

# MP3 (aka MPEG1-LayerIII) の 要素技術

2024.3-

# あらすじ

1. MP3 概要
  - MPEG/ Audio の歴史
  - コーデック構造
2. ハイブリッドフィルタバンク
  - フィルタバンク
  - MDCT (Modified Discrete Cosine Transform)
  - エイリアス削減バタフライ演算
3. 量子化
4. 符号化
5. 聴覚心理モデル II
6. dist10 エンコーダの外部・内部ループ

## 1. MP3 概要

- MPEG/ Audio の歴史
- コーデック構造

## 2. ハイブリッドフィルタバンク

- フィルタバンク
- MDCT (Modified Discrete Cosine Transform)
- エイリアス削減バタフライ演算

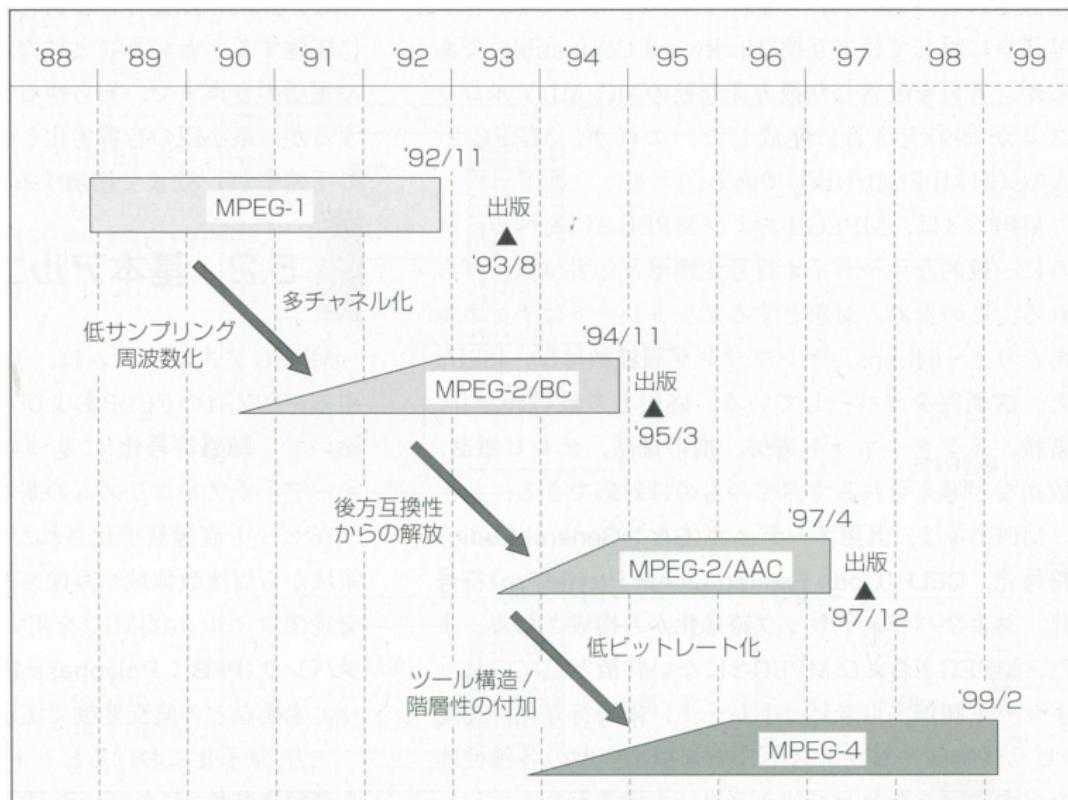
## 3. 量子化

## 4. 符号化

## 5. 聴覚心理モデルII

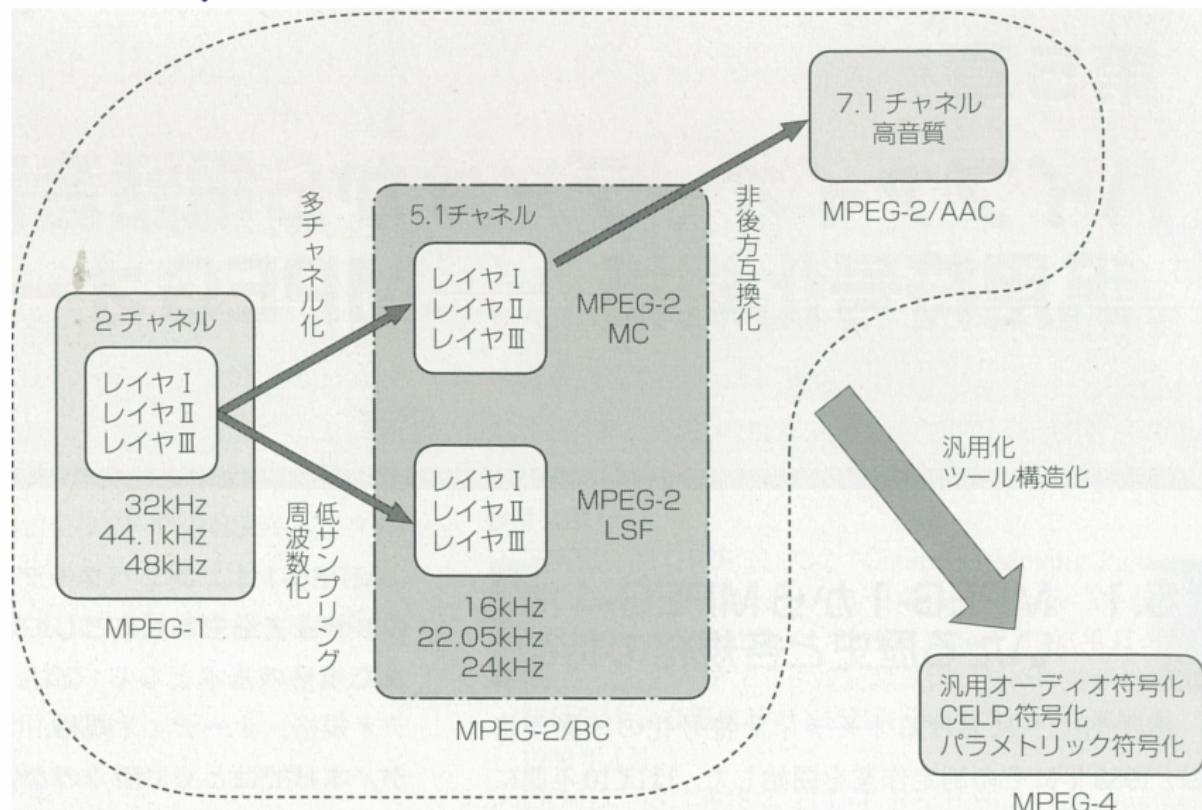
## 6. dist10 エンコーダの外部・内部ループ

# MPEG/Audio の歴史



MPEG/Audio の系譜. [1] より引用

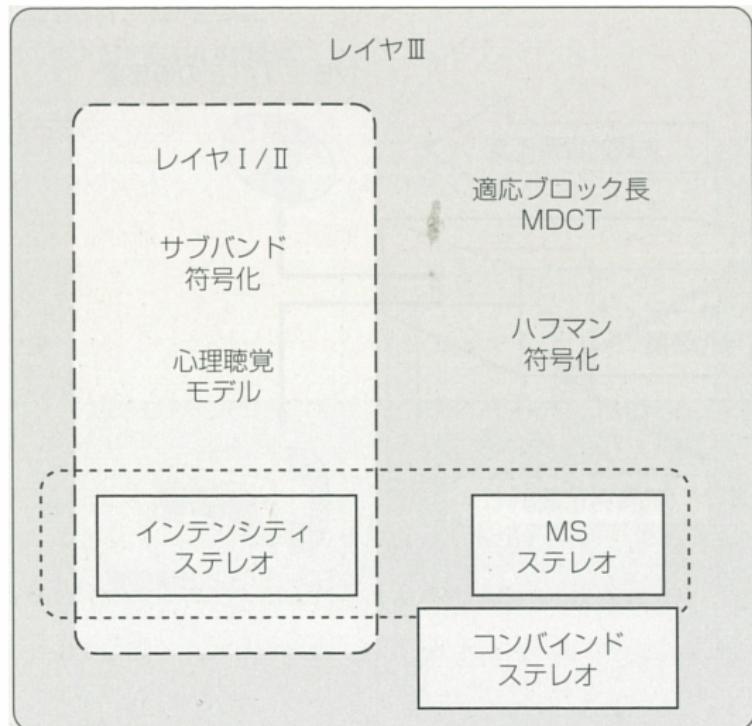
# MPEG/Audio の歴史



MPEG/Audio の関係. [1] より引用

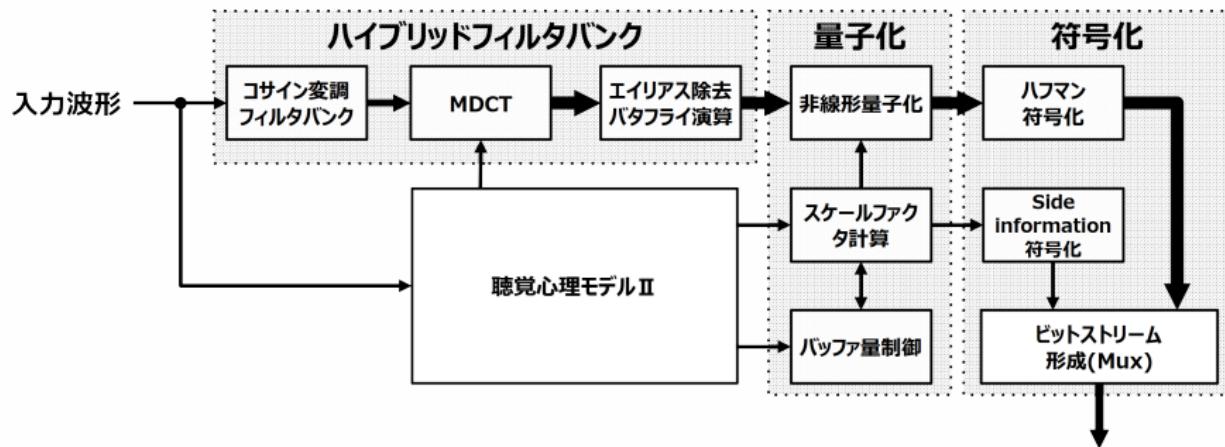
# MPEG1の要素技術

- ▶ レイヤ I, II, III の順に圧縮率向上
- ▶ レイヤ I, II はサブバンド符号化がメイン
- ▶ 聴覚心理モデルは I, II と III で異なる



[1] より引用

# MP3のエンコーダ構造

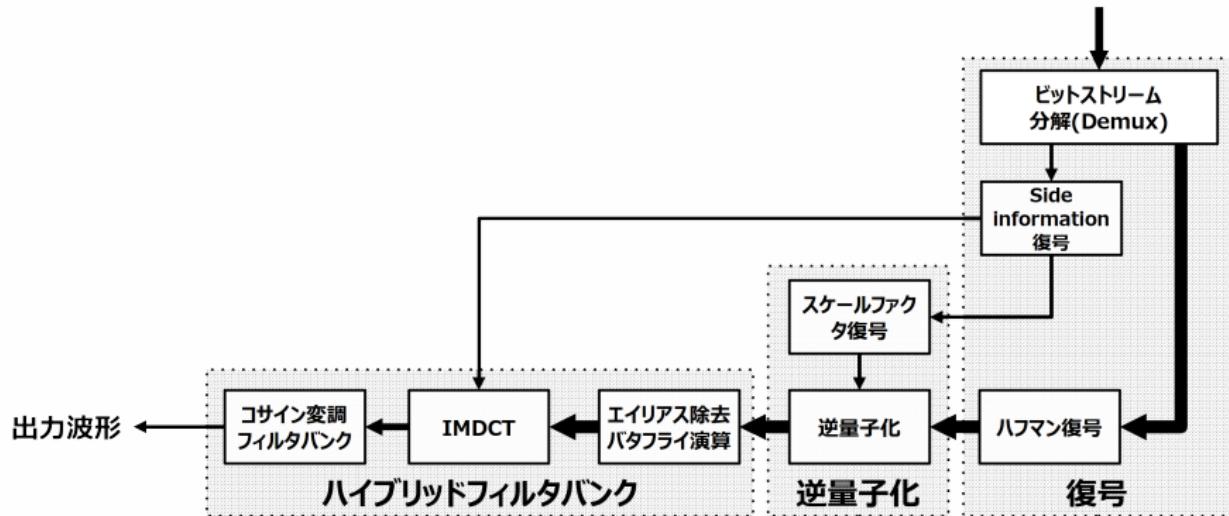


ハイブリッドフィルタバンク 32バンドのフィルタバンクの後、18点のMDCT → 576点のスペクトルを計算

量子化 臨界帯域・マスキングの情報を元にスペクトルを量子化

符号化 低域を精密・高域を荒く符号化

# MP3のデコーダ構造



エンコーダの逆の操作

## 1. MP3 概要

- MPEG/Audio の歴史
- コーデック構造

## 2. ハイブリッドフィルタバンク

- フィルタバンク
- MDCT (Modified Discrete Cosine Transform)
- エイリアス削減バタフライ演算

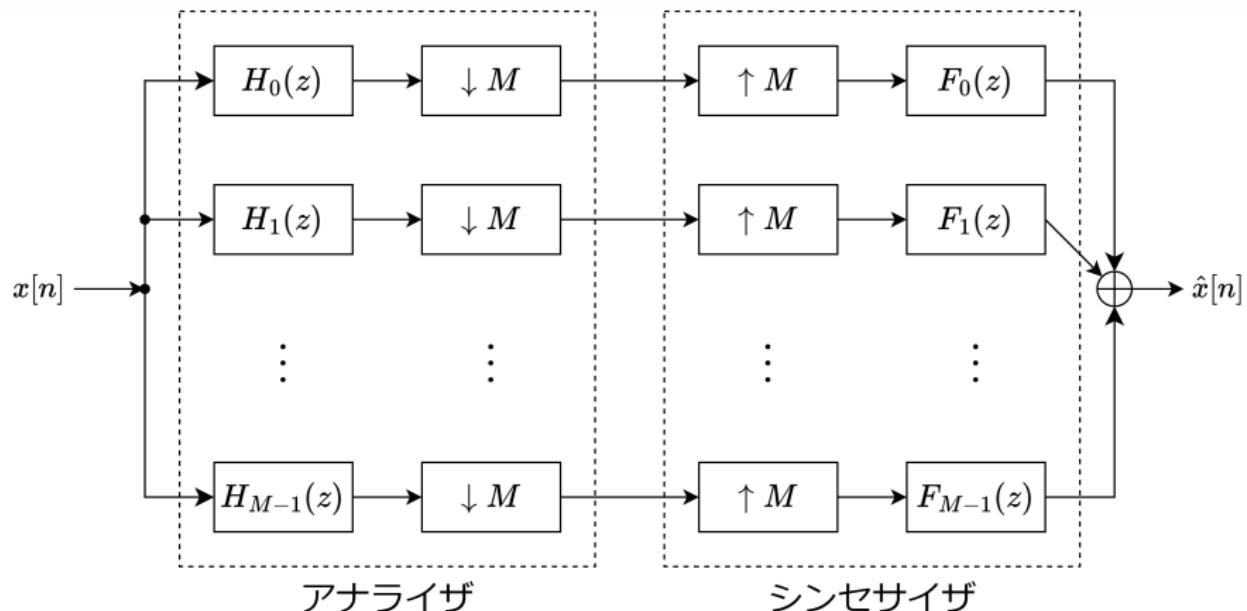
## 3. 量子化

## 4. 符号化

## 5. 聴覚心理モデル II

## 6. dist10 エンコーダの外部・内部ループ

# $M$ 分割フィルタバンク [2]



- ▶ 信号を  $M$  個の帯域に分割
- ▶  $M$  個の分析フィルタ  $h_k$ ・合成フィルタ  $f_k$  を使用

# コサイン変調フィルタバンク [2, 3]

## コサイン変調フィルタバンク

1つの実係数・直線位相プロトタイプフィルタ  $p_0[n]$  から、分析フィルタ  $h_k$  と合成フィルタ  $f_k$  を次で設定：

$$h_k[n] = 2p_0[n] \cos \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) \left( n - \frac{L-1}{2} \right) + \theta_k \right] \quad (1)$$

$$f_k[n] = h_k[L-1-n] \quad (2)$$

$M$ ：分割帯域数， $L$ ：タップ長， $\theta_k = (-1)^k \frac{\pi}{4}$

詳細は補足 1 節に記載

# MP3のフィルタバンク

$M = 32, L = 33$ としたコサイン変調フィルタバンクに  
近いが異なる！（ $\theta_k$ がない！）

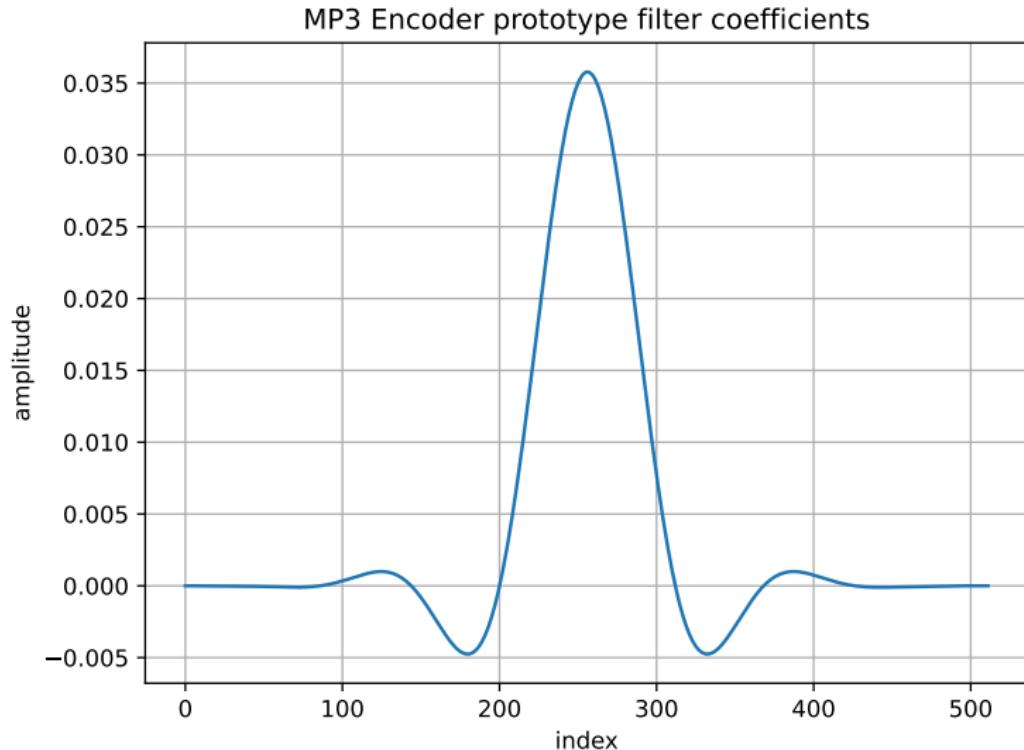
$$h_k[n] = p_0[n] \cos \left[ \frac{\pi}{32} \left( k + \frac{1}{2} \right) (n - 16) \right] \quad (3)$$

$$f_k[n] = 32p_0[n] \cos \left[ \frac{\pi}{32} \left( k + \frac{1}{2} \right) (n + 16) \right] \quad (4)$$

$$p_0[n] = \begin{cases} -C_n & [n/64] \text{ が偶数} \\ C_n & [n/64] \text{ が奇数} \end{cases} \quad (5)$$

$C_n$  ( $n = 0, \dots, 511$ ) は規格で設定

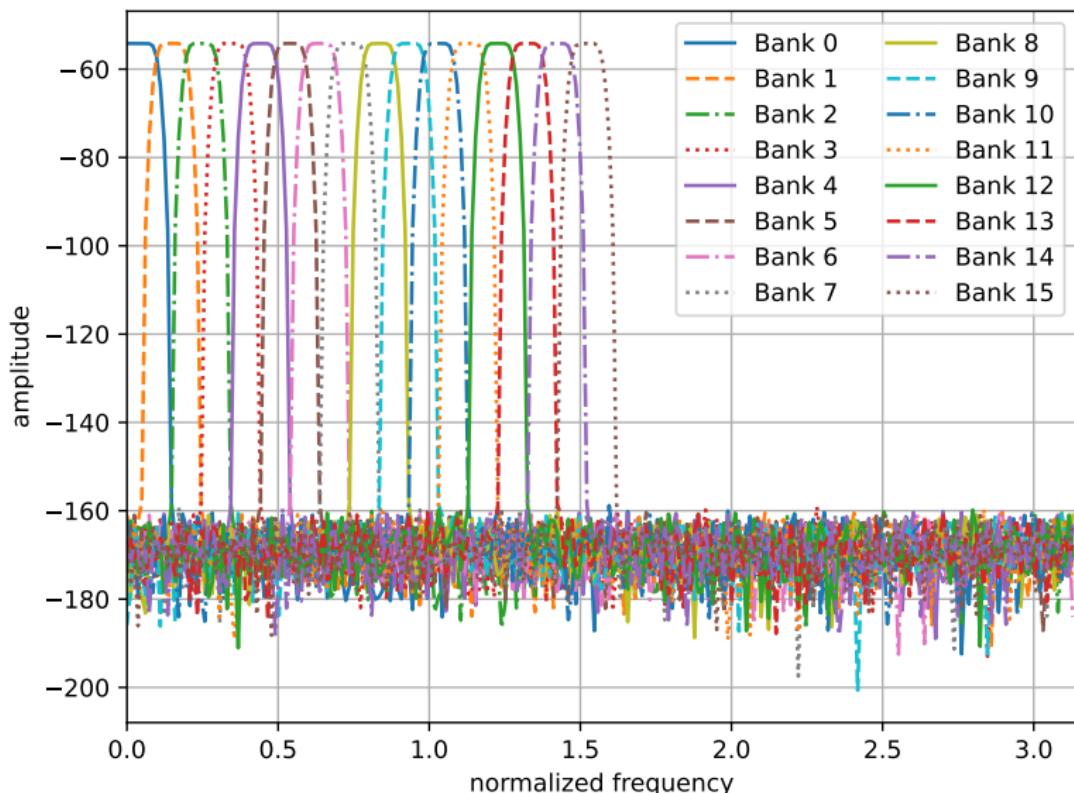
# フィルタバンクの特性



- ▶  $p_0[n]$  の形状. 対称 (= 直線位相特性をもつ).

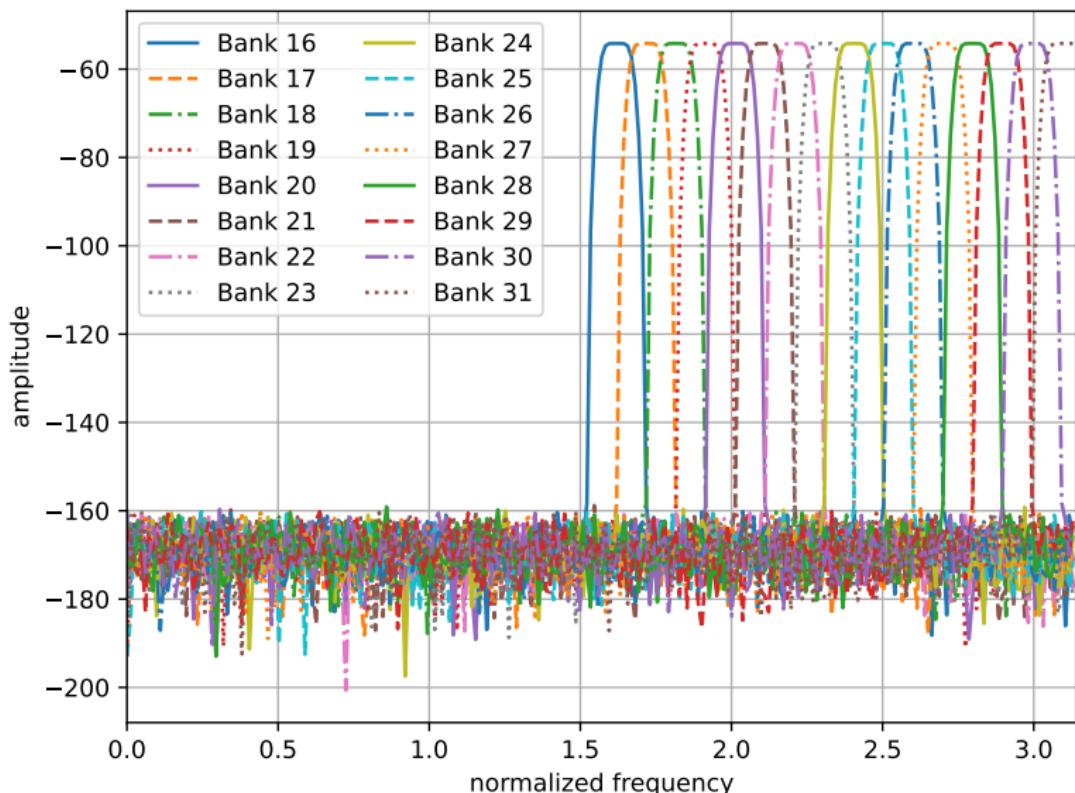
# フィルタバンクの周波数特性

バンク  $k = 0, \dots, 15$  の周波数特性



# フィルタバンクの周波数特性

バンク  $k = 16, \dots, 31$  の周波数特性



# フィルタバンクの実装

プログラムでは、入力  $x[t]$  からバンド  $k$  の出力  $y_k[t]$  を

$$y_k[t] = \sum_{s=0}^{63} t_{k,s} \sum_{u=0}^7 x[t - s - 64u] C_{s+64u}$$
$$t_{k,s} := \cos \left[ \frac{\pi}{32} \left( k + \frac{1}{2} \right) (s - 16) \right]$$

で計算。この式が FIR フィルタ出力計算式

$$y_k[t] = \sum_{n=0}^{511} x[t - n] h_k[n] = \sum_{n=0}^{511} x[t - n] p_0[n] t_{k,n} \quad (6)$$

から導かれることを示す。

# フィルタバンクの実装

(6) 式を変形していくと,

$$\begin{aligned}y_k[t] &= \sum_{n=0}^{511} x[t-n] p_0[n] t_{k,n} = \sum_{u=0}^7 \sum_{s=0}^{63} x[t-s-64u] p_0[s+64u] t_{k,s+64u} \\&= \sum_{u=0}^7 \sum_{s=0}^{63} x[t-s-64u] (-1)^u C_{s+64u} t_{k,s+64u}\end{aligned}\tag{7}$$

ここで,

$$\begin{aligned}t_{k,s+64u} &= \cos \left[ \frac{\pi}{32} \left( k + \frac{1}{2} \right) (s + 64u - 16) \right] = \cos \left[ \frac{\pi}{32} \left( k + \frac{1}{2} \right) (s - 16) + \pi (2k + 1) u \right] \\&= \cos \left[ \frac{\pi}{32} \left( k + \frac{1}{2} \right) (s - 16) \right] \cos [\pi(2k + 1)u] \\&\quad - \sin \left[ \frac{\pi}{32} \left( k + \frac{1}{2} \right) (s - 16) \right] \sin [\pi(2k + 1)u] = (-1)^u t_{k,s}\end{aligned}$$

だから、これを式(7)に代入すれば、

$$y_k[t] = \sum_{u=0}^7 \sum_{s=0}^{63} x[t-s-64u] C_{s+64u} t_{k,s} = \sum_{s=0}^{63} t_{k,s} \sum_{u=0}^7 x[t-s-64u] C_{s+64u}$$

プログラムの計算式が導かれた。

# フィルタバンクは完全再構成か？

- ▶  $C_n$  の導出方法が不明. 厳密に完全再構成性を示せない
- ▶ 再構成信号  $\hat{x}[n]$  が入力信号の遅延+定数倍になるか観察

$$\left\{ \begin{array}{l} y_k[n] = \sum_{i=0}^{511} h_k[i]x[n-i] \quad \text{バンク } k \text{ の分析フィルタ出力} \\ z_k[n] = \sum_{i=0}^{511} f_k[i]y_k[n-i] \quad \text{バンク } k \text{ の合成フィルタ出力} \\ \hat{x}[n] = \sum_{k=0}^{31} z_k[n] \quad \text{再構成信号} \end{array} \right.$$

# フィルタバンクは完全再構成か？

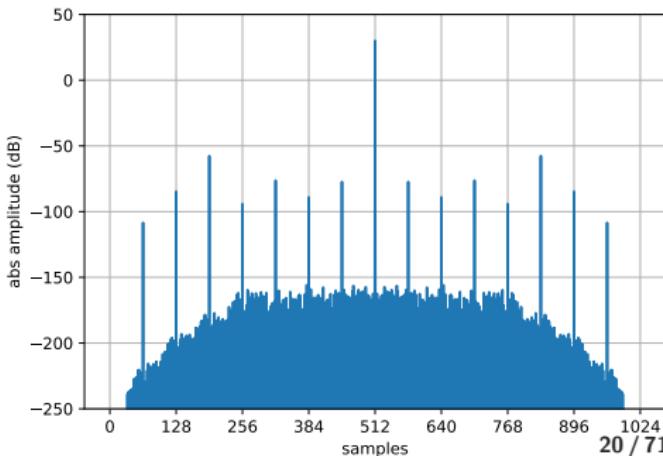
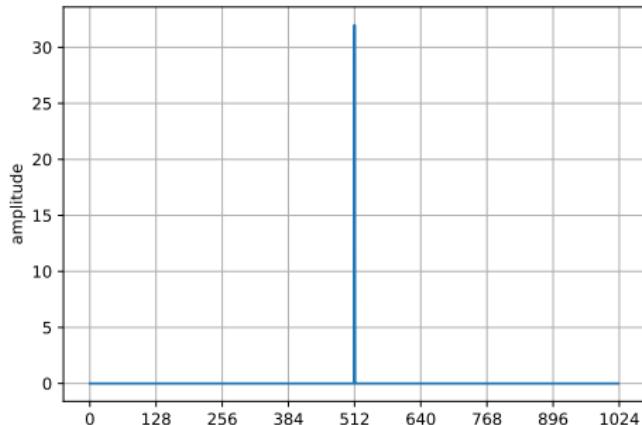
$$\begin{aligned}\hat{x}[n] &= \sum_{k=0}^{31} z_k[n] = \sum_{k=0}^{31} \left( \sum_{i=0}^{511} f_k[i] y_k[n-i] \right) \\ &= \sum_{k=0}^{31} \left\{ \sum_{i=0}^{511} f_k[i] \left( \sum_{j=0}^{511} h_k[j] x[n-i-j] \right) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{31} \sum_{i=0}^{511} \sum_{j=0}^{511} f_k[i] h_k[j] x[n-i-j] \\ &= \sum_{k=0}^{31} \sum_{m=0}^{1022} \sum_{i=\max\{0, m-511\}}^{\min\{511, m\}} f_k[i] h_k[m-i] x[n-m] \quad (m := i + j) \\ &= \sum_{m=0}^{1022} x[n-m] \underbrace{\sum_{i=\max\{0, m-511\}}^{\min\{511, m\}} \sum_{k=0}^{31} f_k[i] h_k[m-i]}_{=g[m]} \quad (8)\end{aligned}$$

# フィルタバンクは完全再構成か？

- ▶  $g[m]$  のグラフ（右図）
- ▶  $g[m] \approx 32\delta_{m,512}$  だから，

$$\hat{x}[n] \approx 32x[n - 512]$$

近似的に完全再構成



# MP3のMDCT (Modified DCT)

- ▶ サブバンドフィルタで32帯域に分割した信号に対し、18点MDCTを実行
  - ▶ 出力： $32 \times 18 = 576$ 点のスペクトルデータ
- ▶ MDCTの前・IMDCTの後で窓関数を適用
  - ▶ MP3では4種類の窓関数を使用
  - ▶ 窓関数は完全再構成条件を満たす

# MDCT と IMDCT

入力信号を  $x[n]$ , 再構成信号を  $y[n]$  として

## MDCT (Modified Discrete Cosine Transform)

$$X_k = \sum_{n=0}^{2N-1} x[n] \cos \left[ \frac{\pi}{N} \left( k + \frac{1}{2} \right) \left( n + \frac{1}{2} + \frac{N}{2} \right) \right] \quad (9)$$

## IMDCT (Inverse MDCT)

$$y[n] = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cos \left[ \frac{\pi}{N} \left( k + \frac{1}{2} \right) \left( n + \frac{1}{2} + \frac{N}{2} \right) \right] \quad (10)$$

- ▶ 時間領域は  $2N$  点, 周波数領域は  $N$  点の変換  
( $k = 0, \dots, N - 1$ )

# MDCT と完全再構成条件

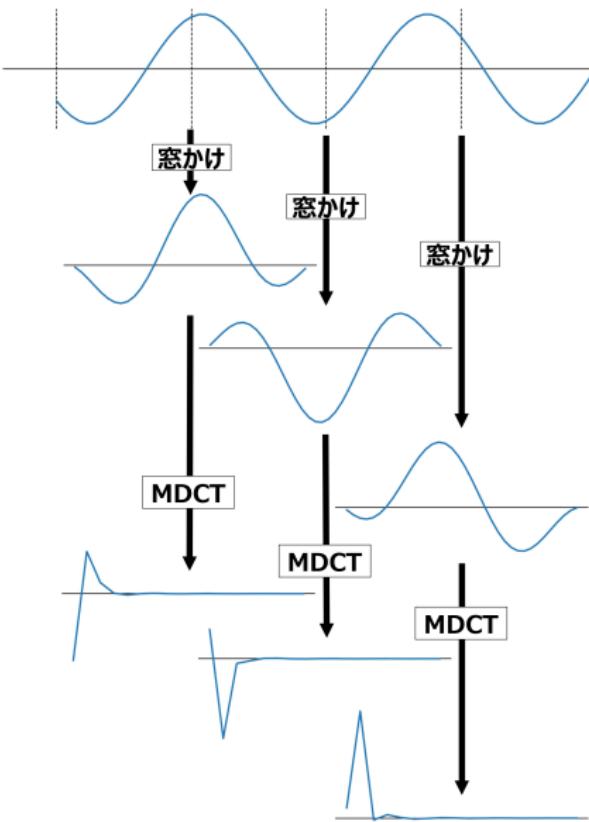
(10) 式に (9) 式を代入して整理すると

$$y[n] = \begin{cases} x[n] - x[N-1-n] & (n = 0, \dots, N-1) \\ x[n] + x[3N-1-n] & (n = N, \dots, 2N-1) \end{cases} \quad (11)$$

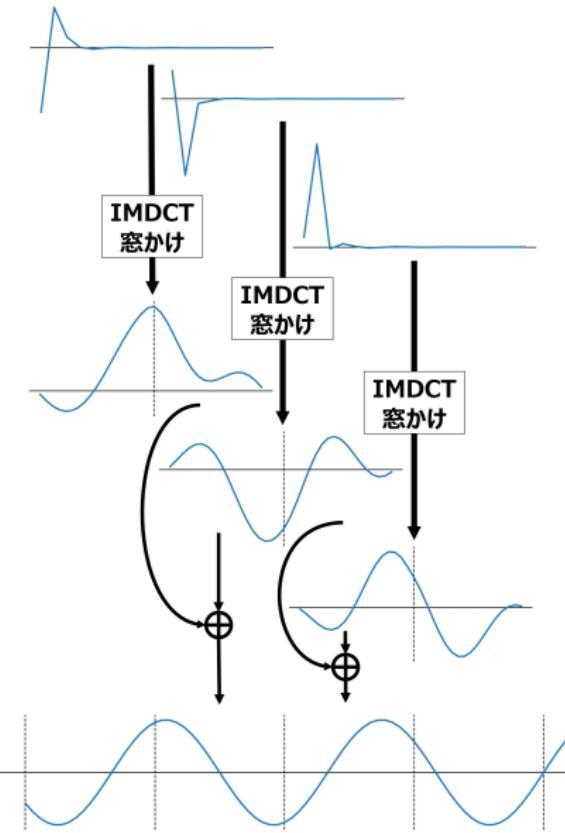
となる（証明は補足）。

ハーフオーバーラップで処理するとき， $x[n], y[n]$  にうまく窓関数を適用すると完全再構成にできる。その条件は？

# ハーフオーバーラップアドの手順



エンコード



デコード

# MDCT と完全再構成条件

## Princen–Bradley 条件（完全再構成条件）[4]

長さ  $2N$  の分析窓を  $w_a$ , 合成窓を  $w_s$  としたとき,

$$w_a[n]w_s[n] + w_a[n+N]w_s[n+N] = 1 \quad (12)$$

$$w_a[n+N]w_s[2N - 1 - n] = w_a[n]w_s[N - 1 - n] \quad (13)$$

$$n = 0, \dots, N - 1$$

ならば, MDCT・IMDCT によるハーフオーバーラップ  
アドは完全再構成

# Princen–Bradley 条件の導出

$m$  フレーム目の  $n$  時刻の入力  $x_m[n]$  は、フレームあたり  $N$  サンプルでスライドしており

$$x_m[n] = x_{m-1}[n + N] \quad (14)$$

が成り立つとする。窓かけした信号  $g_m[n]$  を

$$g_m[n] := w_a[n]x_m[n] \quad (n = 0, \dots, 2N - 1) \quad (15)$$

と書く。 $g_m[n]$  を MDCT • IMDCT して再構成した信号  $z_m[n]$  は、(11) 式より、

$$z_m[n] = \begin{cases} g_m[n] - g_m[N - 1 - n] & (n = 0, \dots, N - 1) \\ g_m[n] + g_m[3N - 1 - n] & (n = N, \dots, 2N - 1) \end{cases} \quad (16)$$

# Princen–Bradley 条件の導出

ハーフオーバーラップアドした結果を  $\hat{x}_m[n]$  と書くと,  
(16) 式より,

$$\begin{aligned}\hat{x}_m[n] &= w_s[n]z_m[n] + w_s[n+N]z_{m-1}[n+N] \\&= w_s[n](g_m[n] - g_m[N-1-n]) \\&\quad + w_s[n+N](g_{m-1}[n+N] + g_{m-1}[3N-1-(n+N)]) \\&= w_s[n](w_a[n]x_m[n] - w_a[N-1-n]x_m[N-1-n]) \\&\quad + w_s[n+N](w_a[n+N]x_{m-1}[n+N] + w_a[2N-1-n]x_{m-1}[2N-1-n]) \\&= w_s[n](w_a[n]x_m[n] - w_a[N-1-n]x_m[N-1-n]) \\&\quad + w_s[n+N](w_a[n+N]x_m[n] + w_a[2N-1-n]x_m[N-1-n]) \\&= x_m[n](w_a[n]w_s[n] + w_a[n+N]w_s[n+N]) \\&\quad + x_m[N-1-n](w_a[n+N]w_s[2N-1-n] - w_a[n]w_s[N-1-n])\end{aligned}$$

この結果を  $x_m[n] = \hat{x}_m[n]$  として両辺比較することで  
条件が得られる

# MP3 と Princen–Bradley 条件

Princen–Bradley 条件 (分析窓と合成窓が同一)

分析・合成窓が同じ  $w[n] = w_a[n] = w_s[n]$  とき,

$$w[n]^2 + w[n+N]^2 = 1 \quad (17)$$

$$w[n+N]w[2N-1-n] = w[n]w[N-1-n] \quad (18)$$
$$n = 0, \dots, N-1$$

とくに窓関数が対称  $w[n] = w[2N-1-n]$  であれば,

$$w[n+N]w[2N-1-n] = w[N-1-n]w[2N-1-n] = w[N-1-n]w[n]$$

となり式(18)が満たされる <sup>\*1</sup>

---

\*1 逆に、式(18)を満たしても対称とは限らない。  
たとえば、 $w[n+N] = w[N-1-n]$  で、 $w[n] \neq w[2N-1-n]$  の場合。  
ただし、 $w[n+N]w[2N-1-n] = w[N-1-n]w[2N-1-n] = w[N-1-n]w[n]$  となる。

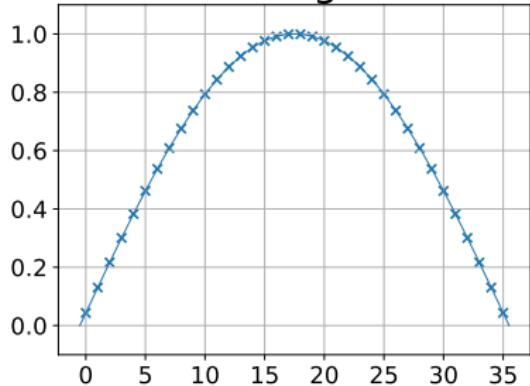
# MP3とMDCT – 4種類の窓関数

種類	定義
long	$w[n] = \sin \left[ \frac{\pi}{36} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (n = 0, \dots, 35)$
short	$w[n] = \sin \left[ \frac{\pi}{12} \left( n - 6k + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (k = 1, 2, 3, \ n = 6k, \dots, 6k + 11)$
start	$w[n] = \begin{cases} \sin \left[ \frac{\pi}{36} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] & (n = 0, \dots, 17) \\ 1 & (n = 18, \dots, 23) \\ \sin \left[ \frac{\pi}{12} \left( n - 18 + \frac{1}{2} \right) \right] & (n = 24, \dots, 29) \\ 0 & (n = 30, \dots, 35) \end{cases}$
stop	$w[n] = \begin{cases} 0 & (n = 0, \dots, 5) \\ \sin \left[ \frac{\pi}{12} \left( n - 6 + \frac{1}{2} \right) \right] & (n = 6, \dots, 11) \\ 1 & (n = 12, \dots, 17) \\ \sin \left[ \frac{\pi}{36} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] & (n = 18, \dots, 35) \end{cases}$

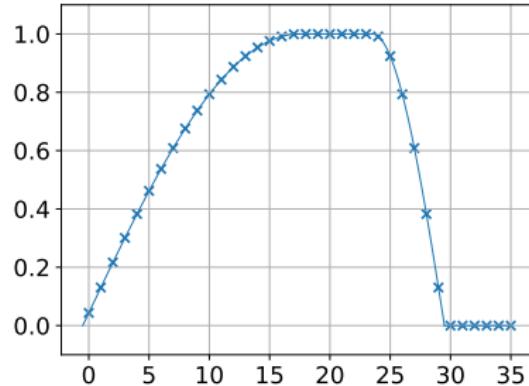
- ▶ short の窓長は 12, それ以外は 36

# MP3とMDCT – 4種類の窓関数

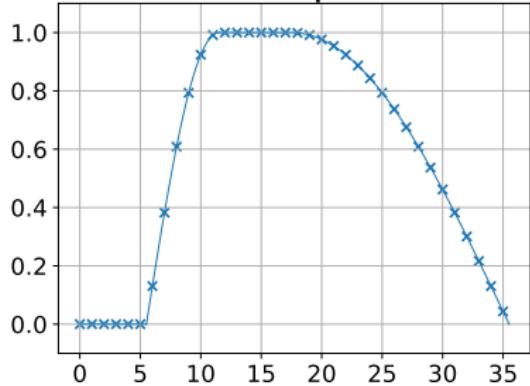
long



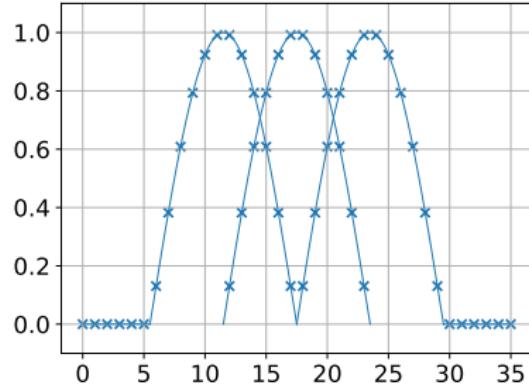
start



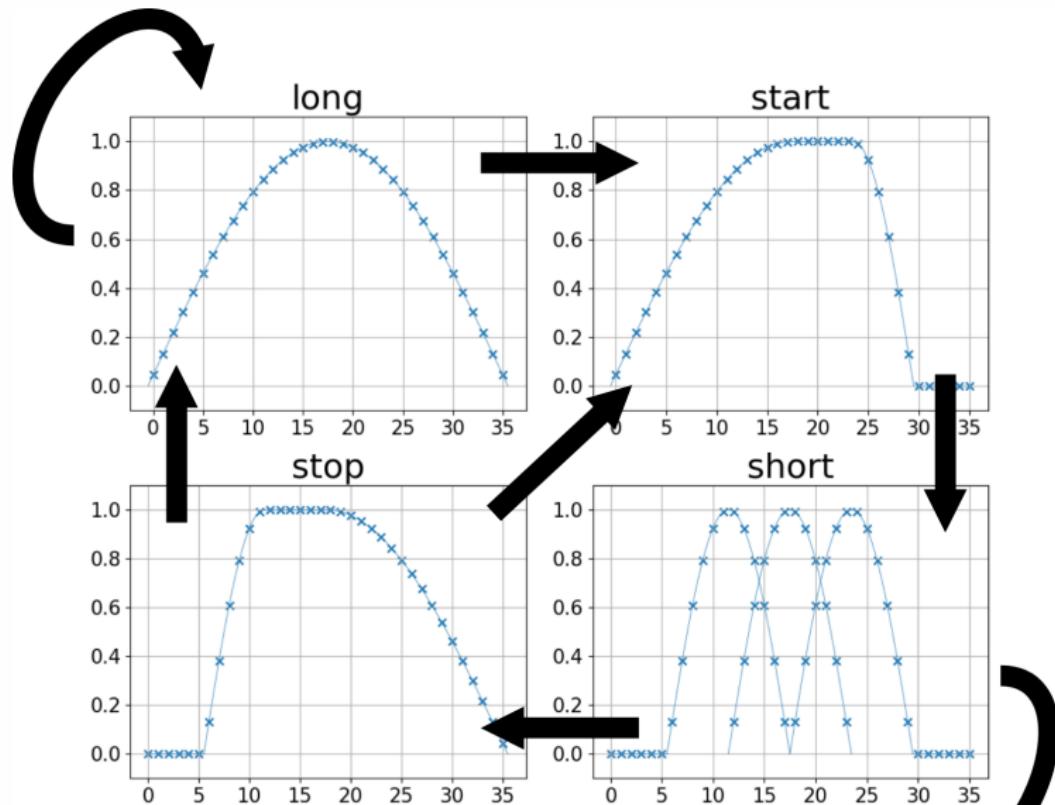
stop



short



# MP3とMDCT – 窓関数の状態遷移



状態遷移は聴覚心理モデルにより決定

# MP3 と Princen–Bradley 条件

## サイン窓

$$w[n] = \sin \left[ \frac{\pi}{2N} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (n = 0, \dots, 2N - 1) \quad (19)$$

は Princen–Bradley 条件を満たす。

(証明) 式 (17) は：

$$\begin{aligned} w[n]^2 + w[n+N]^2 &= \sin^2 \left[ \frac{\pi}{2N} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] + \sin^2 \left[ \frac{\pi}{2N} \left( n + N + \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= \sin^2 \left[ \frac{\pi}{2N} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] + \cos^2 \left[ \frac{\pi}{2N} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] = 1 \end{aligned}$$

式 (18) は、サイン窓が対称であることより示される：

$$\begin{aligned} w[2N - 1 - n] &= \sin \left[ \frac{\pi}{2N} \left( 2N - 1 - n + \frac{1}{2} \right) \right] = \sin \left[ \pi + \frac{\pi}{2N} \left( -n - \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= \sin \left[ -\frac{\pi}{2N} \left( n + \frac{1}{2} \right) + \pi \right] = \sin \left[ \frac{\pi}{2N} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] = w[n] \end{aligned}$$

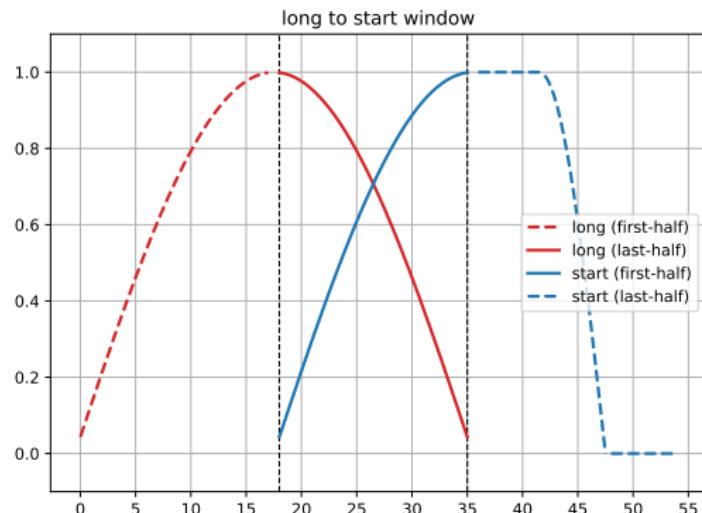
# MP3 と Princen–Bradley 条件

- ▶ long, short 窓はサイン窓そのものなので完全再構成
- ▶ 状態遷移時に完全再構成になるか？
  1. long → start
  2. stop → long : 1. の対称ケース
  3. start → short
  4. short → stop : 3. の対称ケース
- 1. と 3. だけ確認

# MP3 と Princen–Bradley 条件

1. long → start

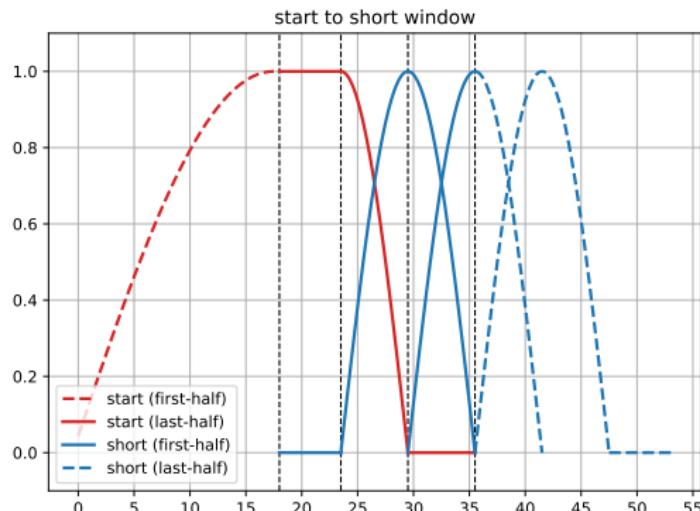
▶ ハーフオーバー  
ラップアドする区  
間でサイン窓に  
なっているため，完  
全再構成



# MP3とPrincen–Bradley 条件

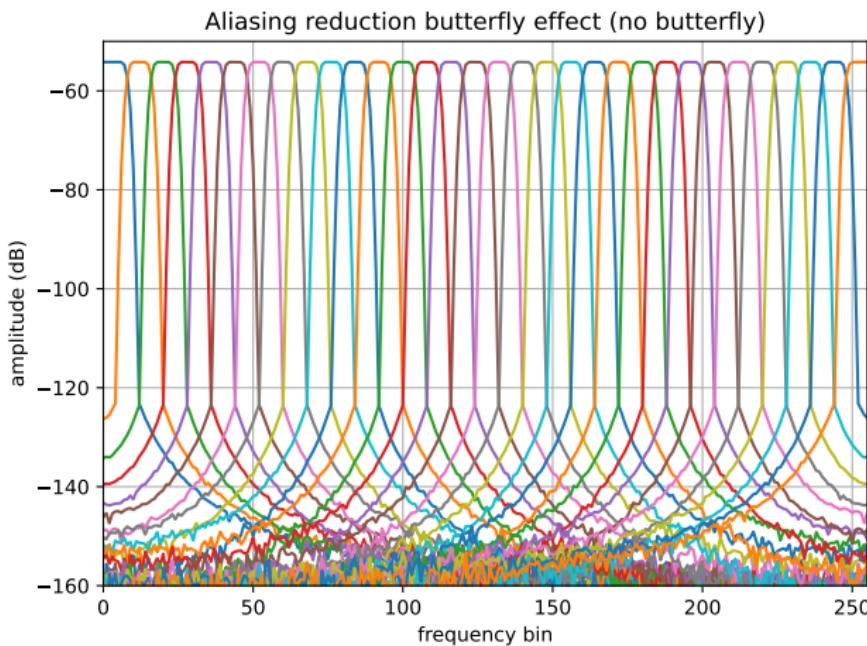
## 3. start → short

- ▶  $n = 0, \dots, 5$  : start 窓が 1, short 窓が 0 なので完全再構成
- ▶  $n = 6, \dots, 11$  : サイン窓になっているため完全再構成
- ▶  $n = 12, \dots, 17$  : start 窓が 0, short 窓どうしてサイン窓になっているため完全再構成



# エイリアス削減バタフライ演算

- ▶ フィルタバンクは、隣接バンクの周波数成分（エイリアス）が混入
- ▶ 隣接バンクのスペクトルを使いエイリアス削減 ([5])



# エイリアス削減バタフライ演算

- ▶ スペクトルを  $X_k$  としたとき、

$$X_{18k-i} \leftarrow \text{cs}_i X_{18k-i} - \text{ca}_i X_{18k+i+1} \quad (20)$$

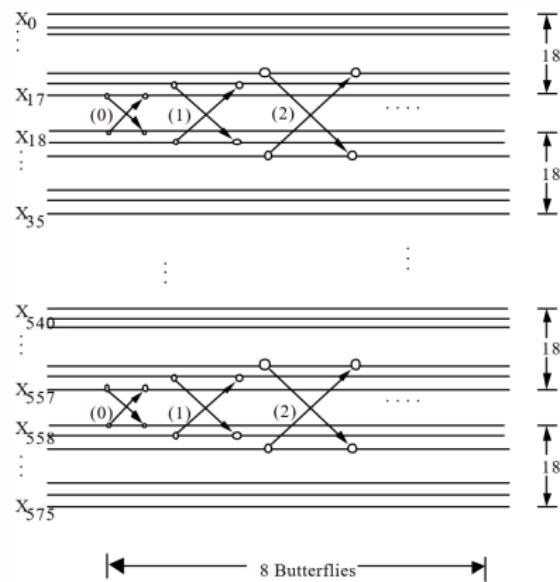
$$X_{18k+i+1} \leftarrow \text{ca}_i X_{18k-i} + \text{cs}_i X_{18k+i+1} \quad (21)$$

$$k = 1, \dots, 31, \quad i = 0, \dots, 7$$

- ▶ 係数  $\text{cs}_i, \text{ca}_i$  の定義

$$\text{cs}_i := \frac{1}{\sqrt{1 + c_i^2}}, \quad \text{ca}_i := \frac{c_i}{\sqrt{1 + c_i^2}} \quad (22)$$

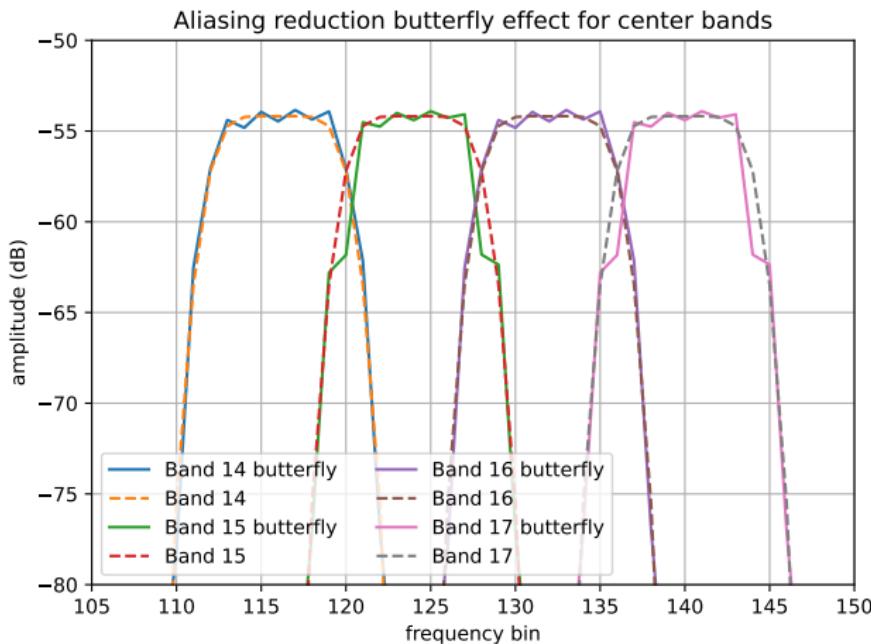
$c_i$  ( $i = 0, \dots, 7$ ) は規格で設定



[6] より引用

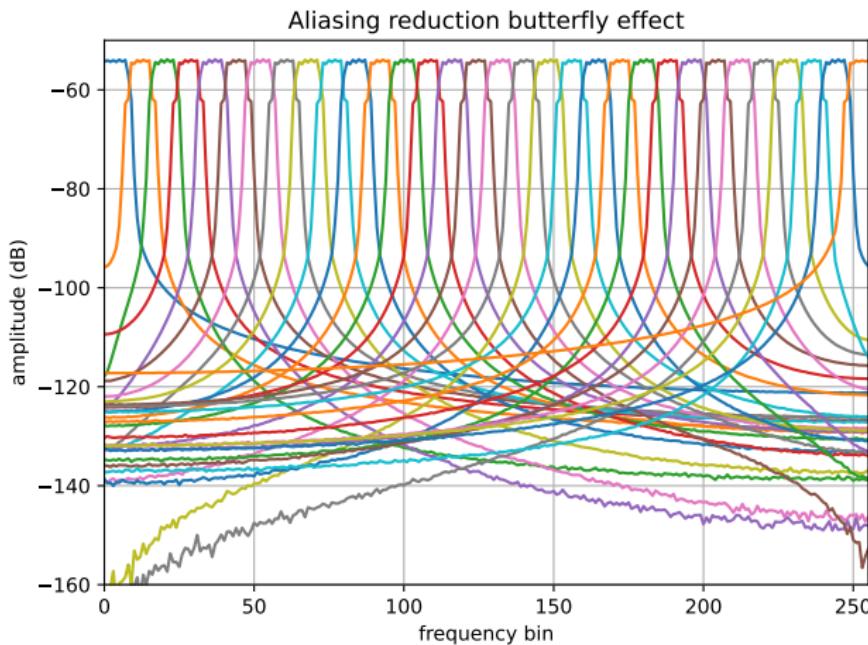
# エイリアス削減バタフライ演算

- ▶ 14-17 バンドの周波数特性比較
- ▶ バタフライ演算により、隣接バンクと交差する振幅が-2dBほど下に移動（改善）



# エイリアス削減バタフライ演算

- ▶ 振幅が小さくなると遮断特性は悪化
- ▶ 可聴域帯を優先した結果？



## 1. MP3 概要

- MPEG/Audio の歴史
- コーデック構造

## 2. ハイブリッドフィルタバンク

- フィルタバンク
- MDCT (Modified Discrete Cosine Transform)
- エイリアス削減バタフライ演算

## 3. 量子化

## 4. 符号化

## 5. 聴覚心理モデルII

## 6. dist10 エンコーダの外部・内部ループ

# 非線形量子化

ブロック長が 36(long, start, stop) のとき，量子化スペクトル  $X_i^q$ ，逆量子化スペクトル  $\hat{X}_i$  は<sup>\*2</sup>

$$X_i^q = \text{round} \left[ \text{sign}(X_i) \left| X_i(G_i^l)^{-1} \right|^{\frac{3}{4}} \right] \quad (23)$$

$$\hat{X}_i = \text{sign}(X_i^q) |X_i^q|^{\frac{4}{3}} G_i^l \quad (24)$$

$$G_i^l = 2^{\frac{1}{4}g} 2^{-\frac{1}{2}(1+\text{scale})(\text{sl}_i + p_i)} \quad (25)$$

- ▶  $g$ ：グローバルゲイン
- ▶ scale：スケールファクタのスケール (dist10 エンコーダーでは常に 0)
- ▶  $\text{sl}_i$ ：スケールファクタ
- ▶  $p_i$ ：プリエンファシス増幅値 (dist10 エンコーダーでは常に 0)

---

<sup>\*2</sup>round を除けば，逆量子により元に戻る

$$\hat{X}_i = \text{sign}(X_i) |X_i^q|^{\frac{4}{3}} G_i^l = \text{sign}(X_i) \left| |X_i(G_i^l)^{-1}|^{\frac{3}{4}} \right|^{\frac{4}{3}} G_i^l = X_i(G_i^l)^{-1} G_i^l = X_i$$

# 非線形量子化

ブロック長が 12(short) のとき、

$$X_i^q = \text{round} \left[ \text{sign}(X_i) \left| X_i(G_i^s)^{-1} \right|^{\frac{3}{4}} \right] \quad (26)$$

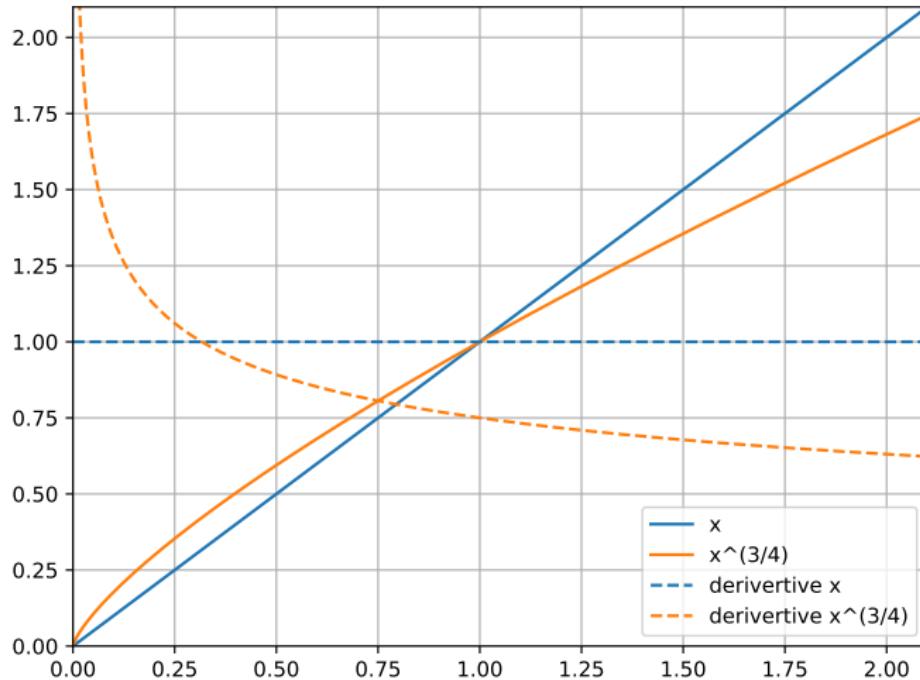
$$\hat{X}_i = \text{sign}(X_i^q) |X_i^q|^{\frac{4}{3}} G_i^s \quad (27)$$

$$G_i^s = 2^{\frac{1}{4}g} 2^{2\text{sbgain}_b} 2^{-\frac{1}{2}(1+\text{scale})\text{ss}_i} \quad (28)$$

- ▶  $\text{sbgain}_b$  : サブブロックのゲイン (dist10 エンコーダーでは常に 0)
- ▶  $\text{ss}_i$  : ショートブロックのスケールファクタ

# 3/4乗の効果

## $x, x^{\frac{3}{4}}$ とそれらの微分



- ▶  $x^{\frac{3}{4}}$  は 0 近傍で高感度 ( $\log$  に近い)
- ▶ 0 近傍は細かく,  $\approx 0.3$  以上は荒く量子化

## 1. MP3 概要

- MPEG/Audio の歴史
- コーデック構造

## 2. ハイブリッドフィルタバンク

- フィルタバンク
- MDCT (Modified Discrete Cosine Transform)
- エイリアス削減バタフライ演算

## 3. 量子化

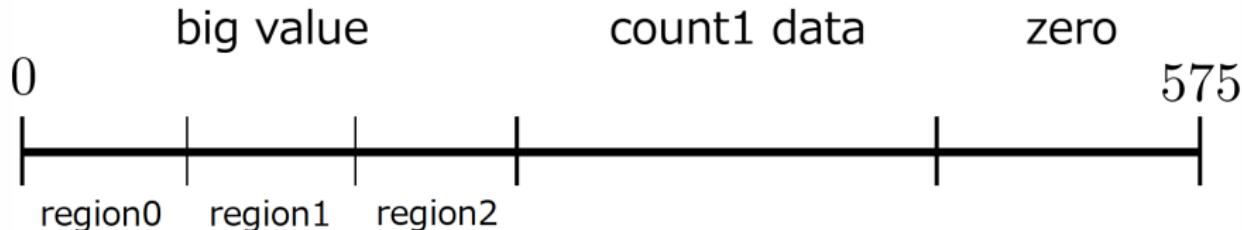
## 4. 符号化

## 5. 聴覚心理モデル II

## 6. dist10 エンコーダの外部・内部ループ

# MP3の符号化

量子化スペクトルを区分に分けて符号化



**big value** 大きい値は線形量子化を兼用

- ▶ region0,1,2で異なるハフマンテーブルを使用

**count1 data**  $\{-1, 0, 1\}$  のみで符号化

- ▶ 1つのハフマンテーブルを使用

**zero** 0のみ（符号化しない）

# MP3の符号化（詳細）

## big value の符号化

- ▶ 数値2つ組  $X_i^q, X_{i+1}^q$  を

$$X = 16|X_i^q| + |X_{i+1}^q| \quad (29)$$

として符号化。非0の場合に符号bitを付加

- ▶ 線形符号化するかのしきい値はテーブル毎に設定

## count1 data の符号化

- ▶ 数値4つ組  $X_i^q, X_{i+1}^q, X_{i+2}^q, X_{i+3}^q$  を

$$X = 8s(X_{i+2}^q) + 4s(X_{i+3}^q) + 2s(X_i^q) + s(X_{i+1}^q) \quad (30)$$

として符号化 ( $s(x) : x \neq 0$ なら1,  $x = 0$ なら0).  
非0の場合に符号bitを付加

1. MP3 概要
  - MPEG/Audio の歴史
  - コーデック構造
2. ハイブリッドフィルタバンク
  - フィルタバンク
  - MDCT (Modified Discrete Cosine Transform)
  - エイリアス削減バタフライ演算
3. 量子化
4. 符号化
5. 聴覚心理モデル II
6. dist10 エンコーダの外部・内部ループ

# 聴覚心理モデルIIの概要

- ▶ LayerIII の聴覚心理モデル (LayerI, II とは異なる)
- ▶ 出力 : 信号対マスク比 (SMR<sup>\*3</sup>), ブロックタイプ
- ▶ 処理手順
  1. フレーム切り出し・窓かけ・FFT
  2. Unpredictability 計算
  3. パーティションごとのエネルギー計算
  4. 広がり関数 (Spreading function) の畳み込み
  5. ノイズ許容レベル計算
  6. 聴覚しきい値計算
  7. 知覚エントロピー (Psychoacoustic entropy) 計算・ブロックタイプ判定
  8. 信号対マスク比 (SMR) 計算

---

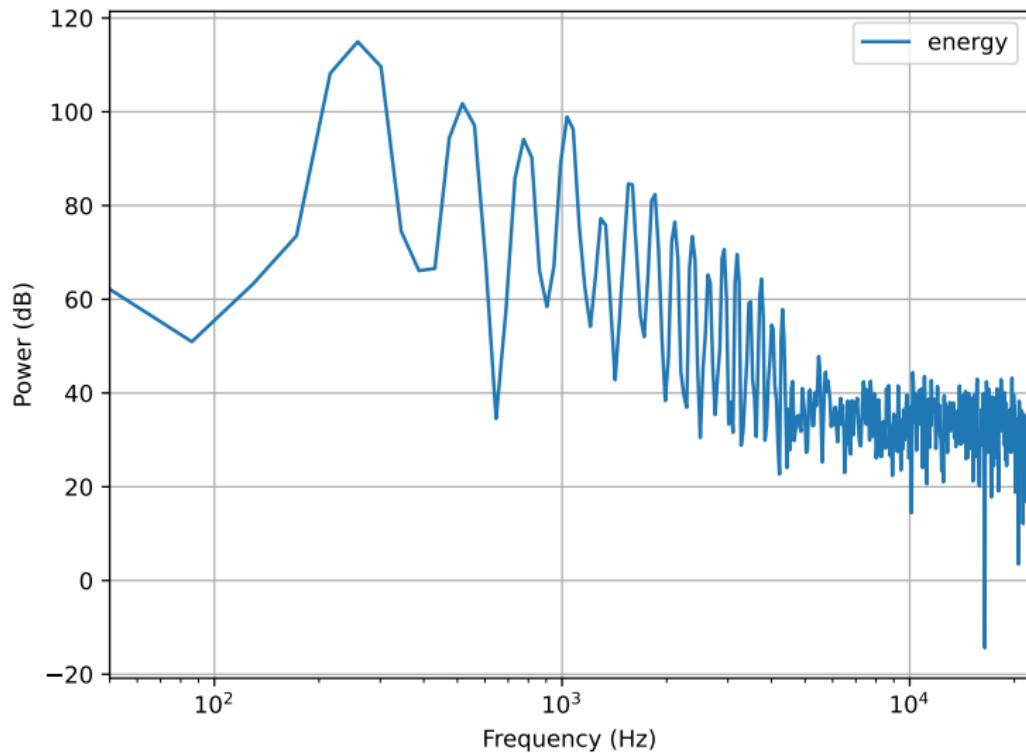
\*3 Signal-to-Masking Ratio

# フレーム切り出し・窓かけ・FFT

- ▶ long と short の 2 つを計算
  - ▶ long はサイズ 1024
  - ▶ short はサイズ 256 を 3 つ. 信号  $s[n]$  の  $s[128b + n] b = 1, 2, 3$  を使用
- ▶ Hanning 窓を適用
- ▶ スライド (hop) サイズは 576 (=DCT スペクトル サイズ)

FFT 係数を  $w^l(\text{long})$ ,  $w^{s_b}(\text{short}, b = 1, 2, 3)$  と表記

# フレーム切り出し・窓かけ・FFT



ピアノ ( $F_0=220\text{Hz}$ ) の long のエネルギー (パワースペクトル) <sub>50 / 71</sub>

# Unpredictability 計算

Unpredictability  $cw$  = 予測しづらさの尺度

$$cw[n] = \begin{cases} \frac{|w^l[n] - w^{l*}[n]|}{|w^l[n]| + |w^{l*}[n]|} & 0 \leq n \leq 5 \\ \frac{|w^{s_2}[j] - w^{s*}[j]|}{|w^{s_2}[j]| + |w^{s*}[j]|} & j = \lfloor (n+2)/4 \rfloor, 6 \leq n \leq 205 \\ 0.4 & 206 \leq n \leq 512 \end{cases} \quad (31)$$

- ▶  $w^{l*}, w^{s*}$  : 振幅と位相を直線予測したスペクトル
  - ▶ 直線予測の式 ( $w^{l''}$  は前フレームの  $w^l$ ) :

$$w^{l*}[n] = (2|w^{l''}[n]| - |w^{l'''}[n]|) \exp[j(2\arg(w^{l''}[n]) - \arg(w^{l'''}[n]))] \quad (32)$$

$$w^{s*}[n] = (2|w^{s_1}[n]| - |w^{s_3}[n]|) \exp[j(2\arg(w^{s_1}[n]) - \arg(w^{s_3}[n]))] \quad (33)$$

- ▶ 予測が当たれば  $cw[n] = 0$ , 外れると  $cw[n] = 1$

# パーティションごとのエネルギー計算

周波数ビンを"パーティション(partition)"単位に分割

- ▶  $eb^l, eb^s$ : パーティション内のエネルギーを合算
- ▶  $cb$ : Unpredictabilityで重みづけしたエネルギーを合算

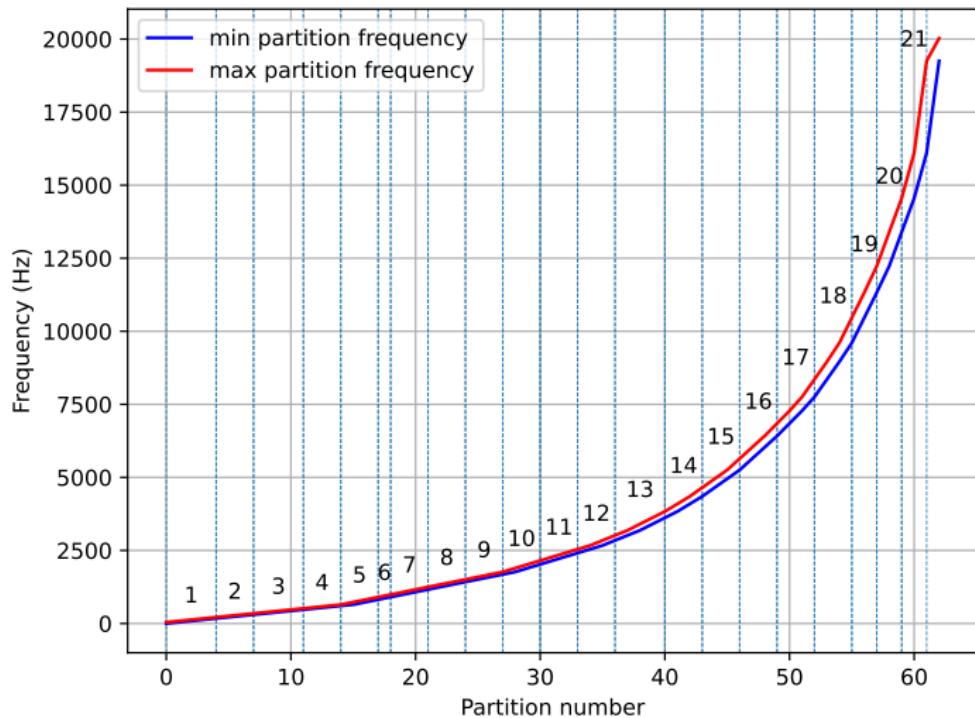
long, short のパーティション  $b$  を  $P_b^l, P_b^s$  と書くと,

$$eb^l[b] = \sum_{n \in P_b^l} |w^l[n]|^2 \quad (34)$$

$$cb[b] = \sum_{n \in \min P_b^l} cw[n] |w^l[n]|^2 \quad (35)$$

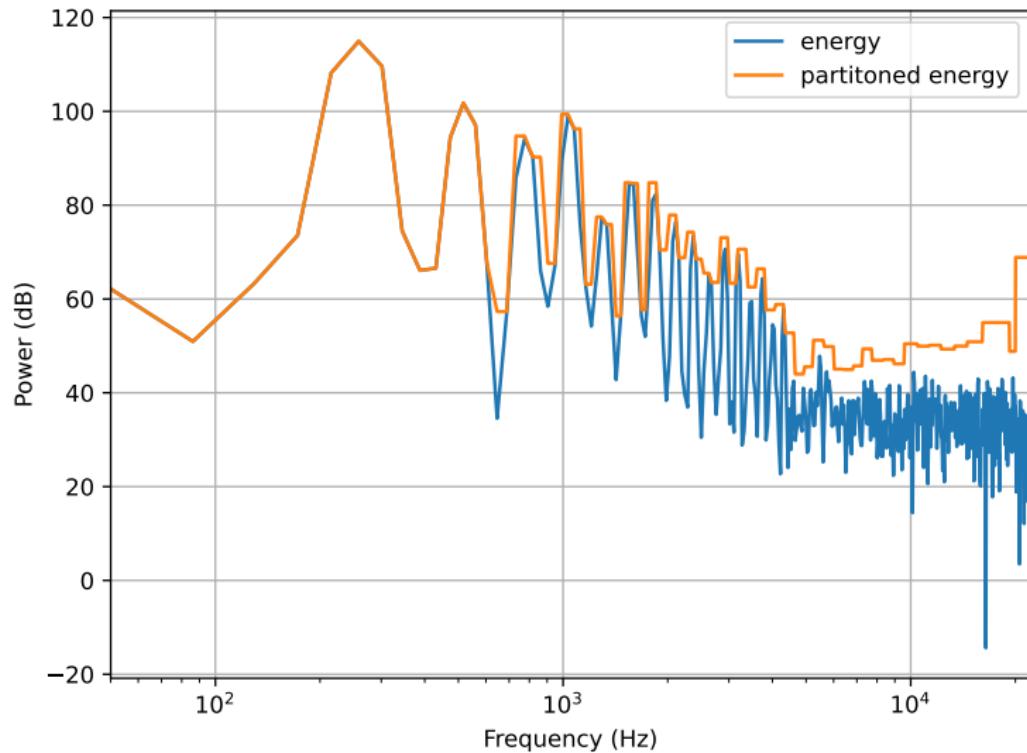
$$eb^s[b] = \sum_{n \in \min P_b^s} |w^s[n]|^2 \quad (36)$$

# パーティションごとのエネルギー計算



サンプリング周波数 44.1kHz の long パーティション. Bark スケール細分化とみなせる. 数値ラベルはスケールファクタ番号.

# パーティションごとのエネルギー計算



ピアノ ( $F_0=220\text{Hz}$ ) の long パーティション分割後のエネルギー  $ebl_{/71}$

# 広がり関数の畳み込み

エネルギーに広がり関数 (Spreading function)  $SF_b^l, SF_b^s$  を畳み込み、調波成分のマスキングを考慮

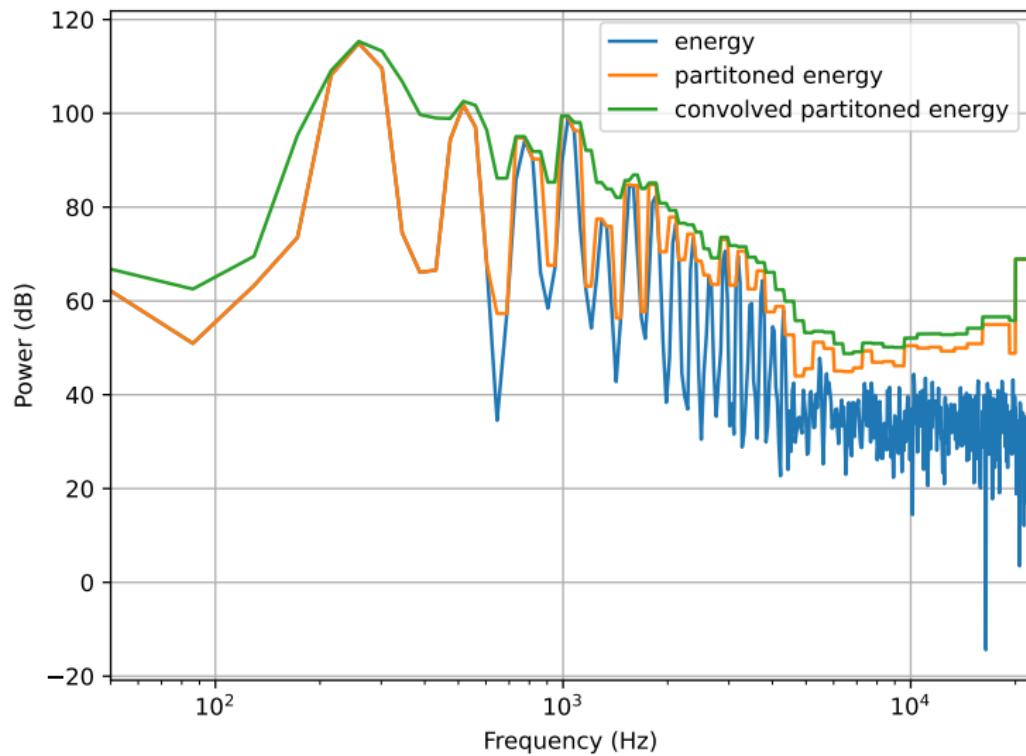
- ▶  $ecb^l, ecb^s : SF_b^l, SF_b^s$  を畳みこんだ  $eb^l, eb^s$
- ▶  $ctb : SF_b^l$  を畳みこんだ  $cb$

$$ecb^l[b] = \sum_k SF_b^l[k]eb^l[k] \quad (37)$$

$$ctb[b] = \sum_k SF_b^l[k]cb[k] \quad (38)$$

$$ecb^s[b] = \sum_k SF_b^s[k]eb^s[k] \quad (39)$$

# 広がり関数の畠み込み



ピアノ ( $F_0=220\text{Hz}$ ) の広がり関数を畠みこんだエネルギー  $ecb_{56/71}^l$

# Schroederの広がり関数 $SF_{\text{schroeder}}$ [7]

バーカスケールに変換した周波数の差

$\Delta z = z(f_{\text{マスキー}}) - z(f_{\text{マスカー}})$  を用いて、

$$\begin{aligned} & 10 \log_{10} SF_{\text{schroeder}}(\Delta z) \\ &= 15.81 + 7.5(\Delta z + 0.474) - 17.5\sqrt{1 + (\Delta z + 0.474)^2} \end{aligned} \quad (40)$$

(40) 式で求まる値は dB スケール.  $10^{\frac{10 \log_{10} SF_{\text{schroeder}}(\Delta z)}{10}}$  で振幅スケールに変換

# MP3の広がり関数 $SF$

Schroeder の広がり関数を修正

$$t_x = \begin{cases} 3\Delta z & \Delta z \leq 0 \\ 1.5\Delta z & \Delta z > 0 \end{cases} \quad (41)$$

$$x = 8 \min\{(t_x - 0.5)^2 - 2(t_x - 0.5), 0\} \quad (42)$$

$$y = 15.811389 + 7.5(t_x + 0.474) - 17.5\sqrt{1 + (t_x + 0.474)^2} \quad (43)$$

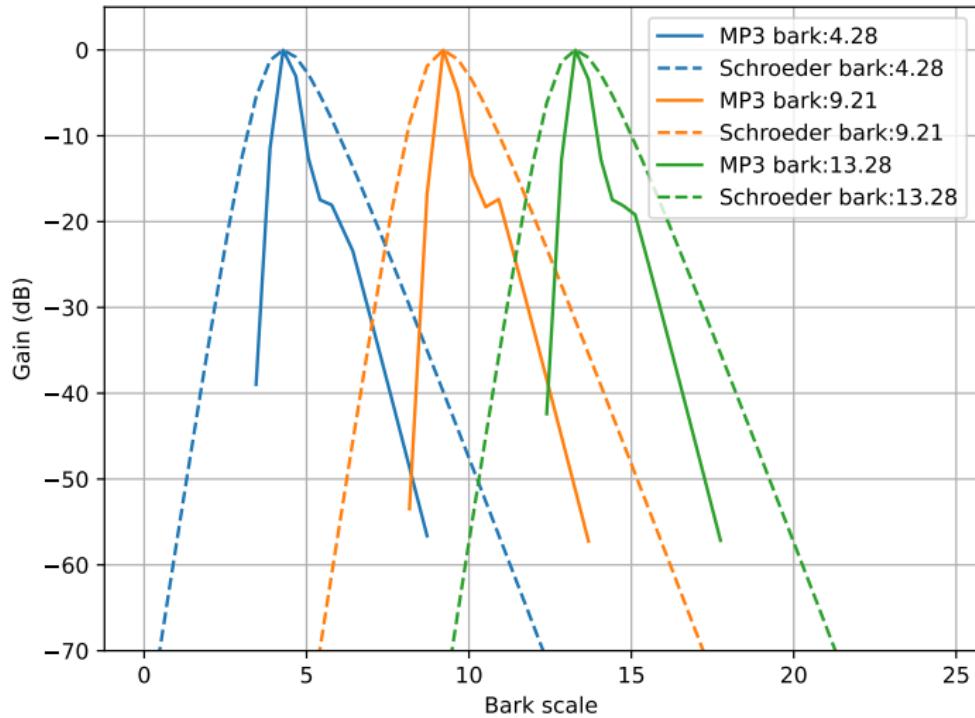
として、 $SF$  を以下で計算。 (41) 式より、低域側の減衰がより早い <sup>\*4</sup>

$$10 \log_{10} SF(\Delta z) = \begin{cases} x + y & y \geq -60 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (44)$$

---

<sup>\*4</sup>パーティションはスケールファクタの約 3 倍分割が細かいため？

# 広がり関数の概形



いくつかのバーク値での広がり関数。破線はSchroeder[7]。MP3では-60dB以下のスケールは0に丸め込むため線が途切れている。

# ノイズ許容レベル計算

パーティション  $b$  の量子化ノイズ許容レベルを計算 <sup>\*5</sup>

**tbb 計算**  $tbb = 0$  はノイズ,  $tbb = 1$  は調波成分を示す尺度

$$cbb = \log \left( \max \left\{ \frac{ctb[b]}{ecb^l[b]}, 0.01 \right\} \right) \quad (45)$$

$$tbb = \min \{1.0, \max \{0.0, -0.299 - 0.43cbb\}\} \quad (46)$$

**SNR 計算** マスクの加重和で SNR(dB) を計算. 29.0 は調波によるノイズのマスク, 6.0 はノイズによる調波のマスク

$$snr = \max \{\text{minval}_b, 29.0tbb + 6.0(1 - tbb)\} \quad (47)$$

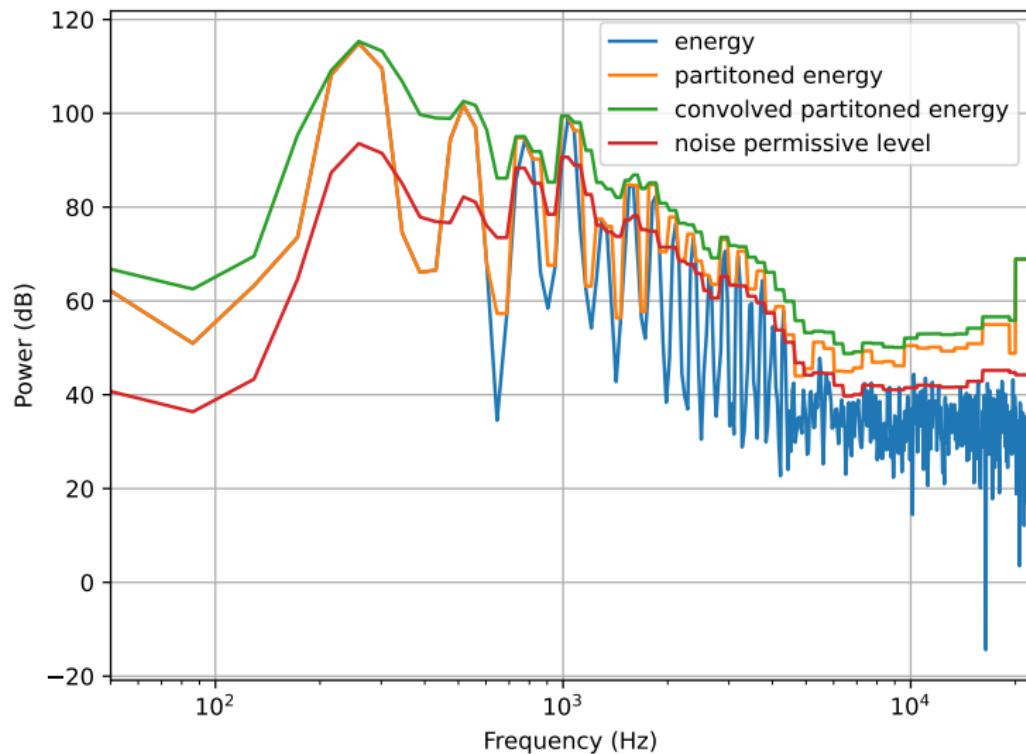
**許容レベル計算** SNR にエネルギーを乗じて許容レベル  $nb^l$  を得る. 広がり関数で増えたエネルギーを戻す

$$nb^l[b] = \frac{ecb^l[b]}{\sum_k SF_b[k]} \times 10^{-\frac{snr}{10}} \quad (48)$$

---

<sup>\*5</sup>short は省略. SNR をテーブル引きして計算する以外同様のため

# ノイズ許容レベル計算



ピアノ ( $F_0=220\text{Hz}$ ) のノイズ許容レベル  $nb^l$

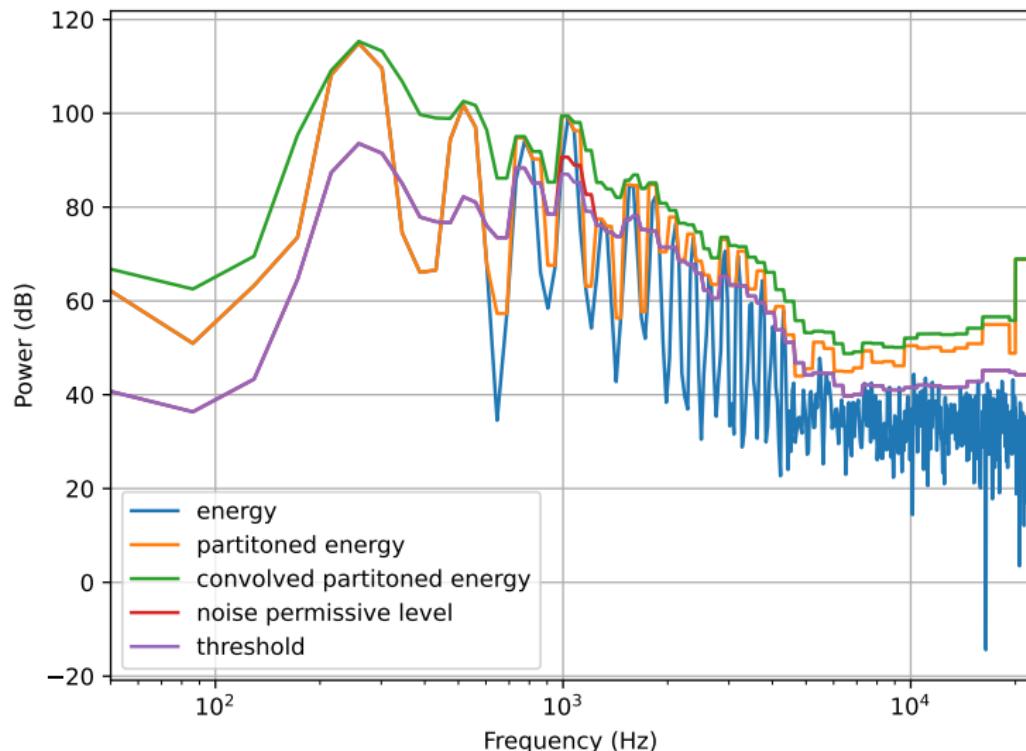
# 聴覚しきい値計算

前フレームのノイズ許容レベルと最小可聴パワーを考慮し、これを聴覚しきい値  $thr^l$  とする

$$thr^l[b] = \max \{ qthr_b, \min \{ 2nb^{l''}[b], 16nb^{l'''}[b], nb^l[b] \} \} \quad (49)$$

- ▶  $qthr_b$  : 最小可聴パワー
- ▶  $nb^{l''}, nb^{l'''}$  : 前とさらにその前のノイズ許容レベル
  - ▶ 前フレームのノイズを残す。プリエコー対策

# 聴覚しきい値計算



ピアノ ( $F_0=220\text{Hz}$ ) の聴覚しきい値  $thr^l$

# 知覚エントロピー計算

知覚エントロピー PE を以下で計算

$$PE = \sum_b |P_b^l| \log \frac{eb^l[b] + 1}{thr^l[b]} \quad (50)$$

フレームの符号化に必要なビット数の目安 <sup>\*6</sup>

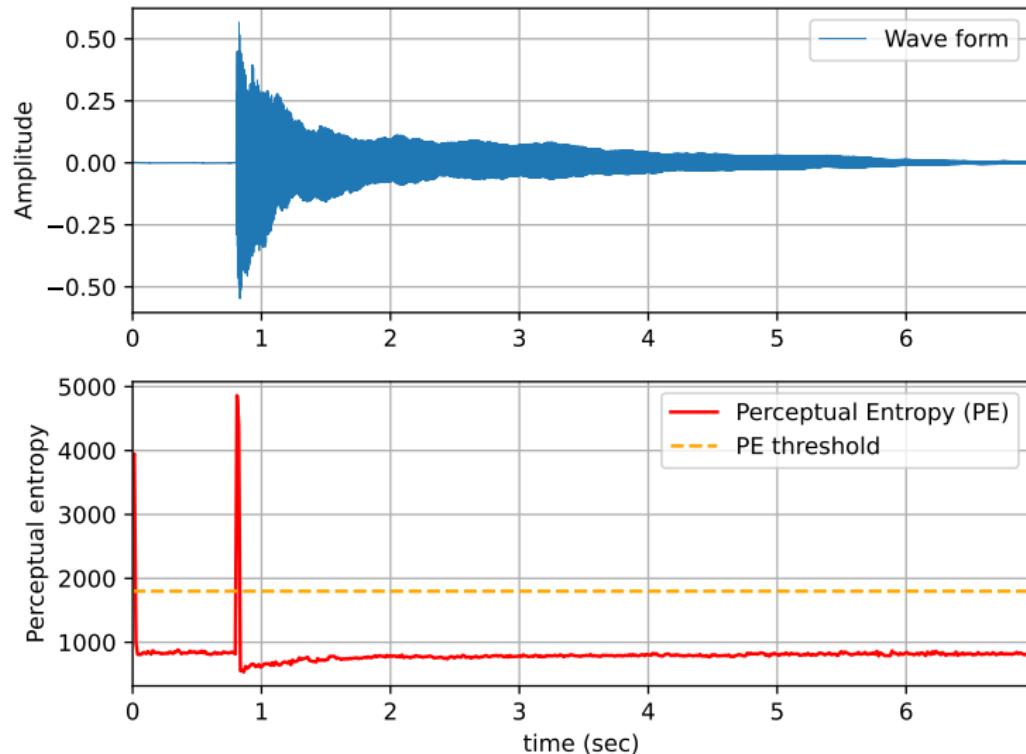
- ▶  $PE \geq 1800$  ならば short ブロックと判定. さもなくば long ブロックと判定 <sup>\*7</sup>

---

<sup>\*6</sup>導出は補足 3 参照

<sup>\*7</sup>dist10 では以前のブロック判定結果を保持. 判定とブロックの状態遷移に従い結果を start,stop に変更

# 知覚エントロピー計算



ピアノ ( $F_0=220\text{Hz}$ ) の波形と聴覚エントロピー PE の変化

# 信号対マスク比(SMR)計算

(聴覚しきい値)/(信号パワー)を計算. 同時に周波数分割をスケールファクタバンドに揃える.

スケールファクタバンド  $k$  に属すパーティションの集合を  $P_k$  と書くと,

$$en[k] = w_1[k]eb[\min P_k] + w_2[k]eb[\max P_k] + \sum_{P \in P_k} \sum_{b \in P} eb[b] \quad (51)$$

$$thm[k] = w_1[k]thr[\min P_k] + w_2[k]thr[\max P_k] + \sum_{P \in P_k} \sum_{b \in P} thr[b] \quad (52)$$

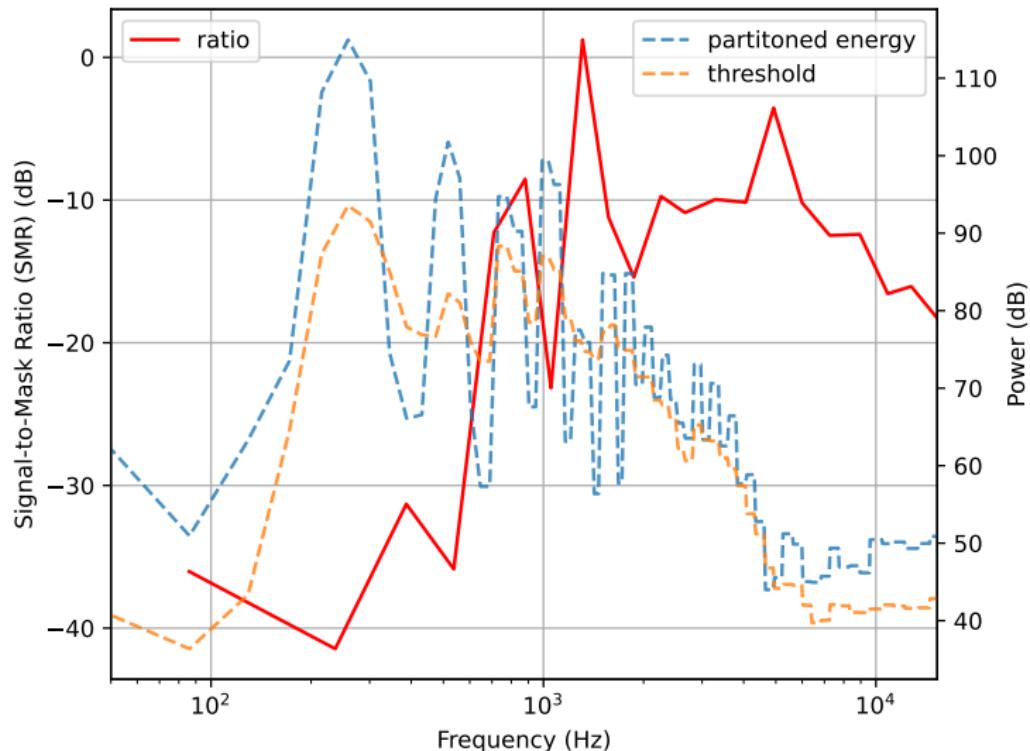
として ( $w_1, w_2$  は隣接バンド間の重み定数<sup>\*8</sup>),

$$\text{ratio}[k] = \begin{cases} \frac{thm[k]}{en[k]} & en[k] > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (53)$$

---

<sup>\*8</sup> $w_1[k] + w_2[k - 1] = 1$  が成立. 導出方法は不明...

# 信号対マスク比(SMR)計算



ピアノ ( $F_0=220\text{Hz}$ ) の信号対マスク比 ratio

## 1. MP3 概要

- MPEG/Audio の歴史
- コーデック構造

## 2. ハイブリッドフィルタバンク

- フィルタバンク
- MDCT (Modified Discrete Cosine Transform)
- エイリアス削減バタフライ演算

## 3. 量子化

## 4. 符号化

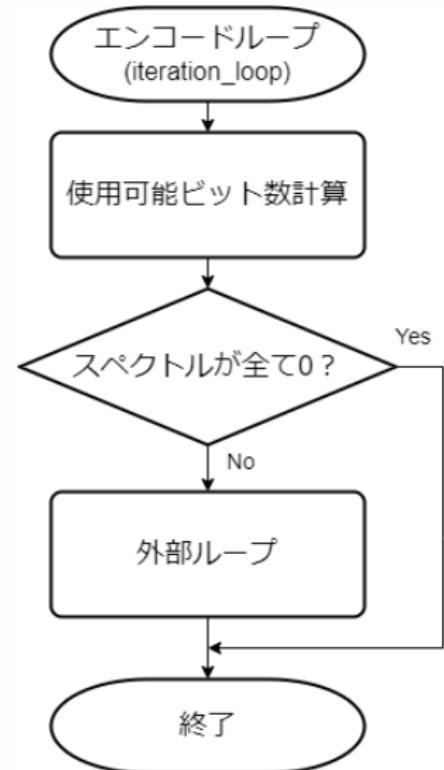
## 5. 聴覚心理モデルII

## 6. dist10 エンコーダの外部・内部ループ

# dist10のエンコードループ

量子化ゲイン( $g, \text{sl}_i, \text{ss}_i$ )とハフマン符号テーブルを決める処理

- ▶ 外部ループ(量子化ノイズ制御)・内部ループ(符号長制御)の相互繰り返し
- ▶ 全スペクトル値が0ならばスキップ

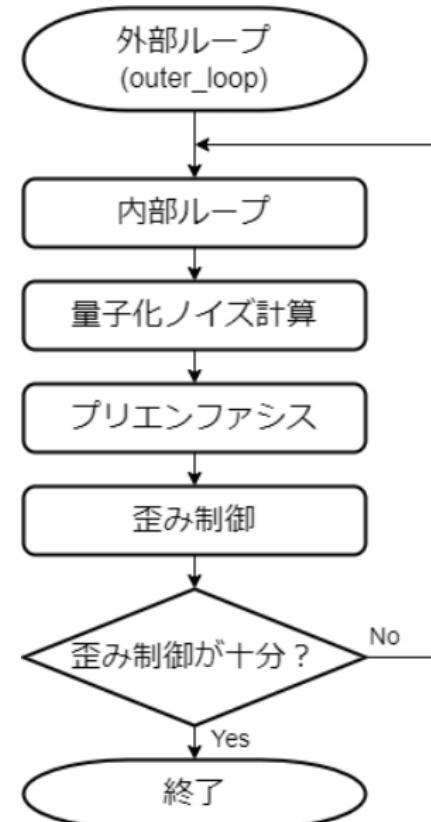


# 外部ループ

量子化ノイズが聴覚しきい値を  
超えないように制御する処理

プリエンファシス 高域バンドが  
聴覚しきい値を超え  
ていたら、しきい値を  
増幅

歪み制御 聽覚しきい値を超  
えたスケールファクタ  
バンドの量子化ス  
テップ幅を減少

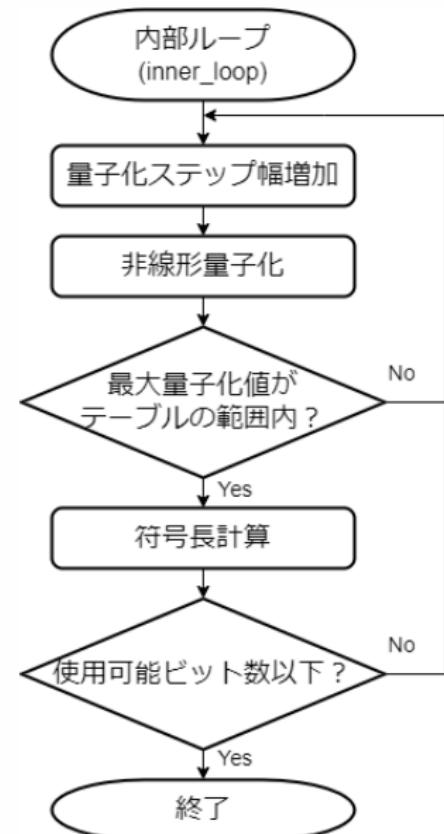


# 内部ループ

符号長が使用可能ビット以下になるように制御する処理

量子化ステップ幅増加 量子化ステップ幅を増加（グローバルゲイン  $g$  増加に相当）

符号長計算 スペクトルの区分割・テーブル選択を行って符号長を計算



## 7. 参考文献

## 8. 証明

- フィルタバンク
- MDCT
- 知覚エントロピー導出 [19]

# 参考文献の紹介

- ▶ [4] : Princen–Bradley の完全再構成条件の導出
- ▶ [6] : MP3 の概要説明. ヘッダ・サイドインフォメーションの内容の解説はかなり詳しい
- ▶ [1] : MPEG/Audio の他, 2000 年代前半の他のコーデックの概要を解説
- ▶ [8] : MPEG 標準化に関する書物. 技術は概要程度
- ▶ [2] : マルチレートに関わる信号処理を広範に解説
- ▶ [3] : フィルタバンクに関する詳細書
- ▶ [9] : DCT に関する詳しい解説
- ▶ [10, 11, 12, 13, 14] : 技術解説と簡易 MP3 コーデックの実装例
- ▶ [15] : MP3 のソース (dist10) の解説. ただし木を見て森を見ずな印象. 実装の補足説明としては優秀だが, コードを数式に直訳した書き方のため, 理解しづらい.
- ▶ [16] : 修士論文. 研究は高速化だが, MP3 の概要がまとまっている
- ▶ [17] : 東北大伊藤教授による MP3 概要解説
- ▶ [5, 18] : エイリアス削減の論文
- ▶ [19] : ノイズマスキングを用いた知覚エントロピーの考え方についての原論文
- ▶ [7] : マスキング曲線のモデル化とそれを用いた音声符号化の原論文

# 参考文献 |

- [1] 藤原洋. 画像&音声圧縮技術のすべて : インターネット/ディジタルテレビ/モバイル通信時代の必須技術. 第6版. Tech I. CQ出版社, 2001.
- [2] 貴家仁志. マルチレート信号処理. ディジタル信号処理シリーズ. 昭晃堂, 1995.
- [3] P. P. Vaidyanathan et al. マルチレート信号処理とフィルタバンク. ディジタル信号処理・画像処理シリーズ. 科学技術出版, 2002.
- [4] John Princen and Alan Bradley. "Analysis/synthesis filter bank design based on time domain aliasing cancellation". In: *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* 34.5 (1986), pp. 1153–1161.
- [5] Bernd Edler. "Aliasing reduction in sub-bands of cascaded filter banks with decimation". In: *Electronics Letters* 12.28 (1992), pp. 1104–1106.
- [6] Rassol Raissi. "The theory behind MP3". In: *MP3' Tech* (2002).
- [7] Manfred R Schroeder, Bishnu S Atal, and JL Hall. "Optimizing digital speech coders by exploiting masking properties of the human ear". In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 66.6 (1979), pp. 1647–1652.
- [8] 安田浩. *MPEG/マルチメディア符号化の国際標準*. 丸善, 1994.

# 参考文献 II

- [9] 貴家仁志 and 村松正吾. マルチメディア技術の基礎 DCT(離散コサイン変換)入門 : JPEG/MPEG からウェーブレット, 重複直交変換 (LOT) まで. I/F essence. CQ 出版, 1997.
- [10] 小杉篤史. *Interface Aug.2001* 第 1 回音響圧縮技術の基礎 MP3 と等価的なシステムの構築とサブバンドフィルタバンクの設計. CQ 出版社, 2001.
- [11] 小杉篤史 and 城下聰. *Interface Sep.2001* 第 2 回音響圧縮技術の基礎 MP3 と等価的なシステムの構築と MDCT の設計. CQ 出版社, 2001.
- [12] 小杉篤史 and 城下聰. *Interface Nov.2001* 第 3 回音響圧縮技術の基礎 MP3 と等価的なシステムの構築とハイブリッドフィルタバンクの設計. CQ 出版社, 2001.
- [13] 小杉篤史 and 城下聰. *Interface Jan.2002* 第 4 回音響圧縮技術の基礎 MP3 と等価的なシステムの構築と非線形量子化器/符号化器の設計. CQ 出版社, 2002.
- [14] 小杉篤史 and 城下聰. *Interface Feb.2002* 第 4 回音響圧縮技術の基礎 MP3 と等価的なシステムの構築とそのためのビットストリームの設計. CQ 出版社, 2002.
- [15] 浦田敏道. 詳細 MP3 マニュアル. エム研, 1999.
- [16] 李芝剛. *MPEG Audio Layer3 のエンコーダの高速化処理に関する研究*.  
<http://labo.nshimizu.com/thesis/master/1aepm054.pdf>. [Online; accessed 28-Jul-2024]. 2002.

# 参考文献 III

- [17] 伊藤彰則. 高効率音楽符号化 —MP3 詳解—.  
<https://www.slideshare.net/akinoriito549/slides-43584939>. [Online; accessed 28-Jul-2024]. 2015.
- [18] Chi-Min Liu and Wen-Chieh Lee. "The design of a hybrid filter bank for the psychoacoustic model in ISO/MPEG phases 1, 2 audio encoder". In: *IEEE transactions on consumer electronics* 43.3 (1997), pp. 586–592.
- [19] James D Johnston. "Estimation of perceptual entropy using noise masking criteria". In: *Icassp-88., international conference on acoustics, speech, and signal processing*. IEEE. 1988, pp. 2524–2527.

## 7. 参考文献

## 8. 証明

- フィルタバンク
- MDCT
- 知覚エントロピー導出 [19]

# 完全再構成

遅延・定数倍を除き入出力が一致すること：

$$\hat{x}[n] = cx[n - n_0], \quad c \neq 0 \quad (54)$$

これは  $z$  領域で，

$$\hat{X}(z) = cz^{-n_0} X(z) \quad (55)$$

となることと等価

# ポリフェーズ表現

$H_k(z)$  のインパルス応答を  $h_k[n]$  と書くとき、

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_k[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{M-1} h_k[nM+l]z^{-(nM+l)} \\ &= \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_k[nM+l]z^{-nM} \\ &= \sum_{l=0}^{M-1} E_{k,l}(z^M)z^{-l} \end{aligned}$$

$h_k$  の（タイプI）ポリフェーズ表現

$$E_{k,l}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_k[nM+l]z^{-n} \quad (56)$$

# ポリフェーズ表現

$F_k(z)$  のインパルス応答を  $f_k[n]$  と書くとき、

$$\begin{aligned} F_k(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_k[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{M-1} f_k[nM+l]z^{-(nM+l)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l'=0}^{M-1} f_k[nM+M-1-l']z^{-(nM+M-1-l')} \\ &= \sum_{l'=0}^{M-1} z^{-(M-1-l')} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_k[nM+M-1-l']z^{-nM} = \sum_{l'=0}^{M-1} z^{-(M-1-l')} R_{k,l}(z^M) \end{aligned}$$

$f_k$  の（タイプII）ポリフェーズ表現

$$R_{k,l}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_k[nM+M-1-l]z^{-n} \quad (57)$$

# ポリフェーズ行列表現

(56) 式を  $l$  について並べ、行列表現すると

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{h}(z)} = \underbrace{\begin{bmatrix} E_{0,0}(z^M) & E_{0,1}(z^M) & \cdots & E_{0,M-1}(z^M) \\ E_{1,0}(z^M) & E_{1,1}(z^M) & \cdots & E_{1,M-1}(z^M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{M-1,0}(z^M) & E_{M-1,1}(z^M) & \cdots & E_{M-1,M-1}(z^M) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{E}(z)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(M-1)} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{e}(z)}$$

(57) 式も同様にして、以下のように書ける

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ \vdots \\ F_{M-1}(z) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{f}(z)} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{0,0}(z^M) & R_{0,1}(z^M) & \cdots & R_{0,M-1}(z^M) \\ R_{1,0}(z^M) & R_{1,1}(z^M) & \cdots & R_{1,M-1}(z^M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{M-1,0}(z^M) & R_{M-1,1}(z^M) & \cdots & R_{M-1,M-1}(z^M) \end{bmatrix}}^{\top} \underbrace{\begin{bmatrix} z^{-(M-1)} \\ z^{-(M-1)+1} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{z^{-(M-1)} \boldsymbol{e}(z^{-1})}$$

# ポリフェーズ行列表現

$\tilde{\mathbf{e}}(z) = \mathbf{e}(z^{-1})^\top$  とすると行列表現は

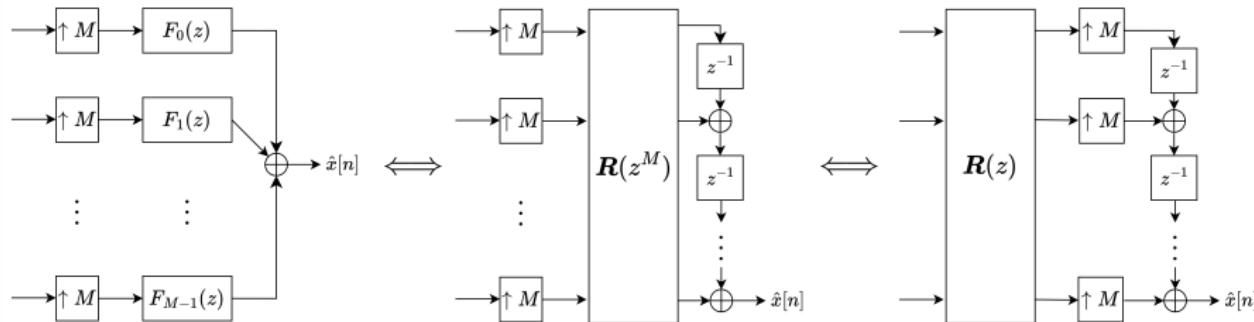
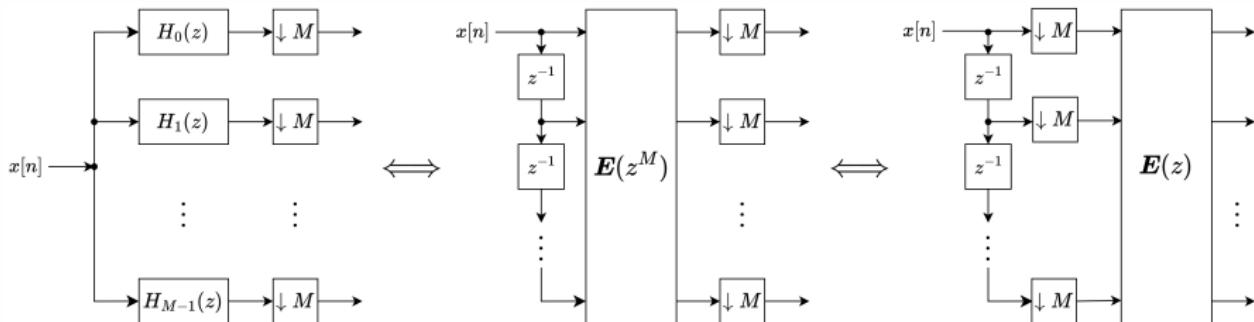
$$\mathbf{h}(z) = \mathbf{E}(z)\mathbf{e}(z) \quad (58)$$

$$\mathbf{f}(z)^\top = z^{-(M-1)}\tilde{\mathbf{e}}(z)\mathbf{R}(z) \quad (59)$$

とまとめられる.  $\mathbf{E}(z), \mathbf{R}(z)$  をポリフェーズ行列という

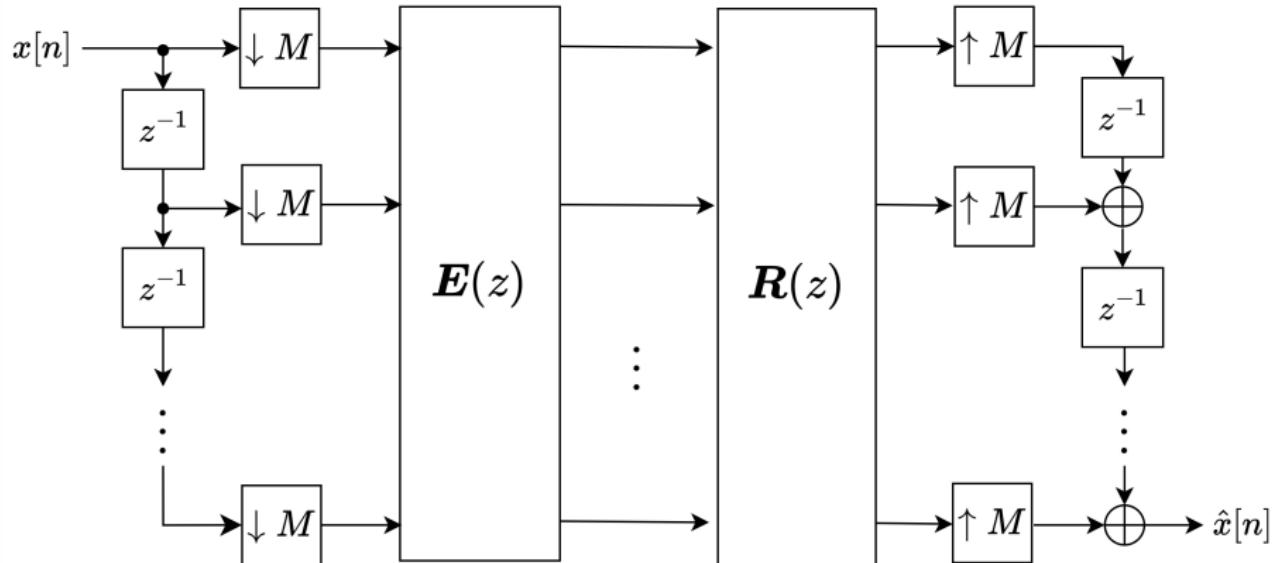
# ポリフェーズ行列表現

$E(z)$ ,  $R(z)$ により、アナライザ・シンセサイザは以下のように変形できる



## ポリフェーズ行列表現

$E(z), R(z)$  により、 $M$  分割フィルタバンクは以下のように表せる

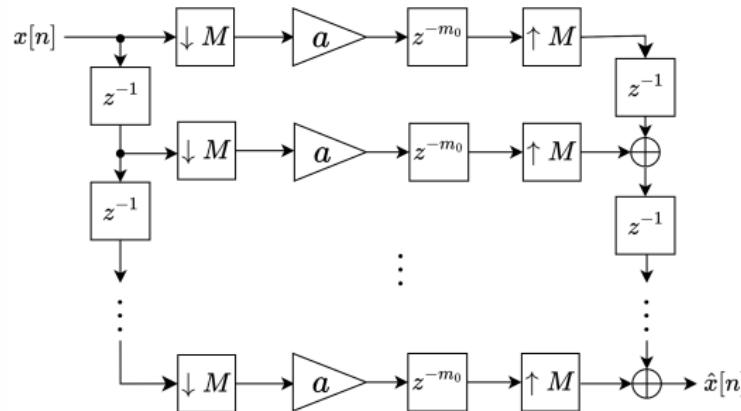


# 完全再構成 $M$ 分割フィルタバンク

$$\mathbf{R}(z)\mathbf{E}(z) = az^{-m_0}\mathbf{I} \quad (a \neq 0, m_0 \in \mathbb{N}) \quad (60)$$

ならば、 $M$  分割フィルタバンクは完全再構成<sup>a</sup>

<sup>a.</sup> 各バンドの遅延が  $K$  ならば、 $\hat{X}(z) = aMz^{-(M-1+K)}X(z)$



$\mathbf{R}(z)\mathbf{E}(z) = az^{-m_0}\mathbf{I}$  を満たす  $M$  分割フィルタバンク

# 完全再構成 $M$ 分割フィルタバンク

(60) 式より,  $R(z) = az^{-m_0} E(z)^{-1}$  ならば完全再構成.

▶ しかし,  $E(z)^{-1}$  の計算に問題を孕む.

代わりに,  $E(z)$  がパラユニタリ<sup>\*9</sup>

$$\tilde{E}(z)E(z) = dI, \quad d \neq 0 \quad (61)$$

ならば,

$$R(z) = az^{-m_0} \tilde{E}(z)$$

とするとフィルタバンクは完全再構成.

---

<sup>\*9</sup>  $\tilde{E}(z) = E_*(z^{-1})$  で, 下付きの \* は係数の複素共役

# コサイン変調フィルタバンク

式(2)より、分析合成フィルタ  $F_k(z)H_k(z)$  は直線位相特性をもつ

(証明)

$$\begin{aligned} F_k(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_k[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_k[L-1-n]z^{-n} \\ &= \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h_k[n']z^{-(L-1-n')} = z^{-(L-1)} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h_k[n']z^{n'} \\ &= z^{-(L-1)} H_k(z^{-1}) \end{aligned}$$

$H_k(z)$  の周波数特性を (極座標で)  $H_k(\omega) = |H_k(\omega)| \exp[j\psi(\omega)]$  と書くと、

$$\begin{aligned} F_k(\omega) &= \exp[-j(L-1)\omega] H_k(-\omega) = \exp[-j(L-1)\omega] |H_k(-\omega)| \exp[-j\psi(\omega)] \\ &= \exp[-j(L-1)\omega] |H_k(\omega)| \exp[-j\psi(\omega)] \quad (\because \text{実係数 FIR の振幅特性は偶}) \end{aligned}$$

だから、 $F_k(\omega)H_k(\omega) = \exp[-j(L-1)\omega] |H_k(\omega)|^2$  となって直線位相特性をもつ。

# コサイン変調フィルタバンク

$h_k[n]$  の伝達関数を変形する。回転因子  $W_{2M}^{*10}$  より

$$\begin{aligned} & \cos \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) \left( n - \frac{L-1}{2} \right) + \theta_k \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \exp \left[ j \left\{ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) \left( n - \frac{L-1}{2} \right) + \theta_k \right\} \right] + \exp \left[ -j \left\{ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) \left( n - \frac{L-1}{2} \right) + \theta_k \right\} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \exp(j\theta_k) W_{2M}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{L-1}{2}} W_{2M}^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)n} + \exp(-j\theta_k) W_{2M}^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{L-1}{2}} W_{2M}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)n} \right\} \end{aligned}$$

これを (1) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \exp(j\theta_k) W_{2M}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{L-1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_0[n] W_{2M}^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)n} z^{-n} \\ &\quad + \exp(-j\theta_k) W_{2M}^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{L-1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_0[n] W_{2M}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)n} z^{-n} \\ &= \exp(j\theta_k) W_{2M}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{L-1}{2}} P_0 \left( W_{2M}^{k+\frac{1}{2}} z \right) + \exp(-j\theta_k) W_{2M}^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{L-1}{2}} P_0 \left( W_{2M}^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)} z \right) \end{aligned}$$

---


$${}^{*10} W_{2M} = \exp \left( -j \frac{2\pi}{2M} \right) = \exp \left( -j \frac{\pi}{M} \right)$$

# コサイン変調フィルタバンク

さらに(69)式を代入すると<sup>\*11</sup>

$$\begin{aligned}
 H_k(z) &= \exp(j\theta_k) W_{2M}^{(k+\frac{1}{2})\frac{L-1}{2}} \sum_{l=0}^{2M-1} \left( W_{2M}^{k+\frac{1}{2}} z \right)^{-l} G_l \left( \left( W_{2M}^{k+\frac{1}{2}} z \right)^{2M} \right) \\
 &\quad + \exp(-j\theta_k) W_{2M}^{-(k+\frac{1}{2})\frac{L-1}{2}} \sum_{l=0}^{2M-1} \left( W_{2M}^{-(k+\frac{1}{2})} z \right)^{-l} G_l \left( \left( W_{2M}^{-(k+\frac{1}{2})} z \right)^{2M} \right) \\
 &= \exp(j\theta_k) W_{2M}^{(k+\frac{1}{2})\frac{L-1}{2}} \sum_{l=0}^{2M-1} W_{2M}^{-l(k+\frac{1}{2})} z^{-l} G_l(-z^{2M}) \\
 &\quad + \exp(-j\theta_k) W_{2M}^{-(k+\frac{1}{2})\frac{L-1}{2}} \sum_{l=0}^{2M-1} W_{2M}^{l(k+\frac{1}{2})} z^{-l} G_l(-z^{2M}) \\
 &= \sum_{l=0}^{2M-1} \left\{ \exp(j\theta_k) W_{2M}^{(k+\frac{1}{2})\frac{L-1}{2}} W_{2M}^{-l(k+\frac{1}{2})} + \exp(-j\theta_k) W_{2M}^{-(k+\frac{1}{2})\frac{L-1}{2}} W_{2M}^{l(k+\frac{1}{2})} \right\} z^{-l} G_l(-z^{2M}) \\
 &= \sum_{l=0}^{2M-1} 2 \cos \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) \left( l - \frac{L-1}{2} \right) + \theta_k \right] z^{-l} G_l(-z^{2M})
 \end{aligned}$$

---

<sup>\*11</sup>  $\left( W_{2M}^{\pm(k+\frac{1}{2})} \right)^{2M} = \exp \left[ \mp j \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) 2M \right] = \exp[\mp j\pi(2k+1)] = -1$  を

# コサイン変調フィルタバンク

さらに変形すると

$$H_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} \{ t_{k,l} G_l(-z^{2M}) + z^{-M} t_{k,M+l} G_{M+l}(-z^{2M}) \} \quad (62)$$
$$t_{k,l} := 2 \cos \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) \left( l - \frac{L-1}{2} \right) + \theta_k \right]$$

(56)式と(62)式を見比べると、

$$E_{k,l}(z) = t_{k,l} G_l(-z^2) + z^{-1} t_{k,M+l} G_{M+l}(-z^2) \quad (63)$$

# コサイン変調フィルタバンク

(63) 式より、アナライザのポリフェーズ行列は、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z) &= \underbrace{\begin{bmatrix} t_{0,0} & \cdots & t_{0,2M-1} \\ t_{1,0} & \cdots & t_{1,2M-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{M-1,0} & \cdots & t_{M-1,2M-1} \end{bmatrix}}_T \begin{bmatrix} G_0(-z^2) & & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & z^{-1}G_M(-z^2) & \\ & & & \ddots \\ & & & & z^{-1}G_{2M-1}(-z^2) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0(z^2) \\ z^{-1}\mathbf{G}_1(z^2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (64)$$

$$\mathbf{G}_i(z) := \text{diag} [ \ G_{Mi}(-z) \ G_{Mi+1}(-z) \cdots G_{Mi+M-1}(-z) \ ] \quad (65)$$

と書ける

# コサイン変調フィルタバンク

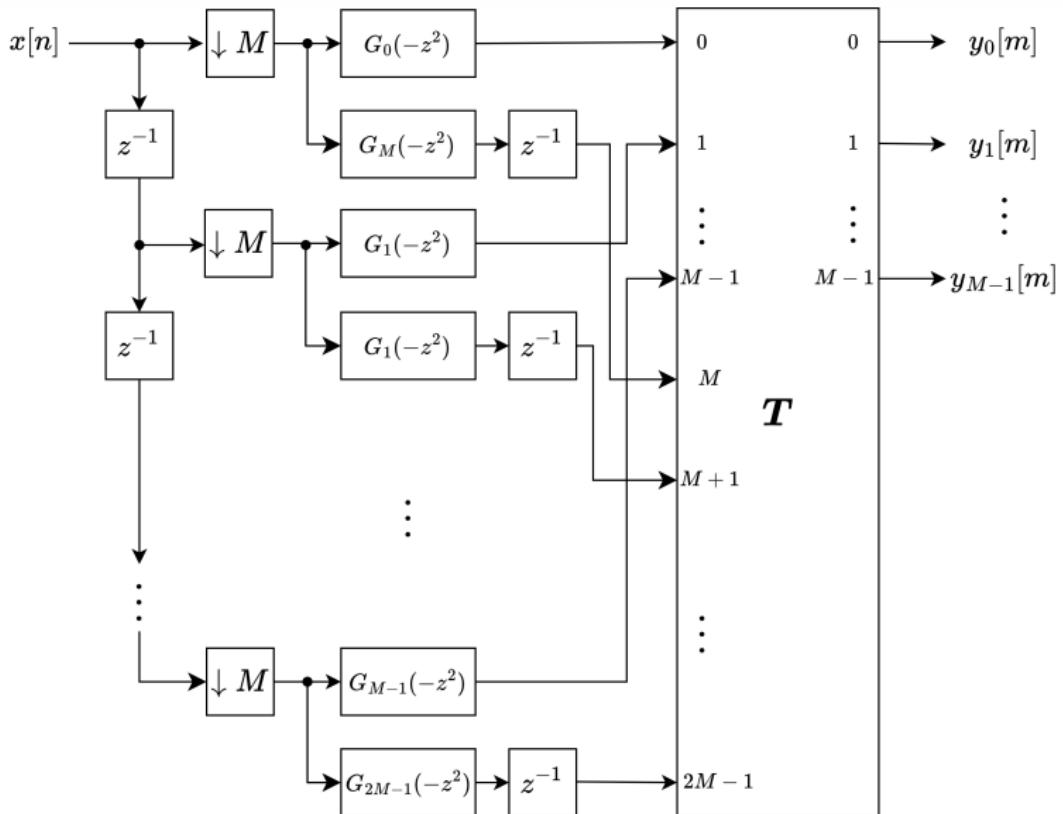
シンセサイザを構成する。フィルタ係数は実だから、

$$\tilde{\mathbf{E}}(z) = \mathbf{E}_*(z^{-1})^\top = [ \mathbf{G}_0(z^{-1}) \ z\mathbf{G}_1(z^{-1}) ] \mathbf{T}^\top \quad (66)$$

$G_l(z)$  の次数は  $2K - 1$  で、因果性のためには  $2K - 1$  の遅延がいるため

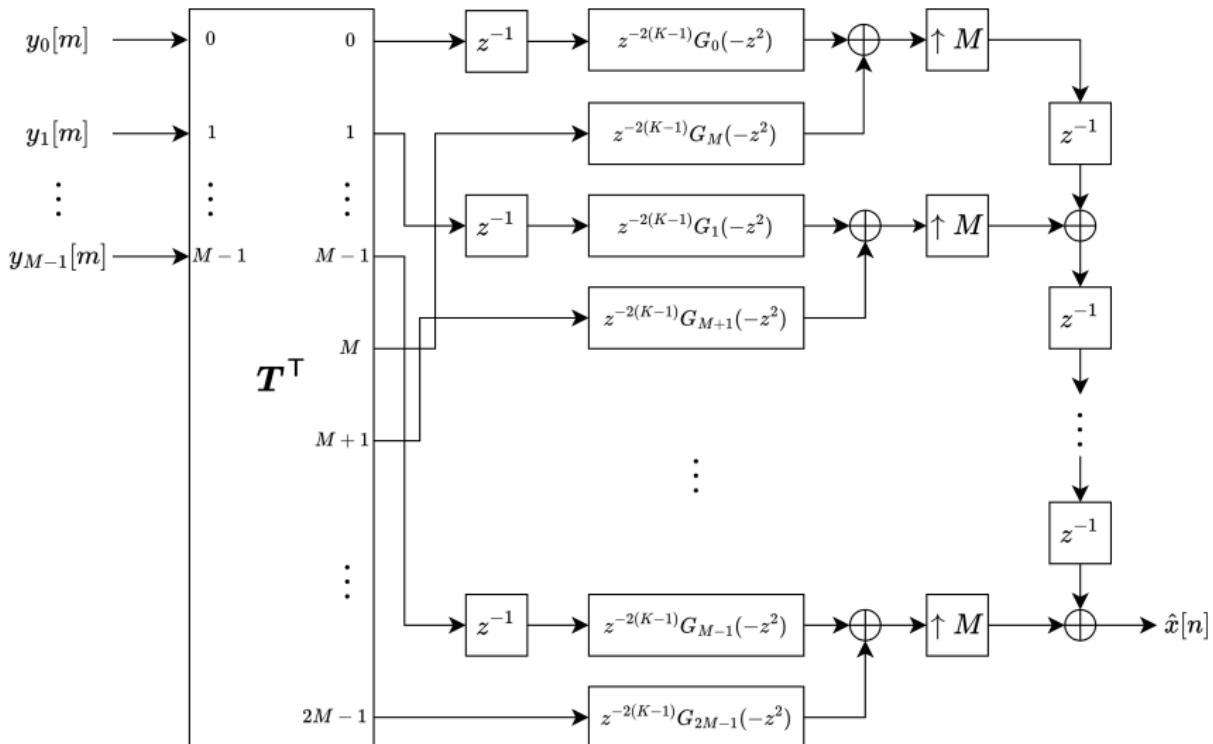
$$\begin{aligned} \mathbf{R}(z) &= z^{-(2K-1)} \tilde{\mathbf{E}}(z) \\ &= z^{-(2K-1)} [ \mathbf{G}_0(z^{-1}) \ z\mathbf{G}_1(z^{-1}) ] \mathbf{T}^\top \end{aligned} \quad (67)$$

# コサイン変調フィルタバンク



アナライザの構成

# コサイン変調フィルタバンク



シンセサイザの構成

# コサイン変調フィルタバンク

完全再構成条件を導く。 (64), (67) 式より,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(z)\mathbf{E}(z) &= z^{-(2K-1)}\tilde{\mathbf{E}}(z)\mathbf{E}(z) \\ &= z^{-(2K-1)} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0(z^{-1}) & z\mathbf{G}_1(z^{-1}) \end{bmatrix} \mathbf{T}^\top \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0(z) \\ z^{-1}\mathbf{G}_1(z) \end{bmatrix} \\ &= 2Mz^{-(2K-1)} \left\{ \mathbf{G}_0(z^{-1})\mathbf{G}_0(z) + \mathbf{G}_1(z^{-1})\mathbf{G}_1(z) \right\} \end{aligned}$$

ここで,  $\mathbf{T}^\top \mathbf{T} = 2M\mathbf{I}$  (後で示す).  $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1$  は対角行列だから,  $k = 0, \dots, M-1$  に対し,

$$G_k(z^{-1})G_k(z) + G_{M+k}(z^{-1})G_{M+k}(z) = \alpha$$

を満たせば完全再構成となる

# コサイン変調フィルタバンク

コサイン変調フィルタバンクの完全再構成条件

$k = 0, \dots, M - 1$  に対し, 定数  $\alpha \in \mathbb{R}$  があって

$$G_k(z^{-1})G_k(z) + G_{M+k}(z^{-1})G_{M+k}(z) = \alpha \quad (68)$$

となること. ここで,

$$G_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_0[2Mn + k]z^{-n} \quad (69)$$

$G_k(z)$  は  $p_0[n]$  のポリフェーズ表現

本条件は電力相補条件ともいう

# $\mathbf{T}^\top \mathbf{T} = 2M\mathbf{I}$ の証明

$(\mathbf{T}^\top \mathbf{T})_{ij} = \sum_{k=0}^{M-1} t_{k,i} t_{k,j}$  であり,

$$\begin{aligned} & t_{k,i} t_{k,j} \\ &= 4 \cos \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) \left( i - \frac{L-1}{2} \right) + (-1)^k \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) \left( j - \frac{L-1}{2} \right) + (-1)^k \frac{\pi}{4} \right] \\ &= 2 \left\{ \cos \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) \{i + j - (L-1)\} + (-1)^k \frac{\pi}{2} \right] + \cos \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) (i - j) \right] \right\} \end{aligned}$$

$i + j - (L-1) = A$  とおくと,

$$\begin{aligned} & \cos \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) A + (-1)^k \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \cos \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) A \right] \cos \left[ (-1)^k \frac{\pi}{2} \right] - \sin \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) A \right] \sin \left[ (-1)^k \frac{\pi}{2} \right] \\ &= -(-1)^k \sin \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) A \right] \end{aligned}$$

# $T^\top T = 2MI$ の証明

ここで,

$$\sum_{k=0}^{M-1} \cos \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) (i - j) \right] = M\delta_{ij} \quad (70)$$

$$\sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k \sin \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) A \right] = 0 \quad (71)$$

( $\delta_{ij}$  : クロネッカーのデルタ) を示せば,

$$(T^\top T)_{ij} = 2M\delta_{ij}$$

となり命題が示せる. 次ページから計算結果を載せる

# $T^\top T = 2M\mathbf{I}$ の証明

(70) 式を示す.  $i = j$  のとき,  $\sum_{k=0}^{M-1} \cos \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) (i-j) \right] = M$ .  
 $i \neq j$  のとき,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{M-1} \cos \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) (i-j) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M-1} \left\{ \exp \left[ j \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) (i-j) \right] + \exp \left[ -j \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) (i-j) \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M-1} \left\{ W_{2M}^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)(i-j)} + W_{2M}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)(i-j)} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ W_{2M}^{-\frac{i-j}{2}} \sum_{k=0}^{M-1} W_{2M}^{-(i-j)k} + W_{2M}^{\frac{i-j}{2}} \sum_{k=0}^{M-1} W_{2M}^{(i-j)k} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{W_{2M}^{-\frac{i-j}{2}}}{W_{2M}^{-(i-j)} - 1} \left\{ (-1)^{-(i-j)} - 1 \right\} + \frac{W_{2M}^{\frac{i-j}{2}}}{W_{2M}^{i-j} - 1} \left\{ (-1)^{i-j} - 1 \right\} \right]
 \end{aligned}$$

最後の式変形で等比級数の和  $\sum_{k=0}^{M-1} W_{2M}^{(i-j)k} = \frac{W_{2M}^{(i-j)M} - 1}{W_{2M}^{i-j} - 1} = \frac{(-1)^{i-j} - 1}{W_{2M}^{i-j} - 1}$  を使用

# $T^\top T = 2M\mathbf{I}$ の証明

さらに式変形すると、

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{M-1} \cos \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) (i-j) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{W_{2M}^{-\frac{i-j}{2}}}{W_{2M}^{-(i-j)} - 1} \left\{ (-1)^{-(i-j)} - 1 \right\} + \frac{W_{2M}^{\frac{i-j}{2}}}{W_{2M}^{i-j} - 1} \left\{ (-1)^{i-j} - 1 \right\} \right] \\ &= \frac{W_{2M}^{-\frac{i-j}{2}} (W_{2M}^{i-j} - 1) \left\{ (-1)^{-(i-j)} - 1 \right\} + W_{2M}^{\frac{i-j}{2}} (W_{2M}^{-(i-j)} - 1) \left\{ (-1)^{i-j} - 1 \right\}}{2(W_{2M}^{-(i-j)} - 1)(W_{2M}^{i-j} - 1)} \\ &= \frac{(W_{2M}^{\frac{i-j}{2}} - W_{2M}^{-\frac{i-j}{2}}) \left\{ (-1)^{-(i-j)} - 1 \right\} + (W_{2M}^{-\frac{i-j}{2}} - W_{2M}^{\frac{i-j}{2}}) \left\{ (-1)^{i-j} - 1 \right\}}{2(W_{2M}^{-(i-j)} - 1)(W_{2M}^{i-j} - 1)} \\ &= \frac{(W_{2M}^{\frac{i-j}{2}} - W_{2M}^{-\frac{i-j}{2}}) \left\{ (-1)^{i-j} - 1 \right\} + (W_{2M}^{-\frac{i-j}{2}} - W_{2M}^{\frac{i-j}{2}}) \left\{ (-1)^{i-j} - 1 \right\}}{2(W_{2M}^{-(i-j)} - 1)(W_{2M}^{i-j} - 1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって (70) 式が示された

# $T^\top T = 2M\mathbf{I}$ の証明

(71) 式を示す。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k \sin \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) A \right] \\ &= \frac{1}{j2} \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k \left\{ \exp \left[ j \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) A \right] - \exp \left[ -j \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) A \right] \right\} \\ &= \frac{1}{j2} \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k \left\{ W_{2M}^{-A(k+\frac{1}{2})} - W_{2M}^{A(k+\frac{1}{2})} \right\} \\ &= \frac{1}{j2} \left\{ W_{2M}^{-\frac{A}{2}} \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k W_{2M}^{-Ak} - W_{2M}^{\frac{A}{2}} \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k W_{2M}^{Ak} \right\} \\ &= \frac{1}{j2} \left\{ W_{2M}^{-\frac{A}{2}} \sum_{k=0}^{M-1} W_{2M}^{-(M+A)k} - W_{2M}^{\frac{A}{2}} \sum_{k=0}^{M-1} W_{2M}^{(M+A)k} \right\} \quad (\because (-1)^k = W_{2M}^M = W_{2M}^{-M}) \\ &= \frac{1}{j2} \left\{ W_{2M}^{-\frac{A}{2}} \frac{(-1)^{-(M+A)} - 1}{W_{2M}^{-(M+A)} - 1} - W_{2M}^{\frac{A}{2}} \frac{(-1)^{M+A} - 1}{W_{2M}^{M+A} - 1} \right\} \quad (\because \text{等比級数の和の公式}) \end{aligned}$$

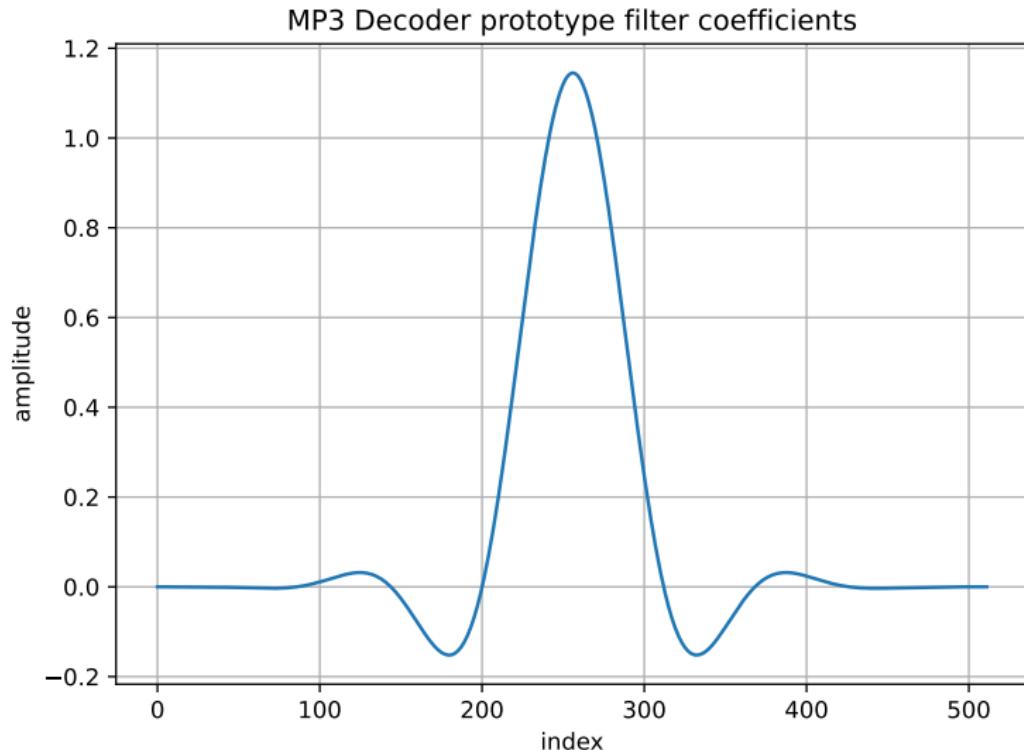
# $T^\top T = 2M\mathbf{I}$ の証明

さらに計算を進めると,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k \sin \left[ \frac{\pi}{M} \left( k + \frac{1}{2} \right) A \right] \\
 &= \frac{W_{2M}^{-\frac{A}{2}} \{(-1)^{-(M+A)} - 1\} (W_{2M}^{M+A} - 1) - W_{2M}^{\frac{A}{2}} \{(-1)^{M+A} - 1\} (W_{2M}^{-(M+A)} - 1)}{j2(W_{2M}^{-(M+A)} - 1)(W_{2M}^{(M+A)} - 1)} \\
 &= \frac{\{(-1)^{M+A} - 1\} \left\{ W_{2M}^{-\frac{A}{2}} (W_{2M}^{M+A} - 1) - W_{2M}^{\frac{A}{2}} (W_{2M}^{-(M+A)} - 1) \right\}}{j2(W_{2M}^{-(M+A)} - 1)(W_{2M}^{(M+A)} - 1)} \\
 &= \frac{\{(-1)^{M+A} - 1\} \left( W_{2M}^{M+\frac{A}{2}} - W_{2M}^{-\frac{A}{2}} - W_{2M}^{-M-\frac{A}{2}} + W_{2M}^{\frac{A}{2}} \right)}{j2(W_{2M}^{-(M+A)} - 1)(W_{2M}^{(M+A)} - 1)} \\
 &= \frac{\{(-1)^{M+A} - 1\} \left( -W_{2M}^{\frac{A}{2}} - W_{2M}^{-\frac{A}{2}} + W_{2M}^{-\frac{A}{2}} + W_{2M}^{\frac{A}{2}} \right)}{j2(W_{2M}^{-(M+A)} - 1)(W_{2M}^{(M+A)} - 1)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

よって, (71) 式が示された.

# MP3のフィルタバンクの特性



- ▶ デコーダの係数. エンコーダの係数の 32 倍

# 電力相補条件の確認

## MP3のフィルタバンクでは

$$G_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_0[2nM+k]z^{-n} = \sum_{n=0}^7 p_0[64n+k]z^{-n} = \sum_{n=0}^7 (-1)^n C_{64+k} z^{-n}$$

$$G_{M+k}(z) = \sum_{n=0}^7 p_0[64n+32+k]z^{-n} = \sum_{n=0}^7 (-1)^n C_{64n+32+k} z^{-n}$$

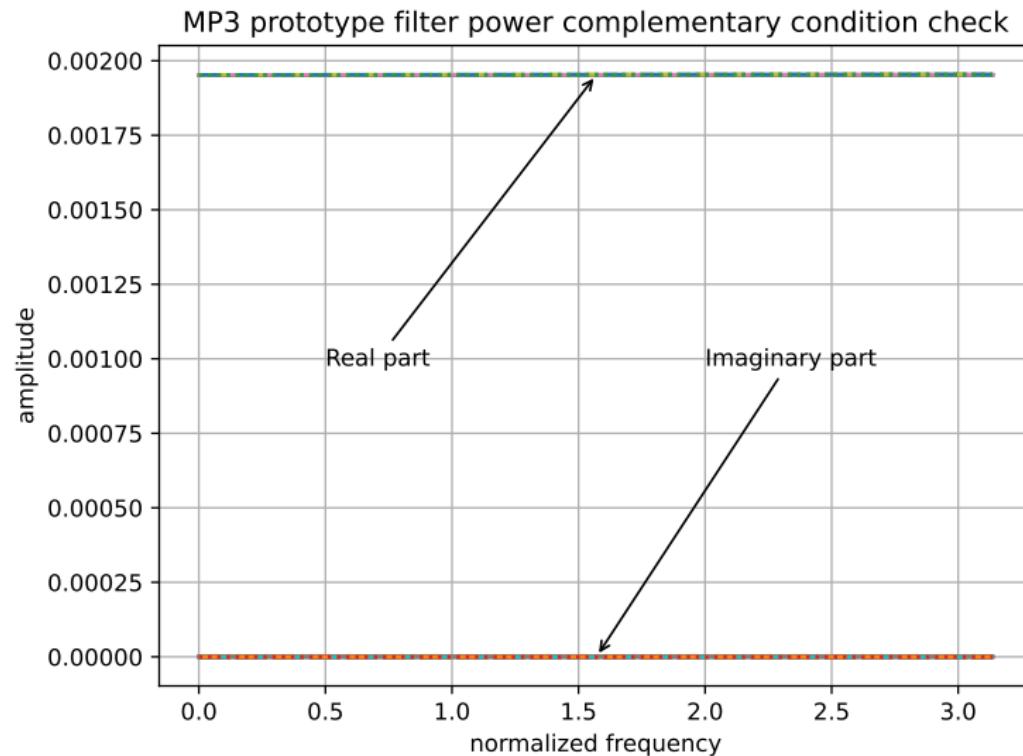
$$G_k(z^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_0[64n+k](z^{-1})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_0[-64n+k]z^{-n} = \sum_{n=-7}^0 (-1)^n C_{-64n+k} z^{-n}$$

$$G_{M+k}(z^{-1}) = \sum_{n=0}^7 p_0[-64n+32+k]z^{-n} = \sum_{n=0}^7 (-1)^n C_{-64n+32+k} z^{-n}$$

$k = 0, \dots, 31$  で実際に計算すると、

$$G_k(z^{-1})G_k(z) + G_{M+k}(z^{-1})G_{M+k}(z) \approx \frac{1}{512}$$

# 電力相補条件の確認（計算結果）



”ほぼ”完全再構成と言ってよい

# MDCT・IMDCTによる再構成信号

式(10)に式(9)を代入すると、

$$\begin{aligned}y[n] &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{2N-1} x[m] \cos \left[ \frac{\pi}{N} \left( k + \frac{1}{2} \right) \left( m + \frac{1}{2} + \frac{N}{2} \right) \right] \cos \left[ \frac{\pi}{N} \left( k + \frac{1}{2} \right) \left( n + \frac{1}{2} + \frac{N}{2} \right) \right] \\&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{2N-1} x[m] \left\{ \cos \left[ \frac{\pi}{N} \left( k + \frac{1}{2} \right) (n + m + 1 + N) \right] + \cos \left[ \frac{\pi}{N} \left( k + \frac{1}{2} \right) (n - m) \right] \right\} \\&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N-1} x[m] \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \cos \left[ \frac{\pi}{N} \left( k + \frac{1}{2} \right) (n + m + 1 + N) \right] + \cos \left[ \frac{\pi}{N} \left( k + \frac{1}{2} \right) (n - m) \right] \right\}\end{aligned}$$

ここで、

$$I_n := \sum_{k=0}^{N-1} \cos \left[ \frac{\pi}{N} \left( k + \frac{1}{2} \right) n \right] \quad (72)$$

を計算していく

# MDCT・IMDCTによる再構成信号

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{k=0}^{N-1} \cos \left[ \frac{\pi}{N} \left( k + \frac{1}{2} \right) n \right] = \sum_{k=0}^{N-1} \cos \left[ \frac{\pi}{2N} (2k+1)n \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \exp \left[ j \frac{\pi}{2N} (2k+1)n \right] + \exp \left[ -j \frac{\pi}{2N} (2k+1)n \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left( W_{2N}^{-\frac{2k+1}{2}n} + W_{2N}^{\frac{2k+1}{2}n} \right) = \frac{1}{2} \left( W_{2N}^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} W_{2N}^{-nk} + W_{2N}^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} W_{2N}^{nk} \right) \end{aligned}$$

ここで、

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_{2N}^{nk} = \sum_{k=0}^{N-1} (W_{2N}^n)^k = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} 1^k = N & (n \text{ が } 2N \text{ の倍数}) \\ \frac{1 \left\{ (W_{2N}^n)^N - 1 \right\}}{W_{2N}^n - 1} = \frac{(-1)^n - 1}{W_{2N}^n - 1} & (n \text{ が } 2N \text{ の倍数ではない}) \end{cases}$$

から、場合分けして考える

# MDCT・IMDCTによる再構成信号

$n$  が  $2N$  の倍数のとき,  $n = 2Nm$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) と書けて,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{N}{2} \left( W_{2N}^{-2Nm} + W_{2N}^{2Nm} \right) = \frac{N}{2} \left\{ (-1)^{-m} + (-1)^m \right\} \\ &= \begin{cases} N & (m: \text{偶数} \iff n = 0, \pm 4N, \pm 8N) \\ -N & (m: \text{奇数} \iff n = \pm 2N, \pm 6N, \pm 10N) \end{cases} \end{aligned}$$

$n$  が  $2N$  の倍数ではないとき,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2} \left\{ W_{2N}^{-\frac{n}{2}} \frac{(-1)^{-n} - 1}{W_{2N}^{-n} - 1} + W_{2N}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^n - 1}{W_{2N}^n - 1} \right\} \\ &= \frac{W_{2N}^{-\frac{n}{2}} \{(-1)^{-n} - 1\} (W_{2N}^n - 1) + W_{2N}^{\frac{n}{2}} \{(-1)^n - 1\} (W_{2N}^{-n} - 1)}{2(W_{2N}^{-l} - 1)(W_{2N}^n - 1)} \\ &= \frac{W_{2N}^{-\frac{n}{2}} \{(-1)^{-n} W_{2N}^n - (-1)^{-n} - W_{2N}^n + 1\} + W_{2N}^{\frac{n}{2}} \{(-1)^n W_{2N}^{-n} - (-1)^n - W_{2N}^{-n} + 1\}}{2(W_{2N}^{-l} - 1)(W_{2N}^n - 1)} \\ &= \frac{(-1)^{-n} W_{2N}^{\frac{n}{2}} - (-1)^{-n} W_{2N}^{-\frac{n}{2}} - W_{2N}^{\frac{n}{2}} + W_{2N}^{-\frac{n}{2}} + (-1)^n W_{2N}^{-\frac{n}{2}} - (-1)^n W_{2N}^{\frac{n}{2}} - W_{2N}^{-\frac{n}{2}} + W_{2N}^{\frac{n}{2}}}{2(W_{2N}^{-l} - 1)(W_{2N}^n - 1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

# MDCT・IMDCTによる再構成信号

まとめると、

$$I_n = \begin{cases} N & (n = 0, \pm 4N, \pm 8N, \dots) \\ -N & (n = \pm 2N, \pm 6N, \pm 10N, \dots) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (73)$$

となる。式(73)を使えば、

$$\sum_{m=0}^{2N-1} x[m] I_{m-n} = \begin{cases} x[n] I_0 = Nx[n] & (n = 0, \dots, N-1) \\ x[n] I_0 = Nx[n] & (n = N, \dots, 2N-1) \end{cases}$$

$$\sum_{m=0}^{2N-1} x[m] I_{n+m+1+N} = \begin{cases} x[N-1-n] I_{2N} = -Nx[N-1-n] & (n = 0, \dots, N-1) \\ x[3N-1-n] I_{4N} = Nx[3N-1-n] & (n = N, \dots, 2N-1) \end{cases}$$

だから、

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N-1} x[m] (I_{n+m+1+N} + I_{m-n}) \\ &= \begin{cases} x[n] - x[N-1-n] & (n = 0, \dots, N-1) \\ x[n] + x[3N-1-n] & (n = N, \dots, 2N-1) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

# 知覚エントロピー導出

聴覚しきい値  $T_b$  に量子化分散（パワー）を合わせる

- ▶ 各周波数 bin を量子化ステップ幅  $\Delta_b$  で一様量子化 ⇒ 量子化誤差が一様に生起するなら、量子化誤差分散は bin あたり  $\frac{\Delta_b^2}{12}$
- ▶ パーティション  $b$  に含まれる bin 数を  $n_b$  とする  
と、bin あたりの聴覚しきい値は  $\frac{T_b}{n_b}$

これらを等しいとすると、

$$\frac{T_b}{n_b} = \frac{\Delta_b^2}{12} \implies \Delta_b = \sqrt{\frac{12T_b}{n_b}} \quad (74)$$

# 知覚エントロピー導出

スペクトルの符号化に必要なビット数を導出

- ▶ ビンあたりの平均振幅スペクトルは  $\sqrt{I_b/n_b}$
- ▶ スペクトルは  $[-\lceil \sqrt{I_b/n_b} \rceil, \lceil \sqrt{I_b/n_b} \rceil]$  の範囲 ⇒  
符号化範囲の幅は  $2\sqrt{I_b/n_b}$

範囲をステップ幅  $\Delta_b$  で割ると符号化シンボル個数になる。実虚両軸で符号化に必要なビット数は

$$\log_2 \frac{2\sqrt{I_b/n_b}}{\Delta_b} + \log_2 \frac{2\sqrt{I_b/n_b}}{\Delta_b} = 2 \log_2 \frac{2\sqrt{I_b/n_b}}{\Delta_b} \quad (75)$$

# 知覚エントロピー導出

(75) 式を変形

$$\begin{aligned} 2 \log_2 \frac{2\sqrt{I_b/n_b}}{\Delta_b} &= \log_2 \frac{4I_b}{n_b \Delta_b^2} = \log_2 \frac{I_b}{3T_b} \\ &\propto \log \frac{I_b}{3T_b} = \log \frac{I_b}{T_b} + \text{const.} \end{aligned}$$

全周波数 bin の符号化に必要なビット数は

$$\sum_b n_b \log \frac{I_b}{T_b} + \text{const.} \quad (76)$$

に比例

# 知覚エントロピー導出

規格では知覚エントロピー PE を

$$PE = \sum_b n_n \log \frac{I_b + 1}{T_b} \quad (77)$$

で定義。dist10 では無音領域で  $T_b = 0$  となるため、

$$PE = \sum_b n_n \log \frac{I_b + 1}{T_b + 1} \quad (78)$$

で計算<sup>\*12</sup>

---

<sup>\*12</sup>有音区間で  $I_b, T_b$  は大きいので、近似としては問題ない想定