第一章 行列式

第二节 行列式的主要性质

本节目的与重点：

讨论行列式的性质，利用这些性质可以化简行列式的计算。

记

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \left|A^T\right|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式$|A|$与行列式$|A^T|$互称为转置行列式.

行列式|A|的转置行列式有时也记为|A′|

性质1 行列式的行与列的顺序互换，其值不变。

（行列互换值不变）

证明 记 $|A| = \det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$\left|A^T\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$\because b_{ij} = a_{ji}\,(i, j = 1, 2, \cdots, n)$，按定义

$$\left|A^T\right| = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n}$$

$$= \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}.$$

又因为行列式|A|可表示为

$$|A| = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}.$$

故 $|A| = \left|A^T\right|.$ 证毕

性质1表明:

在行列式中行与列的地位式对称的、平等的，所以凡是有关行的性质，对列也同样成立。

性质2 交换行列式任意两行（或两列），行列式仅改变符号．

(两行互换变号)

即： 若

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} \longleftarrow \text{s行} \longrightarrow \\ \\ \longleftarrow \text{t行} \longrightarrow \end{matrix} \quad |B|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ M & M & & M \\ a_{t1} & a_{t2} & L & a_{tn} \\ M & M & & M \\ a_{s1} & a_{s2} & L & a_{sn} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则|A|＝－|B|.

分析：设$|A|=|a_{ij}|$, $|B|=|b_{ij}|$

$|B|$中任取一项，并将其元按$|B|$中行的自然顺序排列成

$$b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{sj_s}\cdots b_{tj_t}\cdots b_{nj_n}$$

对应

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{sj_t}\,L\;\; a_{nj_n}$$

证明：考察行列式$|B|$中的任意一项（按照行自然排列）

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{nj_n} \qquad \text{(B)}$$

它是取自$|B|$中不同行不同列的n个数的乘积，显然在行列式A中也有这样一项，按照行标自然排列有

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n} \qquad \text{(A)}$$

反之亦然。

所以，$|A|$和$|B|$有相同的项，且所对应项的绝对值相同。

$|B|$中项的符号为： $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}$

(j_s与j_t互换)

$$= -(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}$$

恰为该项在$|A|$中符号的相反数

因此，$|A|$和$|B|$的每一项绝对值相等，但符号相反，

故：$|B| = -|A|$.

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

性质3 行列式中某行（列）的元有公因子k，则k可以提到行列式符号外边。

(一行的公因子可以提出)

(以一数k乘行列式的一行就相当于用k乘此行列式。)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明： 利用行列式的定义

$$\text{左式} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$$

$$= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

$$= \text{右式}$$

性质4 若行列式某行(如第i行)的元均可表为两项之和

$$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}\qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

则此行列式就等于两个行列式的和，而这两个行列式除这一行（第i行）的元分别为 b_{ij} 和 c_{ij} 外，其余各行与原行列式的一样。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（某行项为两项和，则为两行列式和）

注：可以推广到某一行为多组数的和的情形。

证明：【按照定义立刻证明出】

性质5　若行列式的

（1）某行(列)元全为零,

（2）两行(列)元对应相等,

（3）两行(列)元对应成比例,

则行列式的值为零.

证明：略

性质６ 把行列式的某列（行）的k倍加到另一列(行) 上，行列式值不变.

（某行倍数加到另一行，值不变。）

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \Lambda & a_{1i} & \Lambda & a_{1j} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & \Lambda & a_{2i} & \Lambda & a_{2j} & \Lambda & a_{2j} \\ M & & M & & M & & M \\ a_{n1} & \Lambda & a_{ni} & \Lambda & a_{nj} & \Lambda & a_{nj} \end{vmatrix}$$

$k\times$

$$\underset{c_i + kc_j}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i} + ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i} + ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni} + ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix}$$

证明：上式的右端

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \Lambda & (a_{1i}+ka_{1j}) & \Lambda & a_{1j} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & \Lambda & (a_{2i}+ka_{2j}) & \Lambda & a_{2j} & \Lambda & a_{2j} \\ \mathrm{M} & & \mathrm{M} & & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ a_{n1} & \Lambda & (a_{ni}+ka_{nj}) & \Lambda & a_{nj} & \Lambda & a_{nj} \end{vmatrix}$$

$$\overset{4}{=}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix}$$

$$\overset{5}{=}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix}$$

=左端

行列式性质总结：

- 行列互换（转置）值不变（性质1）
- 两行互换，反号（性质2）
- 一行的公因子可以提出（性质3）
- 某行元为两项和，则等于两行列式和（性质4）
- 某行为零、两行相同或成比例，值为零（性质5）
- 某行倍数加到另一行，值不变（性质6）

利用行列式的性质可以简化行列式的计算。由于上（下）三角形行列式容易计算，故常利用行列式的性质把行列式化成上（下）三角形行列式再进行计算（三角形法）。

应用举例

计算行列式常用方法：利用运算$r_i + kr_j$把行列式化为上（下）三角形行列式，从而算得行列式的值.

例 1

$$D = \begin{vmatrix} \boxed{1 & -1 & 2 & -3 & 1} \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\text{解}\quad D=\begin{vmatrix} \boxed{1 & -1 & 2 & -3 & 1} \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{r_2+3r_1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2+3r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-2) \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\overset{r_3-2r_1}{=\!=\!=} \begin{matrix} (-4)\times \\ \\ \oplus \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-3) \\ \\ \oplus \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\xlongequal[\quad]{\substack{r_3-3r_1\\ r_4-4r_1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 + r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \oplus$$

$$\xlongequal{r_4 + r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \times(-2) \oplus$$

$$\underline{\underline{r_5 - 2r_3}} \; - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \times 4 \\ \oplus \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{r_5 + 4r_4}} \; - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -(-2)(-1)(-6) = 12.$$

例2：计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix}$$

解：第2和3行减去第1行

$$b^2-ca-(a^2-bc)=b^2-a^2+c(b-a)$$
$$=(b-a)(a+b+c)$$

$$原式= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 0 & b-a & (b-a)(a+b+c) \\ 0 & c-a & (c-a)(a+b+c) \end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{0}$$

例3 计算n ($n\geq 2$)阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解 将第2,3,…,n 列都加到第1列,得

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

第2，3，…，*n*行都减去第1行

原式＝
$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

箭形行列式

【第2,3,…,*n*列都加到第1列】

$$= \begin{vmatrix} [a+(n-1)b] & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

例4：计算n ($n\geq2$)阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ x_2+1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix}$$

解：

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ x_2 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ 1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix}$$（拆项法）

$$=\begin{vmatrix} x_1 & 2 & \cdots & n \\ x_2 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

(讨论)

当n=2时，$D_2=\begin{vmatrix} x_1 & 2 \\ x_2 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}=x_1-x_2,$

当n>2时，$D_n=0$。

注意：n阶行列式计算时，有时需要讨论n的值。

小结

行列式的6个性质(行列式中行列地位同等, 凡是对行成立的性质对列也同样成立).

计算行列式常用方法：(1)利用定义;(2)利用性质把行列式化为上（下）三角形行列式，从而算得行列式的值.

思考题

分析下面解题是否正确，找出问题所在。

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ 的值。

错解：依据行列式的性质，把行列式的第1行加到第2行上去，再把行列式的第2行加到第1行上去得：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_1+r_2]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2．已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 5$ ，计算 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$

错解:

$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2 \times 5 = 10$$

3.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

思考题

计算4阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

(已知 $abcd=1$)

思考题解答

解

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$
= abcd\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}
$$

$= 0.$ (注意$abcd=1$)