，广义积分，级数等八章. 本书在第一册极限论基础上，从有理数的分割法引入实数，证明实数域是一个实数空间，引入了连通性、紧性、完备性等重要概念. 对于 Riemann 积分，给出了积分存在的另两个等价定理，和定积分的几种近似计算方法和误差估计. 本书还介绍了多项式逼近定理的 Lebesgue 证明. 在讨论级数、广义积分的敛散性时，还渗透了无穷小量阶的思想. 本书例题丰富，有趣.

本书经欧阳光中副教授，董延闿教授复审，可作为综合大学、师范院校数学系的试用教材或教学参考书.

高等学校试用教材

数 学 分 析

第二册

北京大学数学系　沈燮昌　编

*

高等教育出版社 出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850 × 1168 1/32　印张 11.25　　字数 268 000

1986 年 4 月第 1 版　1988 年 1 月第 3 次印刷

印数 15 411 — 25 410

ISBN 7-04-001215-4 / O·365

定价 1.90 元

第二册前言

本书是北京大学数学系沈燮昌教授,方企勤、廖可人、李正元副教授合编的《数学分析》一书中的第二册. 第一册由方企勤副教授执笔,第二册主要由沈燮昌教授执笔,第三册由廖可人、李正元副教授执笔. 全书三册有我统一看过一遍,并做了一些修改.

本册内容包括定积分,定积分的应用,实数空间,广义积分,数值级数,函数项级数,幂级数和 Fourier 级数等共八章,其中实数空间这一章由方企勤副教授执笔.

正如第一册前言所说,为了使难点分散和便于理解,我们商定讲极限分成两大部分来讲,在第一册中介绍极限基础. 这里,即第二册中进一步介绍实数空间;从直观的有理数的分割法开始引入实数,然后研究实数是一个有序域,进而证明它是一个实数空间. 此外还引入了连通性,紧性以及完备性等重要概念,并说明这些概念本质上用到些什么内容,这对于今后进一步学习一些抽象空间是有启发的.

对于 Riemann 积分,我们还是用通常直观的方法引入其定义,但是我们说明了,为了保证积分存在,就需要研究函数在每一个小的分割区间上的偏差性质. 从而引入了积分的大和、小和以及它们的下确界及上确界,而 Riemann 和正是位于这两者之间,因此自然地引入上、下积分的概念. 这样一来,我们就能给出 Riemann 积分存在的另两个等价的定理,这给具体使用带来了较大的方便.

对于一些概念的引进,我们尽量给予直观的解释以利于读者理解这些概念. 例如在讲有理数分划能确定一个实数时,我们用形象“排队”的说法,只要知道前面是什么人,而后面又是什么人后就可以确定自身的位置. 对于 Abel 变换,除了给出这个变换的分析表达式以外,还给出了对面积进行不同的分法而得到的同一个结果的解释.

在本册中还渗透了无穷小量阶的思想,这对研究级数和广义积分的收敛与发散性更能看清其本质,而且也易于判别.

此外,还给出定积分的几种近似计算方法并利用简洁的方法给出了误差估计式. 考虑到目前是广泛地使用电子计算机的时代,初步了解一些计算方法以及知道误差估计的重要性,这对学生来说无疑是有好处的.

本册还给出了很多例题,由易而难,有些例子不仅是较有趣,而且也给出一些

重要的结果. 这些例题可以使学生加深对理论的理解并且对如何灵活地使用学到的理论会起到重要的示范作用.

这里还介绍了两个逼近定理,过去在常见的教科书中,总是用 Bernstein 多项式来实现多项式逼近,这个多项式对于初学者来说是很难理解的. 这里介绍了多项式逼近定理的 Lebesgue 证明,首先用折线来逼近连续函数,然后再利用幂级数展开的方法来逼近折线函数. 这样的证明比较直观、易懂,且也是所学过的方法的灵活运用.

作者在书写本书过程中深深地感到,对于像这类基本内容都已经比较成熟的教科书,如何进行改革,一方面要使学生容易接受,能够通过学习掌握一些最基本的知识且在能力上有所提高,另一方面又能适当地现代化,这是一件很不容易做到的事情. 希望广大读者多多地提出宝贵意见.

作者感谢李正元副教授,他仔细地阅读了原稿,并提出了很多宝贵的意见. 作者也感谢欧阳光中副教授、董延闿教授仔细地审阅了原稿,并提出了很多改进意见.

沈燮昌

1985 年 3 月于北京大学数学系

第二册目录

第七章　定积分

§7.1 定积分的概念

7.1.1 实际问题中的例

7.1.2 定积分的概念及几何意义

习 题 7.1

1.

§7.2 Newton-Leibniz 公式

习 题 7.2

1.

§7.3 可积函数

7.3.1 函数可积的充分必要条件

7.3.2 可积函数类

习 题 7.3

1.

§7.4 定积分的性质

7.4.1 定积分的基本性质

7.4.2 积分第一中值定理

习题 7.4

1.

§7.5 变限的定积分与原函数的存在性

习题 7.5

1.

§7.6 定积分的换元法与分部积分法

7.6.1 定积分的换元法

7.6.2 定积分的分部积分法

7.6.3 积分第二中值定理

习题 7.6

1.

§7.7 定积分的近似计算

7.7.1 矩形法

7.7.2 梯形法

7.7.3 Simpson 公式

习题 7.7

1.

复习题七

1.

第八章　定积分的应用

§8.1 平面图形的性质

8.1.1 直角坐标系下平面图形面积的计算

8.1.2 极坐标系下平面图形面积的计算

习 题 8.1

1.

§8.2 由平面截面面积求体积

习 题 8.2

1.

§8.3 平面曲线的弧长与曲率

习 题 8.3

1.

§8.4 旋转体侧面积计算

习 题 8.4

1.

§8.5 微元法

§8.6 定积分在物理中的应用

8.6.1 平面曲线的质心及平面图形的质心计算

8.6.2 转动惯量的计算

8.6.3 引力与功的计算

习 题 8.6

1.

复习题八

1.

第九章　实数空间

§9.1　实数定义

9.1.1　为什么要定义实数

9.1.2　实数的定义

§9.2　实数空间

9.2.1　实数的计算

9.2.2　实数集是域

9.2.3　实数集是全序域

9.2.4　实数集的连通性

9.2.5　实数的表示

9.2.6　实数集的公理系统

习 题 9.2

1.

§9.3　确界存在原理与区间套定理

9.3.1　确界存在原理

9.3.2　区间套定理

习 题 9.3

1.

§9.4 紧性定理

9.4.1 有限覆盖定理

9.4.2 聚点原理

9.4.3 子序列与 Bolzano 定理

习 题 9.4

1.

§9.5 完备性定理

9.5.1 序列极限的 Cauchy 准则

9.5.2 函数极限的 Cauchy 准则

习 题 9.5

1.

§9.6 连续函数性质证明

习 题 9.6

1.

§9.7 压缩映射原理

习 题 9.7

1.

§9.8　上极限与下极限

9.8.1　序列的上、下极限的定义

9.8.2　上、下极限的性质

9.8.3　上、下极限的等价形式

9.8.4　函数的上、下极限

习 题 9.8

1.

复习题九

1.

第十章　广义积分

§10.1 无穷积分的概念

习 题 10.1

1.

§10.2 无穷积分的收敛性判别法

习 题 10.2

1.

§10.3 瑕积分的概念

习 题 10.3

1.

§10.4 瑕积分收敛性判别法

习 题 10.4

1.

复习题十

1.

第十一章　数值级数

§11.1 数值级数的基本概念与简单性质

11.1.1 数值级数的收敛与发散

11.1.2 级数的基本性质

习 题 11.1

1.

§11.2 正项级数

11.2.1 正项级数收敛的充要条件

11.2.2 比较判别法

11.2.3 d'Alembert 判别法及 Cauchy 判别法

11.2.4 Raabe 判别法

11.2.5 Cauchy 积分判别法

习 题 11.2

1.

§11.3 任意项级数

11.3.1 交错级数收敛判别法

11.3.2 绝对收敛与条件收敛

11.3.3 Dirichlet 判别法

习 题 11.3

1.

§11.4 收敛级数的性质

11.4.1 无穷级数的可结合性

11.4.2 无穷级数的可交换性问题

11.4.3 级数的乘法

习 题 11.4

1.

§11.5 广义积分与级数的联系

复习题十一

1.

第十二章　函数项级数

§12.1　函数序列及级数中的基本问题

§12.2　函数序列及函数级数的一致收敛性

12.2.1　一致收敛的概念

12.2.2　一致收敛性的判别法

习 题 12.2

1.

§12.3　一致收敛的函数序列与函数级数的性质

习 题 12.3

1.

复习题十二

1.

第十三章　幂级数

§13.1 幂级数的收敛半径与收敛区间

习 题 13.1

1.

§13.2 幂级数的性质

习 题 13.2

1.

§13.3 初等函数的 Taylor 级数展开

习 题 13.3

1.

*§13.4 Stirling 公式

习 题 13.4

1.

§13.5 幂级数的应用

13.5.1 近似计算

13.5.2 定积分的计算

13.5.3 微分方程的幂级数解法

§13.6 用多项式一致逼近闭区间上的连续函数

复习题十三

1.

第十四章　Fourier 级数

§14.1 基本三角函数系

习 题 14.1

1.

§14.2 周期函数的 Fourier 级数

习 题 14.2

1.

§14.3 Fourier 级数的收敛性

14.3.1 Fourier 级数的部分和

14.3.2 Fourier 级数部分和的极限问题

14.3.3 Fourier 级数的收敛性判别法——Dini 判别法

14.3.4 Fourier 级数收敛的 Dirichlet 判别法

习 题 14.3

1.

§14.4 任意区间上的 Fourier 级数

14.4.1 周期是 2ℓ 的情形

14.4.2 非周期函数的情形

14.4.3 函数的奇延拓与偶延拓

习 题 14.4

1.

§14.5 Fourier 级数的平均收敛性

14.5.1 平方平均偏差与它的最小值

14.5.2 用三角多项式逼近函数

习 题 14.5

1.

§14.6 Fourier 级数的复数形式与频谱分析

复习题十四

1.

高等学校试用教材

数 学 分 析

第 三 册

北京大学数学系　廖可人 李正元　编

高等教育出版社

内容简介

本书是北京大学数学系编《数学分析》一书的第三册(全书共三册,另配备习题集一册). 内容包括多元函数微分学,积分学,含参变量积分及场论. 微分形式和 Stokes 公式作为附录.

对多元函数微积分,本书较传统讲法有较多改变. 直接讲 m ($m \geqslant 2$) 元情形,将向量函数的应用贯穿于全书,加强了与线性代数的联系. 本书内容丰富,理论严谨,既重视加强多元微积分的基本理论,又重视其计算能力的培养.

本书经欧阳光中副教授,董延闿教授复审,可作为综合大学、师范院校数学系学生的试用教材或教学参考书.

高等学校试用教材

数 学 分 析

第三册

北京大学数学系　廖可人 李正元　编

*

高等教育出版社 出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 14.125　　字数 341 000

1986 年 4 月第 1 版　1988 年 1 月第 3 次印刷

印数　09731—20730

ISBN 7-04-001216-2 / O·366

定价 2.35 元

第三册前言

北京大学数学系编的《数学分析》分三册出版. 第一册由方企勤副教授编写, 第二册由沈燮昌教授编写, 本书是第三册, 内容包括多元函数的微分学和积分学, 还有含参变量的积分.

本书是我们在北京大学数学系多年讲授《数学分析》课的基础上编写成的. 我们力图使本书在微积分教学现代化方面有较充分而恰当的体现, 使它既适应于现代科学技术和数学发展的需要, 又切合我国的实际教学情况.

本套《数学分析》教材仍按原来的传统, 先讲一元函数微积分(第一册和第二册), 然后再讲多元函数微积分学, 由浅入深, 便于学生掌握. 但是, 对于多元函数, 我们没有按照过去的习惯讲法, 从二元、三元讲起, 再过渡到 $m\,(m \geqslant 4)$ 元, 而是直接讲 $m\,(m \geqslant 2)$ 元. 不仅多元微分学是这样, 多元积分学也是这样. 实践证明, 只要对 $m\,(m \geqslant 2)$ 维 Euclid 空间的完备性, 空间中点集的列紧性、紧致性和连通性等性质作了比较深入的阐述, 使学生对 $m\,(m \geqslant 2)$ 维与一维 Euclid 空间之间的异同有一个比较清楚的认识, 直接讲 $m\,(m \geqslant 2)$ 元是可行的. 这不仅节省了教学时间, 更重要的是适应了发展的前景, 使读者更容易从 Euclid 空间过渡到度量空间以及更一般的拓扑空间中去.

本书对向量空间极为重视, 不仅增加了这方面的内容, 而且将其应用贯穿于本书之中. 在向量微分学这一章(第十七章)里, 用线性变换定义向量函数的导数, 这是古典微积分中导数概念的深化和发展, 有利于学生掌握导数概念的实质和应用. 在此基础上, 我们用压缩映射原理证明反函数的存在和可微定理, 并由此推出隐函数的存在和可微定理. 显然, 这一部分内容相对来说较为抽象, 不够直观, 难度稍大一些, 初学者不容易掌握. 为此, 在讲授这些内容之前, 在第十六章里先讨论了多元数值函数的微分学, 还用几何直观较强的方法证明了由一个方程式确定的隐函数存在和可微定理, 为学生学习向量函数微分学铺设阶梯和桥梁, 循序渐进, 逐步提高到预定的理论高度. 这样做, 免不了有一些重复, 但这不是简单重复, 而是螺旋式地上升.

在多元积分学这一章(第二十章)里, 我们简要地介绍了 Jordan 测度及其主要性质. 之所以要增加这一部分的内容, 一方面是由于我们直接讲 $m\,(m \geqslant 2)$ 重积

分,Jordan 测度是不可少的;另一方面也是由于 Jordan 测度本身有许多可取之处. Jordan 测度是各种测度中最简单而直观的一种,容易为初学者接受和掌握. 应用 Jordan 测度,可以明确给出重积分中许多定理成立的条件,并简化定理的证明. 先在数学分析课中讲 Jordan 测度,在实变函数等后续课程再讲 Lebesgue 测度和抽象测度,学生就有可能对各种测度之间进行分析对比,加深对测度概念实质的认识,了解各种积分之间差异的由来.

对于 $m\,(m \geqslant 2)$ 重积分的变量替换公式,我们给出了公式成立的两个充分条件,并给予严格证明. 这两个定理的证明是在向量函数微分学的基础上进行的. 我们先介绍正则变换及其性质,然后证明在最简单的正则变换下重积分的变量替换公式成立,再利用一般的正则变换可以局部地分解为最简单的正则变换的复合来证明一般的变量替换公式. 这样做,一方面通过运用可以巩固和加强向量函数微分学的基础;另一方面可以明确认识作变量替换时要满足的条件,灵活而又准确地运用公式计算 m 重积分. 显然,如果在讲授这两个变量替换定理之前,先介绍单位分解这一近代分析的重要概念,利用单位分解定理来证明这两个定理,不仅可以简化这两个定理的证明,而且更接近于流形上的积分的处理方法,只是考虑到教学大纲的要求和学时的限制,我们没有这样做.

按照教学大纲的要求,我们不讲流形及流形上的微积分,仍按传统,只讲 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线积分和曲面积分,但是场论在数学分析课中是十分重要的内容,需要加强. 我们在从物理意义引进场论的散度和旋度概念时作了比较深入细致的分析. 为了突出 Gauss 公式和 Stokes 公式的物理意义,这两个公式都放在场论中讨论,都是先从直观引出,再作严格的证明. 考虑到 $\mathbb{R}^2$ 中 Green 公式的证明是比较典型的,这一公式又是 Stokes 公式证明的基础,我们在曲线积分这一章(第二十一章)里先讲这一公式,让学生预先熟悉这一公式的证明和应用.

本书在加强多元微积分理论的同时,对多元微积分的计算也给予高度的重视,选取了一定数量的例题,细致分析解题的典型方法和技巧,作为示范.

考虑到一些不学流形上的微积分的读者阅读近代文献资料的需要,我们特编写了《微分形式和 Stokes 公式》作为附录.

使用本书进行教学时,可以根据学时和学生的水平灵活掌握要求,根据实际情况对内容进行删节和改变讲法. 例如,凡是有 $*$ 标记的章节可以略去;对于隐函数存在定理的证明,可以重点讲由一个式子确定的隐函数;对于重积分变量替换定理,可以只讲二重积分替换公式的证明;对于重积分的计算,可以只限于二、三重积分等等.

本书的初稿,第十五章至第十九章由李正元编写,第二十章至第二十三章由廖可人编写. 附录的初稿由方企勤提供,廖可人改编和补充.

方企勤副教授除了提供附录的初稿之外,还对本书正文作了修改,沈燮昌教授具体负责本书编写的组织和审定工作,对本书提过不少宝贵意见,欧阳光中副教授

和董延闿教授在审阅本书时也提出许多宝贵意见，高等教育出版社的责任编辑文小西同志为本书的出版做了许多深入细致的工作．我们在此谨向他们表示衷心的谢意．

由于编者水平所限，书中难免有不妥或错误之处，敬请读者赐教指正．

廖可人 李正元

1985 年 9 月于北京大学数学系

第三册目录

第十五章　Euclid 空间与多元函数

§15.1　m 维 Euclid 空间

15.1.1　m 维向量空间

15.1.2　m 维 Euclid 空间

15.1.3　$\mathbb{R}^m$ 中点列的收敛性

习 题 15.1

1.

§15.2　Euclid 空间中的点集

15.2.1　点与集合的关系

15.2.2　开集与闭集

15.2.3　$\mathbb{R}^m$ 中的某些特殊点集与若干术语

习 题 15.2

1.

§15.3 m 维 Euclid 空间的性质

15.3.1 $\mathbb{R}^m$ 空间的完备性

15.3.2 聚点原理

15.3.3 有限覆盖定理

习 题 15.3

1.

§15.4 多元向量函数

15.4.1 映 射

15.4.2 向量函数

15.4.3 多元函数的几何表示

习 题 15.4

1.

§15.5 多元函数的极限

15.5.1 多元数值函数的极限

15.5.2 向量函数的极限

15.5.3 累次极限

习 题 15.5

1.

§15.6 多元函数的连续性

15.6.1 多元连续函数的定义与运算

15.6.2 连续函数的基本性质

习 题 15.6

1.

复习题十五

1.

第十六章　多元数值函数的微分学

---

§16.1 偏导数

16.1.1 偏导数的概念

16.1.2 偏导数的求法

16.1.3 微分中值定理

16.1.4 偏导数的存在性与函数的连续性

习 题 16.1

1.

§16.2 全微分与可微性

16.2.1 一次逼近与全微分的概念

16.2.2 连续性与可微性,偏导数与可微性

16.2.3 全微分的四则运算法则

16.2.4 全微分的几何意义

习 题 16.2

1.

§16.3 复合函数的偏导数与可微性

16.3.1 复合函数的求导法则——链锁法则

16.3.2 复合函数的可微性与一阶全微分形式的不变性

习 题 16.3

1.

§16.4 方向导数

16.4.1 方向导数的概念与计算

16.4.2 梯度向量

习 题 16.4

1.

§16.5 高阶偏导数和高阶全微分

16.5.1 高阶偏导数的概念

16.5.2 混合偏导数与求导顺序

16.5.3 复合函数的高阶偏导数

16.5.4 高阶全微分

习 题 16.5

1.

§16.6 Taylor 公式

习 题 16.6

1.

§16.7 由一个方程式确定的隐函数及其微分法

16.7.1 函数的存在唯一性与连续性

16.7.2 隐函数的可微性

习 题 16.7

1.

复习题十六

1.

第十七章　多元向量函数微分学

§17.1 线性变换

习 题 17.1

1.

§17.2 向量函数的可微性与导数

17.2.1 向量函数的可微性概念

17.2.2 可微性与连续性及偏导数存在性的关系

17.2.3 微分法则

17.2.4 实自变量的向量函数的高阶导数与数值函数的二阶导数

习 题 17.2

1.

§17.3 反函数及其微分法

17.3.1 反函数的存在性与函数的 Jacobi 行列式

17.3.2 反函数的局部存在性与可微性定理

17.3.3 反函数微分法

习 题 17.3

1.

§17.4 由方程组确定的隐函数及其微分法

17.4.1 隐函数的局部存在性与可微性

17.4.2 隐函数微分法

*§17.5 函数相关性

习 题 17.5

1.

复习题十七

1.

第十八章　多元微分学的应用
——几何应用与极值问题

§18.1 曲线的表示法和它的切线

18.1.1 空间曲线的参数方程与切线

18.1.2 平面曲线的表示法和它的切线

习 题 18.1

1.

§18.2 空间曲面的表示法和它的切平面

习 题 18.2

1.

§18.3 简单极值问题

18.3.1 极值的必要条件

18.3.2 极值的充分条件

18.3.3 求最大值或最小值的方法

习 题 18.3

1.

§18.4 条件极值问题

18.4.1 条件极值的必要条件与 Lagrange 乘子法

18.4.2 几个例子

习 题 18.4

1.

§18.5 最小二乘法

习 题 18.5

1.

复习题十八

1.

第十九章　含参变量的积分

§19.1 含参变量的定积分

习 题 19.1

1.

§19.2 极限函数的性质

19.2.1 一致收敛性

19.2.2 极限函数的性质

§19.3 含参变量的广义积分

19.3.1 积分的一致收敛性

19.3.2 含参变量的无穷积分的性质

习 题 19.3

1.

§19.4 计算含参变量积分的几个例子

§19.5 Euler 积分——B 函数与 Γ 函数

19.5.1 B 函数

19.5.2 Γ 函数

习 题 19.5

1.

复习题十九

1.

第二十章　重积分

§20.1 引　言

§20.2 $\mathbb{R}^m$ 空间图形的 Jordan 测度

20.2.1 $\mathbb{R}^m$ 中图形的容积

20.2.2 点集为可测图形的充要条件

20.2.3 点集为可测图形的充分条件

习 题 20.2

1.

§20.3 在 $\mathbb{R}^m$ 上的 Riemann 积分

20.3.1 m 重积分定义

20.3.2 可积的充要条件

20.3.3 可积函数类

20.3.4 可积函数的性质

习 题 20.3

1.

§20.4 化重积分为累次积分

20.4.1 化重积分为累次积分的公式

20.4.2 二重积分计算

20.4.3 三重积分计算

20.4.4 n 重积分计算

习 题 20.4

1.

§20.5 重积分的变量替换

20.5.1 正则变换及其性质

20.5.2 重积分的变量替换

20.5.3 极坐标变换

20.5.4 二重积分的其它变换

习 题 20.5

1.

§20.6 重积分的变量替换（续）

20.6.1 柱坐标变换

20.6.2 球坐标变换

20.6.3 三重积分的其它变换

20.6.4 n 重积分的变量替换

习 题 20.6

1.

§20.7 重积分在力学上的应用

20.7.1 物体的重心

20.7.2 转动惯量

20.7.3 引力场的位势

习 题 20.7

1.

复习题二十

1.

第二十一章　曲线积分

§21.1 与曲线有关的一些概念

21.1.1 弧段的直径、弦长与对应的参数值

21.1.2 曲线的定向

21.1.3 可求长曲线

习 题 21.1

1.

§21.2 第一型曲线积分

21.2.1 第一型曲线积分概念

21.2.2 第一型曲线积分化为定积分

21.2.3 第一型曲线积分在力学上的应用

习 题 21.2

1.

§21.3 第二型曲线积分

21.3.1 第二型曲线积分概念

21.3.2 第二型曲线积分的存在与计算

21.3.3 用折线上的积分逼近曲线上的积分

21.3.4 第一、二型曲线积分的联系

21.3.5 第二型曲线积分的应用

习 题 21.3

1.

§21.4 平面上的第二型曲线积分与 Green 公式

21.4.1 平面闭曲线的定向

21.4.2 Green 公式

21.4.3 Green 公式的若干应用与例子

21.4.4 平面上的分部积分公式与 Green 第一、第二公式

21.4.5 正则变换下闭曲线定向的变化

习 题 21.4

1.

复习题二十一

1.

第二十二章　曲面积分

§22.1 曲面概念

§22.2 曲面的面积

22.2.1 由显方程表示的曲面

22.2.2 由参数方程表示的内部光滑曲面

22.2.3 例　子

习 题 22.2

1.

22.2.4 Schwarz 反例

习 题 22.2

1.

§22.3 第一型曲面积分

22.3.1 第一型曲面积分定义

22.3.2 第一型曲面积分计算

22.3.3 例　子

习 题 22.3

1.

§22.4 曲面的侧

习 题 22.4

1.

§22.5 第二型曲面积分

22.5.1 第二型曲面积分概念

22.5.2 第二型曲面积分计算

习 题 22.5

1.

复习题二十二

1.

第二十三章　场　论

§23.1 场的表示法

§23.2 方向场的通量、散度和 Gauss 公式

23.2.1 通量和散度概念

23.2.2 散度的计算

23.2.3 Gauss 公式

23.2.4 Green 公式和 Gauss 公式的关系

23.2.5 Gauss 公式的应用与例子

习 题 23.2

1.

§23.3 向量场的环量和旋度

23.3.1 向量场的环量与方向旋量

23.3.2 方向旋量的存在和计算、旋度概念

23.3.3 Stokes 公式

习 题 23.3

1.

§23.4 保守场与势函数

23.4.1 保守场概念

23.4.2 保守场的势函数

23.4.3 保守场的判别方法

23.4.4 平面向量场情形的说明

23.4.5 保守场的势函数的求法

习 题 23.4

1.

复习题二十三

1.

附录　微分形式与 Stokes 公式

A.1　反对称的 k 重线性函数

A.2　k 次微分形式、外微分

习 题 A.2

1.

A.3　微分形式的变量替换

习 题 A.3

1.

A.4　流形与流形上的积分

A.5　Gauss 定理

A.6 Stokes 公式

高等学校试用教材

数学分析习题集

北京大学数学系

林源渠　方企勤　编
廖可人　李正元

高等教育出版社

内容简介

本习题集是北京大学数学系同志合编《数学分析》(共三册)一书的配套教材. 习题集的章节与教材的章节对应,两者的顺序是一致的. 所收习题主要依据北京大学数学系数学分析习题课资料编撰,也吸收了专门化课中遇到的数学分析问题以及1983年以前的历届研究生考试中的部分试题. 比曾广泛采用的Б. П. Демидович《数学分析习题集》增加了m维Euclid空间中微积分的相应题目和微分形式的题目. 本书可作为数学专业类学生数学分析习题课使用.

高等学校试用教材

数学分析习题集

北京大学数学系

林源渠 方企勤
廖可人 李正元 编

*

高等教育出版社 出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.625 字数 241000

1986年4月第1版 1986年4月第1次印刷

印数 00001—16440

ISBN 13010·01215

定价 1.60元

编者的话

由于教材内容不断更新,特别地,我们编写的《数学分析》教材中的多元微积分是直接在 $m\,(m \geqslant 2)$ 维 Euclid 空间中讨论的,这就要求习题也应增加相应的内容. 而原来广泛采用的 Б. П. Демидович《数学分析习题集》没有这部分内容的题目,加之因该书题解的出现,在一定程度上失去了它的训练价值. 有鉴于此,我们编撰了这本适合数学专业类使用的习题集.

本集中的习题主要是根据我系(北京大学数学系)习题课资料编撰的. 例如一元函数部分中让读者自己去判断是非的证明题,就是针对学生经常出现的一些错误而编写的. 习题集也吸收了 1983 年以前历届研究生考试中的部分试题,以及专门化课中遇到的数学分析的问题. 习题中有些内容也是对教材内容的进一步补充,例如除原点外 Taylor 级数处处发散的反例, L'Hôpital 法则的反问题等等.

本习题集是我系编写的《数学分折》一书的配套教材. 除书中个别节无习题外,习题集的章节与书的章节对应,两者顺序是一致的. 为了查找方便,习题的题号用三个数字表示,第一个数字表示书中的章号、第二个数字表示书中的节号、第三个数字表示习题的题号. 每章习题分基本题与难题两类,两者以星号隔开. 基本题中计算题与概念题的数量,对初学者来说稍多些,但基本上可以全做; 证明题的数量较多,对于我们认为较难的题目都给出了提示,这部分题目,初学者不必全做,能做一半也就可以了.

习趣集中第〇章至第十四章习题由林源渠和方企勤两位同志编写,其中定积分与级数的一部分题目是沈燮昌同志编的. 第十五章至第十九章习题由李正元同志编写,第二十章至第二十四章习题由廖可人同志编写. 我系担任过数学分析习题课的同志曾使用本习题集初稿进行教学,并提出宝贵意见,欧阳光中副教授、董延闿教授审阅书稿时对习题集提出了不少宝贵意见,高等教育出版社的文小西同志在书稿通读加工中也提出不少宝贵意见,在此向他们表示深深地谢意.

编　者

1985 年 6 月于北京大学数学系