スマートインフォメディアシステム特論

Smart-Info Media System

第2回 フラクタル

2<sup>nd</sup> Week: Fractal

延原 肇

(のぶはら はじめ)

nobuhara@iit.tsukuba.ac.jp







# 課題はmanabaから提出すること



### 2023年度 スケジュール

[4/17] 第1回 ガイダンス (Guidance)

[4/24] 第2回 フラクタル (Fractal)

[5/08] 第3回 カオス (Chaos)

[5/15] 第4回 セルオートマトン (Cellular Automata)

[5/22] 第5回 パーコレーション (Percolation)

[5/29] 第6回 複雑ネットワーク (Complex Networks)

[6/05] 第7回 マルチエージェント (Multi-agents)

[6/12] 最終課題のため自習期間

[6/19] 最終課題のため自習期間

[6/26] 最終課題提出

# 本日の構成 (contents)

20分でわかるフラクタルの基礎

Basic of Fractal (20min)

30分でわかるフラクタルの応用

Application of Fractal (20min)

20分でわかるフラクタルの数理

Mathematics of Fractal (20min)

今週の課題 -reports -

#### フラクタルという言葉について

- ■英語表記 fractal (in English)
- ■対応する<u>正確</u>な日本語はない なので、そのまま「フラクタル」
- ■誰が名づけ親? フラクタルの提案者

Benoît Mandelbrot の造語

"Fractal" named by Mandelbrot

# いきなり質問

Question!

# Benoît Mandelbrot



1924年11月20日

ポーランド生まれの数学者(幾何学)

His favorite is geometry.

2003年 日本国際賞を受賞

(過去に江崎玲於奈、

マービン・ミンスキーも受賞)

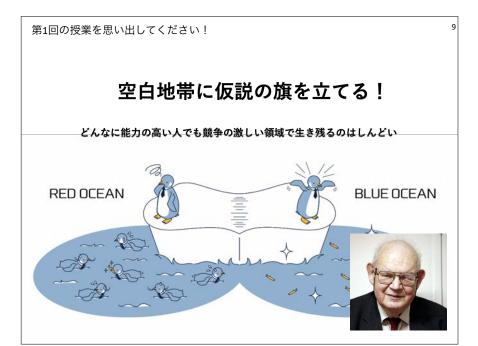
Japan Prize winner (2003)

■IBMに勤務 (しかし・・・窓際族/冷飯を食うポジション) Actually, he worked at IBM as data analyst.

#### 株価のデータ分析

同じような周期のデータが微妙に形を変えながら頻出

He found the strange phenomena through financial



#### Benoît Mandelbrotの論文 (what is his paper?)

HOW LONG IS THE COAST OF BRITAIN?

How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension Science: 156, 1967, 636-638

B. B. Mandelbrot

Geographical curves are so involved in their detail that their lengths are often infinite or more accurately, undefinable. However, many are statistically "self-similar," meaning that each portion can be considered a reduced-scale image of the whole. In that case, the degree of complication can be described by a quantity D that has many properties of a "dimension," though it is fractional. In particular, it exceeds the value unity associated with ordinary curves.

#### 1. Introduction

Seacoast shapes are examples of highly involved curves with the property that — in a statistical sense — each portion can be considered a reduced-scale image of the whole. This property will be referred to as "statistical self-similarity." The concept of "length" is usually meaningless for geographical curves. They can be considered superpositions of features of widely scattered characteristic sizes; as even finer features are taken into account, the total measured length increases, and there is usually no clear-cut gap or crossover, between the realm of geography and details with which geography need not be concerned.

Fractional Dimension = 非整数次元

# 株式データから自然界へ

#### 自然界にも同種の現象が存在

We can find same phenomena in nature.

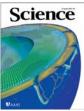


科学雑誌「サイエンス」にフラクタルのアイデアを投稿
Mandelbrot submitted his idea to Science Journal.

「ブリテン島の海岸線の長さはどれだけか?」 How long is the coast of Britain?

# 論文雑誌 Science

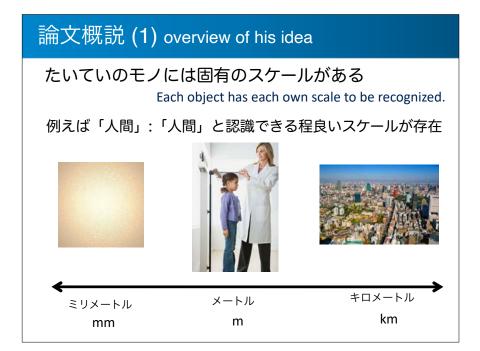






	ISI Impact Factor		PageRank			Combined	
1	52.28	ANNU REV IMMUNOL	16.78	Nature	51.97	Nature	
2	37.65	ANNU REV BIOCHEM	16.39	Journal of Biological Chemistry	48.78	Science	
3	36.83	PHYSIOL REV	16.38	Science	19.84	New England Journal of Medicine	
4	35.04	NAT REV MOL CELL BIO	14.49	PNAS	15.34	Cell	
5	34.83	New England Journal of Medicine	8.41	PHYS REV LETT	14.88	PNAS	
6	30.98	Nature	5.76	Cell	10.62	Journal of Biological Chemistry	
7	30.55	Nature Medicine	5.70	New England Journal of Medicine	8.49	JAMA	
8	29.78	Science	4.67	Journal of the American Chemical Society	7.78	The Lancet	
9	28.18	NAT IMMUNOL	4.46	J IMMUNOL	7.56	NAT GENET	
10	28.17	REV MOD PHYS	4.28	APPL PHYS LETT	6.53	Nature Medicine	

The table shows the top 10 journals by ISI Impact Factor, PageRank, and a modified system that combines the two (based on 2003 data). Nature and Science are generally regarded as the most prestigious journals, and in the combined system they come out on top.





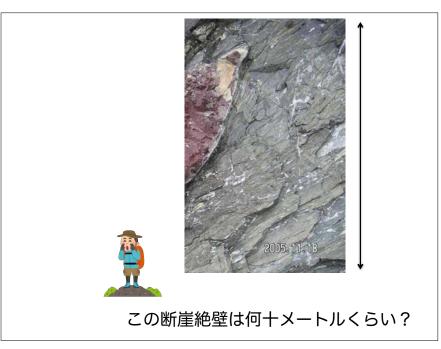
「固有」のスケールを持たない場合がある = スケールフリー Sometimes, we can see "Scale Free" things.

※どんなスケールで観測しても、対象が認識できる Scale Free = possible to recognize objects, any scale.



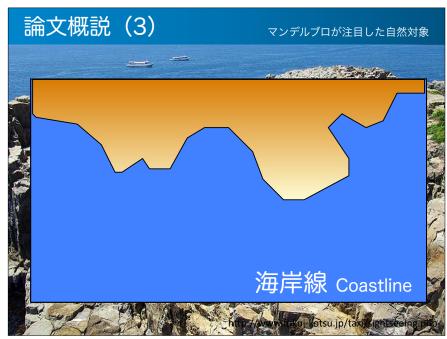
例:海岸線 Coastline

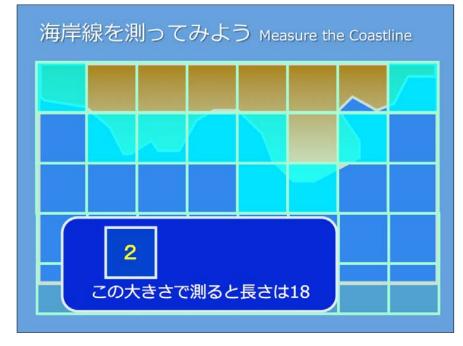


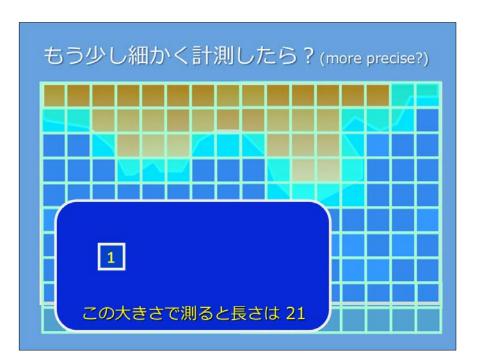


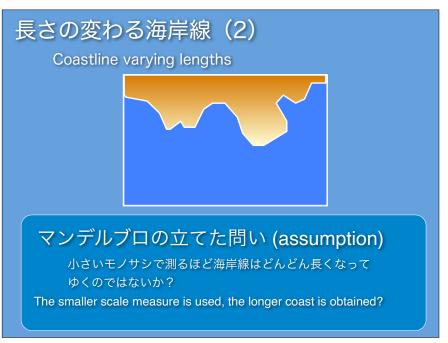




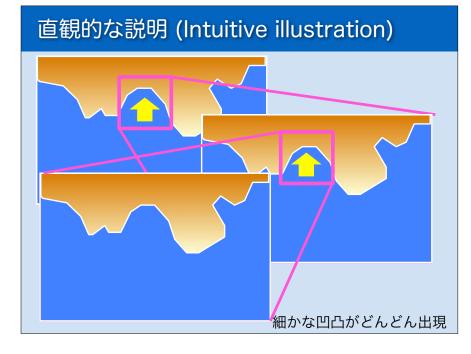


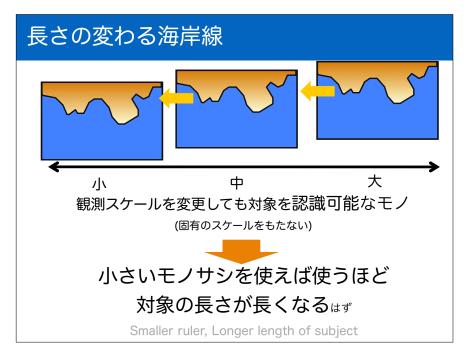


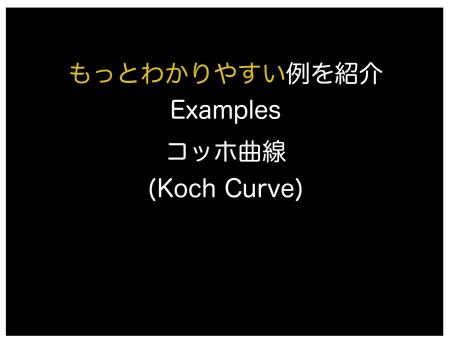


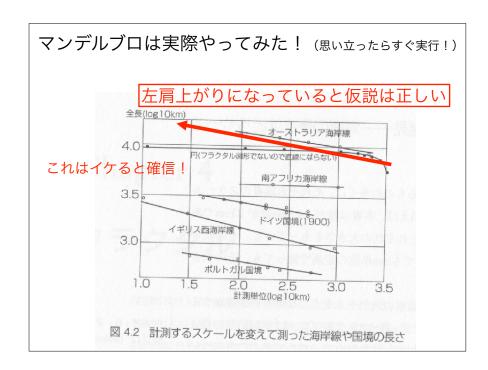


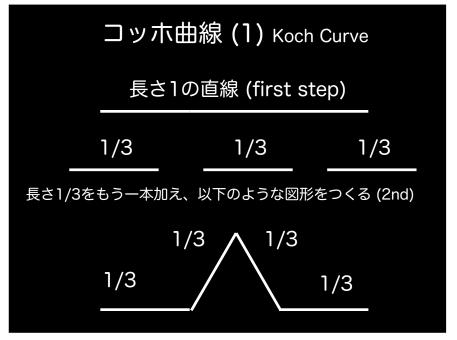


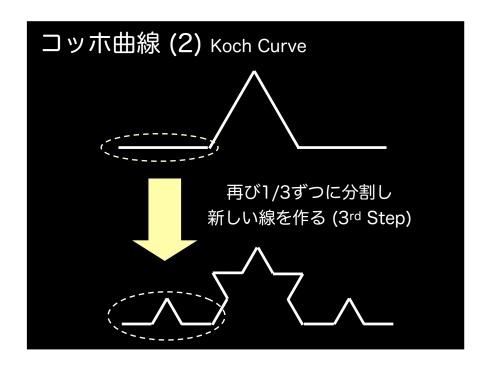








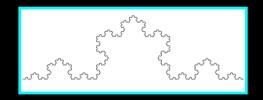






1/3 1/3 1/3

長さ1/3をもう一本加え、以下のような図形をつくる操作の繰り返し

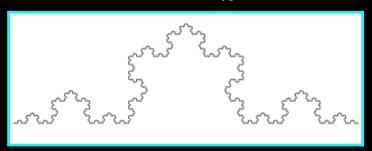


$$\lim_{i \to \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^i = \infty$$

# コッホ曲線 (3) Koch Curve

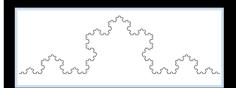
無限回繰り返すとこのような図形が得られる Final shape, after repeated in infinite number

### コッホ曲線



質問: このコッホ曲線の長さは?

Question: How long is it?



10回繰り返すと 全体の長さは 17.76

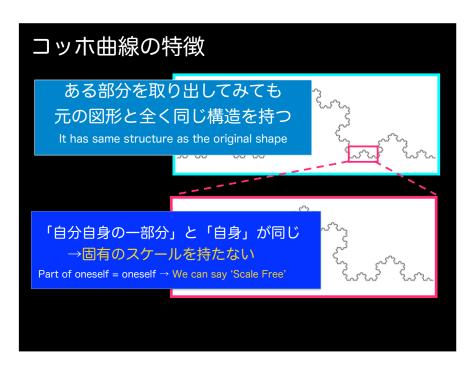
20回繰り返すと 全体の長さは 315.34

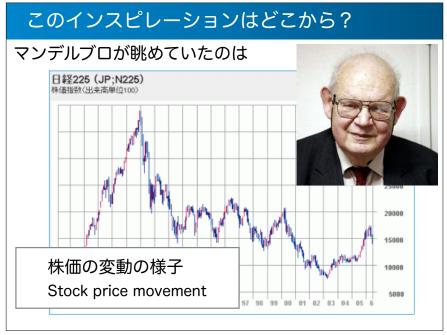
30回繰り返すと 全体の長さは 5599.67

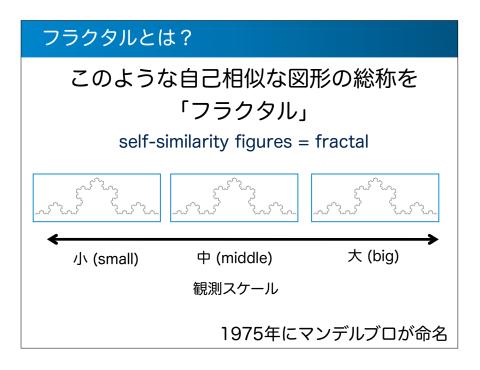
40回繰り返すと 全体の長さは 99437.33

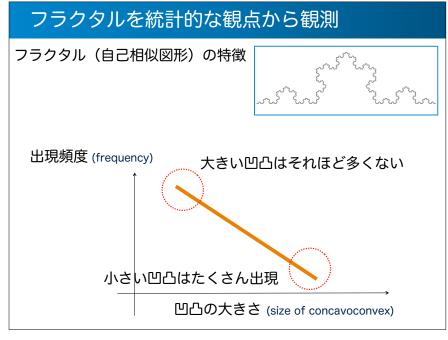
50回繰り返すと 全体の長さは 1765780.94

60回繰り返すと 全体の長さは 31356255.2









# 株価を統計的な観点から観測 (stock price) ■直観的には・・・ リーマンショック等は それほど頻繁に発生しない Financial crisis is uncommon phenomenon 出現頻度 大きい変動はそれほど多くない 株価の変動の大きさ

#### 反復関数系としてのフラクタル

Fractal as Iteration function system

複雑そうなフラクタルも,以下の<mark>単純</mark>な反復的表記に集約 (Any fractal can be defined as follows:)

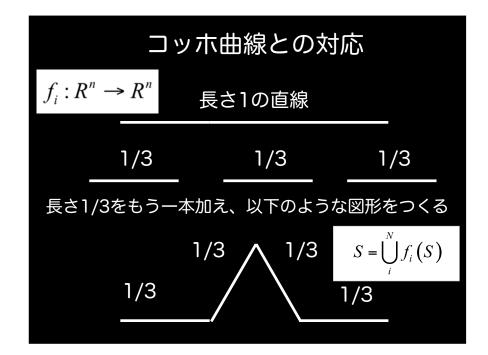
$$S = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(S) \qquad S \subset \mathbb{R}^n \qquad \mathbb{R}^n$$

$$f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

\*私の授業:世の中の複雑怪奇な現象に隠れた単純な数理的構造の紹介

# 少しだけ大学院生らしく

(for graduate students!)



# 離散数理の観点から (from discrete math.)

#### 反復関数系

$$S = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(S) \qquad S \subset \mathbb{R}^n \qquad \mathbb{R}^n$$

$$f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

関数 $f_i$  の集合はモノイドを構成 ( = monoid)

応用事例とイラストでわかる離散数学 カンタンな数学でAIも理解できる!? (第2版) (共立出版) 延原 肇 (著)





イマスグくりっく!



モノイドを知らない人におすすめの本!

# 本日の構成 (contents)

20分でわかるフラクタルの基礎

Basic of Fractal (20min)

30分でわかるフラクタルの応用

Application of Fractal (20min)

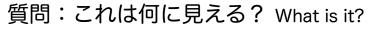
20分でわかるフラクタルの数理

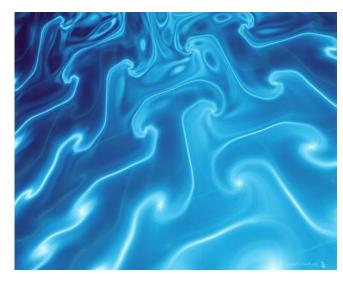
Mathematics of Fractal (20min)

今週の課題 -reports -

# フラクタルの応用(1)

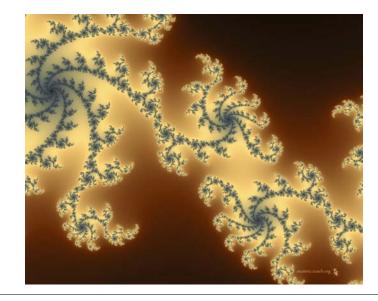
(fractal applications)





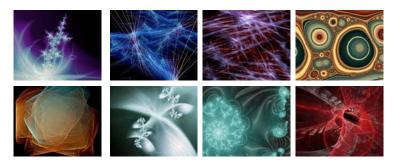


質問:これは何に見える? What is it?



# これらのCGは

Actually, these CG are



反復関数系で生成

...produced by iterated function system

#### フラクタルの応用 その1

皆さんに質問:「画像ファイルはどうして大きい?」 Why image file is large?

#### 600画素

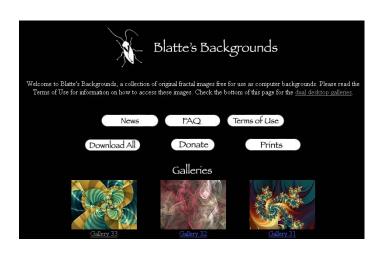


400画素

400×600 = 240,000画素 1画素あたり = 赤、緑、青 の各1バイト

こんな小さな画像でも 400 × 600 × 3 × 1バイト = 720KB

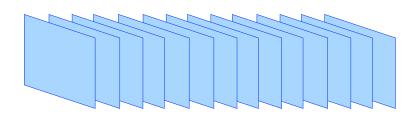
### http://exoteric.roach.org/bg/index.html



#### コンピュータグラフィクスに応用

Application to computer graphics

動画像の仕組み (movies)



1秒間30枚の静止画像 (30fps) 30 still images / 1 sec

DVD1枚(15GB)に対しハイビジョン画質で録画すると約1時間半

#### コンピュータグラフィクスに応用

Application to computer graphics

フラクタル図形は?(fractal figures)



生成するための数式を記録するだけでよい

※数式は数十バイトの世界

You need only some equations to generate the fractal figures and they require quite small memory.

# 4KBでどのくらいの動画が作れる?

4KB = 約2,000文字 (日本語)

新聞紙1ページの文字数は?

How many characters in newspaper?

16,000文字

4KB = 新聞紙1/8ページ分



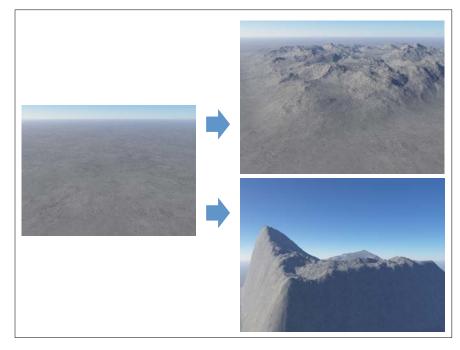


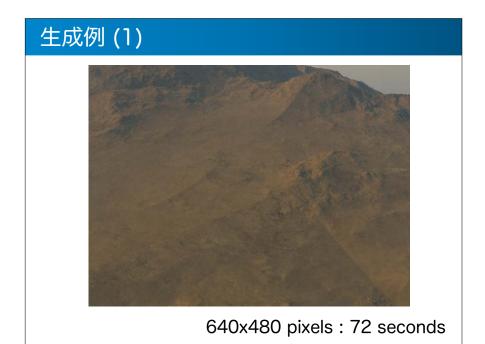
# ちょっと見てみましょう

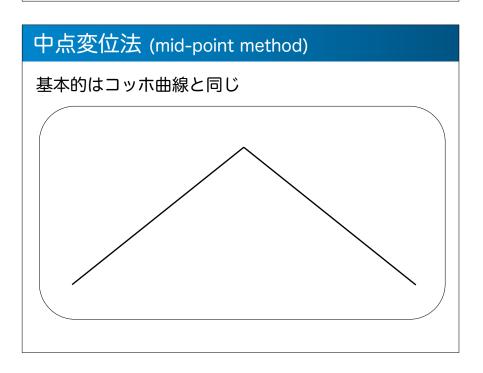


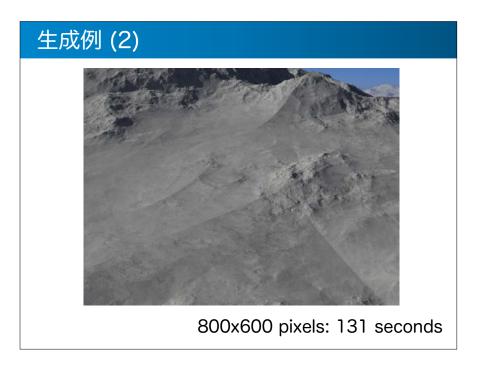


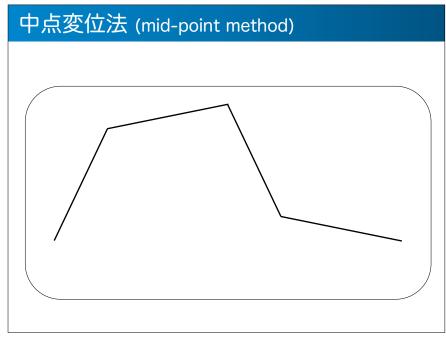


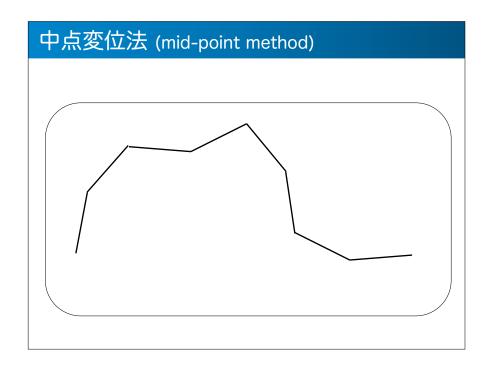






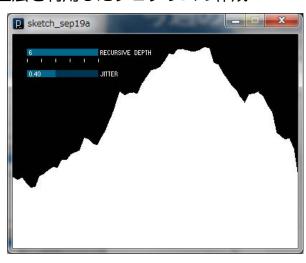






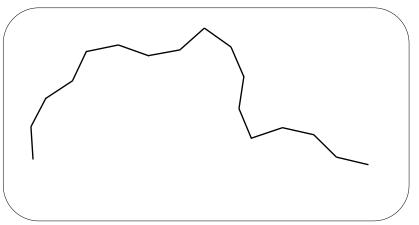


中点変位法を利用したプログラムの作成



# 中点变位法 (mid-point method)

だんだん自然の山らしく・・・(to be natural…)



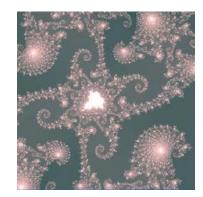
立体に拡張も可能 (of course 3D version can be defined.)

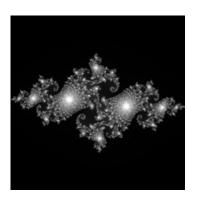
# 今週の演習課題

#### マンデルブロ集合の描画

Drawing Mandelbrot set

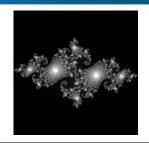
$$z_{n+1} = z_n^2 + C$$





# 複素力学系 (complex dynamic system)

$$z_{n+1} = z_n^2 + C$$



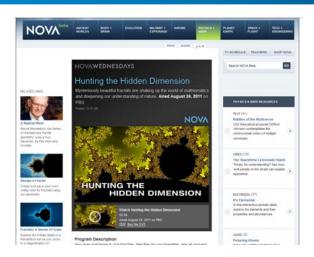


#### 複素力学系

複素数をある多項式による反復写像 により、どのようなモノに収束する のかを考える学問

# フラクタルの応用 (2)

# 10分ほど映像鑑賞



Hunting the Hidden Dimension (PBS)

# フィボナッチ数 (1) Fibonacci numbers

0 1 1 2 3 5 8 13

自然界の現象と強く対応

# フィボナッチ数 (2) Fibonacci numbers

0 1 1 2 3 5 8 13

1/1 = 12/1 = 3/2 = 5/3 = 1.8/67 = 13/8 = 1.625

これを続けてゆくとある数値に収束





■頭~床:へそ~床=黄金比

■肩~指先:肘~指先=黄金比

# こんな値に収束 (finally it converge to …)

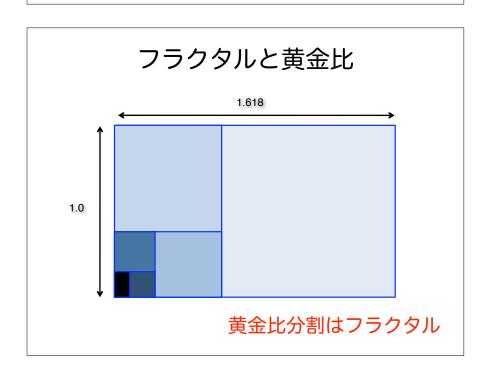
目指せ数理デザイナー? 芸術への応用?

黄金比 [Golden Ratio]

$$1: \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1:1.618$$

もっとも美しく、落ち着く比率

歴史的建造物、絵画、芸術作品において観測



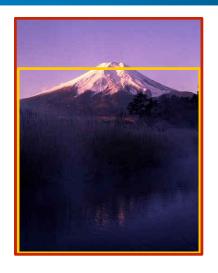
# 身近な例 (1) example of GR

皆さん、自分の学生証を出してみましょう



学生証のタテとヨコの比率を計算してみましょう Let's calculate width and height of student card ※大体, 黄金比に近い (1.58~1.6くらい)

# 身近な例 (2) example of GR



# 身近な例 (2) example of GR カメラの構図 (1)

#### MS Office クリップアートより

# 私も実践







After

# The Lazy Rule of Thirds









http://www.jakegarn.com/the-rule-of-thirds/

# フラクタル次元 Fractal Dimension

# 本日の構成 (contents)

#### 20分でわかるフラクタルの基礎

Basic of Fractal (20min)

#### 30分でわかるフラクタルの応用

Application of Fractal (20min)

#### 20分でわかるフラクタルの数理

Mathematics of Fractal (20min)

今週の課題 -reports -

#### フラクタル次元について

# 「次元」とは?

#### (dimension)

- (1) (物) いくつかの基本的物理量に対して、ある物理量がどのような関係をもつかを示す式。例えば、質量 M、長さ L、時間 T を基本量とすれば、面積 S は、[S] = [L2] と書ける。・・・
- (2) (数) 空間のひろがりの度合を表す数。例えば、直線上の点の座標は一つの数で表され、平面上の点の座標は二つの数の組で表され、空間の点の座標は三つの数の組で表されるので、それぞれ一次元・二次元・三次元であるという。一般に n 次元の空間や、無限次元の空間も考えられる。
- (3)ものの見方や考え方の立場。また、考え方や意見などを支えている思想や学識などの水準。

「一の異なる意見」「低い一の話」

三省堂提供「大辞林 第二版」より

# 位相次元とハウスドルフ次元

線は1次元 (Lines = 1D)

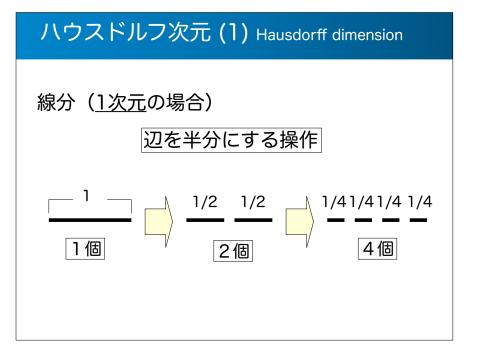
面は2次元 (Surface = 2D)

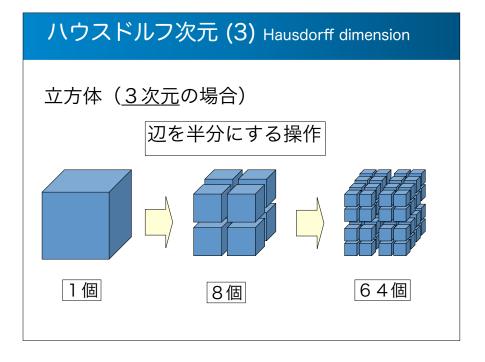
これまで習ってきた次元 = 位相次元

We study the concept of topological dimension, high school etc.



# 八ウスドルフ次元 (2) Hausdorff dimension 正方形 (2次元の場合) 辺を半分にする操作 1個 4個 16個



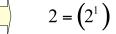


# ハウスドルフ次元 (4) Hausdorff dimension

いままでの議論をまとめると To summarize

	初期状態 Initial State	2等分	さらに2等分	さらに2等分
線分 ( <u>1次元</u> )	1個	2個	4個	8個
正方形 ( <u>2次元</u> )	1個	4個	16個	64個
立方体 ( <u>3 次元</u> )	1個	8個	64個	512個

#### 線分(<u>1次元</u>)





$$4 = \left(2^{1}\right) \times \left(2^{1}\right)$$

#### 正方形(2次元)



 $4 = (2^2)$ 



 $16 = \left(2^2\right) \times \left(2^2\right)$ 

#### 立方体(3次元)



 $8 = (2^3)$ 



 $64 = \left(2^3\right) \times \left(2^3\right)$ 

#### D次元



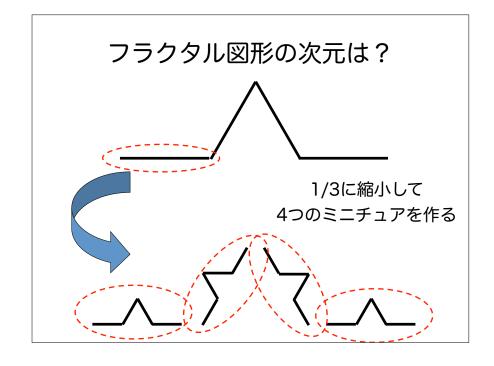
 $(2^D)$ 



 $(2^D)\times(2^D)$ 

# ハウスドルフ次元 (5) Hausdorff dimension

	初期状態	2等分
線分 ( <u>1次元</u> )	1個	2個 (=2)
正方形 ( <u>2 次元</u> )	1個	4個(=2×2)
立方体 ( <u>3 次元</u> )	1個	8個(=2×2×2)



# フラクタル図形の次元は?

D次元

半分にする操作

1



$$(2^D)$$

コッホ曲線の場合

1/3 にする操作

この式をDについて解けばよい

# フラクタルの別の定義

フラクタルのもうひとつの定義

位相次元 ≠ ハウスドルフ次元

となるような図形のこと

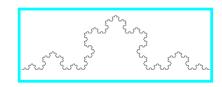
Fractal definition topological dimension ≠ Hausdorf dimension

# フラクタル次元の次元は

このような非整数次元をフラクタル次元という

$$(3^D)=4$$

$$\log\left(3^{D}\right) = \log 4$$



$$D\log 3 = \log 4$$

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2619 \cdot \cdot \cdot$$
 コッホ曲線の次元

#### 自然界に存在するフラクタル次元の例









**"**川:1.4~1.8

雲:約1.35次元

# 自己組織的臨界状態

Self-organized critical state

# でき乗の法則 雪崩の頻度 (frequency) (対数表現) どんな材料でも このような直線 雪崩の規模 Size of avalanche 小さな雪崩は頻繁に起きる 大きな雪崩はそれほど起こらない

# 砂山のメタファー ※メタファー=暗喩

砂山の上から少しずつ砂を落とす

Dropping the sand a little bit

- 山が緩やかな時:落下した砂は蓄積

the mountain is gradual : accumulation

- 一定の高さになった時: 雪崩がおきる 山は崩れて低くなる

the height of the mountain is higher: avalanche



パー・バック(物理学者)

色々な材料で実験を実施材料によって、砂山の特性に違いがでるか?

### 自己組織的臨界状態 - Self-organized criticality -

#### 「臨界状態」(Critical state)

砂山がある一定の高さと傾きを保っている状態

#### 「超臨界状態」(Supercritical state)

「臨界状態」の砂山にさらに砂が加わった状態

※雪崩が発生する

※臨界状態に戻ろうとする

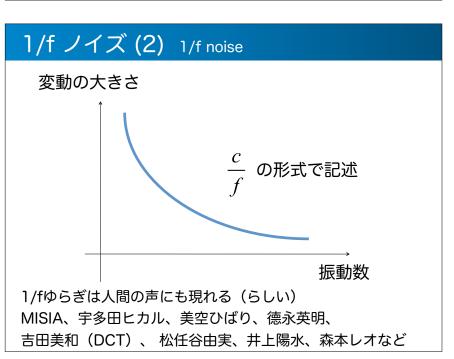
#### 「亜臨界状態」(Subcritical state)

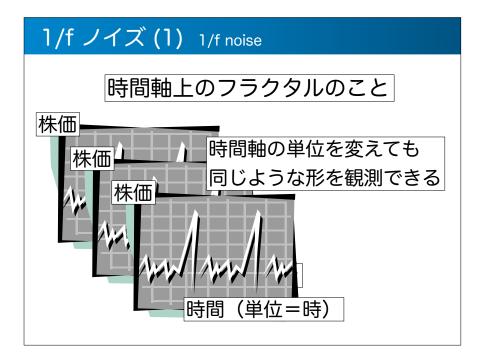
「臨界状態」よりも砂山が低い状態

システムが自分自身で臨界状態を保とうとする状態

自己組織的臨界状態

# ・地震の規模と頻度 (The size and frequency of earthquakes) ・都市人口と順位 (Population and ranking) ・所有資産と順位 (Owned assets and ranking) ・単語の頻出頻度と順位 (Word frequency and ranking)





# ちょっと見てみましょうか

# ろうそくの炎, たき火と1/f ノイズ

見ていて飽きないのは 1/f が心地よいから?





子供の頃の火遊びは・・・1/fへの憧れ?

# フラクタルと感性



#### 味覚?



# フラクタルと感性 (fractal and Sensitivity)

人間の感性の深層には フラクタルの構造が存在するかもしれない

1/f ゆらぎ (心地よく聴こえる) [聴覚] 黄金比 (美しく見える) [視覚]

# フラクタルと感性

#### 触覚?



# 人間の感性と普遍性 そうでないもの 普遍性 (Universality) 黄金比のような構造を見いだせるか? e.g. Golden Ratio

# 今週の課題について - Reports -

# 本日の構成 (contents)

#### 20分でわかるフラクタルの基礎

Basic of Fractal (20min)

#### 30分でわかるフラクタルの応用

Application of Fractal (20min)

#### 20分でわかるフラクタルの数理

Mathematics of Fractal (20min)

今週の課題 -reports -



# 今週の課題

#### 演習1 (3点)

- 1. 黄金比を考慮しないで撮影した画像
- 2. 黄金比を考慮して撮影した画像
- 3. 2.について、具体的に工夫したところ をテキストで説明



これらを ppt 1枚にまとめて提出。

注意点・・・この課題だけ4/27 17:00締切

#### 今週の課題

#### 演習3

- 1) 上記のプログラムを参考にして、自分のパソコンの壁 紙サイズのコッホ曲線を描くように改良してくださ い。また描画の色なども変更して、カラフルなものにし てみてください。
- 2) 1)で作成した画像を、自分のパソコンの壁紙に設定し、そのスクリーンショットしたものを提出してください。つまり提出するものは、スクリーンショット1枚です。

#### 今週の課題

#### 演習2 (3点)

フラクタルを利用した応用(サービス、デバイスなんでもOK)を、自分なりに考えて、もしそれが実現できたら世の中がどのような変わるのかを含めて、300文字から500文字程度で記述しなさい。

例: フラクタルマイク・・・カラオケで利用 すれば、どんな人も上手に聴こえる。電話のやり とりにおいても、相手の声が心地よく聴こえる。

以降の課題は5/8 15:00締切

#### 今週の課題

#### 演習4

マンデルブロ集合の描画

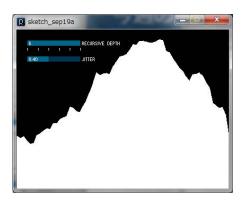
パラメータを色々変更して3種類異なる画像を提出



# 今週の課題

演習5 (ボーナス課題)

ControllP5ライブラリを用いた中点変位法の実装



以上! アンケートを提出しておしまい