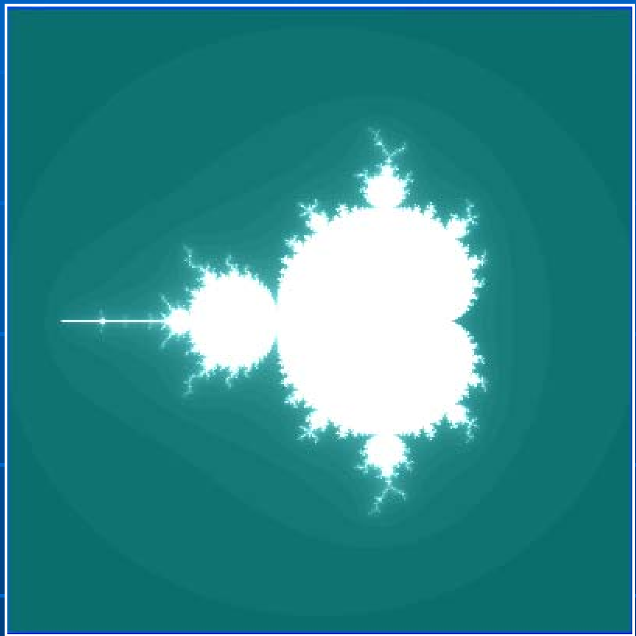
マンデルブロ集合の数理

延原　肇

マンデルブロ集合

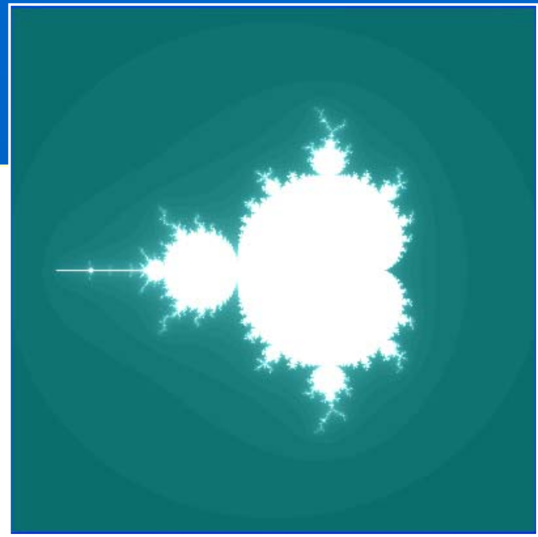


複素関数

$$f(z) = z^2 + C$$

マンデルブロ集合は、右の複素関数から生成されます。さて、どうやって生成されるのか、これからゆっくり説明しますので理解してください。

マンデルブロ集合



複素関数の反復写像

$$\boxed{z_{n+1} = z_n^2 + C}$$

$$(z_n = x + yi, C = a + bi)$$

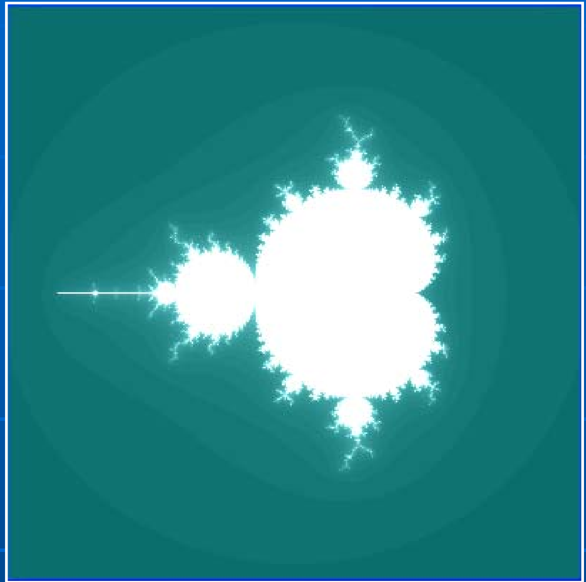
$\boxed{z_0 = 0}$ から出発させ、n を大きく（反復回数を大きく）

とっても、発散しない $\boxed{C}$ の集合のことを

マンデルブロ集合といいます。わかりましたか？

「わけわかんねーよ」という人、安心してください。次のスライドから
もう少し簡単に説明してゆきます。

図と数式の対応について



$$z_{n+1} = z_n^2 + C$$

左図の各点の明るさは、各点おける発散する速さを表していて、暗いほど、発散する速さが速い。
逆に、明るいほど、発散しないで収束していることを表しています。
　次から、具体的に右の数式を展開して、わかりやすくしてみます。

マンデルブロ集合の数学的意味（1）

見通しがつけやすいように変形

$$z_{n+1} = z_n^2 + C$$

$$= \left(x_n + y_n i\right)^2 + \left(a + bi\right)$$

$$= \left\{x_n{}^2 + 2x_n y_n i - y_n{}^2\right\} + \left(a + bi\right)$$

$$= \underbrace{\left\{x_n{}^2 - y_n{}^2 + a\right\}}_{\boxed{\text{実数部}}} + \underbrace{\left\{2x_n y_n + b\right\}}_{\boxed{\text{虚数部}}} i$$

マンデルブロ集合の数学的意味(2)

$$z_{n+1} = \underbrace{\left\{x_n^{\,2} - y_n^{\,2} + a\right\}}_{x_{n+1}} + \underbrace{\left\{2x_n y_n + b\right\}}_{y_{n+1}} i$$

$$z_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} i$$

実数部については	$x_{n+1} = x_n^{\,2} - y_n^{\,2} + a$
虚数部については	$y_{n+1} = 2x_n y_n + b$

をひたすら計算すればよい

マンデルブロ集合の数学的意味(3)

発散する速さはどうやったらわかる？

$$x_{n+1} = x_n{}^2 - y_n{}^2 + a$$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + b$$

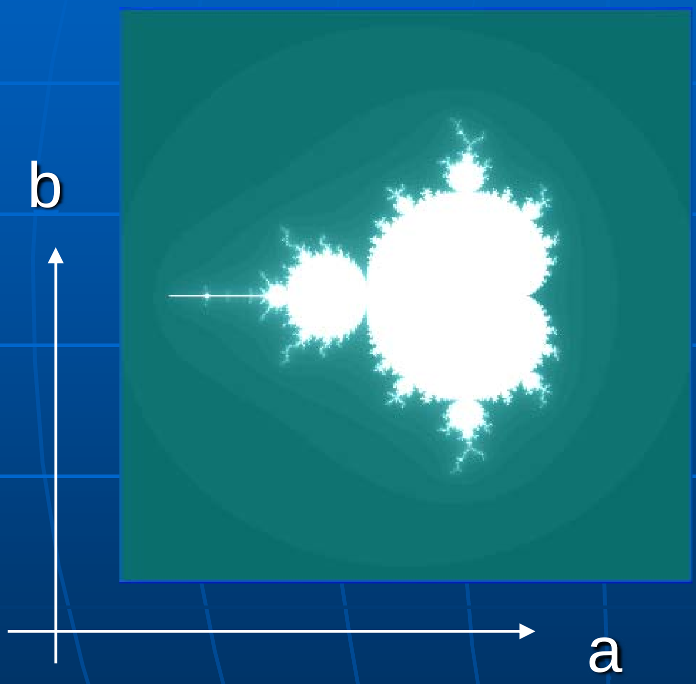
複素数の絶対値を調べるとよい

$$\|z_{n+1}\| = \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2}$$

絶対値が急激に大きくなると発散と判定できる

マンデルブロ集合の数学的意味（4）

この図は、何を示しているのか？



$$z_{n+1} = z_n^2 + C$$

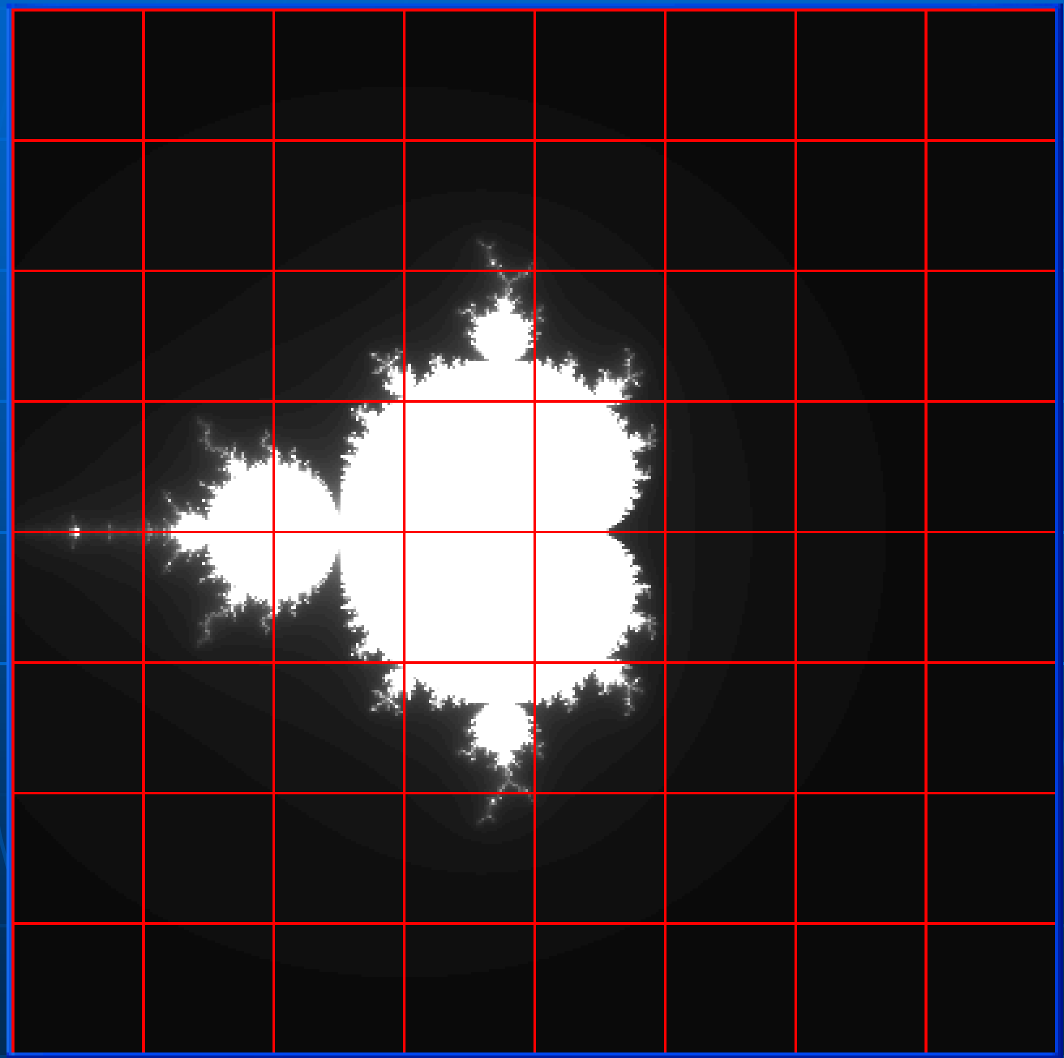
$$C = a + bi$$

各点(a,b)における発散する速さ
（暗いほど、発散する速さが速い）

ちょっと計算してみよう

(a,b)=(-2.0,2.0) (a,b)=(0,2.0) (a,b)=(2.0,2.0)

(a,b)
=(-2.0,0.0)



(a,b)
=(2.0,0.0)

(a,b)=(-2.0,-2.0) (a,b)=(2.0,-2.0)

例えば・・・

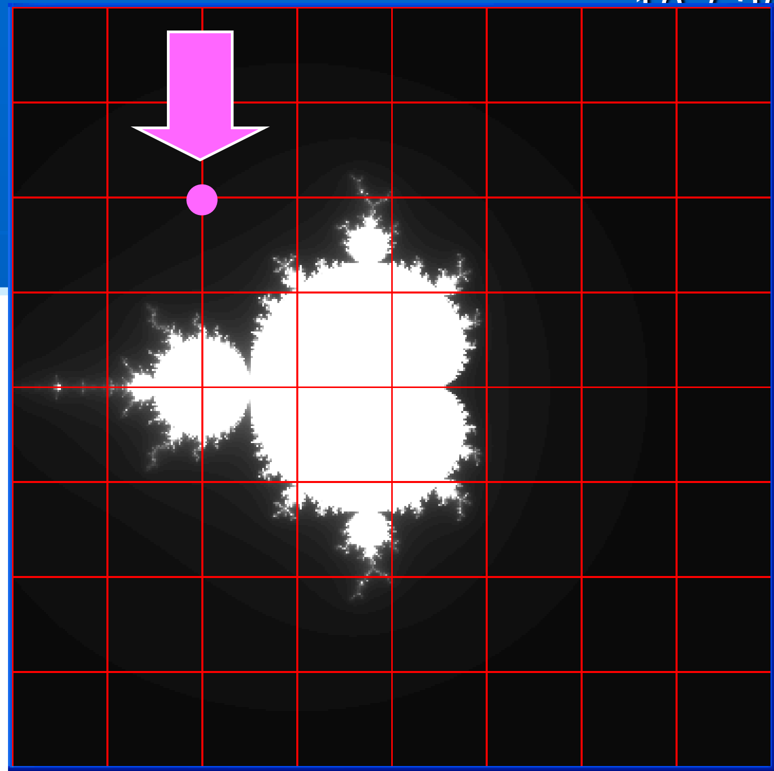
$$a = -1.0, b = -1.0$$

として、以下の式で発散の様子を調べてみると・・・

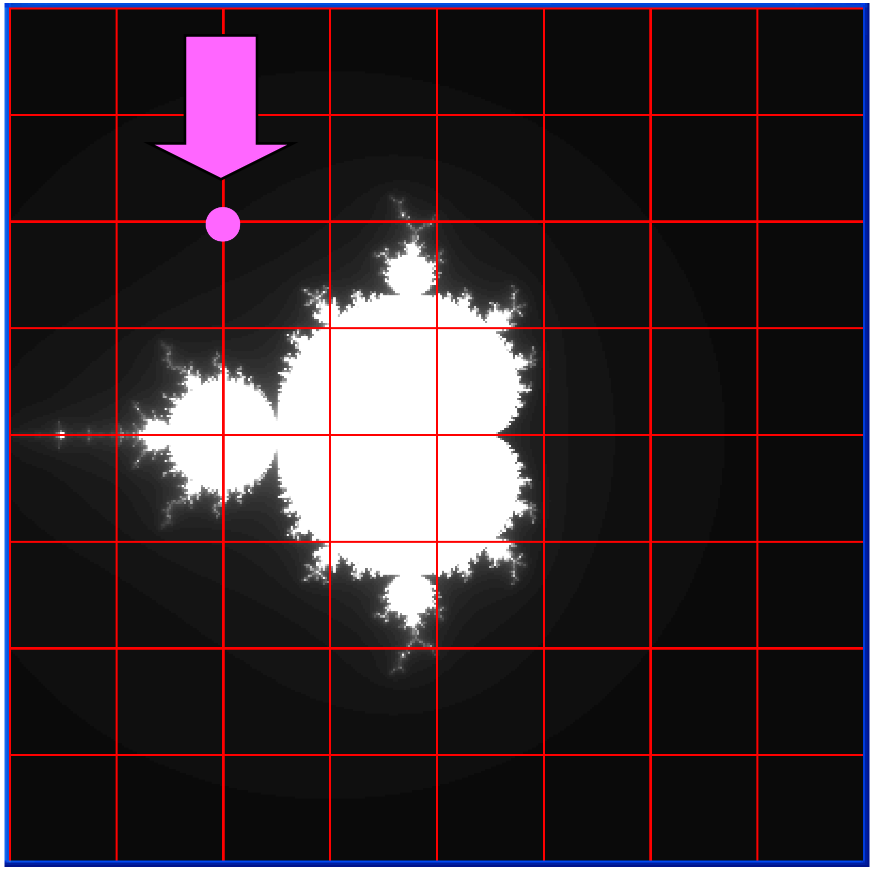
$$x_{n+1} = x_n{}^2 - y_n{}^2 + a$$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + b$$

$$\|z_{n+1}\| = \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2}$$



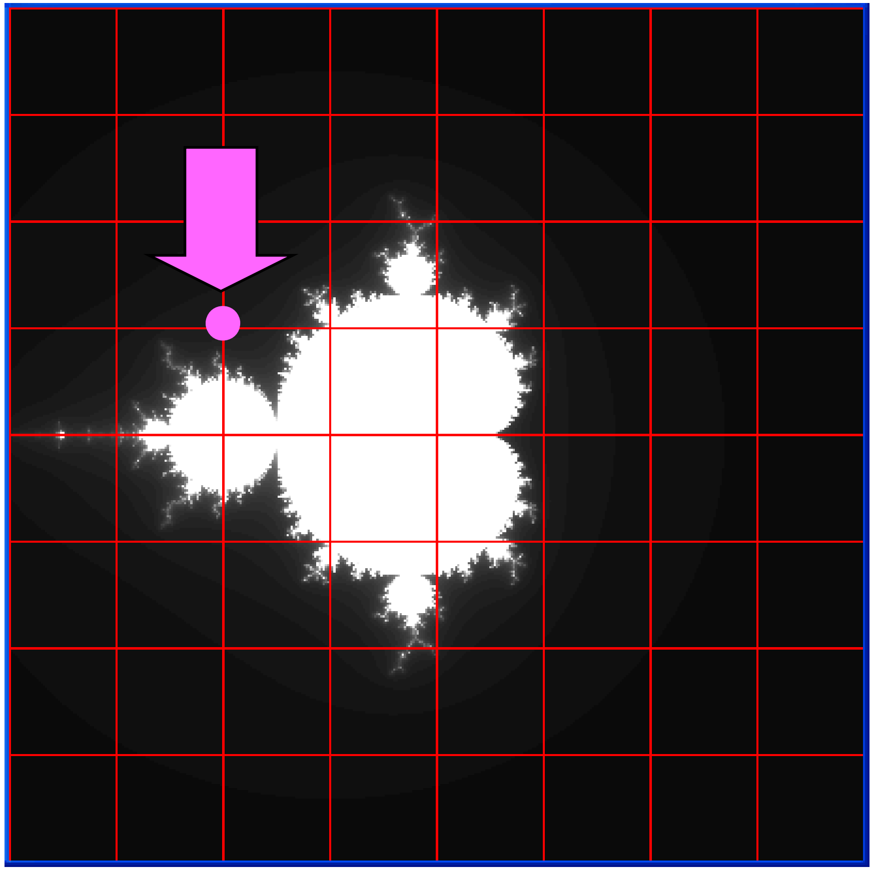
計算の様子



	a = −1.0	b = −1.0	
反復回数	x	y	x^2+y^2
0	−1.00	−1.00	2.00
1	−1.00	1.00	2.00
2	−1.00	−3.00	10.00
3	−9.00	5.00	106.00
4	55.00	−91.00	11306.00

絶対値が急激に大きくなるので発散
＝対応する点の明るさは暗い

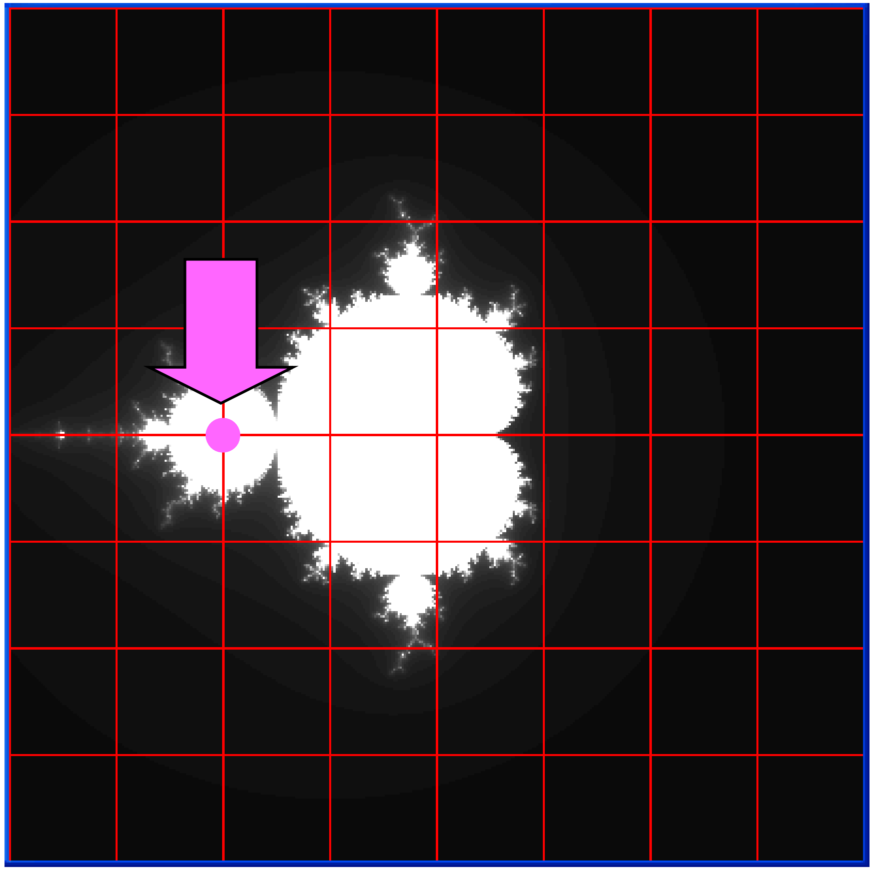
a=-1.0, b=-0.5の計算の様子



	a = −1.0	b = −0.5	
反復回数	x	y	x^2+y^2
0	−1.00	−0.50	1.25
1	−0.25	0.50	0.31
2	−1.19	−0.75	1.97
3	−0.15	1.28	1.66
4	−2.62	−0.89	7.65
5	5.06	4.16	42.96
6	7.31	41.65	1788.42
7	−1682.62	608.28	3201199.25

絶対値が急激に大きくなるので発散
＝対応する点の明るさは暗い

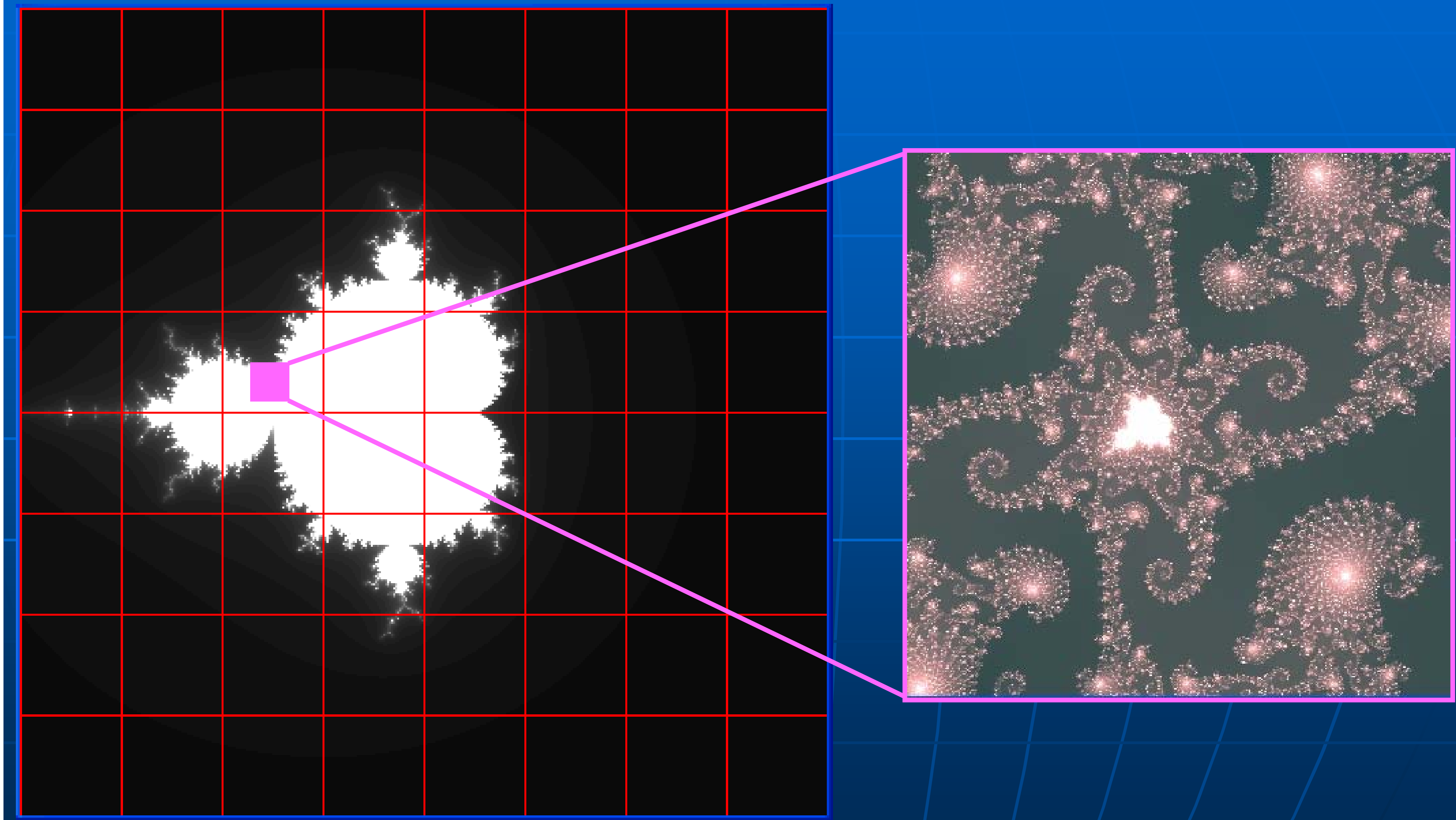
a=-1.0, b=0.0の計算の様子



	a = −1.0	b = 0.0	
反復回数	x	y	x^2+y^2
0	−1.00	0.00	1.00
1	0.00	0.00	0.00
2	−1.00	0.00	1.00
3	0.00	0.00	0.00
4	−1.00	0.00	1.00
5	0.00	0.00	0.00
6	−1.00	0.00	1.00
7	0.00	0.00	0.00
8	−1.00	0.00	1.00
9	0.00	0.00	0.00

絶対値は発散せずに、0と1で振動。
＝対応する点は明るい

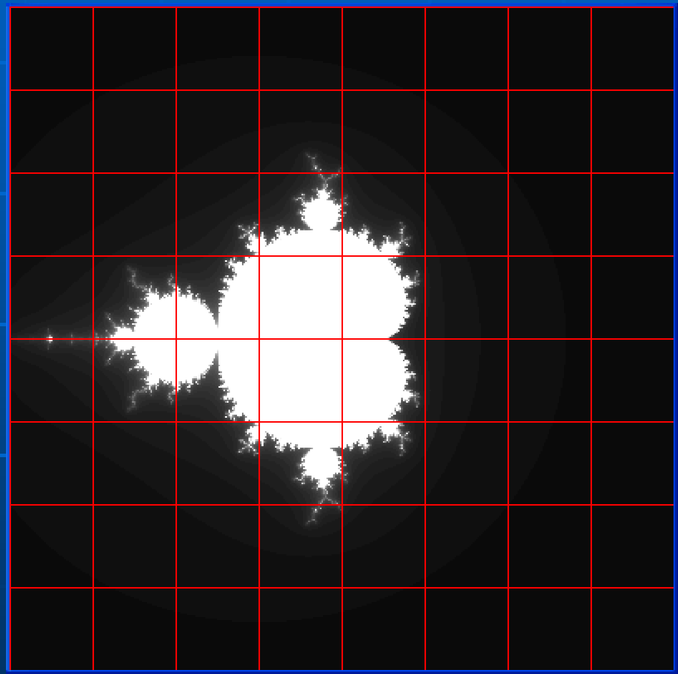
マンデルブロ集合の不思議な性質



拡大すると不思議な模様が見えてくる

マンデルブロ集合は宇宙？

いろいろな位置を拡大することで、
様々な様相を観測することが可能



この小さい空間に、神秘的で驚異的な
構造が無限に存在する

マンデルブロ集合をいざ探検！