



第一章 行列式

第四节(补) 行列式的计算与证明

目的：利用**定义、性质、展开**等对行列式计算或证明。

方法：首先观察和分析行列式特点，然后**试一试**化简，行不通再试别的方法。

已学过的方法：

- **对角线法**：二阶采用。
- **三角型法**：用性质处理化简成三角形行列式。
- **展开降阶法**：处理使某一行(列)有较多零，再展开。
- **拆项法**：把某一行(列)元素都拆成两(多)项，再分解。
- **化为箭形行列式**
- **归纳法**：例如 *Vandermonde* 行列式的证明过程。
- **转化为 *Vandermonde* 行列式。**

例1 计算 $n+2$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

特点：

(1) 有好多0，可考虑按照某行(列)展开或者*Laplace*定理.

(2) 每行有两个非0元且和相等，可考虑各列都加到第1列.

解：法1 按照某行(列)展开
(按照第一行展开)

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\text{原式}= a \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} & & & & 1 \\ & a & & & 1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & a \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$+ (-1)^{1+n+2} \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\begin{aligned} &= a \times a^{n+1} + (-1)^{n+3} \times (-1)^{n+1+1} \times \begin{vmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{vmatrix}_n \\ &= a^{n+2} + (-1)^{2n+5} \cdot a^n \\ &= a^n(a^2 - 1) \end{aligned}$$

解：法2 利用 *Laplace* 定理按照第1、 $n+2$ 行展开

$$\begin{vmatrix} \boxed{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{a} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} (-1)^{(1+n+2)+(1+n+2)} \begin{vmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a & \\ & & & & a \end{vmatrix}_n = a^n (a^2 - 1)$$

解：法3 利用各行和相等，各列都加到第1列上去

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1+a & a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1+a & 0 & a & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1+a & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 1+a & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (1+a)a \cdots a(a-1) = a^n(a^2-1)$$

例2 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1 + x \end{vmatrix}$$

解：有这么多0，可以按照第一列展开得到

$$D_n = x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1 + x \end{vmatrix}_{n-1} + a_n \times (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= xD_{n-1} + a_n$$

故 $D_{n-1} = xD_{n-2} + a_{n-1}$ ， 而 $D_2 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & a_1 + x \end{vmatrix} = a_2 + a_1x + x^2$

因此由递推关系可得 $D_n = a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i}x^i + x^n$

递推法

法2 第2列乘以 x 加到第1列，第3列乘以 x^2 加到第1列，...，第 n 列乘以 x^{n-1} 加到第1列

$$D_n = D_n = D_n = \left| \begin{array}{c|ccc|c} & & 0 & 0 & 0 & x \\ & & 0 & 0 & x^2 & 0 \\ & & \vdots & & & \vdots \\ & & 0 & x^{n-1} & 0 & 0 \\ \hline a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i} x^i + x^n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1 + x \end{array} \right|$$

$\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{array}$

$$= (a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i} x^i + x^n) \times (-1)^{n+1} \times (-1)^{n-1}$$

$$= a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i} x^i + x^n$$

另外，(1) 第 n 列 x 倍加到第 $n-1$ 列，然后第 $n-1$ 列 x 倍加到第 $n-2$ 列.....

(2) 按照第 n 行展开计算（比较麻烦）

例3 计算

$$|D_n| = \begin{vmatrix} \underline{a_1} + b_1 & \underline{a_2} & \cdots & \underline{a_n} \\ \underline{a_1} & \underline{a_2} + b_2 & \cdots & \underline{a_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{a_1} & \underline{a_2} & \cdots & \underline{a_n} + b_n \end{vmatrix} \quad (b_i \neq 0)$$

解：第2, 3, ..., n 行都减去第1行得到

$$\begin{aligned}
 |D_n| &= \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -b_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_1 & 0 & b_3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -b_1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 + b_1 \sum_{i=2}^n \frac{a_i}{b_i} & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \\
 &= (a_1 + b_1 + b_1 \sum_{i=2}^n \frac{a_i}{b_i}) b_2 b_3 \cdots b_n \\
 &= (1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i}) b_1 b_2 \cdots b_n
 \end{aligned}$$

注：也可以第1, ..., $n-1$ 行
减去第 n 行

法2 采用加边法（升级法）

$$|D_n| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 + b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}_{n+1}$$

另一种加边方式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$= b_1 b_2 \cdots b_n \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} \right)$$

例4 计算 n 阶行列式

$$|D_n| = \begin{vmatrix} a & c & c & \cdots & c \\ b & a & c & \cdots & c \\ b & b & a & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解：若 $b=c$ 则容易计算出 $|D_n| = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}$
 若 $b \neq c$ ，从第1到 $n-1$ 行，每行减去其后面一行，得到

$$|D_n| = \begin{vmatrix} a-b & c-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-b & c-a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b & c-a \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

再按第一列展开得：

$$|D_n| = (a-b) \begin{vmatrix} a-b & c-a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b & c-a \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}_{n-1} + b(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} c-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a-b & c-a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b & c-a \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (a-b) |D_{n-1}| + b(-1)^{n+1} (c-a)^{n-1}$$

$$= (a-b) |D_{n-1}| + b(a-c)^{n-1} \quad (*)$$

这是关于 $|D_n|$ 的递推公式，又 $|D_2| = a^2 - bc$ ，我们利用递推公式不难算出 $|D_n|$ 的值。

对于本题，由于 $|D_n^T|$ 与 $|D_n|$ 形状完全相同，只是 b 与 c 的位置互换了，于是将 (*) 式中的 b 与 c 互换得到

$$|D| = (a - b) |D_{n-1}| + b(a - c)^{n-1} \quad (*)$$

$$|D| = |D_n^T| = (a - c) |D_{n-1}| + c(a - b)^{n-1} \quad (**)$$

由(*)和(**)消去 $|D_{n-1}|$ 得到

$$|D_n| = \frac{b(a - c)^n - c(a - b)^n}{b - c}, \quad (b \neq c)$$

小结

- 一般行列式都有多种解法，要首先观察和分析行列式的特点，然后试一试化简；
- 在化简过程中，看是否和已知典型行列式相像，若是则可仿照该种行列式处理方法；
- 化简行列式常见方法：
 对角线法、三角型法、展开降阶法、拆项法、化为箭形行列式、归纳法、转化为 *Vandermonde* 行列式、递推法、加边法（升级法）。

练习

1. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

解：将第1行分别加到第2,...,n行得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

$$= n!$$

2. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解：（各行和相等）

将第2到n+1列加到第1列，并从第1列提出公因子

$$D = \left(x + \sum_{i=1}^n a_i \right) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

多种方法，如：第2到n+1行都减去第1行；第2到n+1列都减去第1列的合适倍数等。本例采取第二种。

$$= \left(x + \sum_{i=1}^n a_i \right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x - a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & x - a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_2 & \cdots & x - a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(x + \sum_{i=1}^n a_i \right) (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

3.证明

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = x^2 y^2$$

证：有多种方法，如第2，4两行
分别减去第1，3两行得：

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 0 & -y & -y \end{vmatrix}$$

$$= xy \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= xy \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= xy \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x^2 y^2$$

4. 计算 $n(n>2)$ 阶行列式

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$$

解：各行的公因子提出之后
为范德蒙行列式

$$\begin{aligned} |D| &= n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= n! \prod_{1 \leq j < i \leq n} (i - j) \\ &= n!(n-1)!(n-2)! \cdots 2! \end{aligned}$$

法2 加边后为范德蒙行列式

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{0 \leq j < i \leq n} (i - j) \\ &= n!(n-1)!(n-2)! \cdots 2! \end{aligned}$$

思考题

1. 设 a, b, c 是方程 $x^3 + px + q = 0$ 的三个根, 证明

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = 0$$

证明: 由于 $x^3 + px + q = 0$ 的三个根为 a, b, c , 故有

$$x^3 + px + q = (x - a)(x - b)(x - c)$$

即
$$x^3 + px + q = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$$

比较系数得

$$\begin{cases} -(a + b + c) = 0 \\ (ab + bc + ca) = p \\ -abc = q \end{cases}$$

于是

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = 0$$

2. 计算 $n(n>2)$ 阶行列式——循环行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

解：第 $2, \dots, n$ 列加到第1列并提出公因子

$$D = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

第 i 行的 -1 倍加到 $i+1$ 行, $i=n-1, n-2, \dots, 1$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

很熟悉了!

第2,...,n-1列加到第1列

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \left[(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (-1)(-n)^{n-2} \right] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}$$