第六章 欧几里德空间

§6.2 正交变换

复习

正交矩阵：若方阵A满足$A^TA=E$ (即$A^{-1}=A^T$)，则A 称为正交矩阵.

定理：方阵A为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A的列(行)向量都是单位向量且两两正交.

证明：练习

例：验证P 矩阵为正交矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

正交变换的定义

定义：设T是欧氏空间V中的线性变换，如果对于任意的$\alpha\in V$，都有 $|T\alpha|=|\alpha|$，即$\langle T\alpha, T\alpha\rangle=\langle\alpha, \alpha\rangle$，则$T$称为**正交变换**.

【保持向量的模不变】

例 在几何空间中把每一向量旋转一个角θ的线性变换是正交变换.

定理1 欧氏空间V中的一个线性变换T是正交变换
$\Leftrightarrow$ 对$\forall\alpha, \beta\in V$，有 $\langle T\alpha, T\beta\rangle=\langle\alpha, \beta\rangle$

【保持向量的内积不变】

证明：充分性， 如果对$\forall\alpha,\beta\in V$，有 $\langle T\alpha,T\beta\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$

令$\alpha=\beta$，有 $\langle T\alpha,T\alpha\rangle=\langle\alpha,\alpha\rangle$， $|T\alpha|=|\alpha|$

则T是正交变换.

必要性，若T是正交变换，则

$$|T\alpha|=|\alpha|,\ |T\beta|=|\beta|,\ |T(\alpha+\beta)|=|\alpha+\beta|$$

从而

$$0=|T(\alpha+\beta)|^2-|\alpha+\beta|^2=|T\alpha+T\beta|^2-|\alpha+\beta|^2$$

$$=|T\alpha|^2+|T\beta|^2+2\langle T\alpha,T\beta\rangle-|\alpha|^2-|\beta|^2-2\langle\alpha,\beta\rangle$$

$$=2\langle T\alpha,T\beta\rangle-2\langle\alpha,\beta\rangle$$

$$\therefore\ \langle T\alpha,T\beta\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$$

推论 设T为欧氏空间的正交变换，又$\forall \alpha, \beta \in V$，则

$$\widehat{(\alpha, \beta)} = \widehat{(T\alpha, T\beta)}$$

【保持夹角不变】

证:

$$\widehat{(\alpha, \beta)} = \arccos \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha||\beta|} = \arccos \frac{\langle T\alpha, T\beta \rangle}{|T\alpha||T\beta|} = \widehat{(T\alpha, T\beta)}$$

总结：正交变换保持向量的模、内积、夹角不变

n维欧氏空间中正交变换的重要结论

定理2： 设 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$ 是n维欧氏空间V的**标准正交基底**，V中的线性变换T为正交变换 $\Leftrightarrow [T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\cdots,T\varepsilon_n]$ **也是V的标准正交基底.**

证明：**必要性**， 设T是正交变换，由定理1得

$$\langle T\varepsilon_i,T\varepsilon_j\rangle=\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$\therefore T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\cdots,T\varepsilon_n$ 是n维线性空间V中标准正交组.

$\therefore T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\cdots,T\varepsilon_n$ 是V的标准正交基.

充分性，$[T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \cdots, T\varepsilon_n]$ 是V的标准正交基，则对于任意$\alpha \in V$，设它在基 $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]$ 下的坐标为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ ，则

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$$

$$T\alpha = a_1 T\varepsilon_1 + a_2 T\varepsilon_2 + \cdots + a_n T\varepsilon_n$$

$$|T\alpha|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = |\alpha|^2$$

$$|T\alpha| = |\alpha|$$

从而T是正交变换.

定理3 设 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$ 是n维欧氏空间V的标准正交基底，V中的线性变换T为正交变换 $\Leftrightarrow$ T在标准正交基底 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$ 下的矩阵 $H=(h_{ij})_{n\times n}$ 是正交矩阵.

证明：(正交矩阵的列向量组是标准正交向量组)

矩阵H是线性变换T在标准正交基 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$ 下的矩阵. 即

$$[T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\cdots,T\varepsilon_n]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]H$$

于是，$\langle T\varepsilon_i,T\varepsilon_j\rangle=h_{i1}h_{j1}+h_{i2}h_{j2}+\cdots+h_{in}h_{jn}=\sum_{k=1}^{n}h_{ik}h_{jk}$

则，T是正交变换

$\Longleftrightarrow$ $T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \cdots, T\varepsilon_n$ 是V的标准正交基.

$$\Longleftrightarrow \left\langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} h_{ik} h_{jk} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j, (i, j = 1, 2, \cdots n) \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ $H = (h_{ij})_{n \times n}$ 是正交矩阵.

定理1－3总结为1个定理

定理：设T是欧氏空间V的一个线性变换，则下述条件等价

1） T 是正交变换；

2）T保持向量的内积不变;

3）T把标准正交基变为标准正交基;

4）T在标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

另外，假设n维欧氏空间V中从基底 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$ 到基底$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$ 的过渡矩阵为M，即

$$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]M$$

(1)若 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$ 和 $[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$ 都是V的标准正交基底, 则M为正交矩阵.

(2)若 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$ 是V的标准正交基底，M为正交矩阵. 则 $[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$ 也为标准正交基底.

小结

- 正交变换的定义（重点）
- 正交变换的判定（重点）
- n维欧氏空间中正交变换的重要结论