第六章 欧几里德空间

- 内积的定义与性质
- 向量的模、单位向量
- 向量的夹角
- 正交组、标准正交组
- 正交基、标准正交基(底)
- **施密特正交化方法**
- **正交矩阵、正交变换**

§6.1 欧几里德空间

§6.1.1 向量的标准内积

一、内积的定义及性质

定义1：设V是实线性空间(数域为R)，若对于V内任意一对向量α,β按照某一法则在R中有一个唯一确定的实数$\langle\alpha,\beta\rangle$与之对应，且满足条件：

(I) $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$；

(II) $\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle=\langle\alpha,\gamma\rangle+\langle\beta,\gamma\rangle$；$(\gamma\in V)$

(III) $\langle k\alpha,\beta\rangle=k\langle\alpha,\beta\rangle$；$(k\in R)$

(IV) $\langle\alpha,\alpha\rangle\geq 0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时$\langle\alpha,\alpha\rangle=0$；

则实数 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 称为向量 α,β 的标准内积，简称为内积.
定义了内积的实线性空间称为欧几里得空间，简称欧氏空间.

注：有的书上对内积用(α,β)表示

注意：

定义1是个抽象定义，不同的实线性空间中的内积可以有完全不同的内容与形式.

同一个实线性空间中也可以定义不同的内积，而构成不同的欧氏空间.

例1：在R^n中，对于任意向量$\alpha^T=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\beta^T=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

定义 $\langle\alpha,\beta\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=\alpha^T\beta$ (1)

显然设$\gamma^T=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$，$k\in R$ ，则

(Ⅰ) $\langle\alpha,\beta\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=y_1x_1+y_2x_2+\cdots+y_nx_n=\langle\beta,\alpha\rangle$

(II) $\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle=(x_1+y_1)z_1+(x_2+y_2)z_2+\cdots+(x_n+y_n)z_n$

$=\left(x_1z_1+x_2z_2+\cdots+x_nz_n\right)+\left(y_1z_1+y_2z_2+\cdots+y_nz_n\right)$

$=\langle\alpha,\gamma\rangle+\langle\beta,\gamma\rangle$

(III) $\langle k\alpha,\beta\rangle=kx_1y_1+kx_2y_2+\cdots+kx_ny_n=k\langle\alpha,\beta\rangle$

(IV) $\langle\alpha,\alpha\rangle=x_1^2+x_2^2+,\cdots,+x_n^2\geq0$ ，当且仅当 $\alpha=0$时$\langle\alpha,\alpha\rangle=0$；

显然，它适合内积定义中的条件 (I)-(IV)，这样R^n 中按(1)得到一个内积，于是R^n关于这个内积成为一个欧几里得空间.

例2：在R^n中，对于任意向量 $\alpha^T=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\beta^T=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

定义 $$\langle\alpha,\beta\rangle=x_1y_1+2x_2y_2+\cdots+nx_ny_n \qquad (2)$$

易验证它也适合内积定义的条件(I)-(IV)，这样R^n中按(2)也得到一个内积，这时R^n关于这个内积也构成一个欧氏空间

.

注意：由于内积的定义不同，这是两个不同的欧氏空间.
以后凡说到欧氏空间R^n均指例1所述的欧氏空间.

例3：在连续函数空间 $C[a,b]$中，对任意的 $f(x),g(x)\in C[a,b]$

定义 $\langle f(x),g(x)\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx$

由定积分的性质可知：设 $f(x),g(x),h(x)\in C[a,b],k\in R$

(1) $\langle g(x),f(x)\rangle=\int_a^b g(x)f(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)dx=\langle f(x),g(x)\rangle$

(2) $\langle g(x)+f(x),h(x)\rangle=\int_a^b (g(x)+f(x))h(x)dx$

$=\int_a^b g(x)h(x)dx+\int_a^b f(x)h(x)dx=\langle g(x),h(x)\rangle+\langle f(x),h(x)\rangle$

(3) $\langle kf(x),g(x)\rangle=\int_a^b kf(x)g(x)dx=k\int_a^b f(x)g(x)dx=k\langle f(x),g(x)\rangle$

(4) 当 $f(x)$不是恒等于0时

$$\langle f(x), f(x)\rangle = \int_a^b f(x)f(x)dx = \int_a^b (f(x))^2 dx > 0$$

因此，该定积分满足内积定义的4个条件，因而它也成为 $C[a, b]$中的一个内积. 于是，关于这个内积$C[a, b]$也成为一个欧氏空间.

欧几里得空间的一些基本性质：

(I) $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$

定义1的条件(I)表明内积是对称的，故有

$$\langle \alpha, k\beta \rangle = \langle k\beta, \alpha \rangle = k\langle \beta, \alpha \rangle = k\langle \alpha, \beta \rangle = \langle k\alpha, \beta \rangle$$

$$\langle \alpha, \beta + \gamma \rangle = \langle \beta + \gamma, \alpha \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle + \langle \gamma, \alpha \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle$$

又 $\langle 0,\alpha\rangle=\langle 0+0,\alpha\rangle=\langle 0,\alpha\rangle+\langle 0,\alpha\rangle=2\langle 0,\alpha\rangle$

故 $\langle 0,\alpha\rangle=0$

性质1 $\forall\alpha\in V$，有 $\langle 0,\alpha\rangle=0$，特别 $\langle 0,0\rangle=0$.

性质2 α 是V中某一向量，若对于 $\forall\beta\in V$，有 $\langle\alpha,\beta\rangle=0$，则 $\alpha=0$.

性质3 $\forall\alpha_i,\beta_j\in V$ 及 $\forall a_i,b_j\in R\ (i=1,2,\cdots,l;\ j=1,2,\cdots,t)$,

恒有 $$\left\langle\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i,\sum_{j=1}^{t}b_j\beta_j\right\rangle=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{t}\langle\alpha_i,\beta_j\rangle a_ib_j$$

二、向量的长度及性质

定义2：$\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}$称为欧氏空间$V$中向量$\alpha$的**模**（或**长度**），记为$|\alpha|$，即$|\alpha|=\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}$．

注：模为1的向量称为**单位向量**，若$\alpha\neq 0$, 则$\dfrac{1}{|\alpha|}\alpha$就是一个单位向量，这样的到的向量一般称为把$\alpha$**单位化**（或**标准化**）．

向量的长度具有下述性质： $\forall\lambda\in \boldsymbol{R},\forall\alpha,\beta\in V$

1. **非负性**　当$\alpha\neq 0$时, $|\alpha|>0$; 当$\alpha=0$时, $|\alpha|=0$.

2. 齐次性 $|\lambda\alpha| = |\lambda||\alpha|$

3. 三角不等式 $|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|$ 【后面证明】

柯西——布涅柯夫斯基不等式

定理：对于欧氏空间中任意二向量α, β，恒有

$$\langle\alpha,\beta\rangle^2 \le \langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle \qquad \left(或\ |\langle\alpha,\beta\rangle| \le |\alpha||\beta|\right)$$

其中等号成立的充要条件是α与β线性相关.

证明：若α, β线性相关，则有$\beta=0$, 或者$\alpha=k\beta$, $(k\in R)$

在上述情况下，容易证明题设的等号成立.

若α, β线性无关，则对于任意$k \in R$, 都有 $k\alpha + \beta \neq 0$

则 $\langle k\alpha+\beta, k\alpha+\beta\rangle = \langle k\alpha, k\alpha\rangle + 2\langle k\alpha, \beta\rangle + \langle \beta, \beta\rangle$

$= \langle \alpha, \alpha\rangle k^2 + 2\langle \alpha, \beta\rangle k + \langle \beta, \beta\rangle > 0$

(这是一个关于k的一元二次多项式.)

因为 $\langle \alpha, \alpha\rangle > 0$, 因此上述不等式成立的条件是

$$\Delta = 4\langle \alpha, \beta\rangle^2 - 4\langle \alpha, \alpha\rangle\langle \beta, \beta\rangle < 0$$

即 $\langle \alpha, \beta\rangle^2 < \langle \alpha, \alpha\rangle\langle \beta, \beta\rangle$

总之恒有 $\langle \alpha, \beta\rangle^2 \leq \langle \alpha, \alpha\rangle\langle \beta, \beta\rangle$ 或 $\left|\langle \alpha, \beta\rangle\right| \leq |\alpha||\beta|$

下面证等号成立的充要条件是α, β线性相关。

充分性：若α, β线性相关，则上面已证等号成立。

必要性：若上式等号成立，（用反证法），假设α, β线性无关，则 由上面分析立得：

$$\langle \alpha, \beta \rangle^2 < \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle$$

矛盾，故必有α, β线性相关。

应用实例

如在前面例1所定义的线性空间R^n中，由该定理的不等式得到：对于任意实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 有不等式

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

或者

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$$

又如 $$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

前面三角不等式性质的证明：

证明在欧氏空间中，对于任意向量α, β有

$$|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|$$

证： $|\alpha+\beta|^2 = \langle \alpha+\beta, \alpha+\beta \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle + 2\langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \beta \rangle$

$$= |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\langle \alpha, \beta \rangle$$

$$\le |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\langle \alpha, \beta \rangle|$$

由前面定理知 $|\langle \alpha, \beta \rangle| \le |\alpha||\beta|$ ，于是

$$|\alpha+\beta|^2 \le |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha||\beta| = (|\alpha|+|\beta|)^2$$

开方得 $|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|$

两个非零向量的夹角

定义3： 非零向量α, β的夹角(α, β)规定为

$$\theta = \arccos\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha||\beta|}, \quad (0 \le \theta \le \pi)，记为\ (\widehat{\alpha, \beta})$$

若两个非零向量的夹角为$\pi/2$，则称这两个向量**正交**或**相互垂直**，记 $\alpha \perp \beta$.

显然，两个正交向量的内积为零，即若$\alpha \perp \beta$则 $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$.

特别的, 规定零向量与任何向量都正交.

向量α, β正交 $\Leftrightarrow$ $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$.

注:

1）只有零向量才与自己正交.

2）当向量正交时，存在类似勾股定理结论

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

欧氏空间中向量的距离

在一个欧氏空间中，两个向量α, β的距离定义为 $|\alpha - \beta|$，有时用符号 $d(\alpha, \beta)$ 表示.

例4 在欧氏空间R^n中，向量组 $e_1=(1,0,\cdots,0)$，$e_2=(0,1,\cdots,0)$，…，$e_n=(0,0,\cdots,1)$ 两两正交.

例5 在欧氏空间里，若向量α与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$中每个向量正交，则$\alpha$与该向量组的任意线性组合也正交.

例**6** 求向量$\alpha=(1,2,2,3)$与$\beta=(3,1,5,1)$的夹角.

解: $\because \cos\theta=\dfrac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|}=\dfrac{18}{3\sqrt{2}\cdot 6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\therefore \theta=\dfrac{\pi}{4}.$

§6.1.2 标准正交基底

定义 欧氏空间V中一组两两正交的非零向量，称为V的一个正交(向量)组. 若该正交组中每个向量都是单位向量，则该正交组称为标准正交组.

定理1 欧氏空间中的正交组是线性无关组.

由定理1知，n维线性空间中，正交组所含向量个数不会超过n.

如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是n维欧氏空间的一个正交组，那么它是V的一个基底，称为正交基(底). 如果正交基底是一个标准正交组，则称为标准正交基(底)，或者 规范正交基.

标准正交基 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 满足关系式：

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

例1 验证向量组 $\alpha_1 = (0,1,0)$, $\alpha_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\alpha_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ **构成 R^3 的一个标准正交组.**

容易验证： $|\alpha_1| = |\alpha_2| = |\alpha_3| = 1$ **，且**

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle = \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle = 0$$

这又是一个单位向量构成的向量组，故又是一个标准正交组. 它们构成 R^3 的一个标准正交基底.

定理2 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是欧氏空间V的一组线性无关向量，则存在V的一个正交组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ ，其中 β_k 是向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ $(k=1,2,\cdots,m)$ 的线性组合.

满足要求的正交组为

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1 \\ \beta_k=\alpha_k-\sum_{j=1}^{k-1}\dfrac{\langle\alpha_k,\beta_j\rangle}{\langle\beta_j,\beta_j\rangle}\beta_j \quad (k=2,\cdots,m) \end{cases}$$

该求解方法称为施密特(*Schimidt*)正交化方法.

书上证明：180-181页.

定理3 任何$n(n\geq 1)$维欧氏空间，一定有正交基底，从而也一定有标准正交基底.

例2 由R^3的一个基底

$$\alpha_1=(1,1,1),\qquad \alpha_2=(0,1,2),\qquad \alpha_3=(2,0,3)$$

求R^3的一个标准正交基底.

解：先由施密特(*Schimidt*)正交化方法求出等价的正交组，得

$$\beta_1=\alpha_1=(1,1,1)$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle \alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle \beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=(0,1,2)-\frac{3}{3}(1,1,1)$$

$$=(0,1,2)-(1,1,1)=(-1,0,1)$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2$$

$$=(2,0,3)-\frac{5}{3}(1,1,1)-\frac{1}{2}(-1,0,1)=\frac{5}{6}(1,-2,1)$$

再单位化，得

$$\eta_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\eta_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

则 $[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$ **就是** R^3 **的一个标准正交基底.**

例3 已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,求一组非零向量$\alpha_2,\alpha_3$,使$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$两两正交.

解: α_2,α_3 **应满足方程** $\alpha_1^T x=0$**,即** $x_1+x_2+x_3=0$.

它的基础解系为 $\xi_1=(1,0,-1)^T$, $\xi_2=(0,1,-1)^T$.

把基础解系正交化,即为所求.

$$\alpha_2=\xi_1=(1,0,-1)^T,$$

$$\alpha_3=\xi_2-\frac{\langle\xi_2,\alpha_2\rangle}{\langle\alpha_2,\alpha_2\rangle}\alpha_2$$

$$=(0,1,-1)^T-\frac{1}{2}(1,0,-1)^T=(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})^T.$$

定理4 设 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$是$n$维欧氏空间$V$的一个标准正交基底. 向量$\alpha,\beta$在该基底下的坐标分别为

$$X^T=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\qquad Y^T=(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

则 $$\langle\alpha,\beta\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=\langle X,Y\rangle=X^TY$$

$$|\alpha|=\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}=\sqrt{\langle X,X\rangle}=|X|$$

注：定理4 给出的公式显示出在欧氏空间中引入标准正交基的优越性. 任意的欧氏空间定义的任意内积，如果两个向量用同一标准正交基表示的话，这两个向量的内积等于它们的坐标构成的n维向量在R^n中的内积.

小 结

- 内积的定义与性质(重点)
- 一些概念：向量的模、单位向量，向量的夹角，正交组、标准正交组，正交基、标准正交基(底)等
- 施密特正交化方法（重点）

思考题

1. 求一单位向量，使它与

$$\alpha_1 = (1,1,-1,1),\quad \alpha_2 = (1,-1,-1,1),\quad \alpha_3 = (2,1,1,3)$$

都正交.

2. (习题12) 设V是n维欧氏空间，α是V的一个固定向量，$M = \{ \beta \in V : \langle \beta, \alpha \rangle = 0 \}$，证明：

(1) M是V的一个子空间.

(2) 当 $\alpha \neq 0$ 时，$\dim\{M\} = n-1$.

思考题解答

1．解： 设所求向量为$x=(a,b,c,d)$,则由题意可得：

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}=1, \\ a+b-c+d=0, \\ a-b-c+d=0, \\ 2a+b+c+3d=0. \end{cases}$$

解之可得 ：$x=(-\frac{4}{\sqrt{26}},0,-\frac{1}{\sqrt{26}},\frac{3}{\sqrt{26}})$

或 $x=(\frac{4}{\sqrt{26}},0,\frac{1}{\sqrt{26}},-\frac{3}{\sqrt{26}})$.

解2：设单位向量β与$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$都正交，

以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为行向量的矩阵为$A$，则有 $A\beta^T=0$

求解方程组 $AX=0$，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} X = 0$$

得基础解系 $X_1 = (-\frac{4}{3}, 0, -\frac{1}{3}, 1)^T$

单位化得 $\beta = \frac{1}{|X_1|} X_1^T = \frac{3}{\sqrt{26}}(-\frac{4}{3}, 0, -\frac{1}{3}, 1) = (\frac{4}{\sqrt{26}}, 0, \frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{3}{\sqrt{26}}).$

2. (习题12) 设V是n维欧氏空间，α是V的一个固定向量，$M=\{\beta\in V:\langle\beta,\alpha\rangle=0\}$，证明：

(1) M是V的一个子空间.

(2) 当 $\alpha\neq 0$ 时，$\dim\{M\}=n-1$.

证明:(1)显然M非空，对于$\forall\beta_1,\beta_2\in M$, $\forall\ k\in R$, 有

$$\langle\beta_1,\alpha\rangle=0,\quad \langle\beta_2,\alpha\rangle=0.$$

则 $\langle\beta_1+\beta_2,\alpha\rangle=\langle\beta_1,\alpha\rangle+\langle\beta_2,\alpha\rangle=0+0=0.$

$$\langle k\beta_1,\alpha\rangle=\langle k\beta_1,\alpha\rangle=k\langle\beta_1,\alpha\rangle=0.$$

因此 $\beta_1+\beta_2\in M$，$k\beta_1\in M$.

所以M是V的一个子空间.

(2) 由V是n维欧氏空间且$\alpha\neq 0$知，在V中必可找到$n-1$个向量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$使$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$为线性无关向量组.

设对该向量组正交化得向量组为 $\beta=\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$.

于是$\langle\beta_i, \alpha\rangle=0$, $i=1,2,\ldots,n-1$,

则$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$都属于$M$, 且它们线性无关，从而

$\dim\{M\}\geq n-1$.

若$\dim\{M\}=n$, 则 $M=V$, 于是$\alpha\in M$,

而由$\alpha\neq 0$知$\langle\alpha, \alpha\rangle\neq 0$，则$\alpha\notin M$，这与$M=V$矛盾.

因此只能 $\dim\{M\}=n-1$.