第八章

离散时间系统的最优控制

第八章 离散系统的最优控制

8.1 解离散时间无约束最优控制问题的变分法

（由于变分法的结果是最大值原理的特殊情形，不细讲）

8.2 离散的最大值原理

8.3 离散的线性二次型问题

- 8.3.1 离散线性二次型问题的解
- 8.3.2 解离散线性二次型问题的MATLAB程序

离散系统的最优控制的重要性

- 1.许多实际问题本身就是离散的：

  如交通管制问题、河流污染控制

- 2.计算机控制
- 3.连续最优控制难以求解的两点边值问题，可以化为易于用计算机求解的离散化的两点边值问题

§8.2　离散的最大值原理

- 定理8.1　　设离散时间系统的状态方程为：

$$x(k+1)=f(x(k),u(k),k)\quad x(0)=x_0\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

目标函数为

$$J=\theta(x(N),N)+\sum_{k=0}^{N-1}L(x(k),u(k),k)$$

求控制 $u(k)\in U,\quad k=0,1,\cdots,N-1$ 使 J 最小（最大）。

假设 $f(\bullet),\theta(\bullet)$ 和 $\mathrm{L}(\bullet)$ 都是其自变量 $x(k)$ 的连续可微函数，

集合 $\{f(x(k),u(k),k)|u\in U\}$ 对 $k=0,1,\cdots,N-1$ 和 $u\in U$ 是凸集.

设 N 固定，末端状态 $x(N)$ 自由

若 $u^*(k)$ 是使性能指标极小的最优控制序列，$x^*(k)$ 为相应的最优轨迹序列，则必存在 n 维向量序列 $\lambda(k)$，使得最优解满足如下条件：

（1）$x(k)$ 和 $\lambda(k)$ 满足下列差分方程（正则方程组）

$$\begin{cases} x(k+1)=\dfrac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k+1)}=f(x(k),u(k),k), \\ \lambda(k)=\dfrac{\partial H(k)}{\partial x(k)} \end{cases}$$

其中，离散哈密顿函数

$$\begin{aligned} H(k) &\overset{\Delta}{=} H(x(k),u(k),\lambda(k),k) \\ &= L(x(k),u(k),k)+\lambda^T(k+1)f(x(k),u(k),k) \end{aligned}$$

（2）边界条件与横截条件

$$x(0)=x_0\,,\qquad \lambda(N)=\frac{\partial\theta(x(N),N)}{\partial x(N)}$$

（3）离散哈密顿函数对最优控制序列取最小值

$$H^*(k)=\min_{u(k)\in U} H(k)$$

若控制变量 $u(k)$ 不受约束，则极值条件为 $\dfrac{\partial H(k)}{\partial u(k)}=0$

离散的最大值原理应用举例

【例8-1】 设离散系统的状态方程为

$$x(k+1)=1.3x(k)-0.3u(k) \qquad x(0)=5$$

求 $u(k)$ 使 $\frac{1}{2}\le u(k)\le 1$, 并使目标函数

$$J=\sum_{k=0}^{3}0.25[x(k)+u(k)]$$ 最小。

解 该问题的哈密顿函数为

$$H_k=0.25[x(k)+u(k)]+\lambda(k+1)[1.3x(k)-0.3u(k)]$$
$$=0.25x(k)+1.3\lambda(k+1)x(k)+[0.25-0.3\lambda(k+1)]u(k)$$

由最大值原理，$u^*(k)$ 应在约束条件 $1/2 \le u(k) \le 1$ 之下使 H_k 达最小值，于是

$$u^*(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{当} 0.25 - 0.3\lambda(k+1) > 0 \text{时} \\ 1 & \text{当} 0.25 - 0.3\lambda(k+1) < 0 \text{时} \end{cases}$$

协状态方程为

$$\lambda(k) = 0.25 + 1.3\lambda(k+1)$$

边界条件是 $\lambda(4) = 0.$ 由此可逐次解出：

$$\lambda(3) = 0.25, \lambda(2) = 0.575, \lambda(1) = 0.9975.$$

由于

$$0.25 - 0.3\lambda(1) < 0, \quad 0.25 - 0.3\lambda(2) > 0, \quad 0.25 - 0.3\lambda(3) > 0, \quad 0.25 - 0.3\lambda(4) > 0,$$

最优控制序列为

$$u^*(0) = 1, \quad u^*(1) = 1/2, \quad u^*(2) = 1/2, u^*(3) = 1/2$$

【例8-2】 设有若干台机器，每台机器可以做两种工作，

如果用 d 台机器做第一种工作可获利润 $3d$ 元，机器的损坏率为 $2/3$；

如果用 d 台机器做第二种工作，可获利润 $2.5d$ 元，机器的损坏率为 $1/3$。现考虑三年的生产周期，问如何安排生产计划可获得最大利润。

解 设第 k 年的机器总台数为 $x(k)$，第 k 年分配做第一种工作的机器为 $u(k)$台，显然满足不等式 $0 \le u(k) \le x(k)$，这是约束条件。描述这个系统的状态方程是：

$$x(k+1) = \frac{1}{3}u(k) + \frac{2}{3}[x(k) - u(k)] \Rightarrow x(k+1) = \frac{2}{3}x(k) - \frac{1}{3}u(k)$$

目标函数为

$$J = \sum_{k=0}^{2}[3u(k) + 2.5(x(k) - u(k))] = \sum_{k=0}^{2}[2.5x(k) + 0.5u(k)]$$

问题是求 $u^*(0), u^*(1), u^*(2)$ 使满足约束条件 $0 \le u(k) \le x(k)$，并使 J 最大。

该问题的哈密顿函数为

$$H_k = 2.5x(k) + 0.5u(k) + \lambda(k+1)\left[\frac{2}{3}x(k) - \frac{1}{3}u(k)\right]$$

$$= 2.5x(k) + \frac{2}{3}\lambda(k+1)x(k) + \left[0.5 - \frac{1}{3}\lambda(k+1)\right]u(k)$$

由 $H_k(x^*(k), \lambda^*(k+1), u^*(k), k) = \max\limits_{u \in U} H_k(x^*(k), \lambda^*(k+1), u(k), k)$

$$u^* = \begin{cases} x(k) & \text{当}0.5 - \frac{1}{3}\lambda(k+1) > 0\text{时} \\ 0 & \text{当}0.5 - \frac{1}{3}\lambda(k+1) < 0\text{时} \end{cases}$$

协状态方程和边界条件为

$$\lambda(k) = 2.5 + \frac{2}{3}\lambda(k+1) \qquad \lambda(3) = 0$$

由此可解出 $\lambda(2) = 2.5, \lambda(1) = \dfrac{12.5}{3}$，因此有

$$0.5 - \frac{1}{3}\lambda(1) < 0 \qquad u^*(0) = 0$$

$$0.5 - \frac{1}{3}\lambda(2) < 0 \qquad u^*(1) = 0$$

$$0.5 - \frac{1}{3}\lambda(3) > 0 \qquad u^*(2) = x(2)$$

由此得到最优生产计划为：前两年用全部机器做第二种工作，第三年将全部剩下的机器做第一种工作，这样获总利润最多。

§8.3　离散的线性二次型问题

8.3.1　离散的线性二次型问题的解

设系统的状态方程是线性的：

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \qquad x(0) = x_0 \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

目标函数是 x 和 u 的二次型：

$$J = \frac{1}{2}x^T(N)Fx(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)]$$

假设 $F, Q(k)$ ——对称半正定矩阵　$R(k)$——对称正定矩阵

问题是求 $u(k)$ 使 J 最小。

首先写出该问题的哈密顿函数

$$H(k)=\frac{1}{2}x^T(k)Q(k)x(k)+\frac{1}{2}u^T(k)R(k)u(k)+\lambda^T(k+1)[A(k)x(k)+B(k)u(k)]$$

由必要条件

$$\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)}=0 \quad \Rightarrow \quad R(k)u(k)+B^T(k)\lambda(k+1)=0$$

由于$R(k)$是正定矩阵，由上式可解出

$$u(k)=-R^{-1}(k)B^T(k)\lambda(k+1)$$

协状态方程及其边界条件为

$$\lambda(k)=Q(k)x(k)+A^T(k)\lambda(k+1) \qquad \lambda(N)=Fx(N)$$

设 $\lambda(k)=P(k)x(k)$

代入状态方程和协状态方程得到

$$x(k+1)=A(k)x(k)-B(k)R^{-1}(k)B^{T}(k)P(k+1)x(k+1)$$

$$P(k)\boldsymbol{x}(k)=Q(k)\boldsymbol{x}(k)+A^{T}(k)P(k+1)\boldsymbol{x}(k+1)$$

由边界条件 $\lambda(N)=Fx(N)$ 又得到 $P(k)$ 满足的边界条件

$$P(N)=F$$

通过推导得到最优控制

$$u(k)=-\{R(k)[I+R^{-1}(k)B^{T}(k)P(k+1)B(k)]\}^{-1}B^{T}(k)P(k+1)A(k)x(k)$$

$$=-[R(k)+B^{T}(k)P(k+1)B(k)]^{-1}B^{T}(k)P(k+1)A(k)x(k)$$

$$P(k)=Q(k)+A^{T}(k)P(k+1)A(k)-A^{T}(k)P(k+1)B(k)[R(k)$$

$$+B^{T}(k)P(k+1)B(k)]^{-1}B^{T}(k)P(k+1)A(k)$$

为了节省计算量，引进如下记号：

$$Z_1(k)=Q(k)+A^T(k)P(k+1)A(k)$$

$$Z_2(k)=B^T(k)P(k+1)A(k)$$

$$Z_3(k)=R(k)+B^T(k)P(k+1)B(k)$$

则

$$u(k)= -Z_3^{-1}(k)Z_2(k)\mathrm{x}(\mathrm{k})$$

$$P(k)=Z_1(k)-Z_2^T(k)Z_3^{-1}Z_2(k)$$

求最优控制的步骤

- **第1步** 令 $P(N)=F$
- **第2步** 对 $k=N-1$ 计算 $Z_1(k),Z_2(k),Z_3(k)$
- **第3步** 计算 $K(k)=-Z_3^{-1}(k)Z_2(k)$
- **第4步** 计算 $P(k)=Z_1(k)-Z_2^T(k)Z_3^{-1}(k)Z_2(k)$
- **第5步** 对 $k=N-2,\cdots,0$重复第2至第4步
- **第6步** $u^*(k)=K(k)x(k)$即所求

【**例8-3**】设系统的状态方程为

$$x(k+1)=a(k)x(k)+b(k)u(k)$$

初始状态为 $x(0)=2$, 求 $u(k), k=0,1,2$ 使

$$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2}[q(k)x^2(k)+r(k)u^2(k)]+\frac{1}{8}x^2(3)$$

最小，式中

$$a(0)=\frac{1}{2} \qquad b(0)=\frac{1}{6} \qquad q(0)=0 \qquad r(0)=1$$

$$a(1)=3 \qquad b(1)=\frac{1}{2} \qquad q(1)=12 \qquad r(1)=2$$

$$a(2)=4 \qquad b(2)=2 \qquad q(2)=2 \qquad r(2)=1$$

解 按上述求解步骤，

第1步 令 $P(3)=\frac{1}{4}$

第2步 对 $k=2$

$$Z_1(2)=q(2)+a^2(2)P(3)=6 \qquad Z_2(2)=b(2)P(3)a(2)=2$$

$$Z_3(2)=r(2)+b^2(2)P(3)=2$$

第3步 计算 $K(2)=-Z_3^{-1}(2)Z_2(2)=-1$

第4步 计算 $P(2)=Z_1(2)-Z_2^2(2)Z_3^{-1}(2)=4$

第5步 对 $k=1,0$ 重复第2－4步，得到

$$K(1)=-2 \qquad K(0)=-\frac{3}{2}$$

第6步 所求最优控制为

$$u^*(0)=-\frac{3}{2}x(0) \qquad u^*(1)=-2x(1) \qquad u^*(2)=-x(2)$$

u^*必是线性二次型问题的最优控制

定理8.2 控制向量

$$u(k) = -[R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k)]^{-1} \cdot B^T(k)P(k+1)A(k)x(k)$$

是线性二次型问题的解，并且 J 的最小值为

$$J^* = \frac{1}{2} x^T(0)P(0)x(0)$$

式中 $P(k)$ 是式

$$P(k) = Q(k) + A^T(k)P(k+1)A(k) - A^T(k)P(k+1)B(k)[R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k)]^{-1} B^T(k)P(k+1)A(k)$$

的解。

与连续的线性二次型问题类似，当 $A(k), B(k), Q(k), R(k)$ 都是常阵，Q、R 正定，(A, B) 能控。并且 $N=\infty$ 时，得到非时变控制器

$$u^{*}=-[R+B^{T}PB]^{-1}B^{T}PAx(k)$$

式中 P 是代数黎卡提方程的解

$$P=Q+A^{T}PA-A^{T}PB[R+B^{T}PB]^{-1}B^{T}PA$$

应用控制 u^{*} 时得到的闭环系统是渐近稳定的。

当Q半正定，$Q=C^{T}C,(C,A)$ 能观测时，以上结果仍成立。

P的递推解法

【例8-4】 已给定常线性系统

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1.5 & 1\\ -0.5 & 0\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u(k) \qquad x(0)=\begin{bmatrix}-1\\ 0.5\end{bmatrix}$$

求 u 使

$$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[x^T(k)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}x(k)+u^2(k)\right] \quad \text{最小}$$

解 取 $P_0=I$，由 P 的递推解法得

$$P_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2.5 & 1.5\\ 1.5 & 1\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0.25 & 0.5\\ 0.5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.0833 & 1.3166\\ 1.3166 & 0.8333\end{bmatrix}$$

继续迭代可得到（P_2，P_3的计算略）

$$P_4=P_5=\begin{bmatrix}2.2402 & 0.7900\\ 0.7900 & 0.5159\end{bmatrix}$$

将它取为P，代入解式u^*得到最优控制：

$$u^*=-[R+B^TPB]^{-1}B^TPAx(k)$$

$$u^*(k)=[-0.5694 \quad -0.4514]x(k)$$

▪8.3.2 解离散线性二次型问题的MATLAB程序

初始化A，B，Q， R，F

```
P(N)=F;
for k=N-1:0
        Z1(k)=Q(k)+A(k)'*P(k+1)*A(k);
        Z2(k)=B(k)'*P(k+1)*A(k);
        Z3(k)=R(k)+B(k)'*P(k+1)*B(k);
        K(k)=-inv(Z3(k))*Z2(k);
        P(k)=Z1(k)-Z2(k)'*inv(Z3(k))*Z2(k);
end
```

连续时间线性定常系统的二次型最优控制

- Matlab提供了求解连续黎卡提矩阵代数方程的函数
  - care()和
  - lqr(),

基于这2个函数求得黎卡提方程的解,就可以构成线性最优二次型控制律和闭环控制系统。

  - 下面分别介绍这2个函数的使用方法及在连续时间线性定常系统的二次型最优控制系统设计中的应用。

(1) 函数care()

- 函数care()的主要调用格式为

  [P,L,K] = care(A,B,Q,R)

  [P,L,K] = care(A,B,Q)

其中,输入格式中的矩阵A和B分别为线性定常连续系统状态空间模型的系统矩阵和输入矩阵,

- ✓ Q和R分别二次型目标函数的加权矩阵。

- 第2种调用格式的矩阵R缺省为单位矩阵。

- 输出格式的P为连续黎卡提矩阵代数方程

$$A^{\tau}P+PA-PBR^{-1}B^{\tau}P=-Q$$

的对称矩阵解,K为线性二次型最优控制的状态反馈矩阵$R^{-1}B^{\tau}P$, L为闭环系统的极点。

(2) 函数lqr()

- 函数lqr()的主要调用格式为:

  [K,P,L] = lqr(A,B,Q,R)

其中,输入输出格式中各矩阵的意义与函数care()一致。

❑ **Matlab问题8-1** 连续时间线性定常系统的二次型最优控制

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

在二次型目标函数

$$J = \int_0^\infty \left[\boldsymbol{x}^\tau \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{u}^2 \right] \mathrm{d}t$$

下的最优控制律并仿真闭环控制系统的状态响应。

- **Matlab程序m8-1**如下。

```
A=[-1 -2; -1 3];  B=[2; 1];      % 赋值状态方程各矩阵
Q=[2 0; 0 1];   R=2;             % 赋值二次型目标函数的权矩阵
x0=[2; -3];                      % 赋值初始状态
K=lqr(A,B,Q,R)                   % 求线性二次型最优控制的状态反馈矩阵K
csys=ss(A-B*K,B,[],[]);          % 建立闭环系统模型
[y,t,x]=initial(csys,x0);        % 求闭环系统的状态响应
plot(t,x);                       % 绘制状态响应曲线
```

- **Matlab程序m8-1执行结果**如下.

```
K =   -3.7630   15.6432
```

- 因此,状态反馈控制律为$\boldsymbol{u}=-[-3.7630\ \ 15.6432]\boldsymbol{x}$,闭环系统的状态响应如图所示。

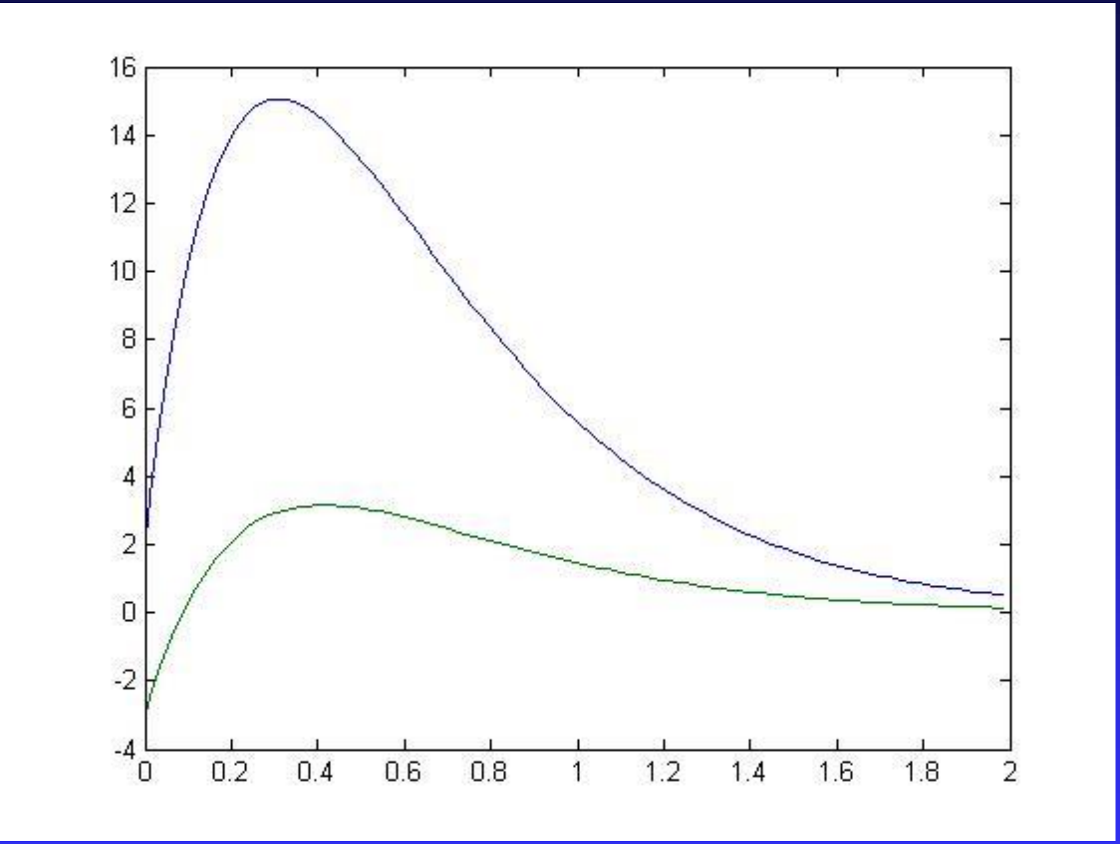

图 线性二次型最优控制闭环系统状态响应

离散时间线性定常系统的二次型最优控制

- Matlab提供了求解离散黎卡提矩阵代数方程的函数dare()和dlqr(),基于这2个函数求解黎卡提方程所得的解,就可以构成线性最优二次型控制律和控制系统。
  - 函数dare()和dlqr()的主要调用格式为

    [P,L,K] = dare(G,H,Q,R)

    [P,L,K] = dare(G,H,Q)

    [K,P,L] = dlqr(G,H,Q,R)

  其中输入格式中的矩阵G和H分别为线性定常离散系统状态空间模型的系统矩阵和输入矩阵,其它符号的意义与连续系统的情况一致。

- 这2个函数所求解的离散黎卡提矩阵代数方程为

$$G^{\tau}PG-P-G^{\tau}PH(H^{\tau}PH+R)^{-1}H^{\tau}PG=-Q$$

所求得的线性二次型最优控制的状态反馈矩阵K为

$$K=(H^{\tau}PH+R)^{-1}H^{\tau}PG。$$

- **Matlab问题7-2** 试在Matlab中求解线性连续离散系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.96 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

在二次型目标函数

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\boldsymbol{x}^{\tau}\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+1.2\boldsymbol{u}^{2}\right]$$

下的最优控制律。

- **Matlab程序m8-2**如下。

```
G=[0 1; -0.96 2];  H=[0; 1];   % 赋值状态方程各矩阵
Q=[0.5 0; 0 1];   R=1.2;       % 赋值二次型目标函数的权矩阵
[P,L,K]=dare(G,H,Q,R)          % 求线性二次型最优控制的状态反馈矩阵K,
                                 闭环极点L和黎卡提方程的解P
```

- **Matlab程序m8-2执行结果**如下.

```
P = 1.3722   -1.5107
   -1.5107    4.4793
L = 0.3443 + 0.2903i
   0.3443 - 0.2903i
K = -0.7572    1.3114
```

- 由上述计算结果可知,闭环的极点0.3443 ± 0.2903i位于单位圆内,闭环稳定且使给定的二次型目标函数最优。