信息学院本科生 2011——2012 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

专业：　　　　年级：　　　　学号：　　　　姓名：　　　　成绩：

说明：A^T表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，O 是零矩阵，
A^{-1}表示可逆矩阵 A 的逆矩阵，$|A|$表示方阵 A 的行列式，$\langle\alpha,\beta\rangle$表示向量$\alpha,\beta$的内积。

草 稿 区

得 分

一 .客观题：1–3 小题为判断题，在对的后面括号中填“√”，错的后面括号中填“×”，4–8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题 2 分，共 16 分)。

1. 若矩阵 A 与 B 相似，则 A 等价于 B.　　　　(　　　)

2. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$m<n$，且秩 $R(A)=m$，则齐次方程组 $AX=O$ 只有零解.　　　　(　　　)

3. 在欧氏空间中只有零向量的模长为 0.　　　　(　　　)

4. 设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=m$，$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}=n$，则行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} \end{vmatrix}$等于　　　　(　　　)

(A)　$m+n$　　(B) $-(m+n)$　　(C) $m-n$　　(D) $n-m$

5. 设 A 为 n 阶方阵，C 是 n 阶正交矩阵，且 $B=C^TAC$，则下列结论不成立的是(　　　)

(A) A 与 B 相似　　(B) A 与 B 等价

(C) A 与 B 有相同的特征值　　(D) A 与 B 有相同的特征向量

6. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$其中 $a>b>0$ 且 $a^2+b^2=1$，则 A 为　　　　(　　　)

(A) 初等矩阵　　(B) 正交矩阵　　(C) 正定矩阵　　(D) 负定矩阵

7. 对于 n 阶矩阵 A，以下哪个条件不能得出“A 与对角形矩阵相似”的结论　　(　　　)

(A) A 有 n 个互异的特征值　　(B) A 有 n 个线性无关的特征向量

(C) A 是实对称矩阵　　(D) A 的秩为 1

8. n 阶矩阵 A,B,C 满足 $ABC=E$，E 为 n 阶单位矩阵，则 B 的逆矩阵等于　　(　　　)

(A) $A^{-1}C^{-1}$　　(B) $C^{-1}A^{-1}$　　(C) CA　　(D) AC

得 分

二 、行列式计算　（每小题 7 分，共 14 分）

草 稿 区

1. 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix}$.

2. 计算 n（n>2）阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{vmatrix}$.

得 分

三、求矩阵 X，使下式成立：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（本题 8 分）

草 稿 区

得 分

四、λ为何值时，方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + (\lambda+3)x_2 + (\lambda+2)x_3 = 6 \end{cases}$$

有惟一解，无解，有无穷多解？

有解时求出方程组的所有解.　　（本题 13 分）

草 稿 区

得 分

五、已知三维向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$； (本题 12 分)

草 稿 区

设 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3$， $\beta_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$， $\beta_3 = \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3$.

1) 证明 β_1,β_2,β_3 也是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基；

2）求由基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵；

3）若向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为(1,-2,0)，求 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

得 分

六、求一个正交变换 $X=PY$，将下列二次型化成标准型 (本题 15 分)

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2$$ ；

并求出该二次型的秩，同时说明该二次型的类型(正定、负定、半正定、半负定、不定).

草 稿 区

得 分

七、设 A，B，C，D 均为 n 阶方阵，A 是可逆矩阵，且有 $AB=BA$，证明：

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = |AD-BC| .$$ (本题 10 分)

草 稿 区

得 分

八、设X^*是非齐次线性方程组$AX=b$的一个解，$X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$是它导出组的基础解系，证明：$X^*,X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$线性无关。 (本题 8 分)

草 稿 区

得 分

九、已知存在 n 阶非零实矩阵 C，使得矩阵 $A=C^TC$

证明 $|A+E|>1$，其中 E 为 n 阶单位矩阵。 (本题 4 分)

草 稿 区