南開大學
Nankai University

天津市智能机器人技术重点实验室
Tianjin Key Laboratory of Intelligent Robotics
南开大学机器人与信息自动化研究所
Institute of Robotics & Automatic Information System

第七章 机器人轨迹规划

《机器人学导论》

孙雷 教授

Tel:13512967601
Email: sunl@nankai.edu.cn

2020年5月27日

课程内容

1. 机器人轨迹规划基本概念

2. 基于多项式函数的轨迹规划

3.基于分段函数的轨迹规划

4.基于样条曲线函数的轨迹规划

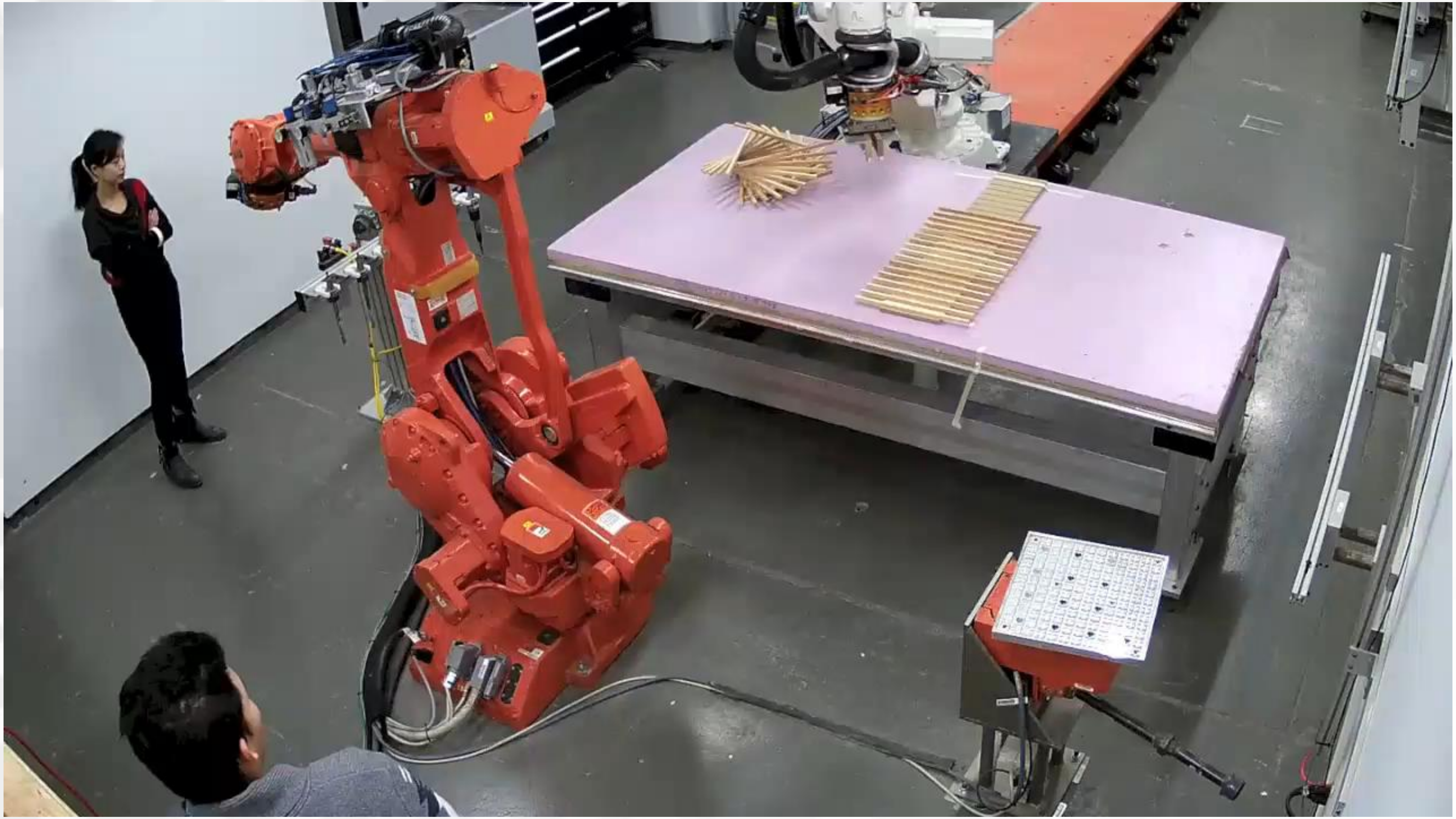
1.1 机器人轨迹规划概念

- 基本概念
  - 根据作业任务，为机器人生成一条从起点到目标点的、符合机器人运动特性、能够被机器人执行的、连续的轨迹。
    - ✓ 符合机器人运动特性：机器人奇异问题、关节运动同步问题……
    - ✓ 能够被机器人执行：执行器的性能（速度加速度约束）、机械性能（限位）
    - ✓ 连续：位移、速度、加速度……光滑的曲线
    - ✓ 轨迹：包含时间信息的位移、速度、加速度……
- 分类：
  - 笛卡尔空间轨迹规划（CP：连续轨迹规划）
  - 关节空间轨迹规划（PTP：点到点轨迹轨迹）

1.2 关节空间轨迹规划

- 关节空间轨迹规划（PTP：点到点轨迹轨迹）
  - 仅针对机器人起点终点时机器人关节空间构型，在关节空间进行规划。
    - ✓ 不考虑机器人运行过程中笛卡尔空间的构形——完整约束系统
    - ✓ 可解耦计算
    - ✓ 计算简单，容易实现
    - ✓ 容易保证轨迹的可执行性：规划轨迹的位置、速度、加速度限制
    - ✓ 无奇异构型影响
    - ✓ 易于在轨迹中添加中间点，实现实时路径修正
    - ✓ 多使用在码垛、物料转移、上下料等
  - 求解时需要关注
    - ✓ 高效性
    - ✓ 同步性
    - ✓ 可执行性

1.2 关节空间轨迹规划



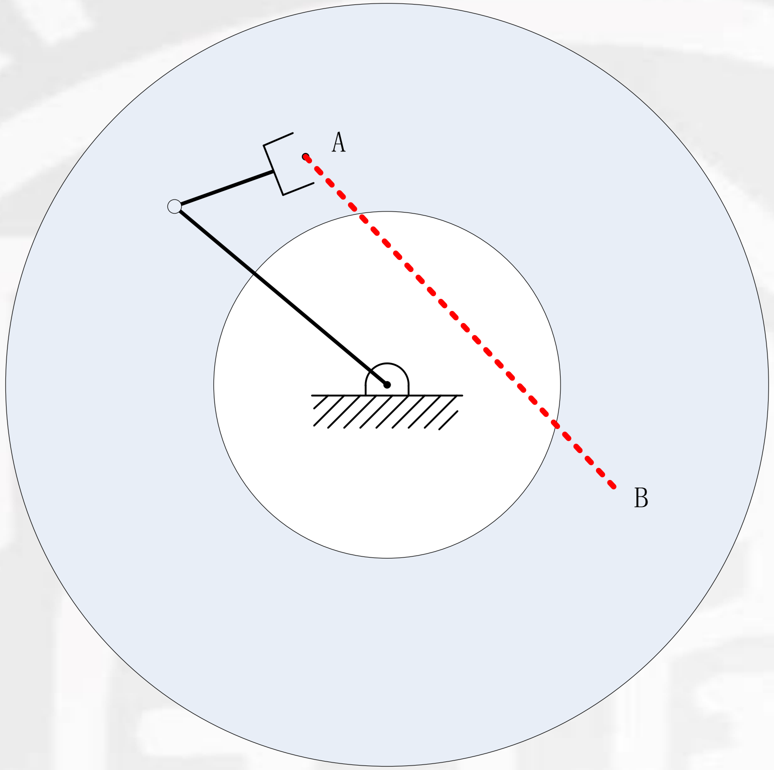
1.3 关节空间轨迹规划方法

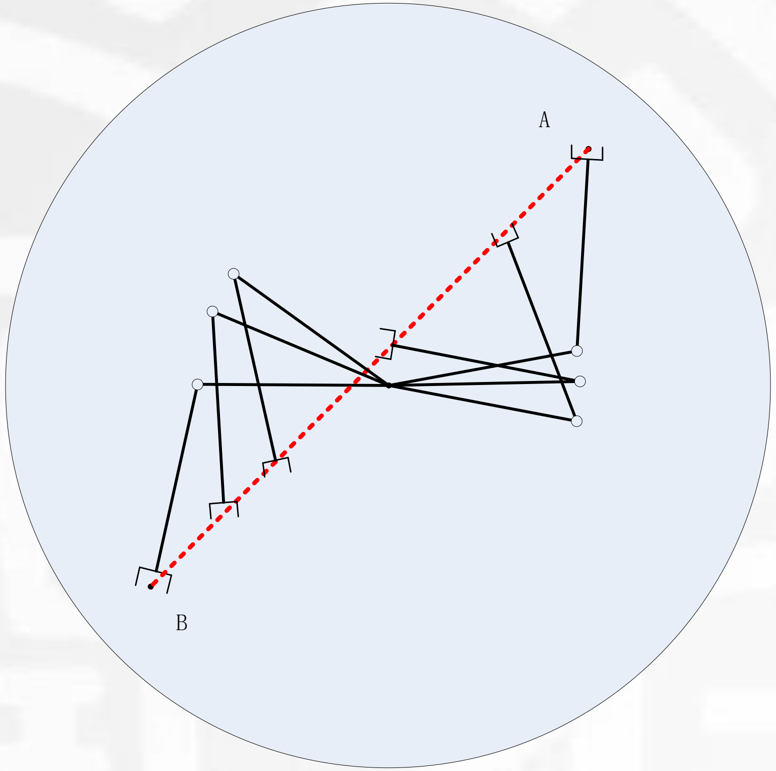
- 关节空间轨迹规划（PTP：点到点轨迹轨迹）
  - 求解机器人起点、终点时机器人关节值。
  - 分别对各个关节进行轨迹规划
    - ✓ 可执行性约束：关节、速度、加速度约束
    - ✓ 中间点的连续性约束
  - 多关节间的同步性：同时起（加速）同时停（减速）
    - ✓ 给定时间的轨迹规划
  - 运行效率：
    - ✓ 多项式函数
    - ✓ 分段函数

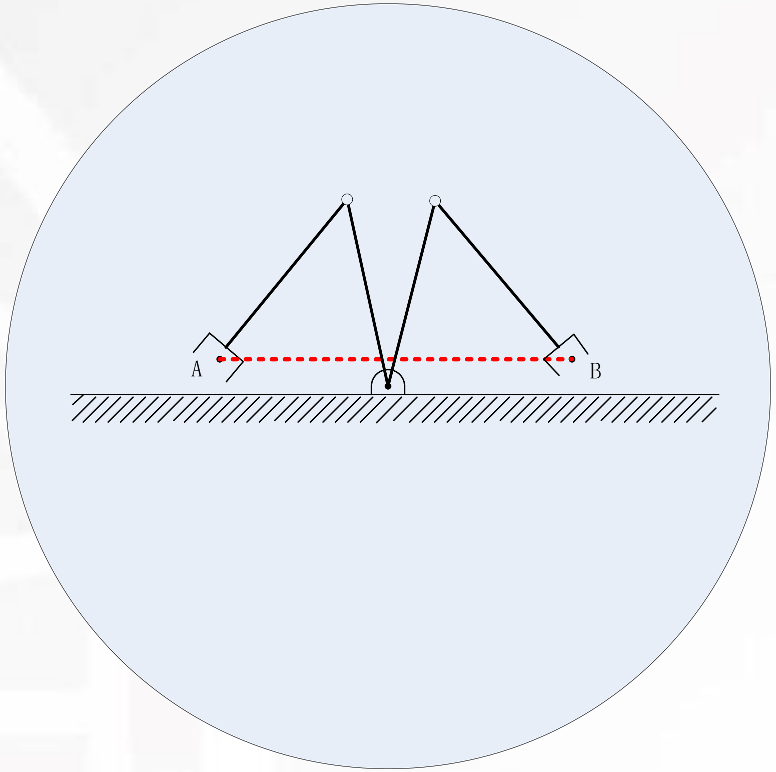
1.4 笛卡尔空间轨迹规划

- 笛卡尔空间轨迹规划（CP：连续轨迹规划）
  - 在笛卡尔空间，按照任务指定的路径，规划机器人末端执行器从起点运动到终点。
    - ✓ 计算复杂：先依照指定路径（圆、直线等）规划轨迹，再通过逆运动学求解机器人关节值，并下发控制
    - ✓ 多解问题
    - ✓ 规划过程中的无解问题：超出关节工作空间
    - ✓ 规划过程中的奇异问题：关节奇异构型附近 $\dot{q} = J^{-1}\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$
    - ✓ 规划过程中的可执行性：关节速度、加速度限制
    - ✓ 多使用在焊接、涂胶、雕刻、磨削等机加工作业中
  - 求解后需要对轨迹进行合理性验证：可达性、奇异性，可执行性等

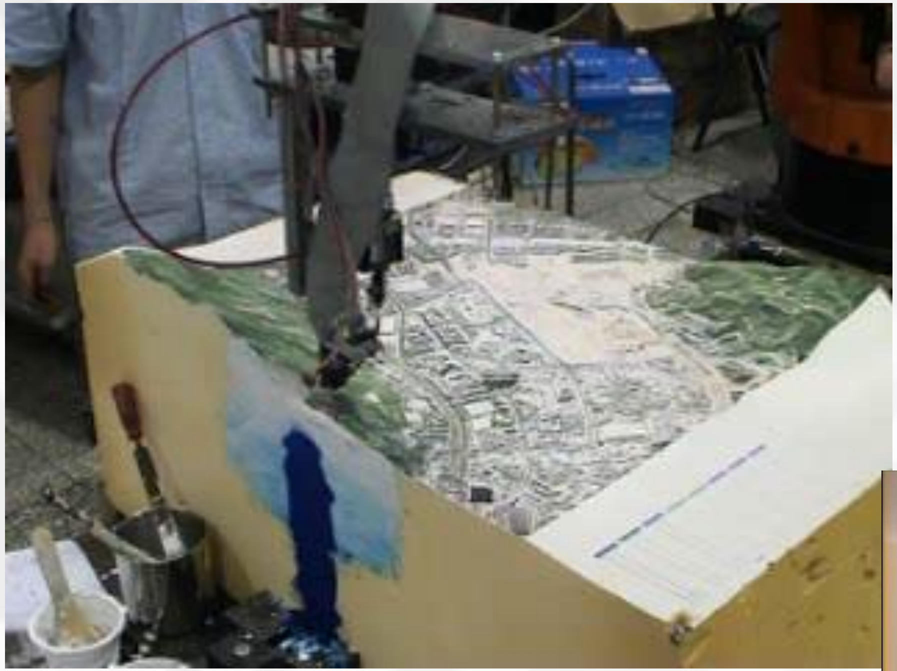
1.4 笛卡尔空间轨迹规划







1.4 笛卡尔空间轨迹规划



02

基于多项式函数的轨迹规划

Polynomial Trajectories Planning

2.1基于多项式函数的轨迹规划数学描述

- 问题描述：给定一组机器人初始状态$\mathbf{q_0}\{q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0\}$及目标状态$\mathbf{q}_f\{q_f,\dot{q}_f,\ddot{q}_f\}$, 求取一多项式函数$\mathbf{q}(t)$使得:

$$\mathbf{q}(0)=\mathbf{q_0},\ \mathbf{q}(t_f)=\mathbf{q}_f,$$

且满足如下约束：

$$\mathbf{q}_{min}\le\mathbf{q}(t)\le\mathbf{q}_{max}$$

- 多项式函数

$$q(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n$$

问题：

- n越大越好，还是越小越好
- n最小为几

2.2 三次多项式规划方法

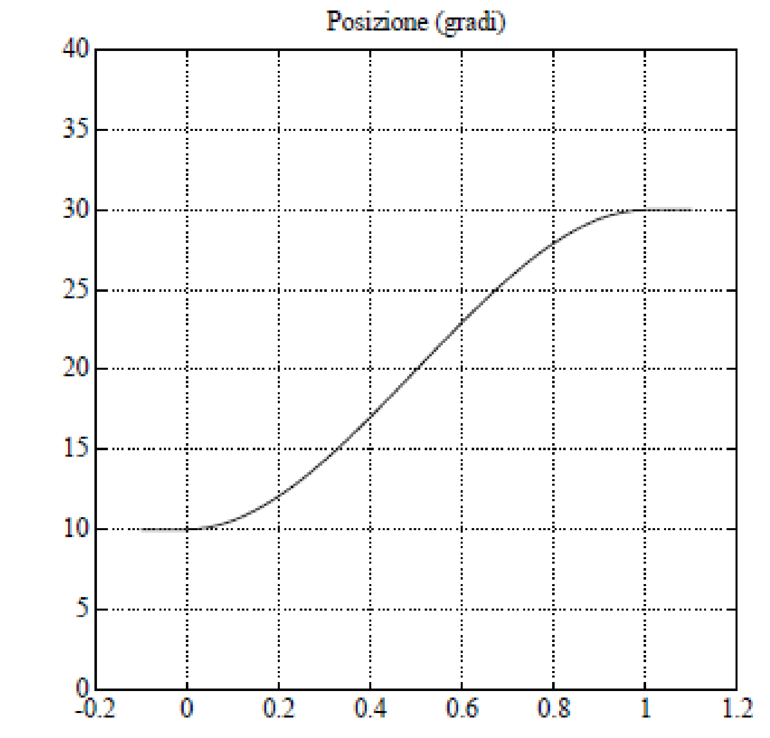
- 点到点规划问题描述：求取一三次多项式函数$\mathbf{q}(t)$：

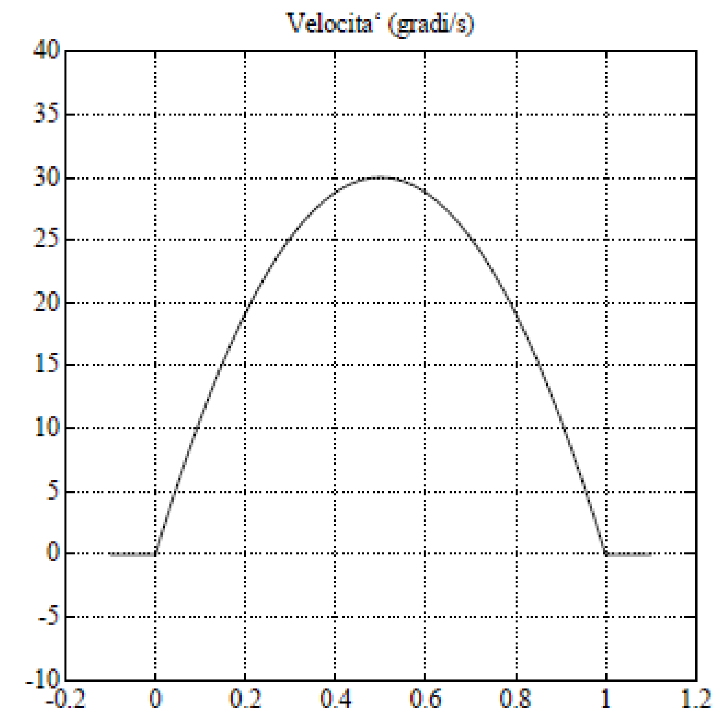
$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

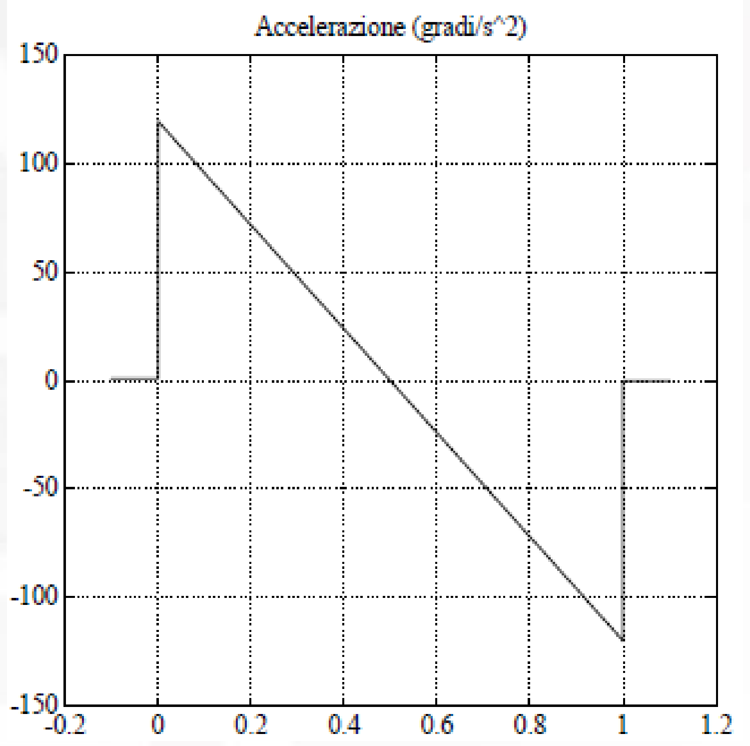
- 满足:
  - □ 初始状态$q_0, \dot{q}_0 = 0$
  - □ 目标状态$q_f, \dot{q}_f = 0$
  - □ $\dot{\mathbf{q}}_{min} \le \dot{\mathbf{q}}(\boldsymbol{t}) \le \dot{\mathbf{q}}_{max}$
    - ✓ $q_0 = q(0) = a_0$
    - ✓ $\dot{q}_0 = \dot{q}(0) = a_1 = 0$
    - ✓ $q_f = q(t_f) = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3$
    - ✓ $\dot{q}_f = \dot{q}(t_f) = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2$
    - ✓ $t_f = -a_2/(3a_3)$

$\dot{q}_f = 0$ && $a_1 = 0$

2.2 三次多项式规划方法







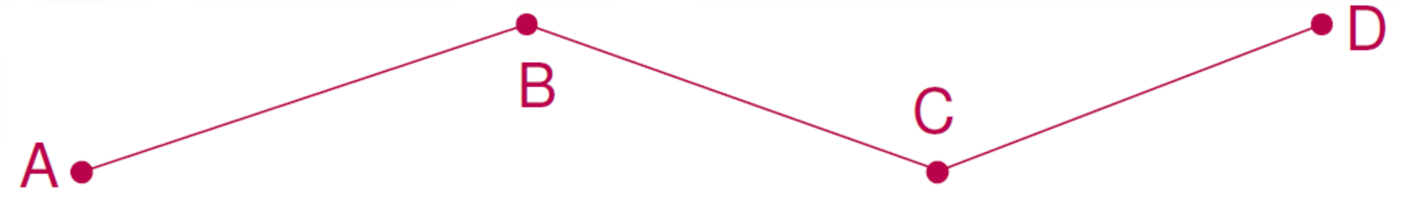
加速度不连续

2.2 三次多项式规划方法

- 多段规划问题描述：求取一多项式函数$\mathbf{q}(t)$：

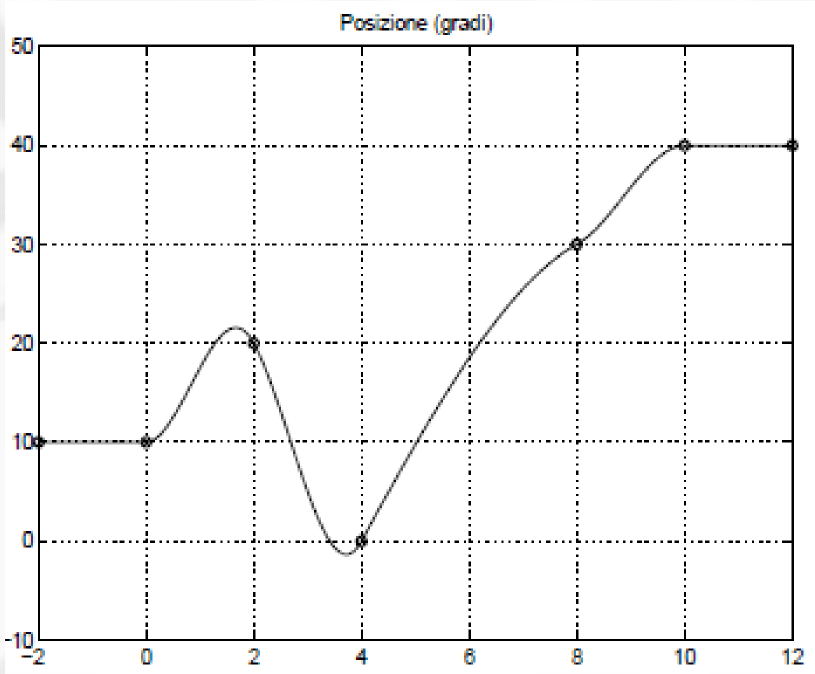
$$q(t) = a_0 + a_1(t - t_i) + a_2(t - t_i)^2 + a_3(t - t_i)^3 \qquad t_i \le t \le t_{i+1}$$

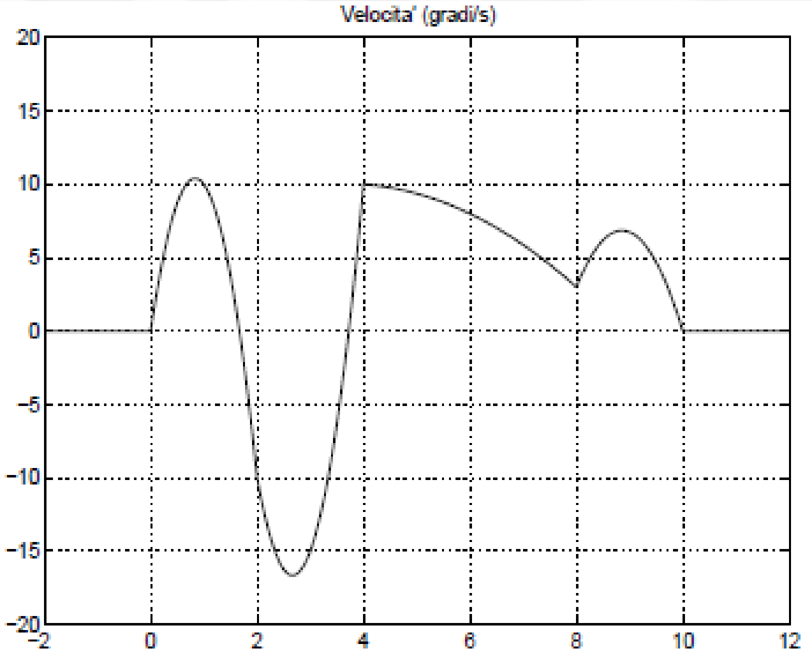
- 满足:
  - 初始状态$q_i, \dot{q}_i \neq 0$
  - 目标状态$q_f, \dot{q}_f \neq 0$

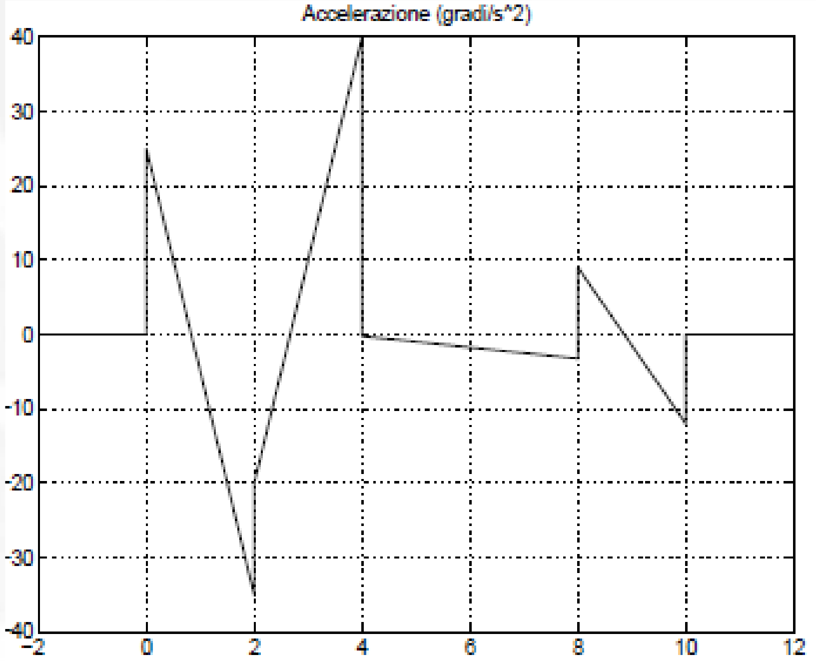


$$\begin{aligned}
a_0 &= q_i \\
a_1 &= \dot{q}_i \\
a_2 &= \frac{-3(q_i - q_f) - (2\dot{q}_i + \dot{q}_f)(t_f - t_i)}{(t_f - t_i)^2} \\
a_3 &= \frac{2(q_i - q_f) + (\dot{q}_i + \dot{q}_f)(t_f - t_i)}{(t_f - t_i)^3}
\end{aligned}$$

2.2 三次多项式规划方法



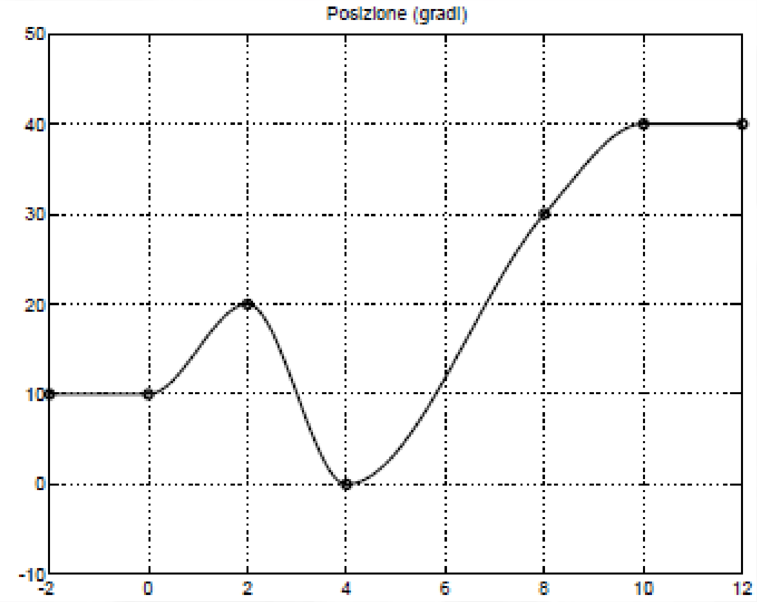


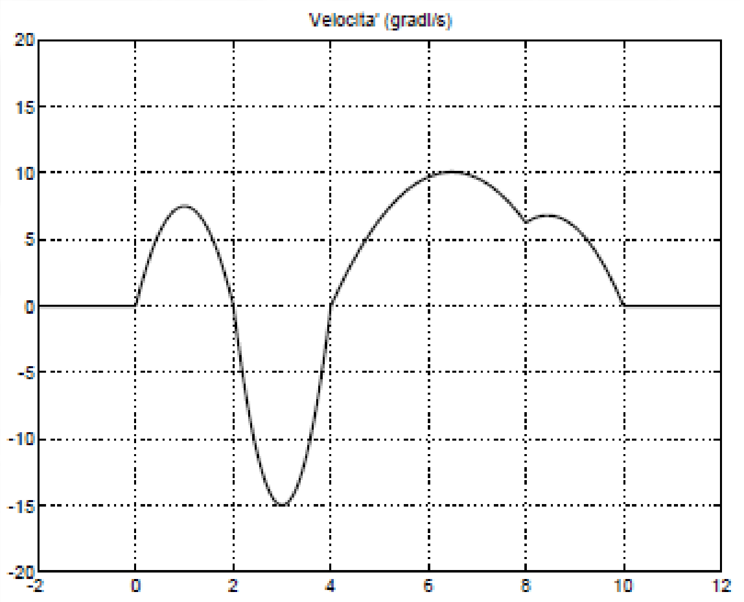


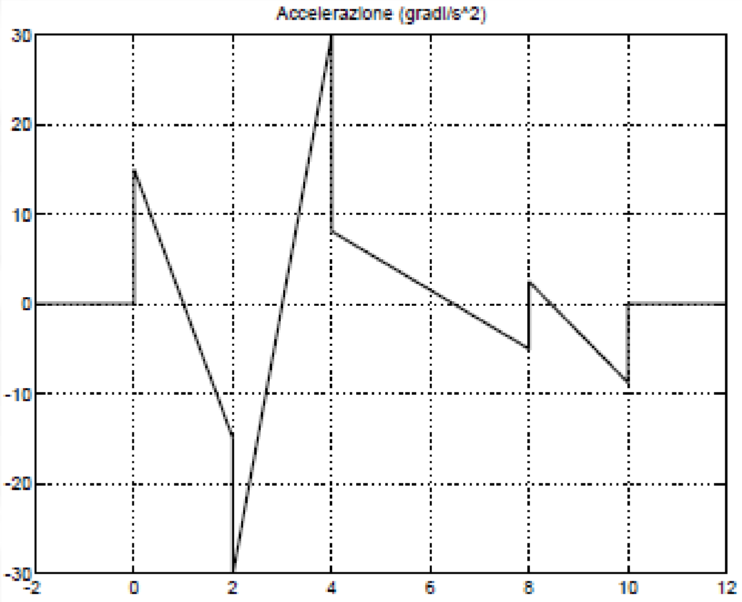
若$\dot{q}_i$未给定，如何处理：

$$\dot{q}_i = \frac{q_i - q_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$$

2.2 三次多项式规划方法







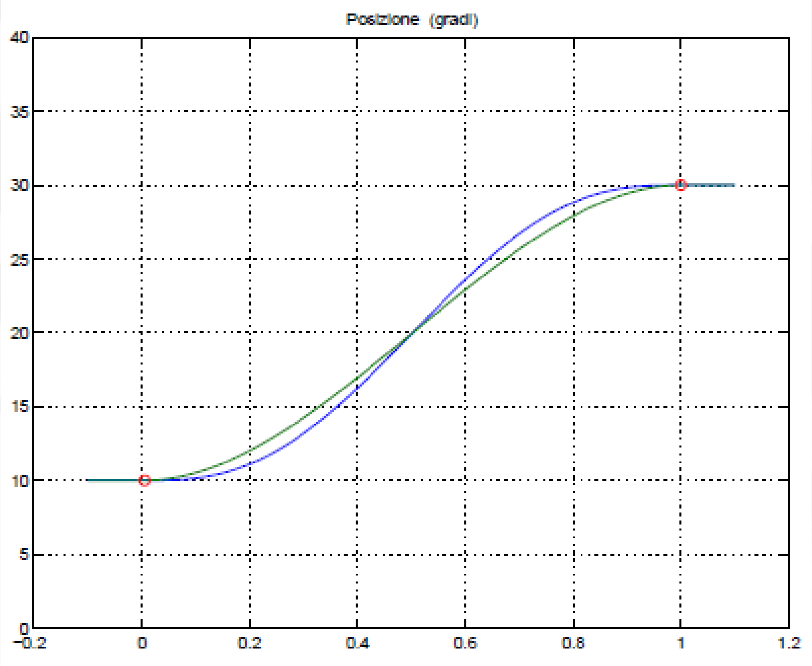
2.3 五次多项式规划方法

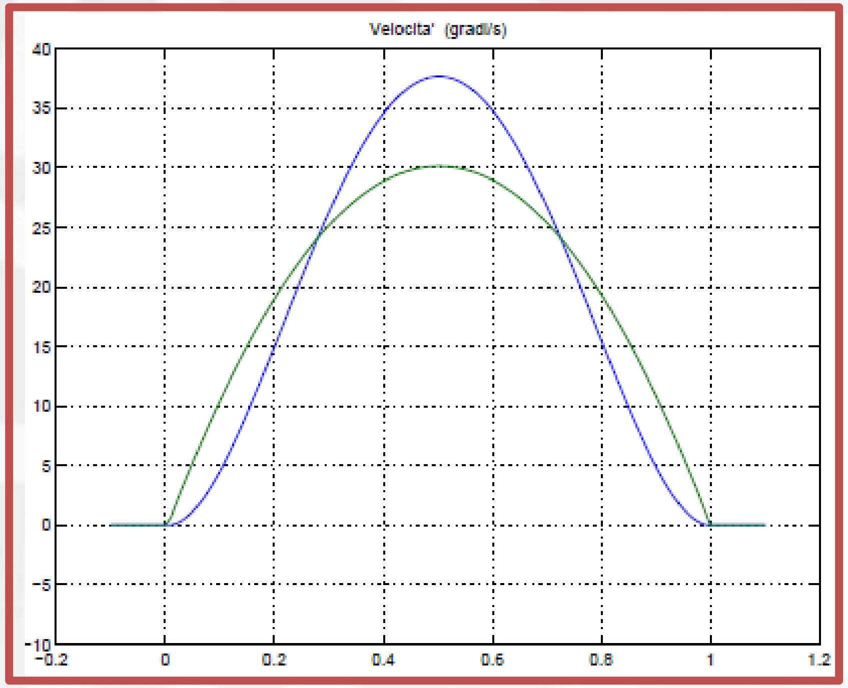
- 点到点规划问题描述：求取一五次多项式函数$\mathbf{q}(t)$：

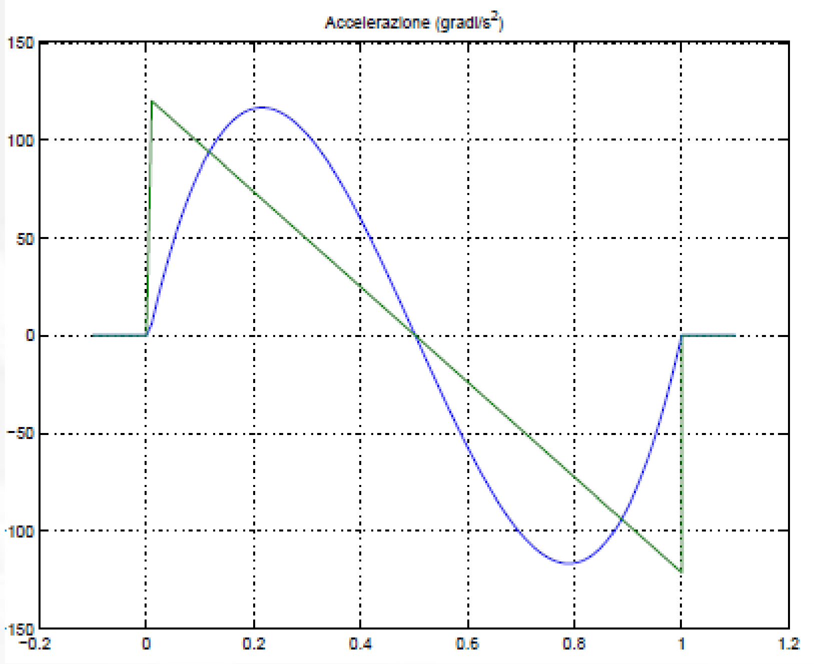
$$q(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4+a_5t^5$$

- 满足:
  - □ 初始状态$q_0,\dot{q}_0=0$
  - □ 目标状态$q_f,\dot{q}_f=0$
  - □ $\ddot{\mathbf{q}}_{min}\le\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})\le\ddot{\mathbf{q}}_{max}$
    - ✓ $q_0=q(0)=a_0$ $\quad q_f=q(t_f)=a_0+a_1t_f+a_2t_f^2+a_3t_f^3+a_4t_f^4+a_5t_f^5$
    - ✓ $\dot{q}_0=\dot{q}(0)=a_1$ $\quad \dot{q}_f=\dot{q}(t_f)=a_1+2a_2t_f+3a_3t_f^2+4a_4t_f^3+5a_5t_f^4$
    - ✓ $\ddot{q}_0=\ddot{q}(0)=2a_2$ $\quad \ddot{q}_f=\ddot{q}(t_f)=2a_2+6a_3t_f+12a_4t_f^2+20a_5t_f^3$
    - ✓ $t_f=\frac{-a_4\pm6\sqrt{a_4{}^2-10a_3a_5}}{5a_5}$

2.4.3 五次多项式规划方法







速度超界

- ■ 五次多项式规划：
  - □ 加速度连续
  - □ 加速度满足可执行性要求
  - □ 速度可执行性无法满足：过于光滑

2.4 多关节规划的同步

- 计算各个关节最小执行时间$t_{fi}, i = 1:n$
- 求取最大的执行时间：

$$t_f = \max[t_{fi}], i = 1:n$$

- 各关节按照求得的执行时间t_f重新规划

2.4.1 三次多项式规划方法

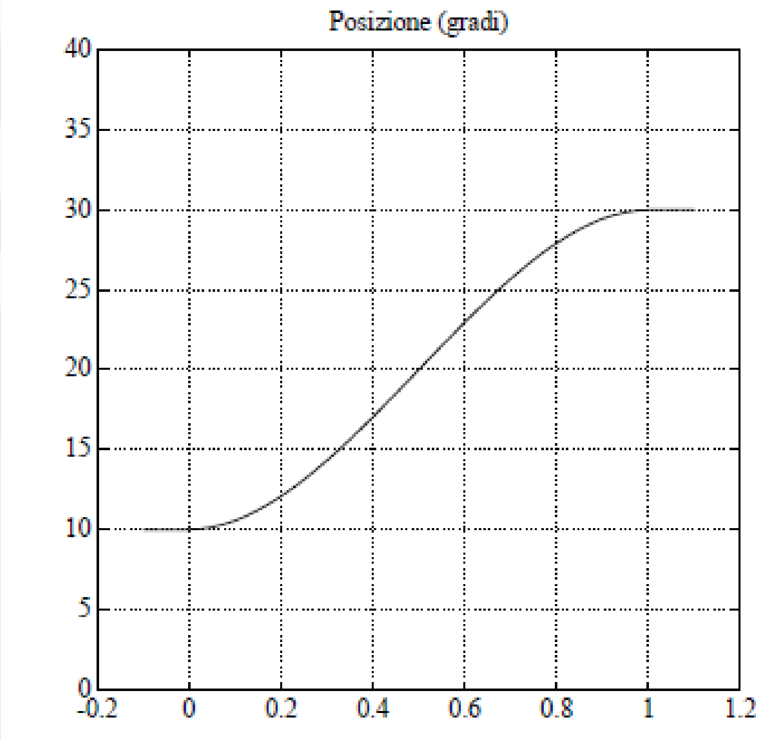
- 点到点规划问题描述：求取一三次多项式函数$\mathbf{q}(t)$：

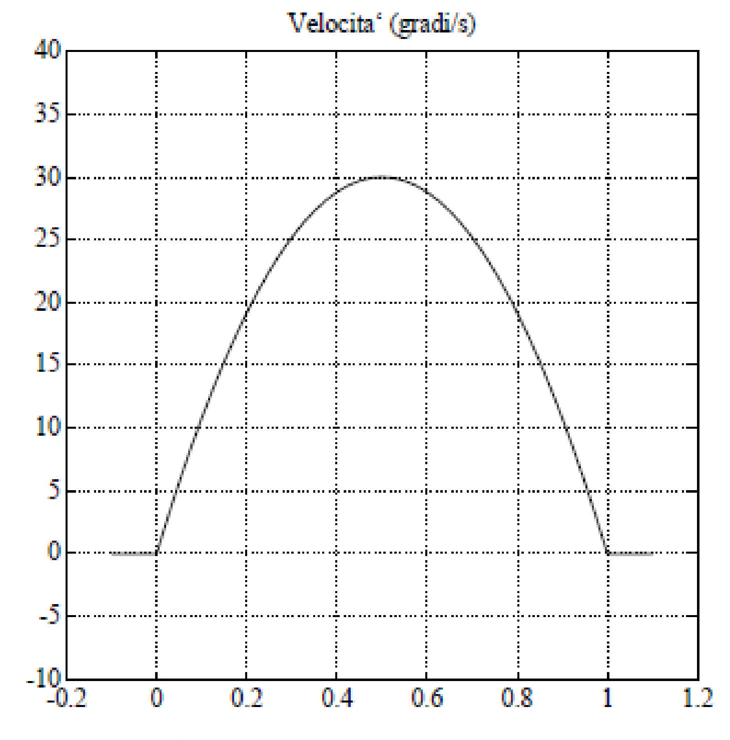
$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

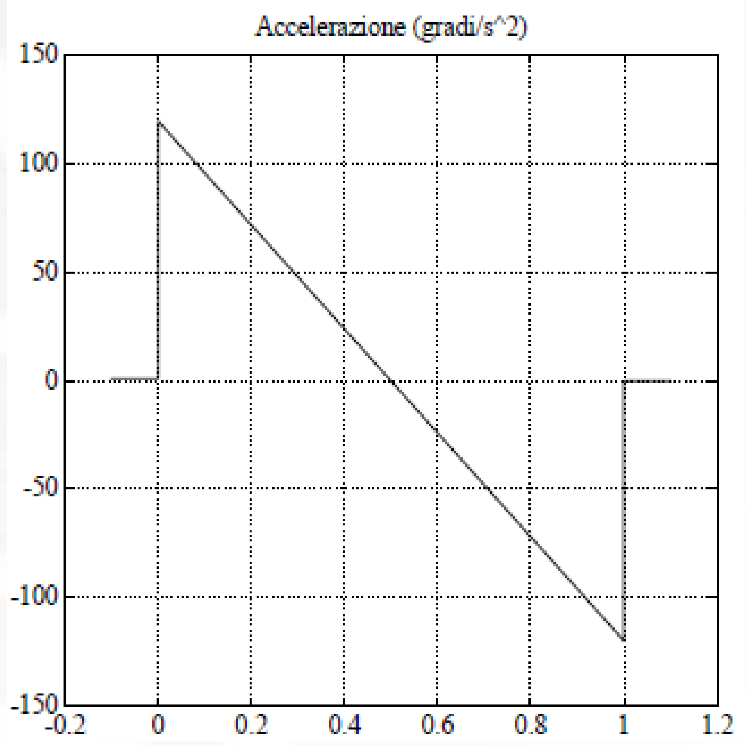
- 满足：
  - 初始状态$q_0, \dot{q}_0 = 0$
  - 目标状态$q_f, \dot{q}_f = 0$
  - $\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{min}} \leq \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{t}) \leq \dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{max}}$
    - ✓ $q_0 = q(0) = a_0$
    - ✓ $\dot{q}_0 = \dot{q}(0) = a_1 = 0$
    - ✓ $q_f = q(t_f) = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3$
    - ✓ $\dot{q}_f = \dot{q}(t_f) = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2$
  - 当t_f给定时，能够唯一确定多项式函数

2.4.1 三次多项式规划方法

Position, velocity and acceleration profiles obtained with a cubic polynomial and boundary conditions: $q_i = 10^o, q_f = 30^o, \dot{q}_i = \dot{q}_f = 0\ ^o/s, \quad t_i = 0, t_f = 1s$:







加速度不连续

2.4.2 三次多项式规划方法

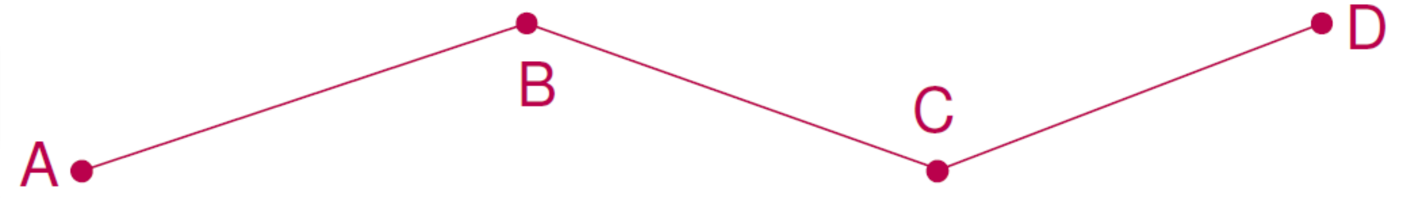
■ 多段规划问题描述：求取一多项式函数$\mathbf{q}(t)$：

$$q(t) = a_0 + a_1(t-t_i) + a_2(t-t_i)^2 + a_3(t-t_i)^3 \qquad t_i \le t \le t_{i+1}$$

■ 满足：

□ 初始状态$q_i, \dot{q}_i \neq 0$

□ 目标状态$q_f, \dot{q}_f \neq 0$



$$\dot{q} = a_1 + 2a_2(t-t_i) + 3a_3(t-t_i)^2$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= q_i \\
a_1 &= \dot{q}_i \\
a_2 &= \frac{-3(q_i - q_f) - (2\dot{q}_i + \dot{q}_f)(t_f - t_i)}{(t_f - t_i)^2} \\
a_3 &= \frac{2(q_i - q_f) + (\dot{q}_i + \dot{q}_f)(t_f - t_i)}{(t_f - t_i)^3}
\end{aligned}$$

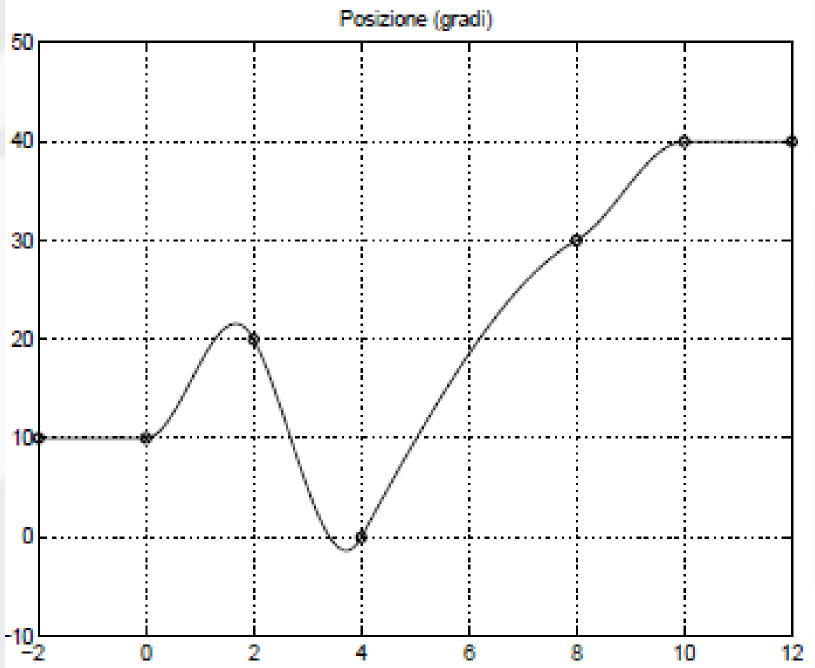
$$\ddot{q} = 2a_2 + 6a_3(t-t_i)$$

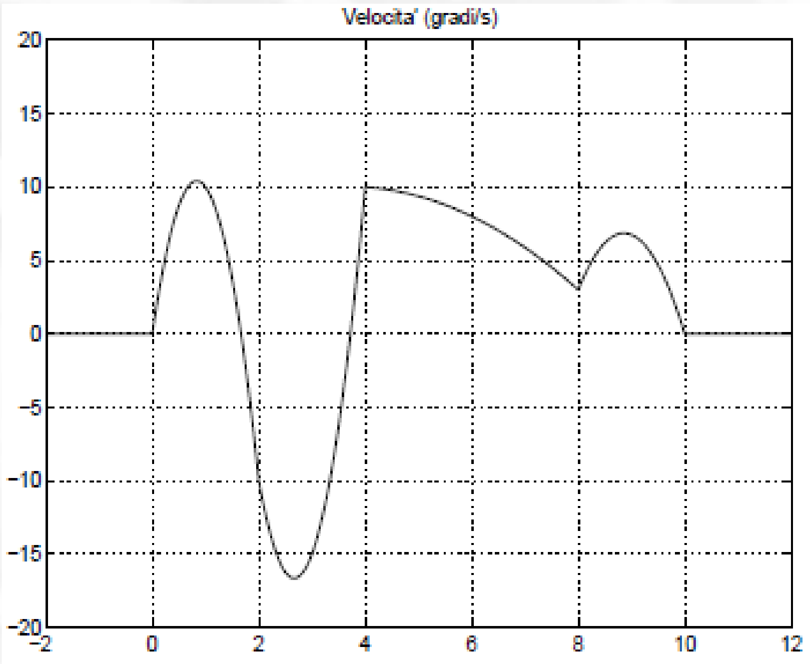
$$a_2 = -3(t-t_i)a_3$$

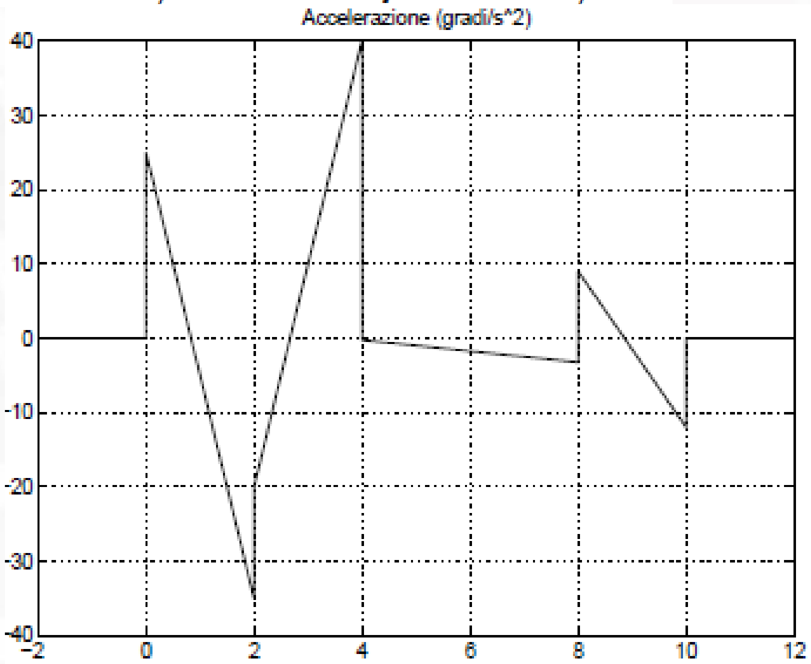
2.4.2 三次多项式规划方法

Position, velocity and acceleration profiles with:

$t_0 = 0$	$t_1 = 2$	$t_2 = 4$	$t_3 = 8$	$t_4 = 10$
$q_0 = 10^o$	$q_1 = 20^o$	$q_2 = 0^o$	$q_3 = 30^o$	$q_4 = 40^o$
$\dot{q}_0 = 0^o/s$	$\dot{q}_1 = -10^o/s$	$\dot{q}_2 = 20^o/s$	$\dot{q}_3 = 3^o/s$	$\dot{q}_4 = 0^o/s$







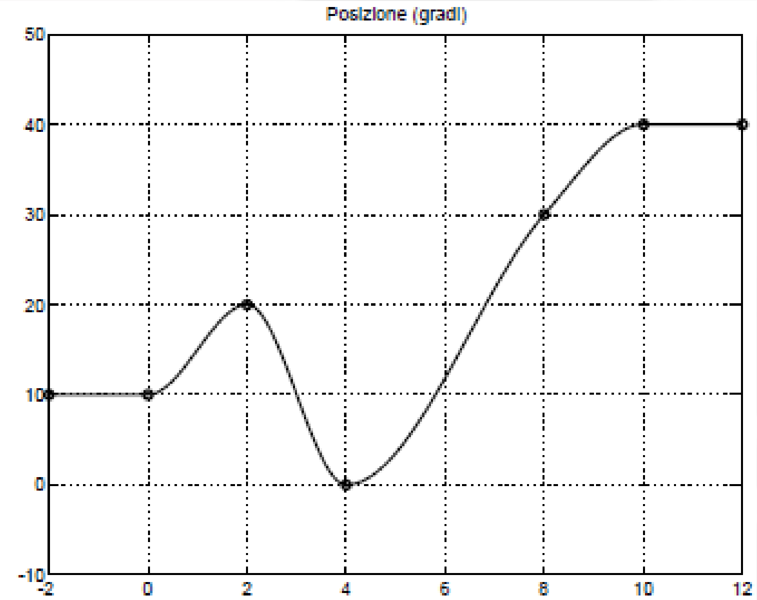
若$\dot{q}_i$未给定，如何处理：

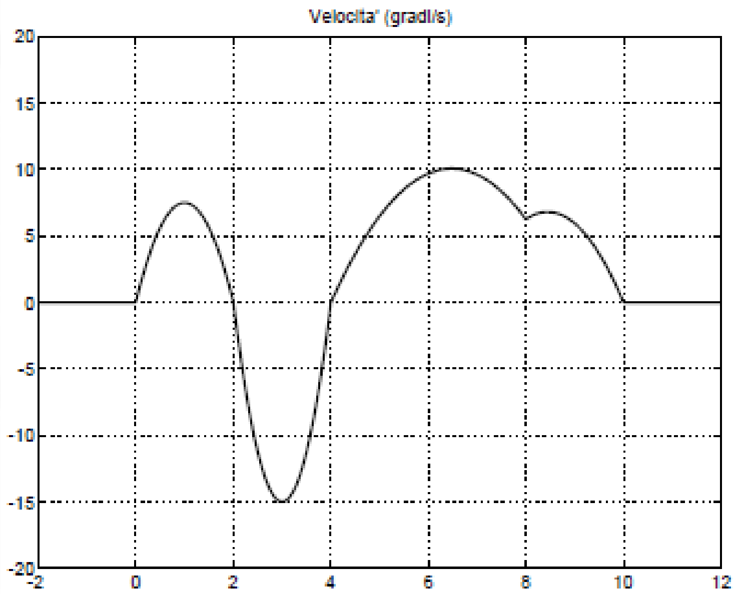
$$\dot{q}_i = \frac{\dot{q}_i - \dot{q}_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$$

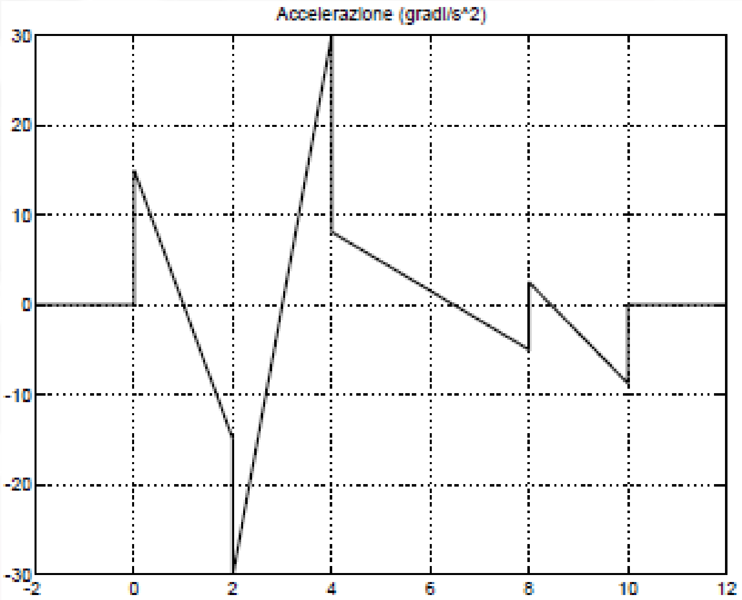
2.4.2 三次多项式规划方法

Automatic computation of the intermediate velocities (data as in the previous example)

$t_0 = 0$	$t_1 = 2$	$t_2 = 4$	$t_3 = 8$	$t_4 = 10$
$q_0 = 10^o$	$q_1 = 20^o$	$q_2 = 0^o$	$q_3 = 30^o$	$q_4 = 40^o$







2.4.3 五次多项式规划方法

- 点到点规划问题描述：求取一五次多项式函数$\mathbf{q}(t)$：

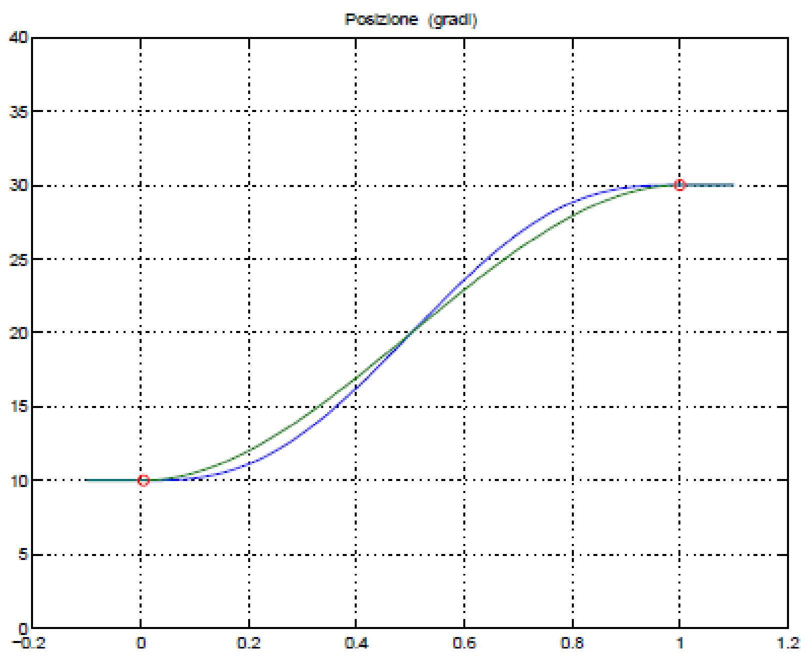
$$q(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4+a_5t^5$$

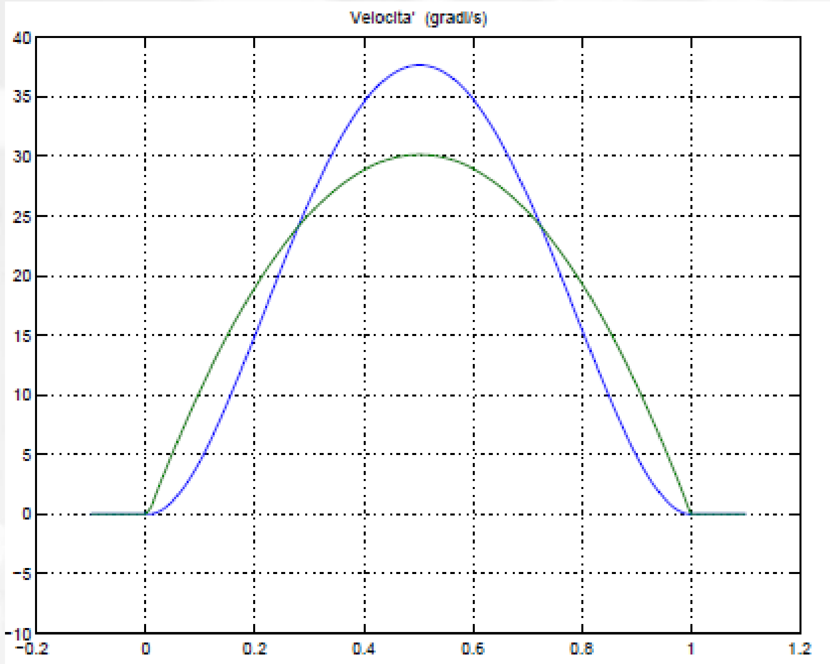
- 满足:
  - 初始状态$q_0, \dot{q}_0=0$
  - 目标状态$q_f, \dot{q}_f=0$
    - ✓ $q_0=q(0)=a_0$　　$q_f=q(t_f)=a_0+a_1t_f+a_2t_f^2+a_3t_f^3+a_4t_f^4+a_5t_f^5$
    - ✓ $\dot{q}_0=\dot{q}(0)=a_1$　　$\dot{q}_f=\dot{q}(t_f)=a_1+2a_2t_f+3a_3t_f^2+4a_4t_f^3+5a_5t_f^4$
    - ✓ $\ddot{q}_0=\ddot{q}(0)=2a_2$　　$\ddot{q}_f=\ddot{q}(t_f)=2a_2+6a_3t_f+12a_4t_f^2+20a_5t_f^3$
  - 当t_f给定时，能够唯一确定多项式函数

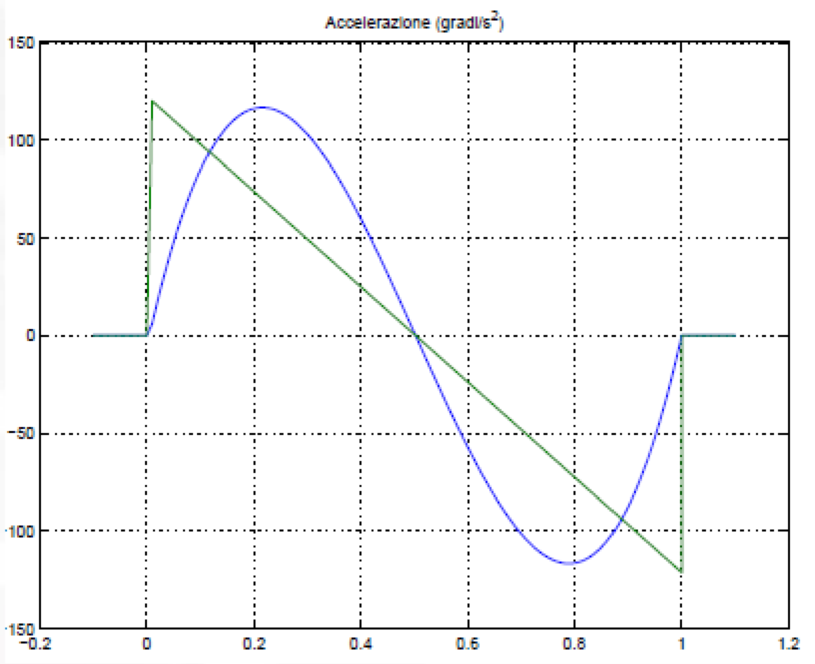
2.4.3 五次多项式规划方法

Fifth-order trajectory with the boundary conditions:

$q_i = 10^o, q_f = 30^o, \dot{q}_i = \dot{q}_f = 0\ ^o/s, \ddot{q}_i = \ddot{q}_f = 0\ ^o/s^2, t_i = 0s, t_f = 1s.$

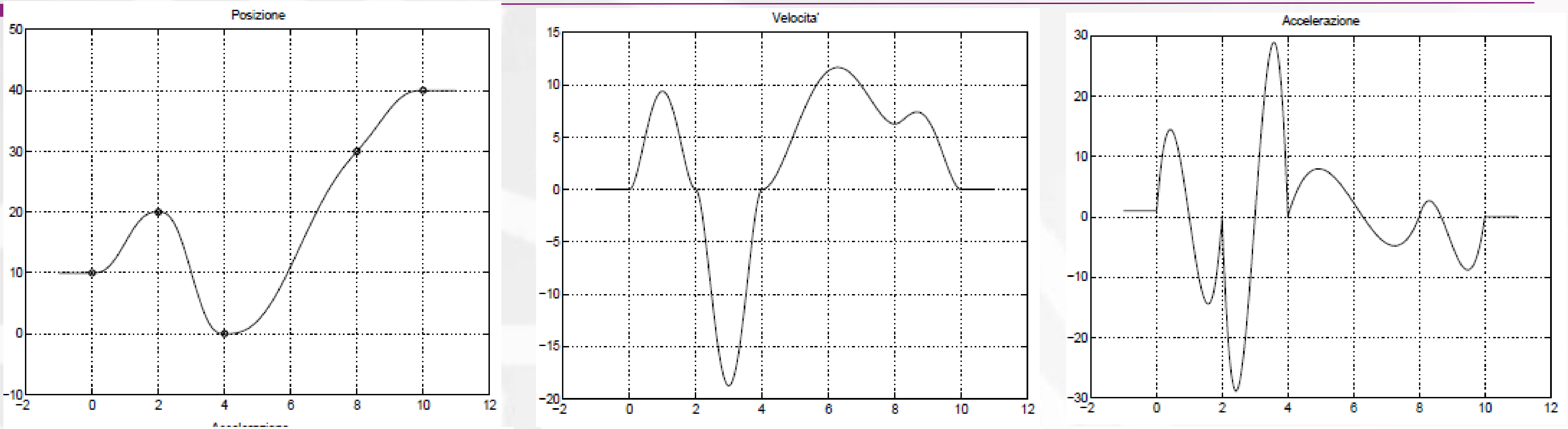




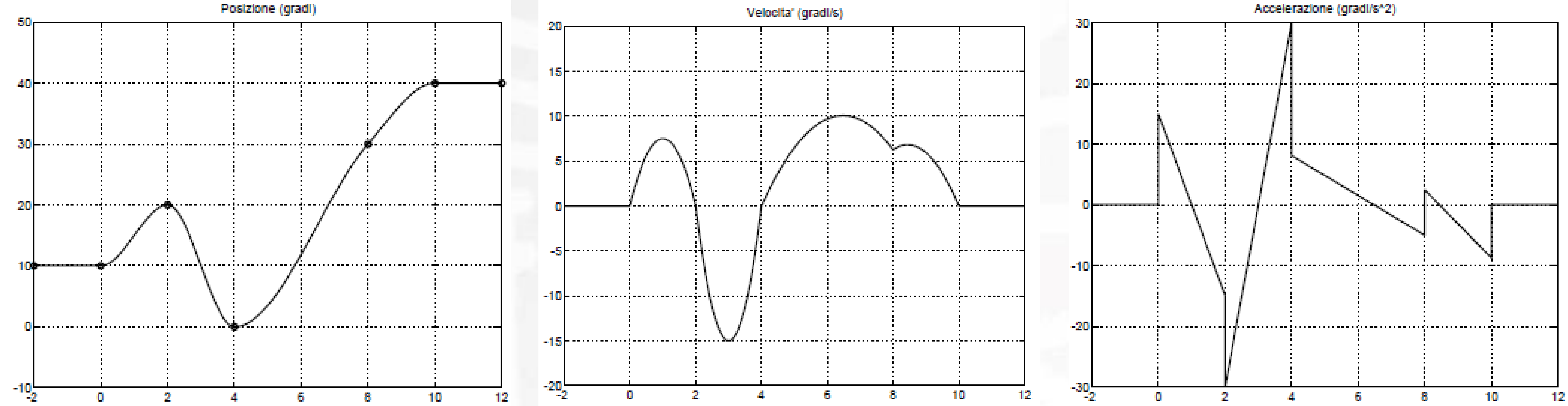


2.4.3 五次多项式多段规划

五次多项式



三次多项式



2.4.3 五次多项式多段规划

- 五次多项式可以满足机器人规划的连续性约束
  - 初始、终止条件下的位置、速度、加速度连续性
- 唯一确定——如何**同时满足**可执行性约束：

$$q_{min} \le q(t) \le q_{max}$$

$$\dot{q}_{min} \le \dot{q}(t) \le \dot{q}_{max}$$

$$\ddot{q}_{min} \le \ddot{q}(t) \le \ddot{q}_{max}$$

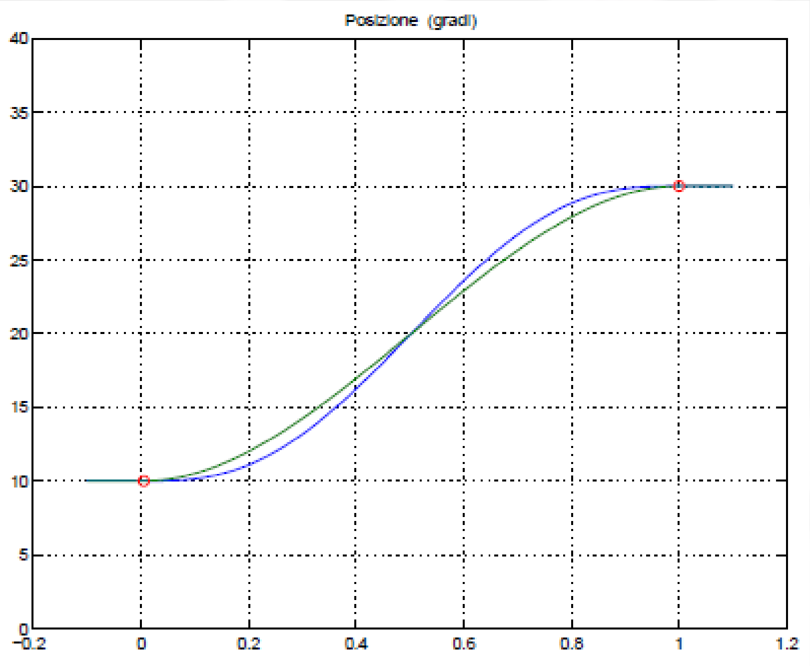
- 更加高阶的多项式：几阶，多解，优化
- 加大执行时间：降低执行效率

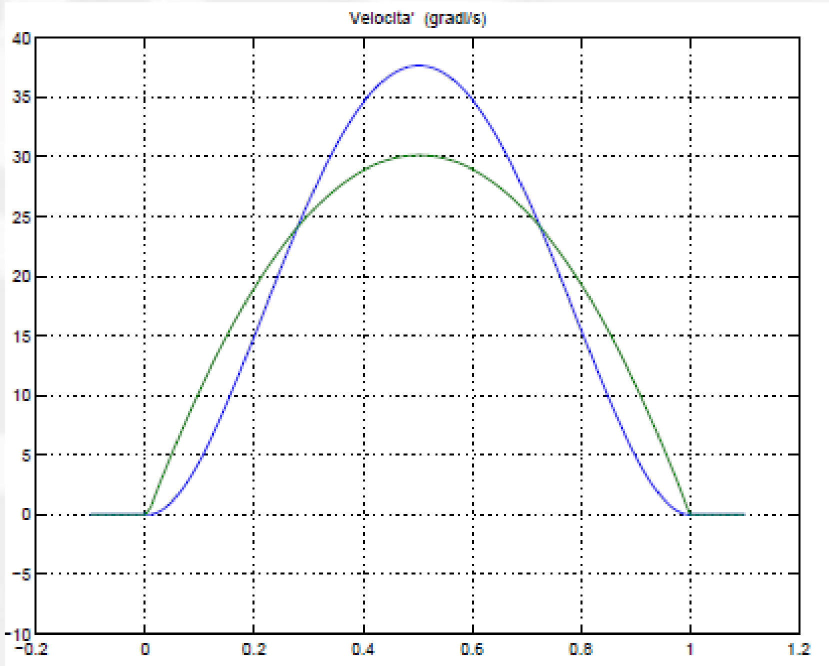
03

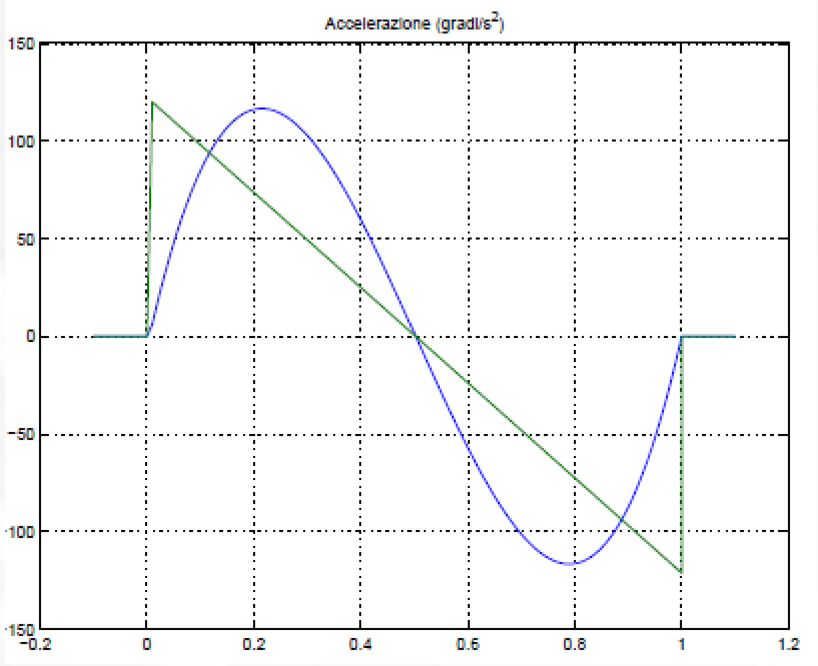
基于分段函数的轨迹规划

Piecewise Function Trajectories Planning

3.1 多项式规划算法的问题







- 过于光滑，无法充分利用执行器性能：
  - 速度、加速度峰值无法持续
- 分段操作：
  - 加速，匀速（最大速度），减速

3.2 分段函数规划算法

- 分段操作：
  - 加速，匀速（最大速度），减速
  - 尽量维持最大速度运行
  - 当机器人运行在最大速度时，加速度为0
- 加速段：以最大加速能力加到最大速度

$$q(t)=a_{10}+a_{11}t+a_{12}t^2, \dot{q}(t)=a_{11}+2a_{12}t, \dot{q}(t_{3i})=\dot{q}_i, \dot{q}\left(t_{1f}\right)=v_{max}, \ddot{q}(t)=2a_{12}=a_{max}$$

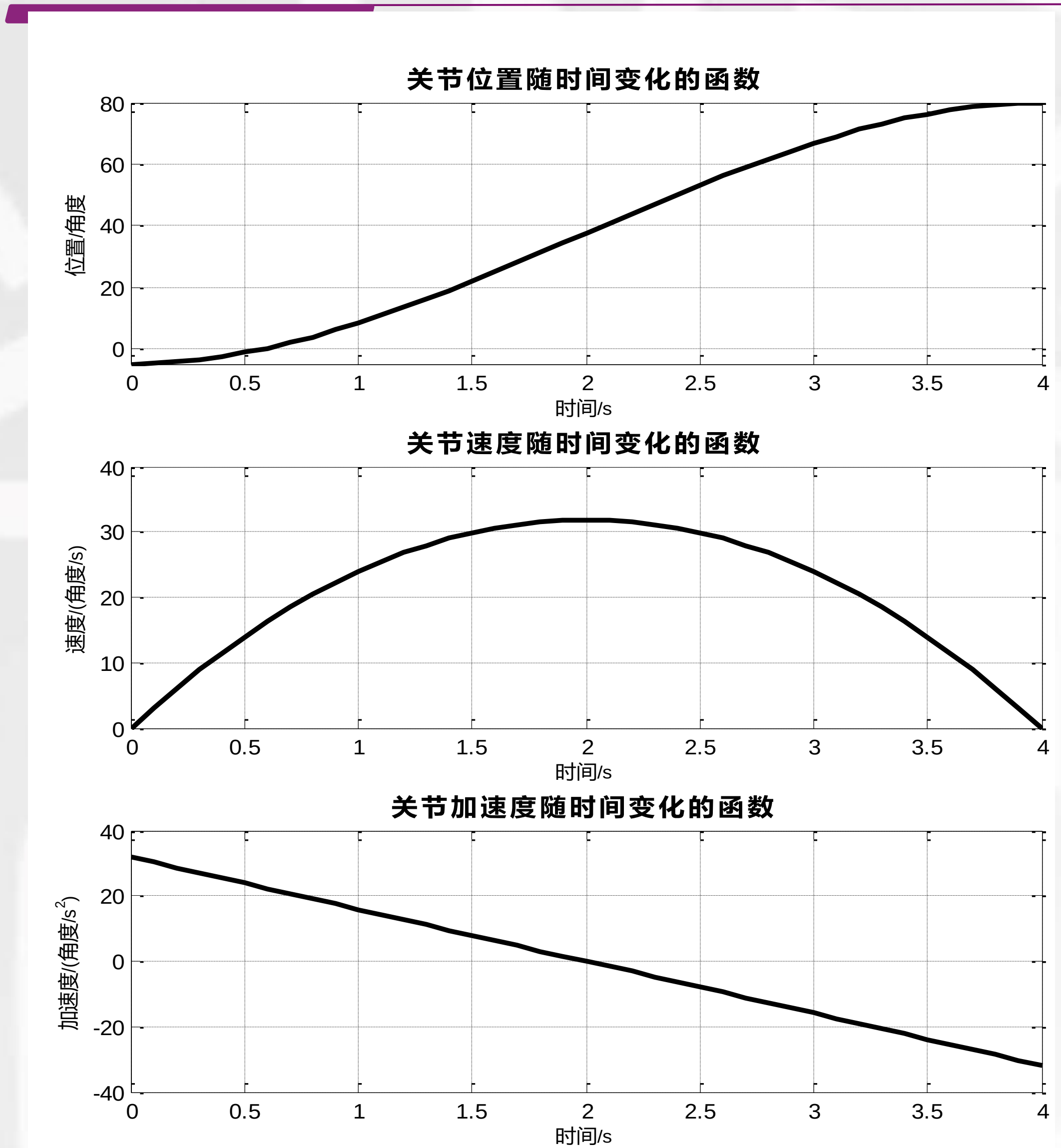
- 匀速段：维持最大速度运行，加速度为0

$$\ddot{q}(t)=0\,,\qquad \dot{q}(t)=a_{21}\;=v_{max},\qquad q(t)=a_{20}+a_{21}t$$

- 减速段：以最大加速能力减速到静止

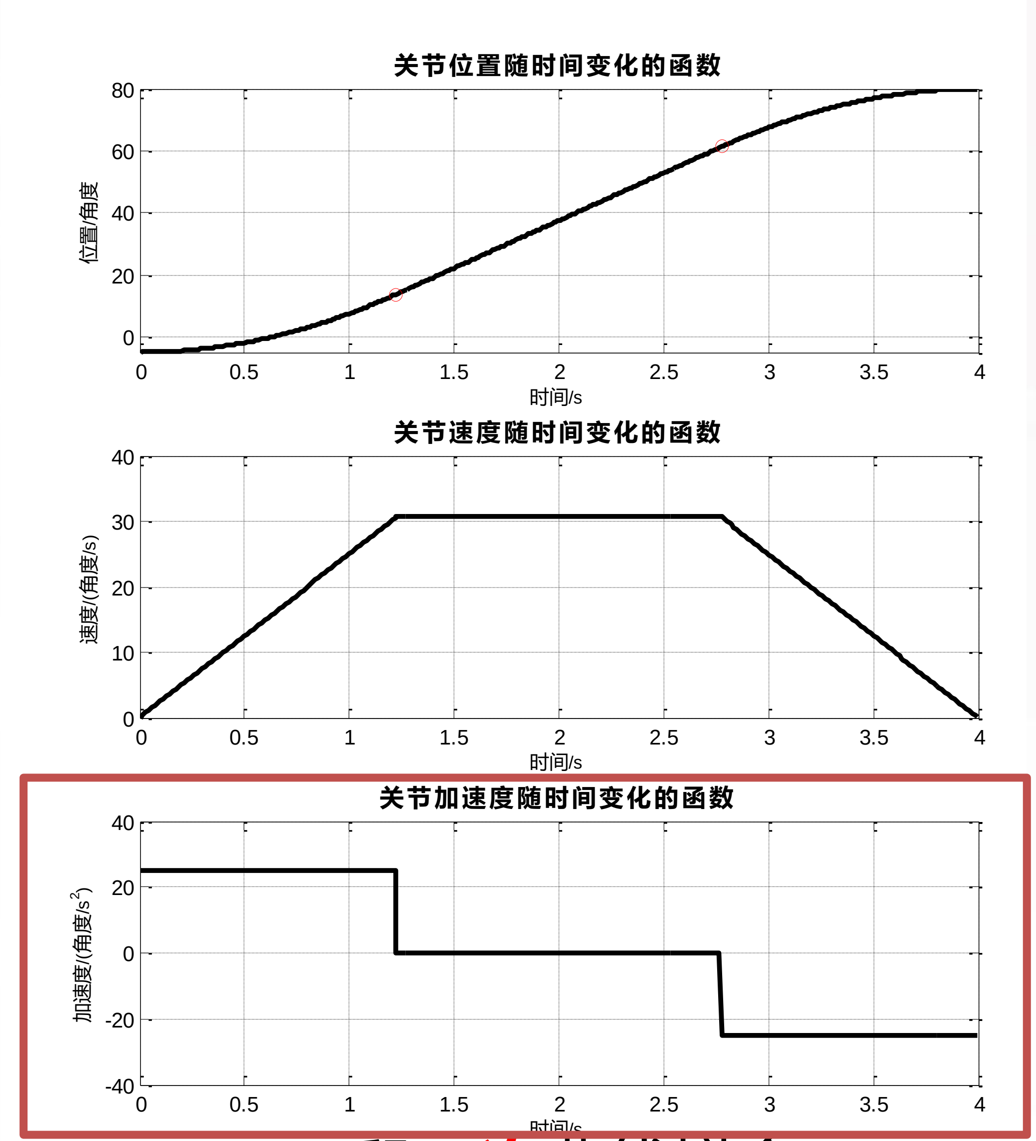
$$q(t)=a_{30}+a_{31}t+a_{32}t^2, \dot{q}(t)=a_{31}+2a_{32}t, \dot{q}(t_{3i})=v_{max}, \dot{q}\left(t_{3f}\right)=\dot{q}_f, \ddot{q}(t)=2a_{32}=a_{max},$$

3.2 三段二次函数规划算法



三次多项式拟合

加速度不连续



三段**二次**曲线拟合

3.3 最小时间轨迹规划算法

- 满足机器人规划的给定目标：初始状态 $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$，终止状态： $q_f, \dot{q}_f, \ddot{q}_f$
- 满足机器人的位置、速度、加速度连续性
- 同时满足可执行性约束：

$$q_{min} \le q(t) \le q_{max}$$

$$\dot{q}_{min} \le \dot{q}(t) \le \dot{q}_{max}$$

$$\ddot{q}_{min} \le \ddot{q}(t) \le \ddot{q}_{max}$$

- 求取机器人完成该作业目标的最小执行时间t_f及对应的轨迹
- 思路：
  - 以最大性能加速到最大加速度，并尽可能的维持最大加速度
  - 当快要到达最大速度时以最大性能降低加速度至0

3.3 最小时间轨迹规划算法

- 思路:
  - 加速过程：加速度连续
    - ✓ 以最大性能加速到最大加速度，并尽可能的维持最大加速度
    - ✓ 当快要到达最大速度时以最大性能降低加速度至0
  - 匀速过程：尽量维持最大速度运行
  - 减速过程：加速度连续
    - ✓ 以最大性能加速到最大加速度，并尽可能的维持最大加速度
    - ✓ 当快要到达目标时，以最大性能降低加速度至目标加速度

3.3 最小时间轨迹规划算法

- 思路（7段轨迹规划，加速度规划）
  - 加速过程：加速度连续
    - ✓ 以最大性能加速到最大加速度
    - ✓ 尽可能的维持最大加速度
    - ✓ 当快要到达最大速度时以最大性能降低加速度至0
  - 匀速过程：尽量维持最大速度运行
  - 减速过程：加速度连续
    - ✓ 以最大性能加速到最大加速度
    - ✓ 尽可能的维持最大加速度
    - ✓ 当快要到达目标时，以最大性能降低加速度至目标加速度

3.3 最小时间轨迹规划算法思路

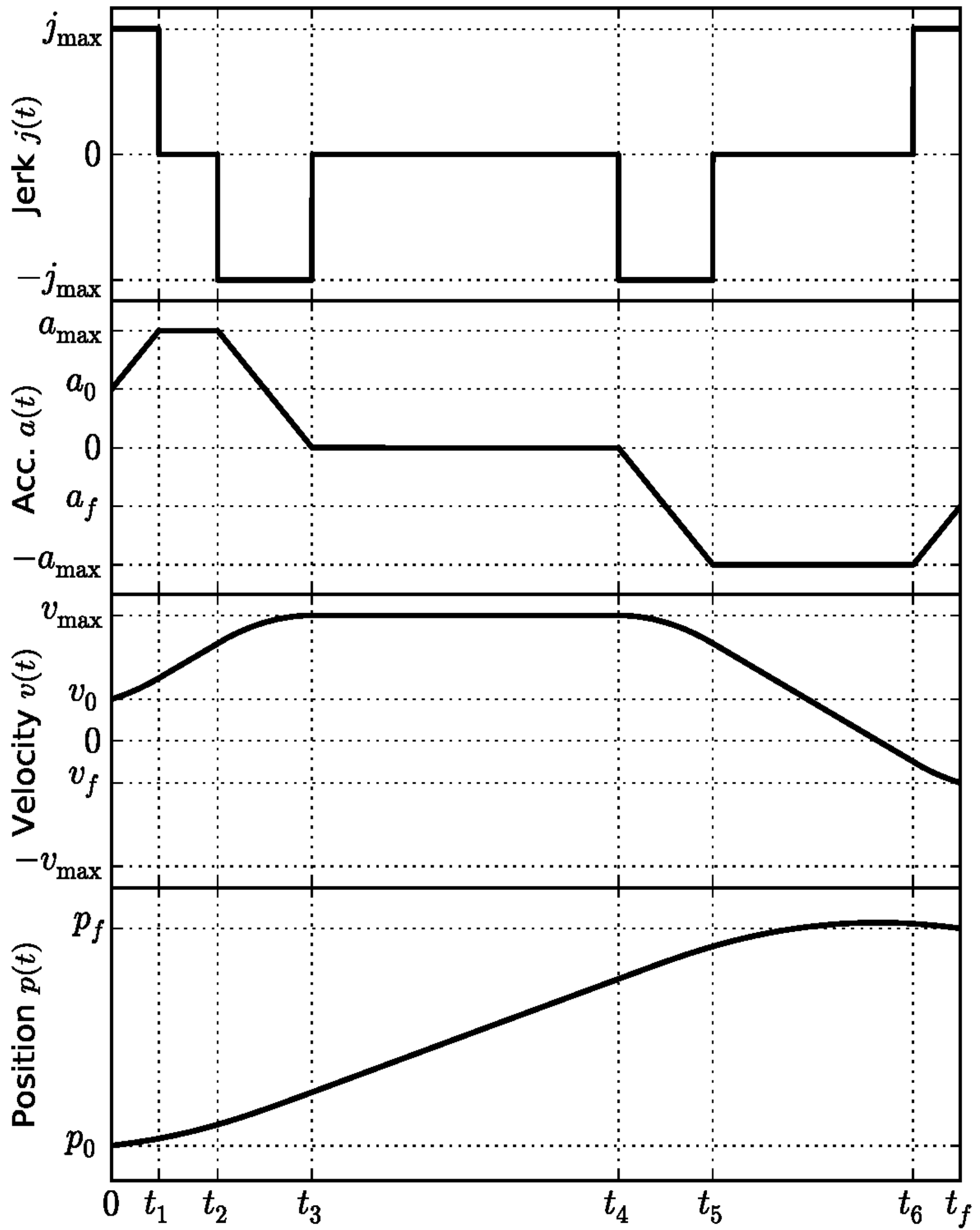
- 7段轨迹规划：（加速度规划）
  - 加速过程：加速度连续
    - ✓ 以最大性能加速到最大加速度：$\ddot{q}_1(t) = a_{10} + a_{11}t, \ddot{q}_{i1} = \ddot{q}_0, \ddot{q}_{f1} = a_{max}, a_{11} = j_{max}$
    - ✓ 尽可能的维持最大加速度：$\ddot{q}_2(t) = a_{20} = a_{max}$
    - ✓ 以最大性能降低加速度至0：$\ddot{q}_3(t) = a_{30} + a_{31}t, \ddot{q}_{i3} = a_{max}, \ddot{q}_{f3} = 0, a_{31} = -j_{max}$
  - 匀速过程：尽量维持最大速度运行：$\ddot{q}_4(t) = 0$
  - 减速过程：加速度连续
    - ✓ 以最大性能加速到最大加速度：$\ddot{q}_5(t) = a_{50} + a_{51}t, \ddot{q}_{i5} = 0, \ddot{q}_{f5} = -a_{max}, a_{51} = -j_{max}$
    - ✓ 尽可能的维持最大加速度：$\ddot{q}_6(t) = a_{60} = -a_{max}$
    - ✓ 以最大性能降低加速度至目标加速度:$\ddot{q}_7(t) = a_{70} + a_{71}t, \ddot{q}_{i7} = 0, \ddot{q}_{f7} = -a_{max}, a_{71} = j_{max}$

3.3 最小时间轨迹规划算法

- 满足机器人规划的给定目标：
  - 初始状态： q_i, $\dot{q}_i = 0$, $\ddot{q}_i = 0$
  - 终止状态： q_f, $\dot{q}_f = 0$, $\ddot{q}_f = 0$
- 满足机器人的位置、速度、加速度连续性
- 同时满足可执行性约束：

$$\dot{q}(t) \le |\dot{q}_{max}|, \ddot{q}(t) \le |\ddot{q}_{max}|, \ddot{q}(t) \le |\ddot{q}_{max}|$$

- 求取机器人完成该作业目标的最小执行时间t_f及对应的轨迹



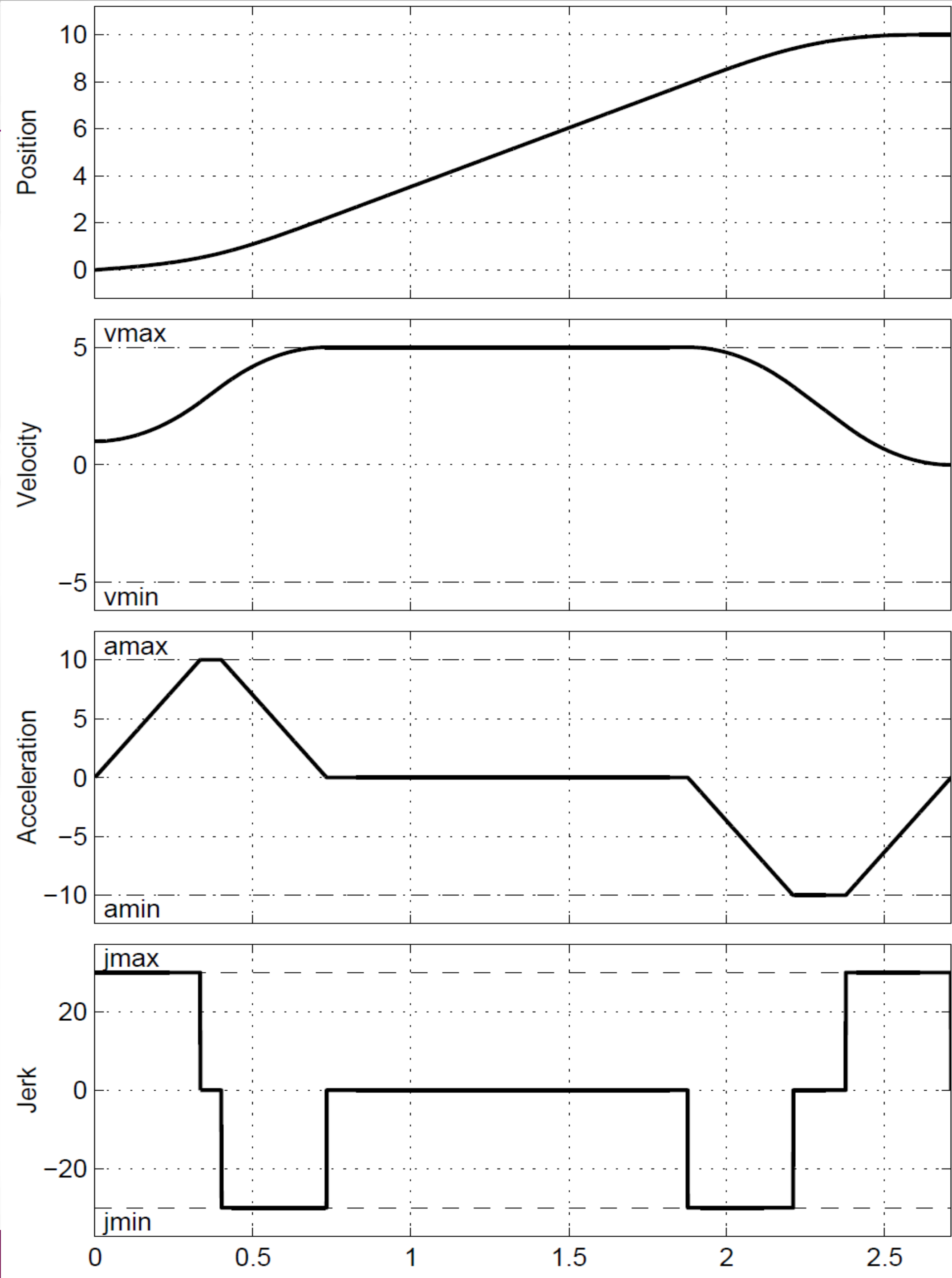
3.3 最小时间轨迹规划算法

- 加速过程：加速度连续
  - 以最大性能加速到最大加速度：
    - ✓ 判断能否加到最大加速度：

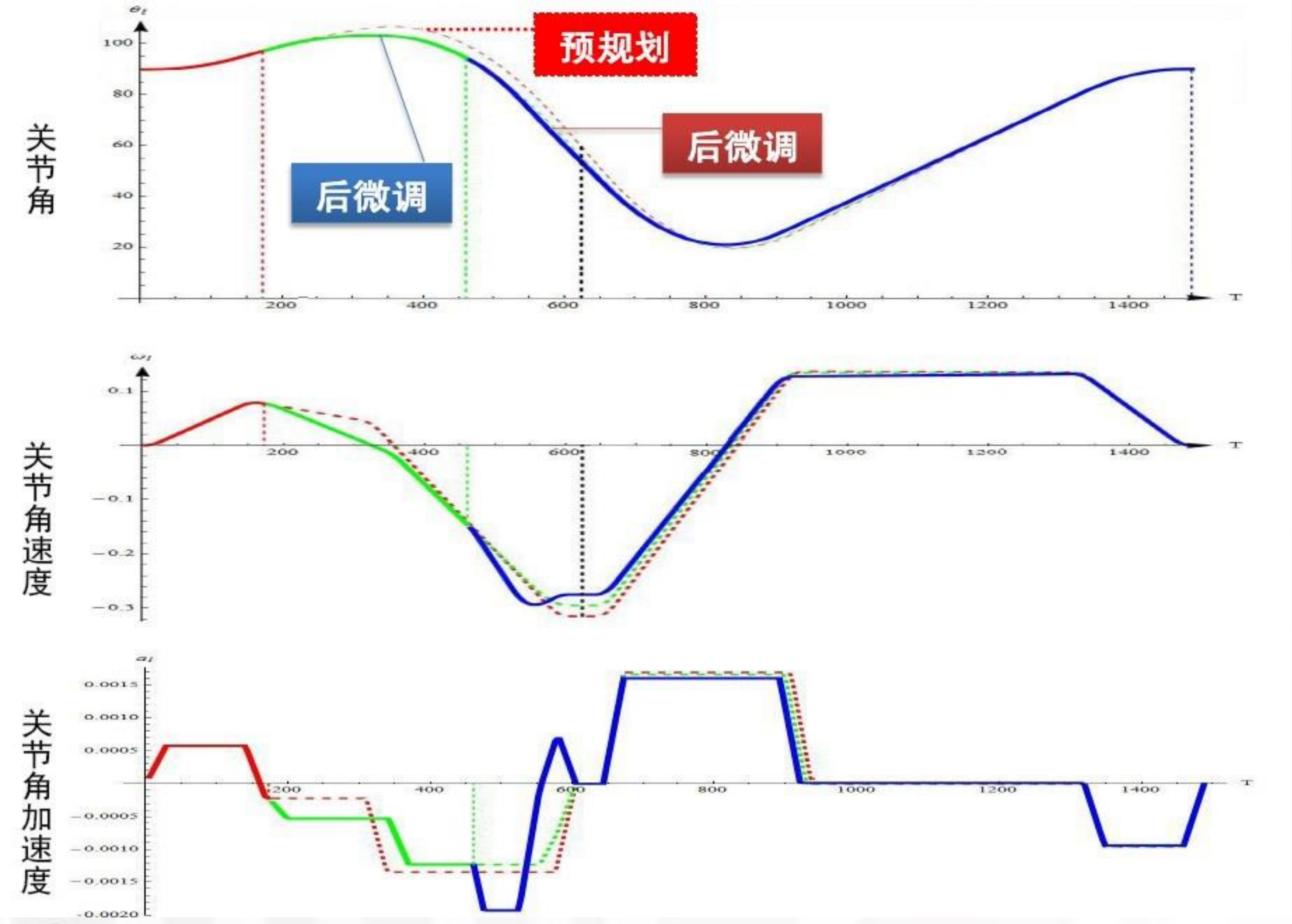
$$t_1 = t_3 = \frac{a_{max}}{j_{max}} \Rightarrow \Delta v = \frac{a_{max}^2}{j_{max}}$$与v_{max}比较, 求t_2

  - 减速过程：同理可求t_5，t_6，t_7
  - 匀速过程：
    - ✓ 判断可否达到最大速度：

已知t_1，t_2，t_3，t_5，t_6，t_7，求Δq与$q_f - q_0$比较, 求t_4



3.3 最小时间轨迹规划算法——多段规划



3.3 最小时间轨迹规划算法——多轴同步规划

- 计算各个关节最小执行时间$t_{fi}, i = 1:n$
- 求取最大的执行时间:

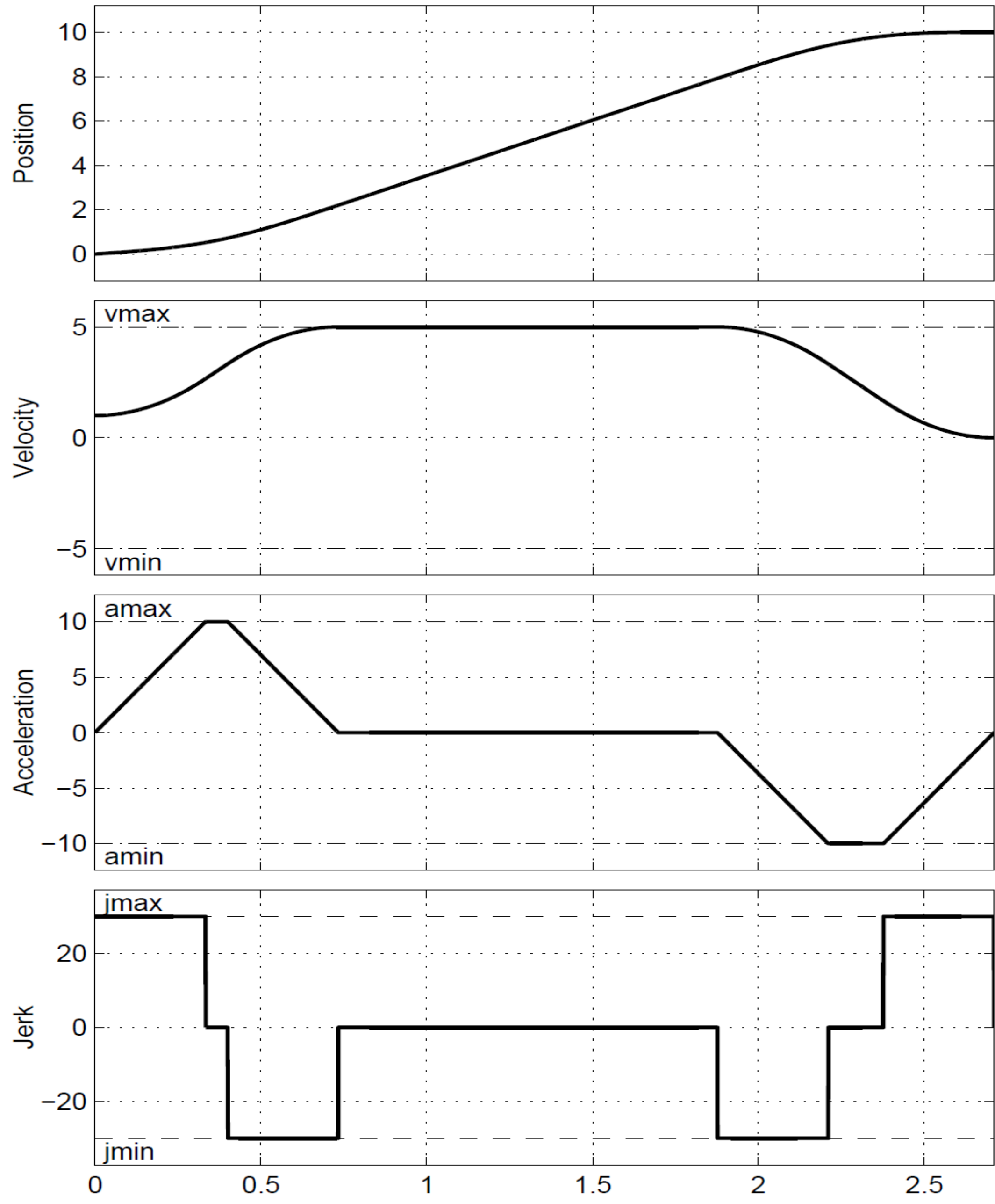
$$t_f = \max[t_{fi}], i = 1:n$$

- 各关节按照求得的执行时间t_f重新规划
  - □ 等比缩放：仅适用于$\dot{\boldsymbol{q}}_i = \ddot{\boldsymbol{q}}_i = \dot{\boldsymbol{q}}_f = \ddot{\boldsymbol{q}}_f = \boldsymbol{0}$

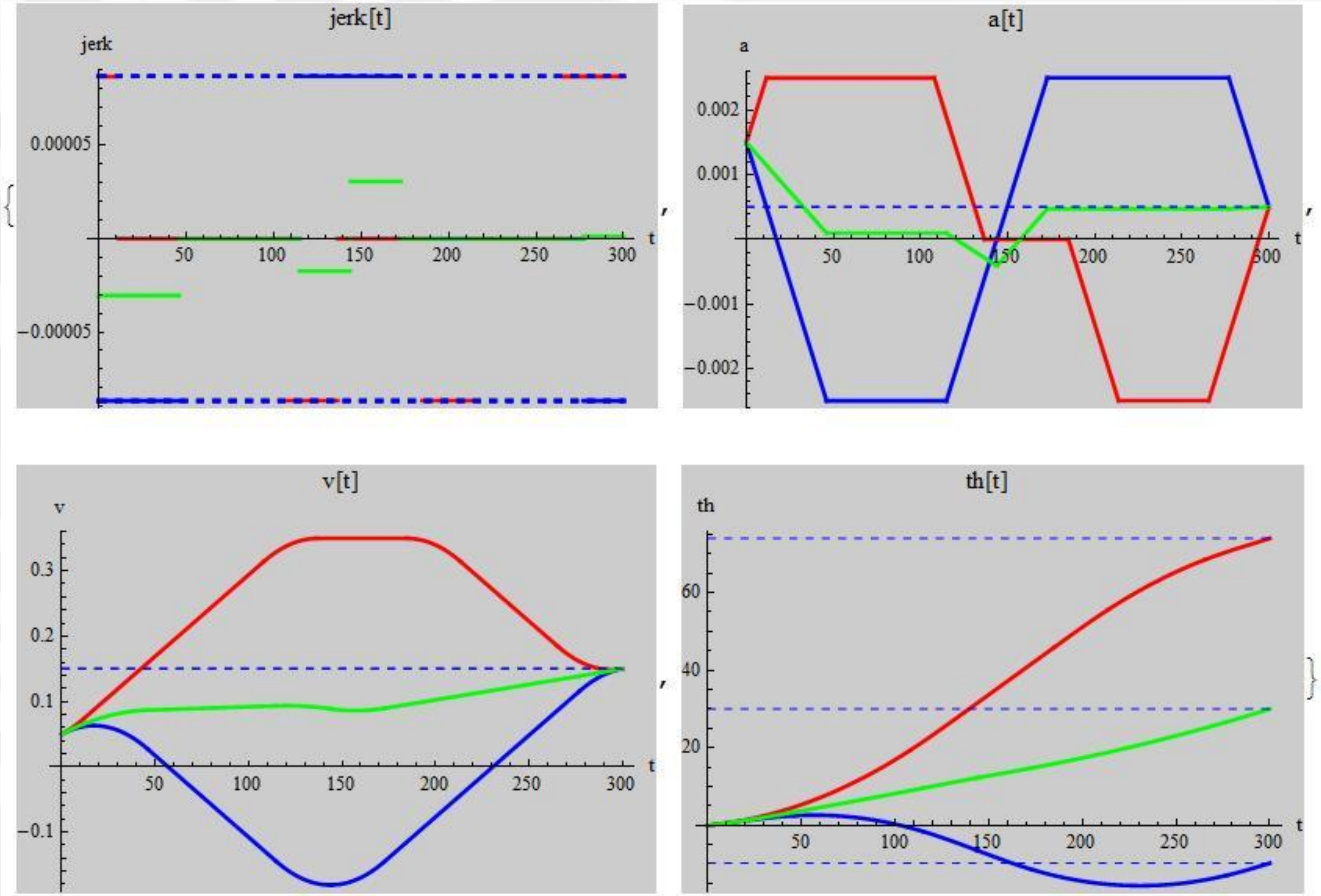
$$\Delta s_i = v_{max}(t_f - t_{fi})$$

$$k_i = \frac{(q_{if} - q_{i0})}{(q_{if} - q_{i0}) + \Delta s_i}$$

  - □ 最小Jerk轨迹规划:



3.3 最小Jerk轨迹规划



04

样条曲线轨迹规划

Lagrange Dynamics Algorithm

南開大學 Nankai University

天津市智能机器人技术重点实验室
Tianjin Key Laboratory of Intelligent Robotics
南开大学机器人与信息自动化研究所
Institute of Robotics & Automatic Information System

第七章 机器人轨迹规划

《机器人学导论》

孙雷 教授

Tel:13512967601

Email: sunl@nankai.edu.cn

2020年5月27日