总目录

第　一　册

第 二 册

第　三　册

高等学校试用教材

数 学 分 析

第 一 册

北京大学数学系　方企勤　编

高等教育出版社

内容简介

本书分三册出版，第一册讲述函数、极限理论、一元函数微积分，第二册讲述实数理论、级数和广义积分，第三册讲述 m 维 Euclid 空间中微积分和微分形式. 一元部分较系统讲述了凸函数和上、下极限. 分两步严格处理了实数与极限理论：一元微积分前严格讲述极限定义、性质、运算；一元微积分后，从空间的连通性、紧性、完备性观点讲述实数定义和实数理论以及连续函数的基本定理.

本书讲述细致，引进概念注意讲清实际问题背景，定理证明、公式推演作了必要地分析，并提出一些值得思考的问题；通过大量不同类型例题介绍解题基本方法和特殊技巧.

本书配有习题集，由我社与教材同时出版发行.

本书由理科数学教材编审委员会函数论编审组委托欧阳光中副教授，董延闿教授复审，可作为综合大学、师范院校数学系试用教材或教学参考书.

高等学校试用教材

数 学 分 析

第一册

北京大学数学系　方企勤　编

*

高等教育出版社 出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 9.75　字数 208000

1986 年 2 月第 1 版　1988 年 1 月第 2 次印刷

印数 15111—25410

ISBN 7-10-001214-6 / O·364

定价 1.45 元

前言

这套教材分三册出版. 第一、二册讲述一元函数微积分,它的内容包括:实数、极限理论,一元微积分,级数和广义积分. 前六章和第九章的实数空间由我撰写,一元的其余部分由沈燮昌教授撰写. 第三册讲述 m 维 Euclid 空间中的微积分,由廖可人副教授和李正元副教授撰写.

教材内容的选取,基本上没有超出经数学、力学、天文学教材编审委员会 1980 年审订的教学大纲的范围. 但由于对内容的理解和要求不同,在讲述上也会有所差别. 我们对内容的要求比我校六十年代教材要高些. 如一元部分较系统地讲述凸函数和上、下极限,多元部分严格地讲述 m 元微积分和微分形式. 个别可以不讲的内容用星号标出.

本册教材的内容属于传统的内容,但希望在系统性、严格性、逻辑性上能处理得更好些. 如讲述初等函数的连续性时,为了严格处理指数函数的连续性,有的教材把它放在定积分之后讲,有的教材虽把它放在微积分之前讲,但讲得较麻烦. 本书对指数函数的处理,是为了解决上述的矛盾,而又保持逻辑上严格性的一个尝试. 又如利用导数研究函数性质时,先讲 Cauchy 中值定理的两个应用,然后讲 Lagrange 中值定理的两个应用(函数的升降与凹凸),最后讲函数升降与凹凸的两个应用,这样逻辑上一环扣一环,使问题讲述显得干净、利索.

特别希望在内容讲法上有所突破,使它能帮助教师怎样去讲授这些内容,能指导学生应该怎样去理解和掌握这些内容.

在讲授概念时,不仅讲概念的实际背景,还要求通过实际背景,把概念的每一个符号、每一个式子的涵义揭示出来. 如讲序列极限时,通过求曲边三角形的面积,分析为什么要"存在 N",为什么要"任给 ε",和极限定义中"四句话"的意义. 又如讲微分时,通过求瞬时速度,分析为什么要求改变量的线性主部及其系数,并指出线性主部和高阶无穷小项的意义,这样做更有利于学生理解概念的实质.

在讲定理的证明和公式的推导时,不仅要逻辑上清楚和注意表达的艺术,还要求讲出内容之间的有机联系、分析证明的想法、揭露问题的本质. 如当极限四则运算和幂指运算条件不满足时极限怎么求,引出 L'Hôpital 法则; 证无穷与无穷之比得不定型时,先分析证明困难所在和指出解决问题的办法; 又如又一次逼近(微

分)的充要条件和逼近式的唯一性,引出高次逼近(Taylor 公式)无充要条件和逼近式的唯一性;对 Peano 余项公式证明的分析,引出 Lagrange 余项公式证明的方法.这种从学生原有基础出发,引出不断地提出问题、分析问题的讲法,使学生能更好地掌握证明的思想和方法.

一元微积分的一些概念和方法,差不多都可以从几何上给予解释,这样做不仅使概念讲解得更活,也使学生的思维更加活跃.如讲一致连续与不一致连续时,结合曲线图形来看,如果曲线有一处坡度最陡则一致连续,如果曲线无限地变陡,且没有坡度最陡的地方则不一致连续.这种“看图识字”的讲法,可以使学生记得牢,学得活.

教材中配有大量例题,既有几何、物理方面的应用题,也有相当数量的计算和推理题;既注意了演算的数量,也注意了解题的基本方法和特殊的技巧.在前面各章、节附有一些思考题,这是考虑到学生初学微积分时,理解概念不深,这样做有利于培养学生独立思考的能力.

对实数与极限的处理,我是分为两步教学的.在一元微积分之前,严格讲述极限定义、性质、运算;在一元微积分之后,再实数定义、确界和极限存在性、连续函数性质证明.这时可以从一般空间观点来讲,即从空间的连续性、紧性、完备性的观点来讲述.如用连通性引入无理数,用连通的全序域定义实数空间.根据几年来的教学实践,分两步教学的效果还是比较满意的.教材中也为另一种讲法作了安排,可以把第二章的确界与第九章的实数公里系统作为预备知识,把区间套和连续函数中间值定理的证明放到第三章,第九章只保留紧性、完备性及其应用,和上、下极限,这种讲法也是可取的.如果把紧性及其应用也放到第三章,从逻辑顺序上看是完整些,同学接受来说也不会有什么困难,但对训练来说可能难以保证.

本人二十几年来一直从事数学分析课的教学工作,曾与许多同事一起工作过,从他们那里学到不少有益的东西.特别在七十年代,教研室组织过多次极限和微分概念的讨论,这些讨论使我受益匪浅.在这里向他们表示感谢.

本书由李正元副教授初审,沈燮昌教授统一全书.他们对本书提出了一些修改的意见,书稿送出版社后,又经欧阳光中副教授与董延闿教授对本书作了认真细致的审阅,提出了许多宝贵的修改意见,对他们的宝贵意见,我谨表示深深地谢意.

方企勤

1985 年于北京大学数学系

第一册目录

第〇章　预备知识

§0.1　逻辑符号

为了书写方便,我们常采用以下一些逻辑符号.

设 S_1, S_2 是两个陈述句,它们可以指命题也可以指条件. 符号

$$S_1 \Longrightarrow S_2$$

表示命题 S_1 成立,则命题 S_2 成立; 或条件 S_1 成立,则条件 S_2 也成立. 符号

$$S_1 \Longleftrightarrow S_2$$

表示命题(或条件) S_1 与命题(或条件) S_2 等价. 即表示由命题(或条件) S_1 可以推出命题(或条件) S_2,反过来由命题(或条件) S_2 也可以推出命题(或条件) S_1.

符号

$$\forall$$

表示任意取定,写法是将英文字母 A 倒过来. 符号

$$\exists$$

表示存在,写法是将英文字母 E 反过来.

孤立地看这些符号没有什么意思,但组合起来可以表示一句话,这句话可以是正确的,也可以是错误的. 如

$\exists x$, 使得 $\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{5}{2}$ (正确的);　　$\forall x, \exists y$, 使得 $x + y = 1$ (正确的);

$\forall x, \exists y$, 使得 $x > y$ (正确的);　　$\exists x, \forall y$, 使得 $x > y$ (错误的).

后一句话是说,可以找到一实数,它比任何实数都大,这显然是错误的.

§0.2　集合初步

自 Cantor 在十九世纪末创建集合论以来,集合论的概念和方法已渗入到数学的各个分支,成为数学的一种语言. 集合论本身也发展成数学的一个分支,内容十分丰富.

集合不能给予严格的定义,因为定义是用已知的概念去定义未知的概念. 如用有理数去定义无理数,这里我们认为有理数是已知的,若有人喜欢刨根问底,觉得有理数是什么也不清楚,我们可以用整数来定义有理数,进一步用自然数来定义整数,用集合来定义自然数. 这个过程不可能无穷无尽下去,总有一个概念不能定义,在数学里集合概念就到头了,不能再用其它的数学概念来定义. 虽然如此,我们可以给集合一个描述. 先看几个集合的例子:

(1) 所有自然数的全体为一集合,记作 $\mathbb{N}$;

(2) 所有小于 10 并且是偶数的自然数全体为一集合;

(3) 方程 $x^2+5x+4=0$ 的根全体为一集合;

(4) 具有北京市户口的人全体为一集合.

尽管集合没有定义,但我们能理解到它是什么意思. 一般来说,把具有某种共同特征的事物的全体叫**集合**,属于集合的每个个体叫作该集合的**元素**.

如例 (1) 中集合的特性是正整数,例 (4) 中集合的特性是具有北京市户口. 根据给定的特性,我们可以判断每一个元素是属于这个集合,还是不属于这个集合. 前面三个例子是数集,例 (4) 是非数集. 以后我们只讨论数集.

集合用大写字母 A, C, C, X, Y, Z 表示,元素用小写字母 a, b, c, x, y, z 表示.

设 A 是一个集合,a 是 A 的元素,记作

$$a \in A;$$

反之,a 不是 A 的元素,记作

$$a \overline{\in} A \quad (\text{或}\ a \notin A).$$

0.2.1　集合表示法

集合有两种表示法: 一是列举法,如集合

$$A=\{2,4,6,8\},$$

这种表示法是将集合的元素在花括弧内一一列举出来; 另一是描述法,如集合

$$A=\left\{x \,\middle|\, x^2-5x+4=0\right\},$$

这种表示法将花括弧分两部分,用记号 | 隔开,前面为元素的代表符号,用 x 或其它符号,后面为元素具有的性质.

第一种表示法在数学分析中用处不大,因为我们常用的集合为无穷个元素组成,无法一一列出,如所有实数的集合就不可能写出来.

集合 $\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记作 $[a,b]$; 集合 $\{x\,|\,a<x<b\}$ 称为**开区间**,记作 (a,b); 记号 $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$ 可作类似理解.

0.2.2 集合的子集、包含、相等

两个集合 A,B,若对任意 $a\in A$,都有 $a\in B$,这时集合 A 包含于集合 B,称 A 是 B 的**子集**,记作

$$A\subseteq B \quad 或 \quad B\supseteq A.$$

例如 $A=\{1,2,3,4,5\}$,则集合

$$\{1},\quad \{1,2\},\quad \{1,3,5\}$$

是 A 的子集. 集合 $\{1\}$ 表示由 1 这一元素组成的集合,概念上不同于元素 1 本书,我们可以记

$$\{1\}\subseteq A,\quad 1\in A.$$

为了运算方便,我们把不含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$. 例如

$$\left\{x\,\middle|\,x^2+1=0,\ x\text{ 是实数}\right\}=\varnothing.$$

空集包含于任一集合:

$$\varnothing\subseteq A,$$

因为,如果不成立,则至少有一元素属于 $\varnothing$ 而不属于 A,显然这是不可能的.

根据集合包含关系 $\subseteq$ 的定义,显然有: $A\subseteq A$; 若 $A\subseteq B$, $B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

若两集合 A,B,满足 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,则称 A 与 B 相等,记作

$$A=B.$$

如

$$\{1,2,3,4\}=\{4,3,2,1\}=\{1,1,2,3,4\}.$$

若 $A\subseteq B$,且 $A\neq B$,则称 A 是 B 的真子集.

0.2.3 集合的运算

集合除包含关系外,还可以考虑集合之间的并、交、差等运算.

给定集合 A,B,集合 A,B 的**并**记为 $A\cup B$,它是 A,B 全部元素组成的集合,定义为

$$A\cup B:=\left\{x\,\middle|\,x\in A\text{ 或 }x\in B\right\}.$$

用平面图形表示集合,图形的点表示集合的元素,则 A,B 图形和在一起就是并集 $A\cup B$ 的图形. 如图所示.

由并集的定义易见: $A\cup\varnothing=A$, $A\cup A=A$,

$$A\cup B=B\cup A \qquad (\text{交换律});$$
$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \qquad (\text{结合律}).$$

给定集合 A,B,两集合的**交**记为 $A\cap B$,它由 A,B 的公共元素组成,定义为:

$$A\cap B:=\left\{x\,\middle|\,x\in A\text{ 与 }x\in B\right\}.$$

集合 A,B 图形的公共部分(见图)就是交集的图形.

显然有: $A\cap\varnothing=\varnothing, A\cap A=A$,

$$A\cap B=B\cap A \qquad (\text{交换律}),$$

$$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cap C) \qquad (\text{结合律}).$$

并且,若 $A\subseteq B$,则 $A\cap B=A$.

§0.3　绝对值与不等式

复习题〇

第一章　函　数

§1.1　函数概念

1.1.1　变量与常量

1.1.2　函数定义

1.1.3　函数的图形

习题 1.1

§1.2　函数的几种特性

1.2.1　函数的奇偶性

1.2.2　函数的单调性

1.2.3　函数的有界性

1.2.4　函数的周期性

习题 1.2

§1.3　复合函数与反函数

1.3.1　复合函数

1.3.2　反函数

习题 1.3

§1.4 基本初等函数

习题 1.4

复习题一

第二章　极　限

§2.1　序列极限的定义

2.1.1　概念引入

2.1.2　序列极限定义

习题 2.1

§2.2　序列极限的性质与运算

习题 2.2

§2.3　确界与单调有界序列

习题 2.3

§2.4　函数的极限

习题 2.4

§2.5　函数极限的推广

2.5.1　自变量趋于无穷的情形

2.5.2　无穷大量

2.5.3　单侧极限

2.5.4　极限存在性

2.5.5　复合函数求极限

习题 2.5

§2.6 两个重要极限

习题 2.6

§2.7 无穷小量的阶以及无穷大量的阶的比较

习题 2.7

§2.8 用肯定语气叙述极限不是某常数

2.8.1 极限不是某常数的肯定描述

2.8.2 序列极限与函数极限的关系

习题 2.8

复习题二

第三章 连 续

§3.1 连续与间断

习题 3.1

§3.2 连续函数的性质

习题 3.2

§3.3 连续函数的中间值性质

习题 3.3

§3.4 初等函数的连续性

习题 3.4

§3.5 有界闭区间上连续函数的性质

习题 3.5

复习题三

第四章　导数与微分

§4.1　导数概念

习题 4.1

§4.2　导数的几何意义与极限

习题 4.2

§4.3　导数的四则运算

习题 4.3

§4.4　复合函数求导

4.4.1　复合函数求导

4.4.2　隐函数微分法

4.4.3　对数微分法

习题 4.4

§4.5　反函数与参数式求导

4.5.1　反函数求导

4.5.2　参数式求导

4.5.3　极坐标式求导

习题 4.5

§4.6 微　分

4.6.1 微分定义

4.6.2 微分与导数

4.6.3 微分的几何意义

4.6.4 一阶微分形式的不变形

4.6.5 微分的应用

习题 4.6

§4.7 高阶导数与高阶微分

4.7.1 高阶导数

4.7.2 Leibniz 公式

4.7.3 其它函数关系的高阶导数

4.7.4 高阶微分

习题 4.7

复习题四

第五章　利用导数研究函数

§5.1　微分中值定理

习题 5.1

§5.2　L'Hôpital 法则

5.2.1　$\dfrac{0}{0}$ 型不定式

5.2.2　$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式

5.2.3　其它类型不定式

习题 5.2

§5.3　Taylor 公式

5.3.1　Peano 余项的 Taylor 公式

5.3.2　Lagrange 余项的 Taylor 公式

5.3.3　应用

习题 5.3

§5.4　函数的升降与极值

5.4.1　函数的升降

5.4.2　极值

5.4.3　函数在一点的升降

习题 5.4

§5.5 函数的凹凸与拐点

5.5.1 函数的凹凸性

5.5.2 应用

5.5.3 拐点

习题 5.5

§5.6 函数作图

习题 5.6

§5.7 方程求根

习题 5.7

复习题五

第六章　不定积分

§6.1　不定积分概念

习题 6.1

§6.2　积分表与线性性质

习题 6.2

§6.3　换元法

6.3.1　第一换元法

6.3.2　第二换元法

习题 6.3

§6.4　分部积分法

习题 6.4

§6.5　有理函数的积分

习题 6.5

§6.6 三角函数有理式的积分

习题 6.6

§6.7 无理函数的积分

6.7.1 $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$ 型积分

6.7.2 二项式微分式积分

6.7.3 $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \mathrm{d}x$ 型积分

习题 6.7

复习题六

高等学校试用教材

数 学 分 析

第 二 册

北京大学数学系　沈燮昌　编

高等教育出版社

内容简介

本书是北京大学数学系同志合编《数学分析》一书的第二册(全书共三册，另配备习题集一册). 内容包括定积分及应用，实数空间，广义积分，级数等八章. 本书在第一册极限论基础上，从有理数的分割法引入实数，证明实数域是一个实数空间，引入了连通性、紧性、完备性等重要概念. 对于 Riemann 积分，给出了积分存在的另两个等价定理，和定积分的几种近似计算方法和误差估计. 本书还介绍了多项式逼近定理的 Lebesgue 证明. 在讨论级数、广义积分的敛散性时，还渗透了无穷小量阶的思想. 本书例题丰富，有趣.

本书经欧阳光中副教授，董延闿教授复审，可作为综合大学、师范院校数学系的试用教材或教学参考书.

高等学校试用教材

数 学 分 析

第二册

北京大学数学系　沈燮昌　编

*

高等教育出版社 出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850 × 1168 1/32　印张 11.25　字数 268000

1986 年 4 月第 1 版　1988 年 1 月第 3 次印刷

印数 15411 — 25410

ISBN 7-04-001215-4 / O·365

定价 1.90 元

前　言

本书是北京大学数学系沈燮昌教授,方企勤、廖可人、李正元副教授合编的《数学分析》一书中的第二册. 第一册由方企勤副教授执笔,第二册主要由沈燮昌教授执笔,第三册由廖可人、李正元副教授执笔. 全书三册有我统一看过一遍,并做了一些修改.

本册内容包括定积分,定积分的应用,实数空间,广义积分,数值级数,函数项级数,幂级数和 Fourier 级数共八章,其中实数空间这一章是由方企勤教授执笔的.

正如第一册前言所说,为了使难点分散和便于理解,我们商定讲极限分成两大部分来讲,在第一册中介绍了极限基础. 这里,即第二册中进一步介绍实数空间;从直观的有理数的分割法开始引入实数,然后研究实数是一个有序域,进而证明它是一个实数空间. 此外还引入了连通性,紧性以及完备性等重要概念,并说明这些概念本质上用到些什么内容,这对于今后进一步学习一些抽象空是有启发的.

对于 Riemann 积分,我们还是用通常直观的方法引入其定义,但是我们说明了,为了保证积分存在,就需要研究函数在每一个小的分割区间上的偏差性质. 从而引入了积分的大和、小和以及它们的下确界及上确界,而 Riemann 和正是位于这两者之间,因此自然地引入上、下积分的概念. 这样一来,我们就能给出 Riemann 积分存在的另两个等价的定力,这给具体使用带来了较大的方便.

对于一些概念的引进,我们尽量给以直观的解释以利于读者理解这些概念. 例如在讲有理数分划能确定一个实数时,我们用形象“排队”的说法,如只要知道前面是什么人,而后面又是什么人后就可以确定自身的位置. 对于 Abel 变换,除了给出这个变换的分析表达式以外,还给出了对面积进行不同的分法而得到的同一个结果的解释.

在本册中还渗透了无穷小量阶的思想,这对研究级数和广义积分的收敛与发散性更能看清其本质,而且也易于判别.

此外,还给出定积分的几种近似计算方法并利用简洁的方法给出了误差估计式. 考虑到目前是广泛地使用电子计算机的时代,初步了解一些计算方法以及知道误差估计的重要性,这对学生来说无疑是有好处的.

本册还给出了很多例题,由易而难,有些例子不仅是较有趣,而且也给出一些

重要的结果. 这些例题可以使学生加深对理论的理解并且对如何灵活地使用学到的理论会起到重要的示范作用.

这里还介绍了两个逼近定理,过去在常见的教科书中,总是用 Bernstein 多项式来实现多项式逼近,这个多项式对于初学者来说是很难理解的. 这里介绍了多项式逼近定理的 Lebesgue 证明,首先用折线来逼近连续函数,然后再利用幂级数展开的方法来逼近折线函数. 这样的证明比较直观、易懂,且也是所学过的方法的灵活运用.

作者在书写本书过程中深深地感到,对于象这类基本内容都已经比较成熟的教科书,如何进行改革,一方面要使学生容易接受,能够通过学习掌握一些最基本的知识且在能力上有所提高,另一方面又能适当地现代化,这是一件很不容易做到的事情. 希望广大读者多多地提出宝贵意见.

作者感谢李正元副教授,他仔细地阅读了原稿,并提出了很多宝贵的意见. 作者也感谢欧阳光中副教授、董延闿教授仔细地审阅了原稿,并提出了很多改进意见.

沈燮昌

1985 年 3 月于北京大学数学系

第二册目录

第七章　定积分

§7.1　定积分的概念

7.1.1　实际问题中的例

7.1.2　定积分的概念及几何意义

习题 7.1

§7.2　Newton-Leibniz 公式

习题 7.2

§7.3　可积函数

7.3.1　函数可积的充分必要条件

7.3.2　可积函数类

习题 7.3

§7.4　定积分的性质

7.4.1　定积分的基本性质

7.4.2　积分第一中值定理

习题 7.4

§7.5　变限的定积分与原函数的存在性

习题 7.5

§7.6　定积分的换元法与分部积分法

7.6.1　定积分的换元法

7.6.2　定积分的分部积分法

7.6.3　积分第二中值定理

习题 7.6

§7.7　定积分的近似计算

7.7.1　矩形法

7.7.2　梯形法

7.7.3　Simpson 公式

习题 7.7

复习题七

第八章　定积分的应用

§8.1　平面图形的性质

8.1.1　直角坐标系下平面图形面积的计算

8.1.2　极坐标系下平面图形面积的计算

习题 8.1

§8.2　由平面截面面积求体积

习题 8.2

§8.3　平面曲线的弧长与曲率

习题 8.3

§8.4　旋转体侧面积计算

习题 8.4

§8.5　微元法

§8.6 定积分在物理中的应用

8.6.1 平面曲线的质心及平面图形的质心计算

8.6.2 转动惯量的计算

8.6.3 引力与功的计算

习题 8.6

复习题八

第九章 实数空间

§9.1 实数定义

9.1.1 为什么要定义实数

9.1.2 实数的定义

§9.2 实数空间

9.2.1 实数的计算

9.2.2 实数集是域

9.2.3 实数集是全序域

9.2.4 实数集的连通性

9.2.5 实数的表示

9.2.6 实数集的公理系统

习题 9.2

§9.3 确界存在原理与区间套定理

9.3.1 确界存在原理

9.3.2 区间套定理

习题 9.3

§9.4　紧性定理

9.4.1　有限覆盖定理

9.4.2　聚点原理

9.4.3　子序列与 Bolzano 定理

习题 9.4

§9.5　完备性定理

9.5.1　序列极限的 Cauchy 准则

9.5.2　函数极限的 Cauchy 准则

习题 9.5

§9.6　连续函数性质证明

习题 9.6

§9.7　压缩映射原理

习题 9.7

§9.8　上极限与下极限

9.8.1　序列的上、下极限的定义

9.8.2　上、下极限的性质

9.8.3　上、下极限的等价形式

9.8.4　函数的上、下极限

习题 9.8

复习题九

第十章　广义积分

---

§10.1　无穷积分的概念

习题 10.1

§10.2　无穷积分的收敛性判别法

习题 10.2

§10.3　瑕积分的概念

习题 10.3

§10.4　瑕积分收敛性判别法

习题 10.4

复习题十

第十一章　数值级数

§11.1　数值级数的基本概念与简单性质

11.1.1　数值级数的收敛与发散

11.1.2　级数的基本性质

习题 11.1

§11.2　正项级数

11.2.1　正项级数收敛的充要条件

11.2.2　比较判别法

11.2.3　d'Alembert 判别法及 Cauchy 判别法

11.2.4　Raabe 判别法

11.2.5　Cauchy 积分判别法

习题 11.2

§11.3　任意项级数

11.3.1　交错级数收敛判别法

11.3.2　绝对收敛与条件收敛

11.3.3　Dirichlet 判别法

习题 11.3

§11.4　收敛级数的性质

11.4.1　无穷级数的可结合性

11.4.2　无穷级数的可交换性问题

11.4.3　级数的乘法

习题 11.4

§11.5　广义积分与级数的联系

复习题十一

第十二章　函数项级数

§12.1　函数序列及级数中的基本问题

§12.2　函数序列及函数级数的一致收敛性

12.2.1　一致收敛的概念

12.2.2　一致收敛性的判别法

习题 12.2

§12.3　一致收敛的函数序列与函数级数的性质

习题 12.3

复习题十二

第十三章　幂级数

§13.1　幂级数的收敛半径与收敛区间

习题 13.1

§13.2　幂级数的性质

习题 13.2

§13.3　初等函数的 Taylor 级数展开

习题 13.3

*§13.4　Stirling 公式

习题 13.4

§13.5　幂级数的应用

13.5.1　近似计算

13.5.2　定积分的计算

13.5.3　微分方程的幂级数解法

§13.6 用多项式一致逼近闭区间上的连续函数

复习题十三

第十四章　Fourier 级数

§14.1　基本三角函数系

习题 14.1

§14.2　周期函数的 Fourier 级数

习题 14.2

§14.3　Fourier 级数的收敛性

14.3.1　Fourier 级数的部分和

14.3.2　Fourier 级数部分和的极限问题

14.3.3　Fourier 级数的收敛性判别法—— Dini 判别法

14.3.4　Fourier 级数收敛的 Dirichlet 判别法

习题 14.3

§14.4　任意区间上的 Fourier 级数

14.4.1　周期是 2ℓ 的情形

14.4.2　非周期函数的情形

14.4.3　函数的奇延拓与偶延拓

习题 14.4

§14.5 Fourier 级数的平均收敛性

14.5.1 平方平均偏差与它的最小值

14.5.2 用三角多项式逼近函数

习题 14.5

§14.6 Fourier 级数的复数形式与频谱分析

复习题十四

高等学校试用教材

数 学 分 析

第 三 册

北京大学数学系　廖可人 李正元　编

高等教育出版社

内容简介

本书是北京大学数学系编《数学分析》一书的第三册（全书共三册，另配备习题集一册）．内容包括多元函数微分学，积分学，含参变量积分及场论．微分形式和 Stokes 公式作为附录．

对多元函数微积分，本书较传统讲法有较多改变．直接讲 $m(m \geq 2)$ 元情形，将向量函数的应用贯穿于全书，加强了与线性代数的联系．本书内容丰富，理论严谨，既重视加强多元微积分的基本理论，又重视其计算能力的培养．

本书经欧阳光中副教授，董延闿教授复审，可作为综合大学、师范院校数学系学生的试用教材或教学参考书．

高等学校试用教材

数 学 分 析

第三册

北京大学数学系　廖可人　李正元　编

*

高等教育出版社 出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850 × 1168 1/32　印张 14.125　字数 341 000

1986 年 4 月第 1 版　1988 年 1 月第 3 次印刷

印数 9 731 — 20 730

ISBN 7-04-001216-2 / O·366

定价 2.35 元

前　言

北京大学数学系编的《数学分析》分三册出版. 第一册由方企勤副教授编写, 第二册由沈燮昌教授编写, 本书是第三册, 内容包括多元函数的微分学和积分学, 还有含参变量的积分.

本书是我们在北京大学数学系多年讲授《数学分析》课的基础上编写成的. 我们力图使本书在微积分教学现代化方面有较充分而恰当的体现, 使它既适应于现代科学技术和数学发展的需要, 又切合我国的实际教学情况.

本套《数学分析》教材扔按原来的传统, 先讲一元函数微积分(第一册和第二册), 然后再讲多元函数微积分学, 由浅入深, 便于学生掌握. 但是, 对于多元函数, 我们没有按照过去的习惯讲法, 从二元、三元讲起, 再过渡到 $m(m \geqslant 4)$ 元, 而是直接讲 $m(m \geqslant 2)$ 元. 不仅多元微分学是这样, 多元积分学也是这样. 实践证明, 只要对 $m(m \geqslant 2)$ 维 Euclid 空间的完备性, 空间中点集的列紧性、紧致性和连通性等性质作了比较深入的阐述, 使学生对 $m(m \geqslant 2)$ 维与一维 Euclid 空间之间的异同有一个比较清楚的认识, 直接讲 $m(m \geqslant 2)$ 元是可行的. 这不仅节省了教学时间, 更重要的是适应了发展的前景, 使读者更容易从 Euclid 空间过渡到度量空间以及更一般的拓扑空间中去.

本书对向量空间极为重视, 不仅增加了这方面的内容, 而且讲其应用贯穿于本书之中. 在向量微分学这一章(第十七章)里, 用线性变换定义向量函数的导数, 这是古典微积分中导数概念的深化和发展, 有利于学生掌握导数概念的实质和应用. 在此基础上, 我们用压缩映象原理证明反函数的存在和可微定理, 并由此推出隐函数的存在和可微定理. 显然, 这一部分内容相对来说较为抽象, 不够直观, 难度稍大一些, 初学者不容易掌握. 为此, 在讲授这些内容之前, 在第十六章里先讲了多元数值函数的微分学, 还用几何直观较强的方法证明了由一个方程式确定的隐函数存在和可微定理, 为学生学习向量函数微分学铺设阶梯和桥梁, 循序渐进, 逐步提高到预定的理论高度. 这样做, 免不了有一些重复, 但这不是简单重复, 而是螺旋式地上升.

在多元积分学这一章(第二十章)里, 我们简要地介绍了 Jordan 测度及其主要性质. 我们所以要增加这一部分的内容, 一方面是由于我们直接讲 $m(m \geqslant 2)$ 重

积分, Jordan 测度是不可少的; 另一方面也是由于 Jordan 测度本身有许多可取之处. Jordan 测度是各种测度中最简单而直观的一种, 容易为初学者接受和掌握. 应用 Jordan 测度, 可以明确给出重积分中许多定理成立的条件, 并简化定理的证明. 先在分析课中讲 Jordan 测度, 在实变函数等后续课程再讲 Lebesgue 测度和抽象测度, 学生就有可能对各种测度之间进行分析对比, 加深对测度概念实质的认识, 了解各种积分之间差异的由来.

对于 $m(m \geqslant 2)$ 重积分的变量替换公式, 我们给出了公式成立的两个充分条件, 并给予严格证明. 这两个定理的证明是在向量函数微分学的基础上进行的. 我们先介绍正则变换及其性质, 然后证明在最简单的正则变换下重积分的变量替换公式成立, 再利用一般的正则变换可以局部地分解为最简单的正则变换的复合来证明一般的变量替换公式. 这样做, 一方面通过运用可以巩固和加强向量函数微分学的基础; 另一方面可以明确认识作变量替换时要满足的条件, 灵活而又准确地运用公式计算 m 重积分. 显然, 如果在讲授这两个变量替换定理之前, 先介绍单位分解这一近代分析的重要概念, 利用单位分解定理来证明这两个定理, 不仅可以简化这两个定理的证明, 而且更接近于流形上的积分的处理方法, 只是考虑到教学大纲的要求和学时的限制, 我们没有这样做.

按照教学大纲的要求, 我们不讲流形及流形上的微积分, 仍按传统, 只讲 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线积分和曲面积分, 但是场论在数学分析课中是十分重要的内容, 需要加强. 我们在从物理意义引进引进场论的散度和旋度概念时作了比较深入细致的分析. 为了突出 Gauss 公式和 Stokes 公式的物理意义, 这两个公式都放在场论中讨论, 都是从直观引出, 再作严格的证明. 考虑到 $\mathbb{R}^2$ 中 Green 公式的证明是比较典型的, 这一公式又是 Stokes 公式证明的基础, 我们在曲线积分这一章(第二十一章)里先讲这一公式, 让学生预先熟悉这一公式的证明和应用.

本书在加强多元微积分理论的同时, 对多元微积分的计算也给予高度的重视, 选取了一定数量的例题, 细致分析解题的典型方法和技巧, 作为示范.

考虑到一些不学流形上的微积分的读者阅读近代文献资料的需要, 我们特编写了《微分形式和 Stokes 公式》作为附录.

使用本书进行教学时, 可以根据学时和学生的水平灵活掌握要求, 根据实际情况对内容进行删节和改变讲法. 例如, 凡是有 * 标记的章节可以略去; 对于隐函数存在定理的证明, 可以重点讲由一个式子确定的隐函数; 对于重积分变量替换定理, 可以只讲二重积分替换公式的证明; 对于重积分的计算, 可以只限于二、三重积分等等.

本书的初稿, 第十五章至第十九章由李正元编写, 第二十章至第二十三章由廖可人编写. 附录的初稿由方企勤提供, 廖可人改编和补充.

方企勤副教授除了提供附录的初稿之外, 还对本书正文作了修改, 沈燮昌教授具体负责本书编写的组织和审定工作, 对本书提过不少宝贵意见, 欧阳光中副教授

和董延闿教授在审阅本书时也提出许多宝贵意见，高等教育出版社的责任编辑文小西同志为本书的出版做了许多深入细致的工作. 我们在此谨向他们表示衷心的谢意.

由于编者水平所限，书中难免有不妥或错误之处，敬请读者赐教指正.

廖可人 李正元

1985 年 9 月于北京大学数学系

第三册目录

第十五章　Euclid 空间与多元函数

§15.1　m 维 Euclid 空间

15.1.1　m 维向量空间

15.1.2　m 维 Euclid 空间

15.1.3　$\mathbb{R}^m$ 中点列的收敛性

习题 15.1

§15.2　Euclid 空间中的点集

15.2.1　点与集合的关系

15.2.2　开集与闭集

15.2.3　$\mathbb{R}^m$ 中的某些特殊点集与若干术语

习题 15.2

§15.3　m 维 Euclid 空间的性质

15.3.1　$\mathbb{R}^m$ 空间的完备性

15.3.2　聚点原理

15.3.3　有限覆盖定理

习题 15.3

§15.4　多元向量函数

15.4.1　映　射

15.4.2　向量函数

15.4.3　多元函数的几何表示

习题 15.4

§15.5　多元函数的极限

15.5.1　多元数值函数的极限

15.5.2　向量函数的极限

15.5.3　累次极限

习题 15.5

§15.6　多元函数的连续性

15.6.1　多元连续函数的定义与运算

15.6.2　连续函数的基本性质

习题 15.6

复习题十五

第十六章　多元数值函数的微分学

§16.1　偏导数

16.1.1　偏导数的概念

16.1.2　偏导数的求法

16.1.3　微分中值定理

16.1.4　偏导数的存在性与函数的连续性

习题 16.1

§16.2　全微分与可微性

16.2.1　一次逼近与全微分的概念

16.2.2　连续性与可微性，偏导数与可微性

16.2.3　全微分的四则运算法则

16.2.4　全微分的几何意义

习题 16.2

§16.3　复合函数的偏导数与可微性

16.3.1　复合函数的求导法则——链锁法则

16.3.2　复合函数的可微性与一阶全微分形式的不变性

习题 16.3

§16.4 方向导数

16.4.1 方向导数的概念与计算

16.4.2 梯度向量

习题 16.4

§16.5 高阶偏导数和高阶全微分

16.5.1 高阶偏导数的概念

16.5.2 混合偏导数与求导顺序

16.5.3 复合函数的高阶偏导数

16.5.4 高阶全微分

§16.6 Taylor 公式

习题 16.6

§16.7 由一个方程式确定的隐函数及其微分法

16.7.1 函数的存在唯一性与连续性

16.7.2 隐函数的可微性

习题 16.7

复习题十六

第十七章　多元向量函数微分学

§17.1　线性变换

习题 17.1

§17.2　向量函数的可微性与导数

17.2.1　向量函数的可微性概念

17.2.2　可微性与连续性及偏导数存在性的关系

17.2.3　微分法则

17.2.4　实自变量的向量函数的高阶导数与数值函数的二阶导数

习题 17.2

§17.3　反函数及其微分法

17.3.1　反函数的存在性与函数的 Jacobi 行列式

17.3.2　反函数的局部存在性与可微性定理

17.3.3　反函数微分法

习题 17.3

§17.4　由方程组确定的隐函数及其微分法

17.4.1　隐函数的局部存在性与可微性

17.4.2　隐函数微分法

*§17.5　函数相关性

习题 17.5

复习题十七

第十八章　多元微分学的应用
——几何应用与极值问题

---

§18.1　曲线的表示法和它的切线

§18.2　空间曲面的表示法和它的切平面

§18.3　简单极值问题

§18.4　条件极值问题

§18.5 最小二乘法

习题 18.5

复习题十八

第十九章　含参变量的积分

§19.1　含参变量的定积分

习题 19.1

§19.2　极限函数的性质

19.2.1　一致收敛性

19.2.2　极限函数的性质

习题 19.2

§19.3　含参变量的广义积分

19.3.1　积分的一致收敛性

19.3.2　含参变量的无穷积分的性质

习题 19.3

§19.4　计算含参变量积分的几个例子

§19.5　Euler 积分——B 函数与 Γ 函数

19.5.1　B 函数

19.5.2　Γ 函数

习题 19.5

复习题十九

第二十章　重积分

§20.1　引　言

§20.2　$\mathbb{R}^m$ 空间图形的 Jordan 测度

20.2.1　$\mathbb{R}^m$ 中图形的容积

20.2.2　点集为可测图形的充要条件

20.2.3　点集为可测图形的充分条件

习题 20.2

§20.3　在 $\mathbb{R}^m$ 上的 Riemann 积分

20.3.1　m 重积分定义

20.3.2　可积的充要条件

20.3.3　可积函数类

20.3.4　可积函数的性质

习题 20.3

§20.4　化重积分为累次积分

20.4.1　化重积分为累次积分的公式

20.4.2　二重积分计算

20.4.3　三重积分计算

20.4.4　n 重积分计算

习题 20.4

§20.5　重积分的变量替换

20.5.1　正则变换及其性质

20.5.2　重积分的变量替换

20.5.3　极坐标变换

20.5.4　二重积分的其它变换

习题 20.5

§20.6　重积分的变量替换（续）

20.6.1　柱坐标变换

20.6.2　球坐标变换

20.6.3　三重积分的其它变换

20.6.4　n 重积分的变量替换

习题 20.6

§20.7　重积分在力学上的应用

20.7.1　物体的重心

20.7.2　转动惯量

20.7.3　引力场的位势

习题 20.7

复习题二十

第二十一章　曲线积分

§21.1　与曲线有关的一些概念

§21.2　第一型曲线积分

§21.3　第二型曲线积分

§21.4　平面上的第二型曲线积分与 Green 公式

21.4.1　平面闭曲线的定向

21.4.2　Green 公式

21.4.3　Green 公式的若干应用与例子

21.4.4　平面上的分部积分公式与 Green 第一、第二公式

21.4.5　正则变换下闭曲线定向的变化

习题 21.4

复习题二十一

第二十二章　曲面积分

§22.1　曲面概念

习题 22.1

§22.2　曲面的面积

22.2.1　由显方程表示的曲面

22.2.2　由参数方程表示的内部光滑曲面

22.2.3　例　子

习题 22.2

22.2.4　Schwarz 反例

习题 22.2

§22.3　第一型曲面积分

22.3.1　第一型曲面积分定义

22.3.2　第一型曲面积分计算

22.3.3　例　子

习题 22.3

§22.4 曲面的侧

22.4.1 第二型曲面积分概念

22.4.2 第二型曲面积分计算

§22.5 第二型曲面积分

习题 22.5

复习题二十二

第二十三章　场　论

§23.1　场的表示法

§23.2　方向场的通量、散度和 Gauss 公式

23.2.1　通量和散度概念

23.2.2　散度的计算

23.2.3　Gauss 公式

23.2.4　Green 公式和 Gauss 公式的关系

23.2.5　Gauss 公式的应用与例子

习题 23.2

§23.3　向量场的环量和旋度

23.3.1　向量场的环量与方向旋量

23.3.2　方向旋量的存在和计算、旋度概念

23.3.3　Stokes 公式

习题 23.3

§23.4　保守场与势函数

23.4.1　保守场概念

23.4.2　保守场的势函数

23.4.3　保守场的判别方法

23.4.4　平面向量场情形的说明

23.4.5 保守场的势函数的求法

习题 23.4

复习题二十三

附录　微分形式与 Stokes 公式

A.1　反对称的 k 重线性函数

习题 A.1

A.2　k 次微分形式、外微分

习题 A.2

A.3　微分形式的变量替换

习题 A.3

A.4　流形与流形上的积分

习题 A.4

A.5　Gauss 定理

习题 A.5

A.6　Stokes 公式

习题 A.6