信号与系统

南开大学 计算机与控制工程学院
机器人与信息自动化研究所
张建勋
Email: Zhangjx@nankai.edu.cn
Tel: 022-23505706-805

信号与系统

本科生专业基础课

数字信号处理

硕士研究生专业基础课

信号与系统分析、信号处理具有丰富、悠久的历史，是一门横跨多个学科的技术。

信号分析与处理技术的发展得益于它的理论、应用与实际需求与功能实现技术之间的紧密结合。

应用范围的日益扩大，对信号与系统分析、信号处理高性能的追求，催生了信号处理的各种高级算法，促进了信号处理系统的理论、技术与器件（软件、硬件）的发展。

教学用书与参考书

A. V. Oppenheim,《信号与系统》，西安交大出版社，刘树棠 等译

任何一本《信号与系统》的专著，编著，教科书都可以当做本课程的教材。

应用领域：

- 通讯领域

信号分析与处理技术、微电子技术、光纤通讯技术、无线通讯技术为通讯领域带来了革命性的变化。

- 控制领域

对控制系统的分析与设计，信号的分析与处理技术的数字化，提高了系统的控制质量和可靠性。

- 社会经济领域

大量离散数据（经济数据）的积累和应用，对社会、经济系统的运行情况进行分析、建模、预测等都成为了现实。

第一章 信号与系统分析

本章引入信号与系统的数学描述与表示方法，用数学方法阐述隐含在信号与系统分析之中的基本概念，从而建立起分析体系。使我们对信号与系统的性质和表示方法有一个深入而直观的理解。

§1 信号

- “信号”广泛存在于环境中；

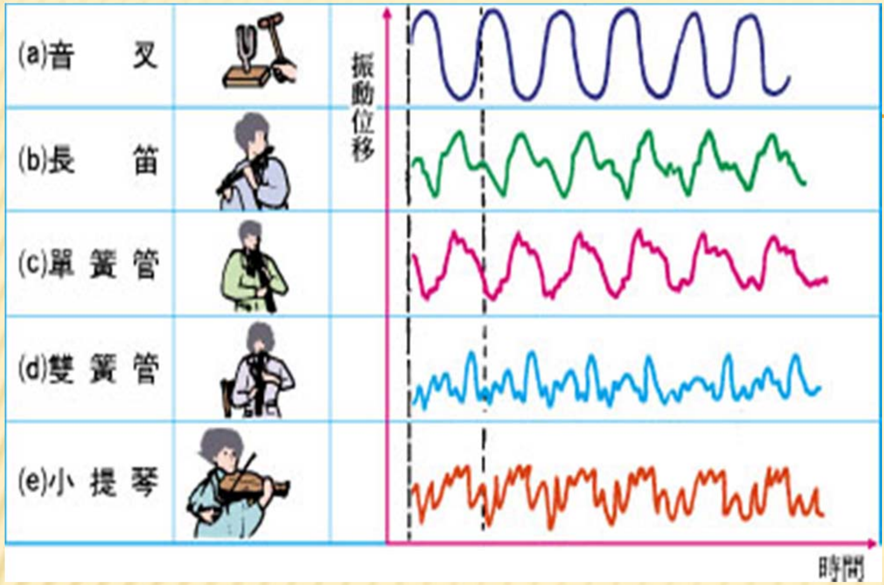
在我们的周围存在着各种信号，我们听到的，看到的，嗅到的，感觉到的各种现象，都是我们接收到的信号。

- “信号”以各种形式存在着；

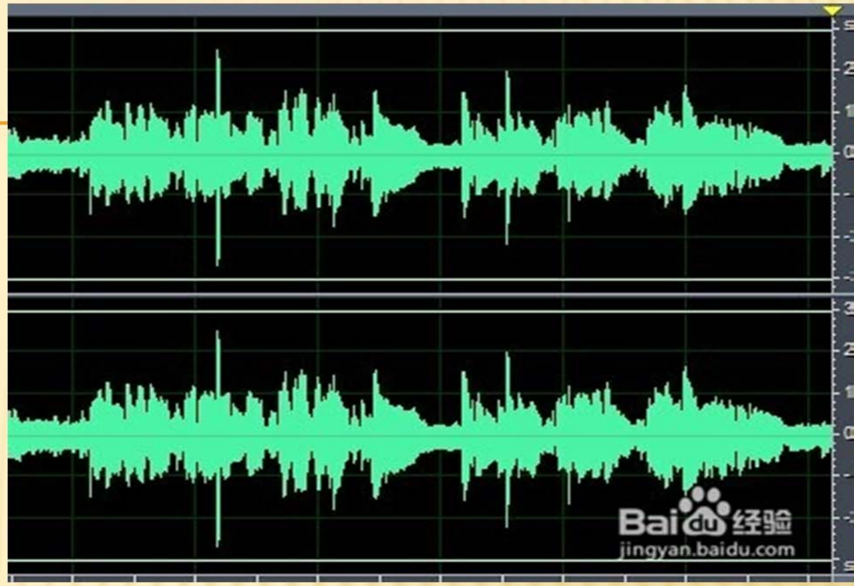
生活中接触到的声音、光亮、色彩等等，物理系统中的温度、压力、电压、作用力等等都是信号的表现形式。

- “信号”包括的极为广泛。

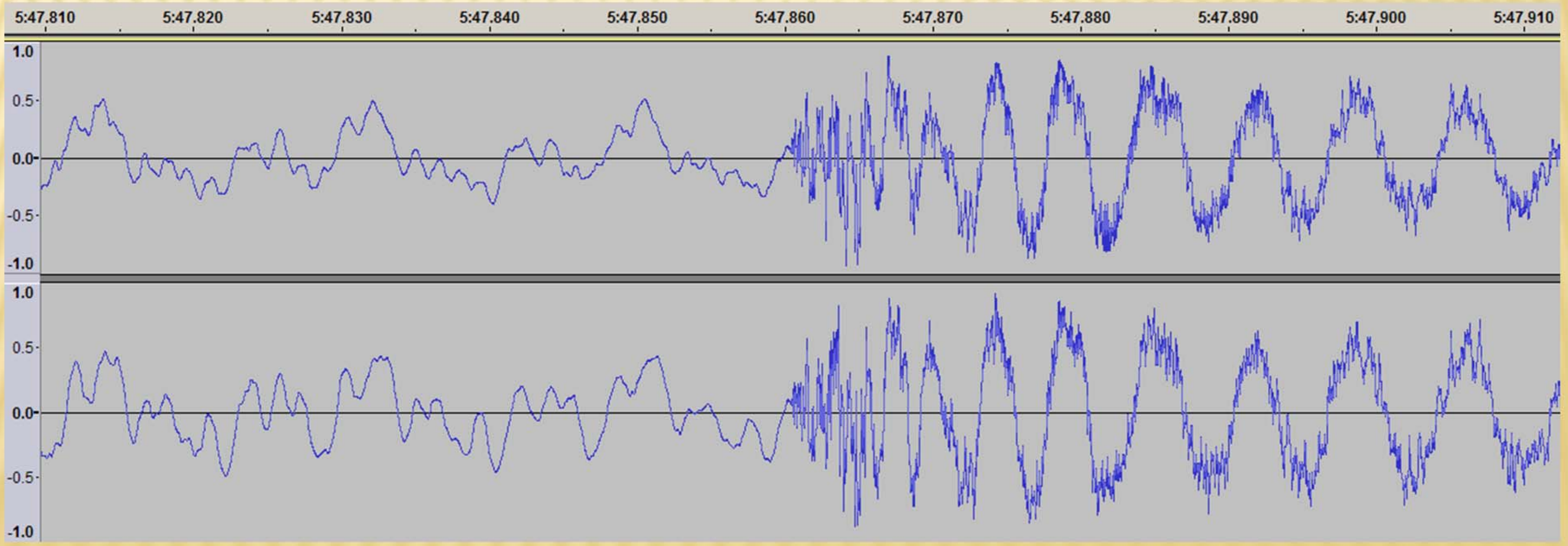
形形色色的信号存在于社会的各个角落，充满我们的日常生活和工作环境中，我们也在与各种信号进行交互。



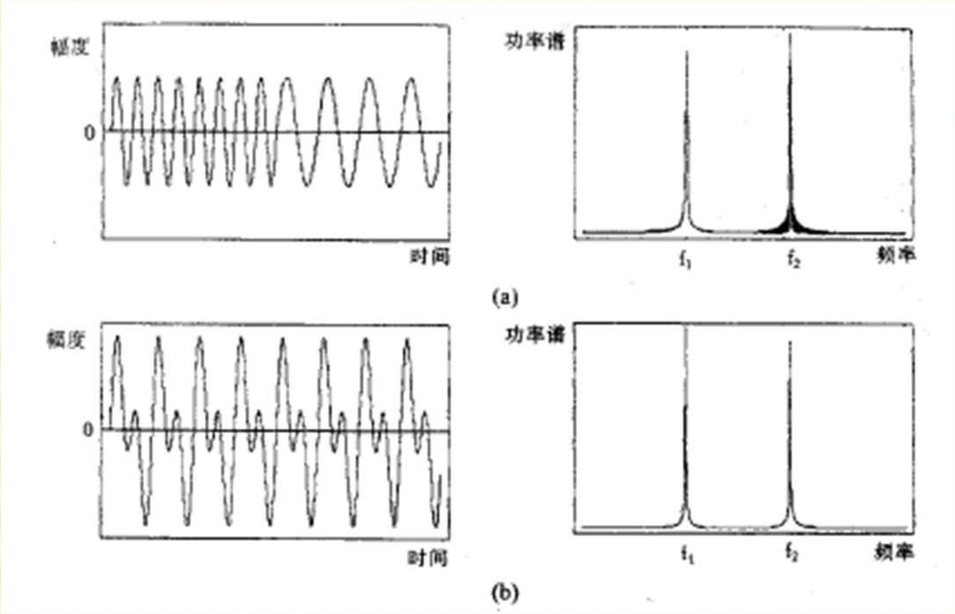
乐器信号



实时声音波形

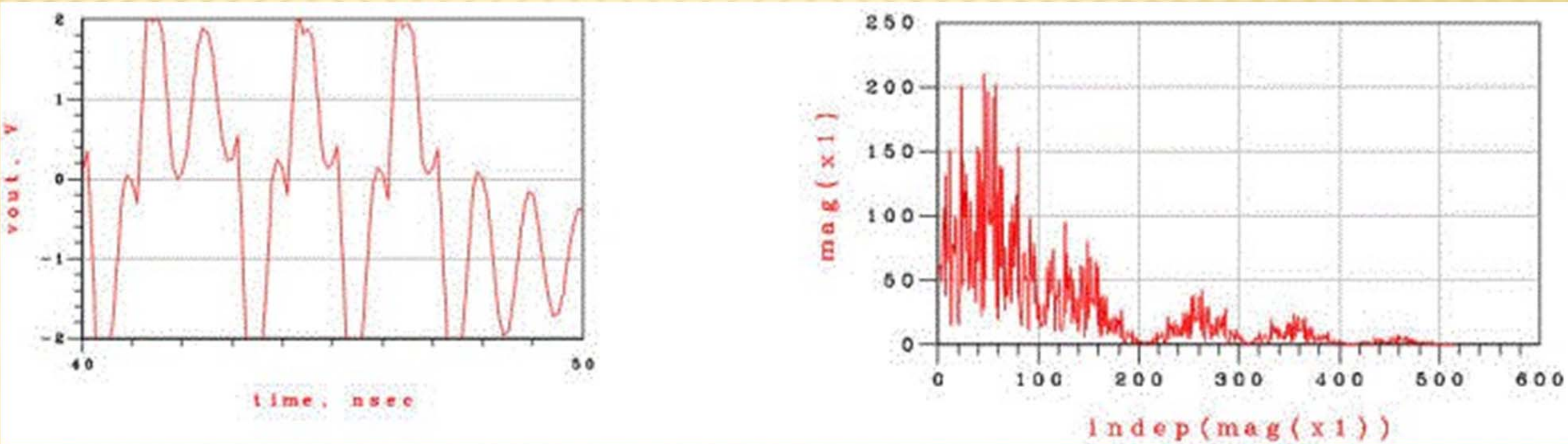


记录下的信号波形



幅度
0
时间
功率谱
f_1
f_2
频率
(a)
幅度
0
时间
功率谱
f_1
f_2
频率
(b)

信号波形与频谱

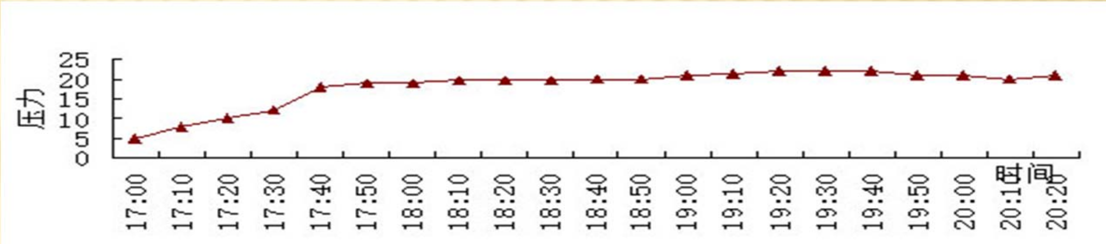


vout, V
time, nsec
mag(x1)
indep(mag(x1))

在数学上，信号可以表示为一个或多个变量的函数。

单变量信号：压力随时间的变化（记录曲线）

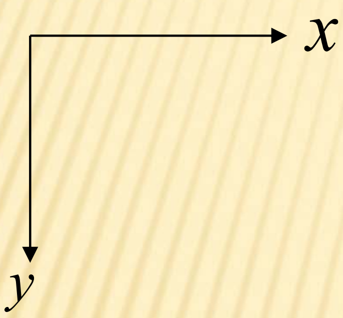
$P(t)$



正弦信号： $x(t) = \sin \omega t$

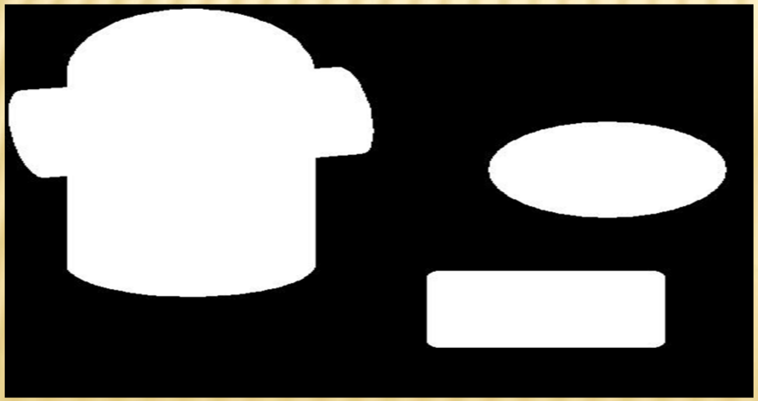
一般情况下，表示信号函数的自变量为时间t或n。

多变量（图像）信号:



$\{r(x,y), g(x,y), b(x,y)\}$

$g(x,y)=0 \quad or \quad 1$

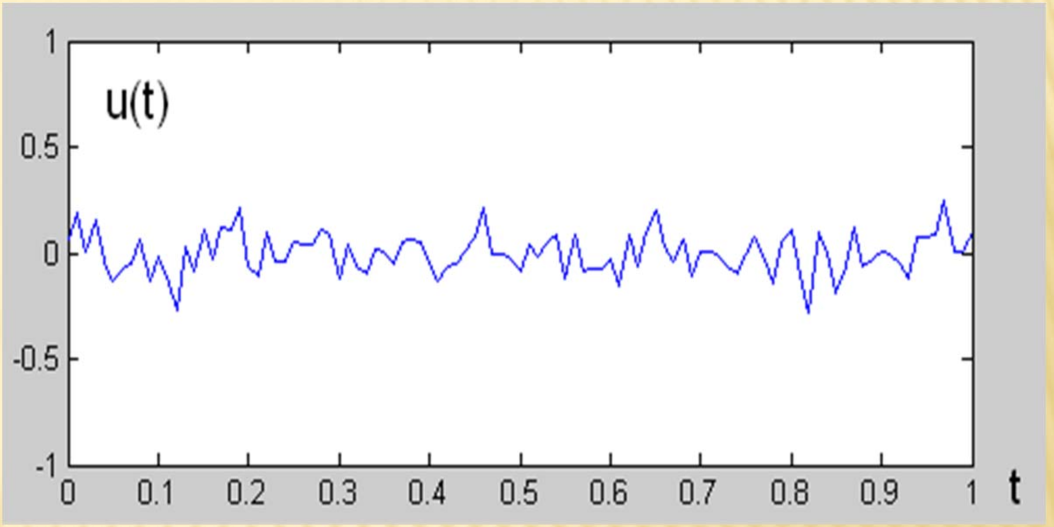


$g(x,y)$

两种基本类型的信号:

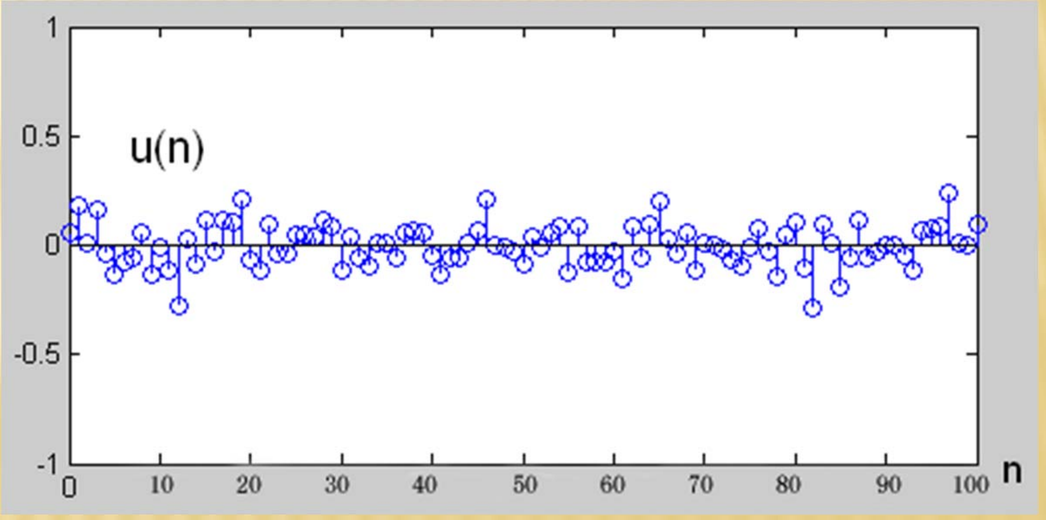
连续时间信号:

时间轴上处处有定义,能够用一条连续曲线表示。



离散时间信号:

时间轴上只有整数点有定义,用一序列强度不同的脉冲表示。

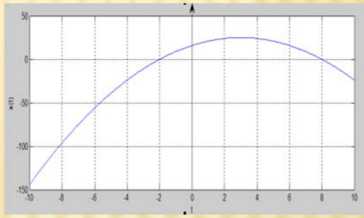


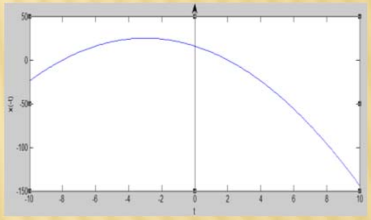
§ 2 自变量的变换

在对信号进行分析是，要对函数（信号）的自变量进行各种变换和计算。

轴对称变换：

$$x(t) \to x(-t)$$
$$x(n) \to x(-n)$$

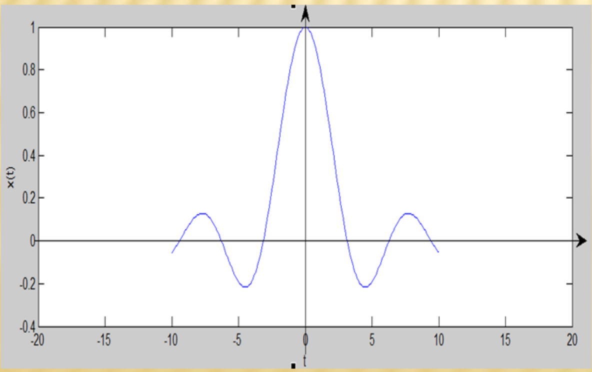




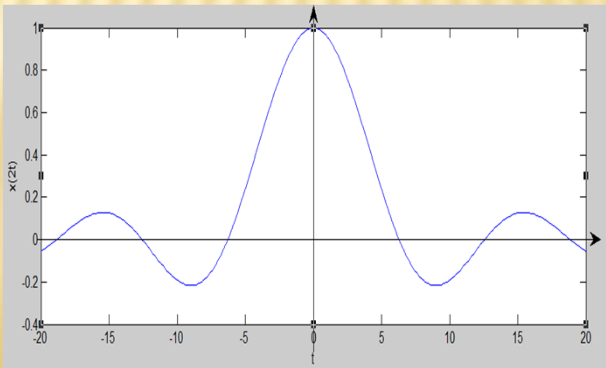
自变量尺度变换：

$$x(t) \to x(at)$$
$$x(n) \to x(an)$$

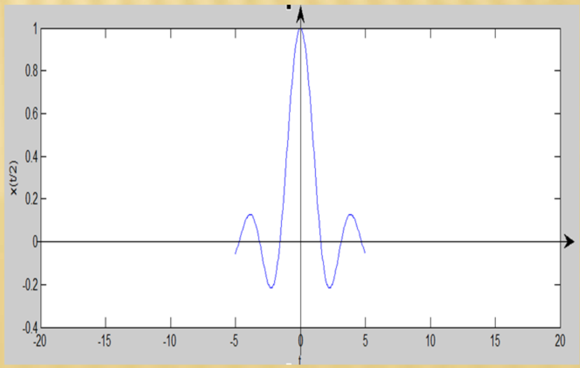
$x(t)$



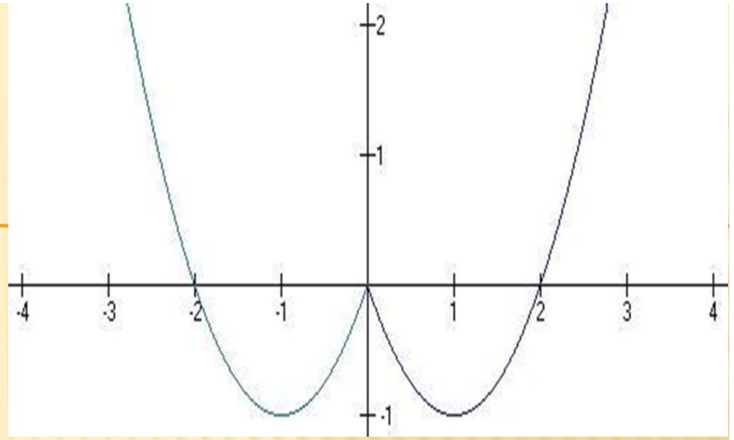
$x(2t)$



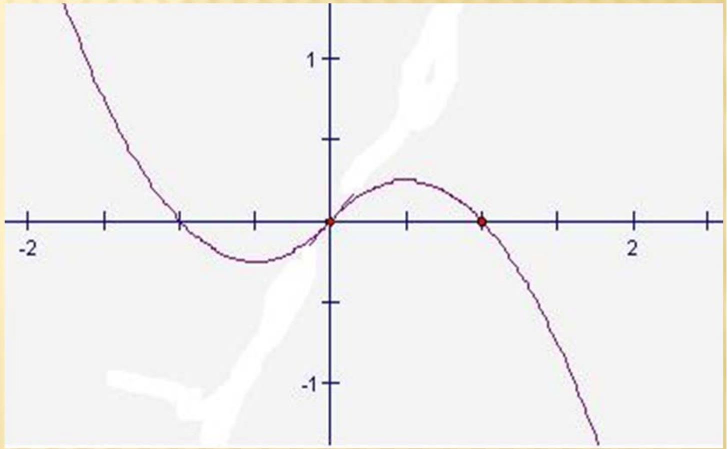
$x(\frac{t}{2})$



偶信号:　　$x(t) = x(-t)$



奇信号:　　$x(t) = -x(-t)$



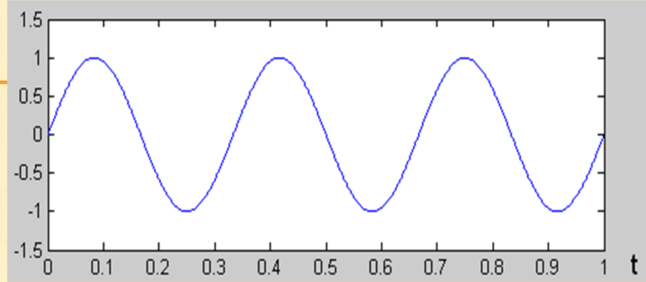
任何一个信号可以由一个偶函数与一个奇函数相加组成。

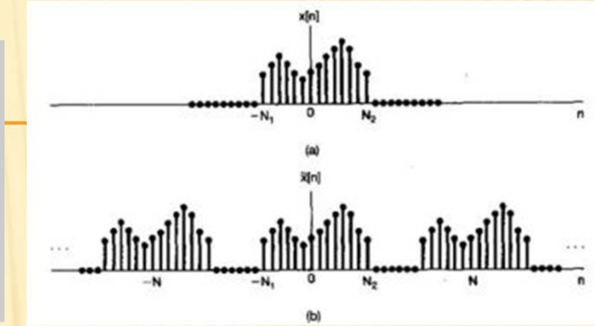
$$x(t) = \mathrm{Er}\{x(t)\} + \mathrm{Od}\{x(t)\}$$

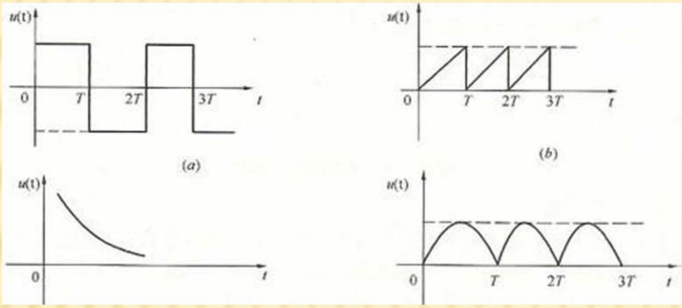
$$\mathrm{Er}\{x(t)\} = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$$

$$\mathrm{Od}\{x(t)\} = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$$

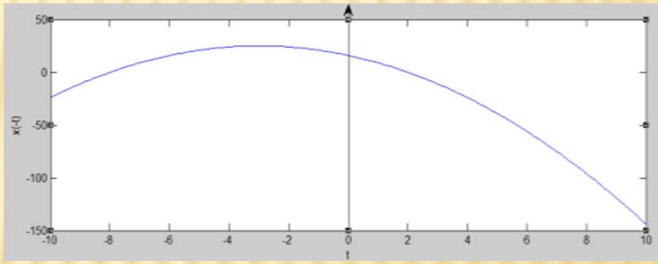
周期信号：



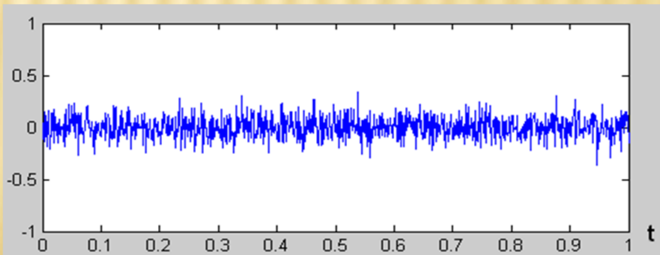




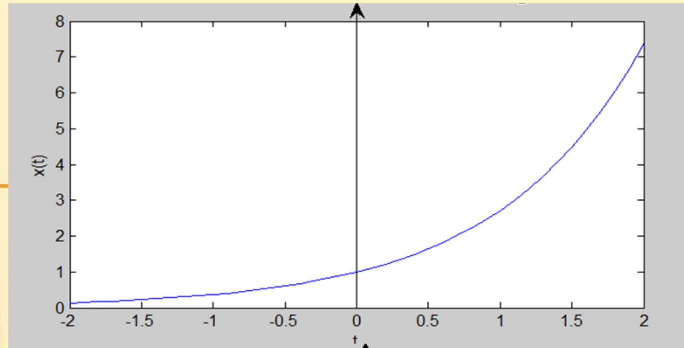
非周期信号：

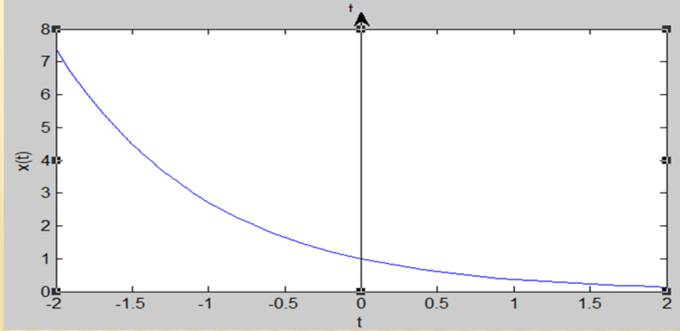


随机信号：



§ 3 基本连续时间信号





几种重要的函数说明

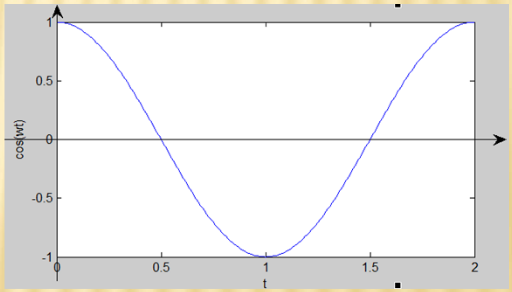
1. 连续时间复指数信号

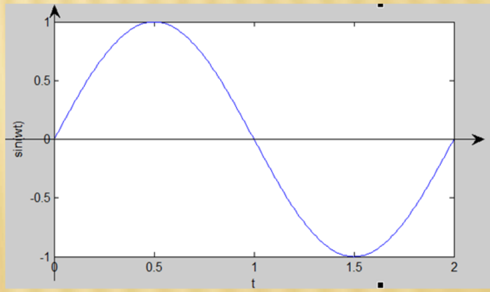
$$x(t)=c\cdot e^{at}\qquad a,\ c\text{可以是复数。}$$

(1). $a,\ c$是实数时： $a>0$

$a<0$

$a=0,\quad x(t)=c$





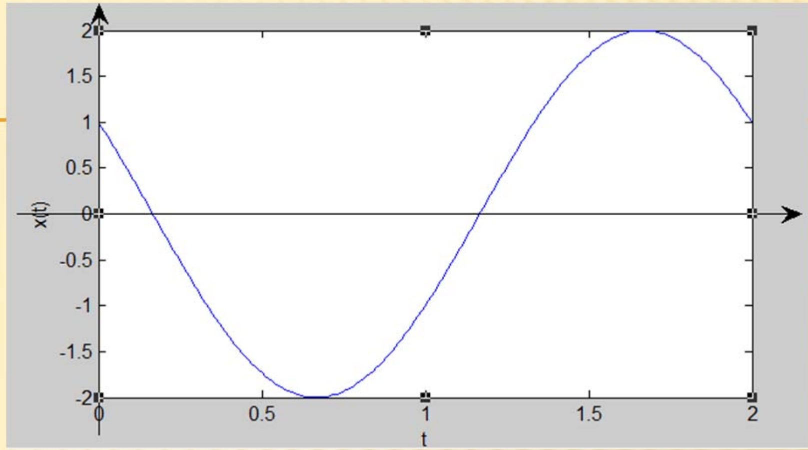
(2). a是纯虚数时：

$$a=\omega_0=\frac{2\pi}{T},\qquad c=1,\quad x(t)=e^{j\omega_0 t}=\cos(\omega_0 t)+j\sin(\omega_0 t)$$

ω_0： 基波频率。

2. 连续时间正弦信号

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$



$A = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

欧拉方程:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$$

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$= \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 t}$$

基波与谐波:

$$x(t) = A_n \cdot \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

$$x(t) = \frac{A}{n} \cdot \sin(n\omega_0 t)$$

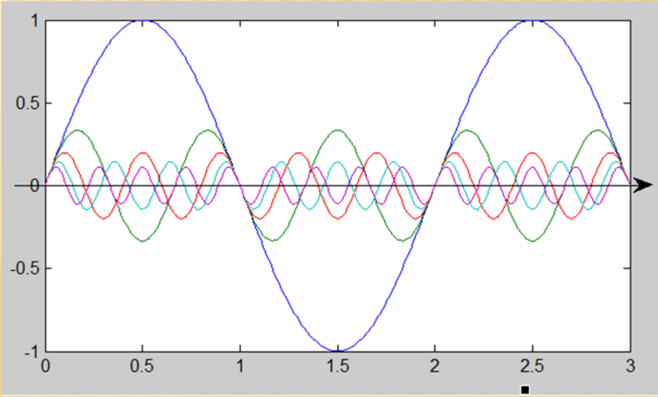
$x_1(t) = \sin(\omega_0 t)$

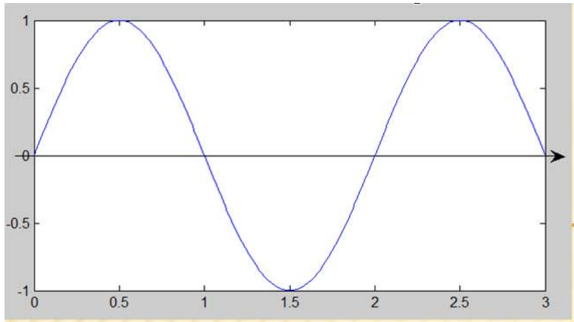
$x_3(t) = \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t)$

$x_5(t) = \frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t)$

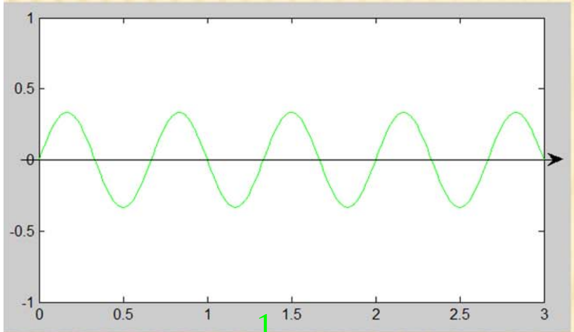
$x_7(t) = \frac{1}{7}\sin(7\omega_0 t)$

$x_9(t) = \frac{1}{9}\sin(9\omega_0 t)$

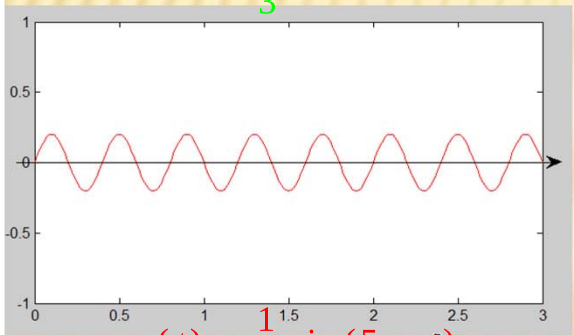




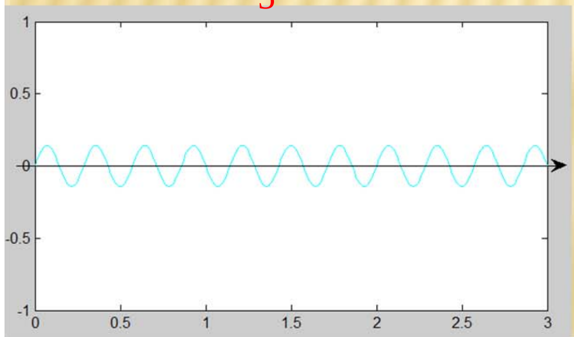
$x_1(t) = \sin(\omega_0 t)$



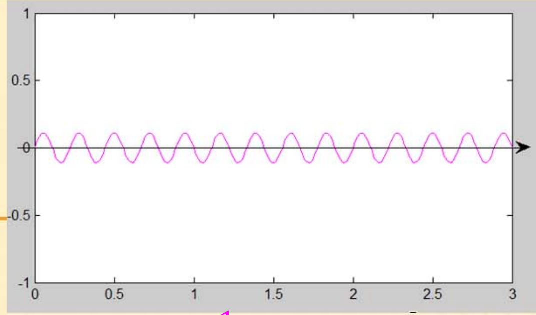
$x_3(t) = \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t)$



$x_5(t) = \frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t)$

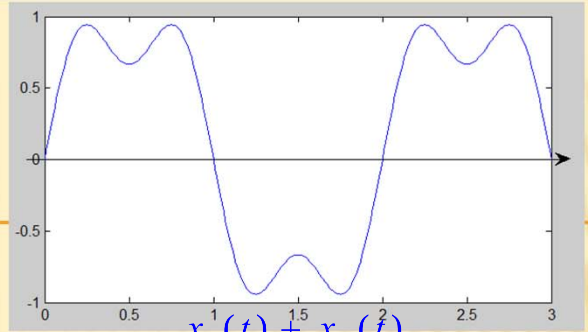


$x_7(t) = \frac{1}{7}\sin(7\omega_0 t)$

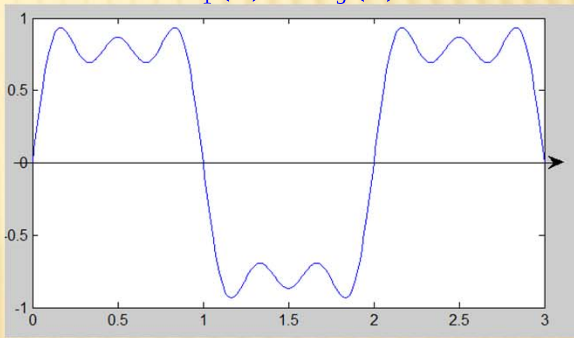


$x_9(t) = \frac{1}{9}\sin(9\omega_0 t)$

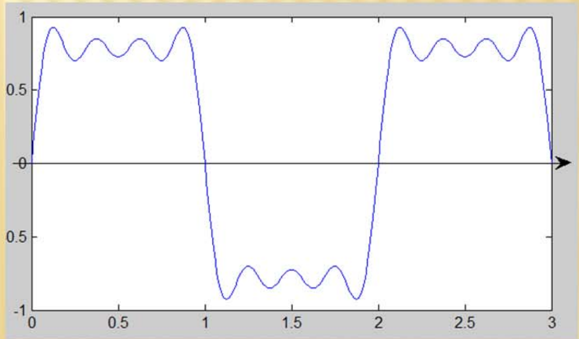
基波与各级高次谐波相叠加，可以合成出各种（周期性）波形。



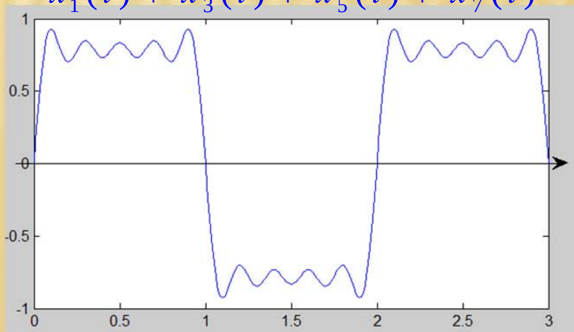
$x_1(t) + x_3(t)$



$x_1(t) + x_3(t) + x_5(t)$



$x_1(t) + x_3(t) + x_5(t) + x_7(t)$



$x_1(t) + x_3(t) + x_5(t) + x_7(t) + x_9(t)$

3. 一般复指数信号

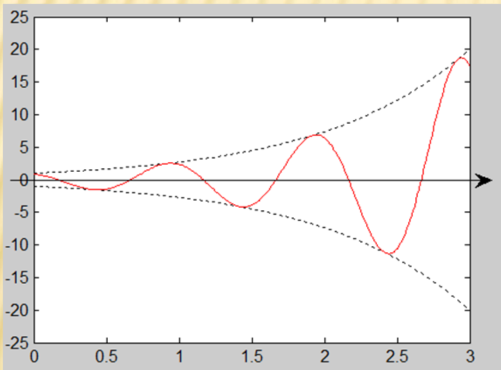
$$x(t) = c \cdot e^{at} \qquad c = |c| \cdot e^{j\theta} \qquad a = r + j\omega_0$$

$$x(t) = c \cdot e^{at} = |c| \cdot e^{j\theta} \cdot e^{(r+j\omega_0)t}$$

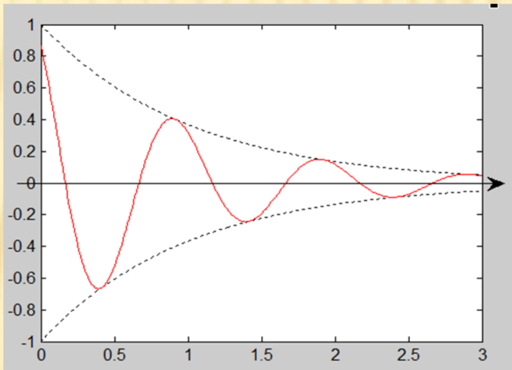
$$= |c| \cdot e^{rt} \cdot e^{j(\omega_0 t + \theta)}$$

$$= |c| \cdot e^{rt} \cdot [\cos(\omega_0 t + \theta) + j\sin(\omega_0 t + \theta)]$$

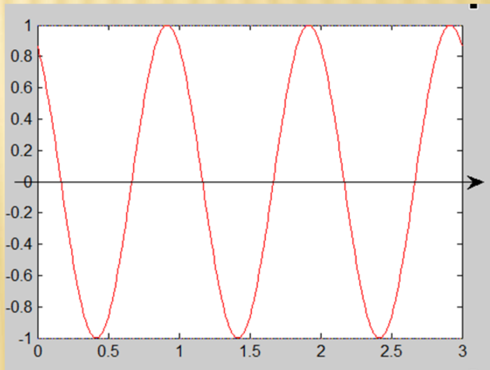
$r > 0$ Re



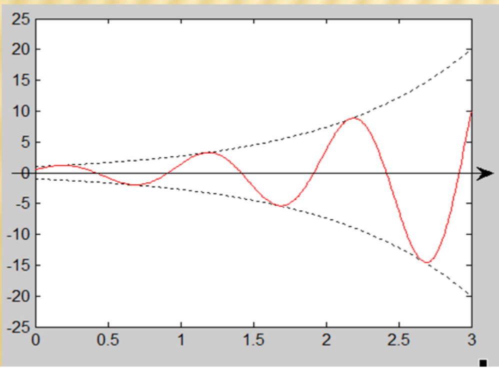
$r < 0$ Re



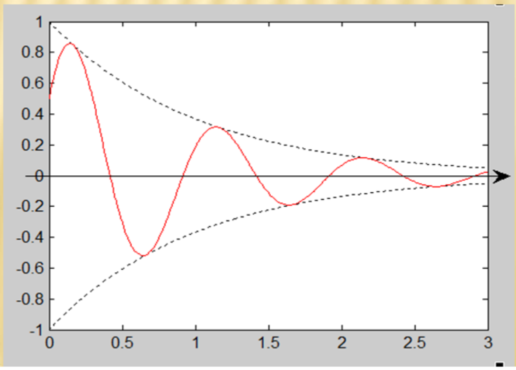
$r = 0$ Re



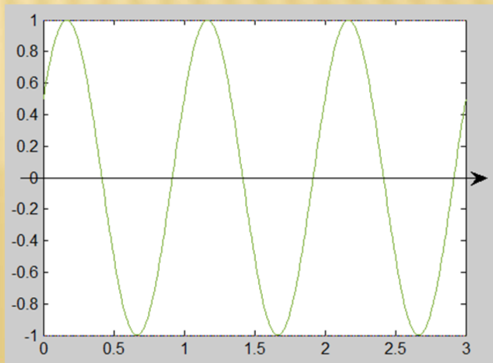
$r > 0$ Im



$r < 0$ Im



$r = 0$ Im

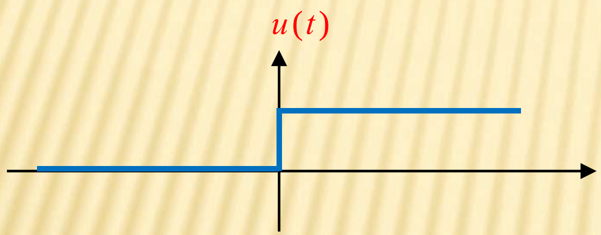


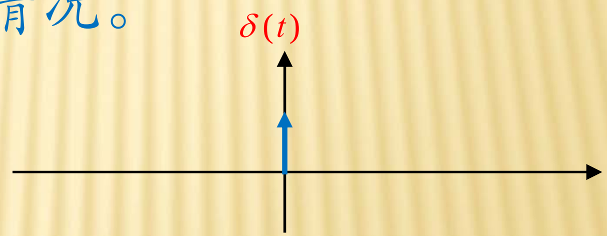
4. 连续时间阶跃与脉冲信号

$$u(t)=\begin{cases}1 & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}\qquad \delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\ne 0\end{cases}\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

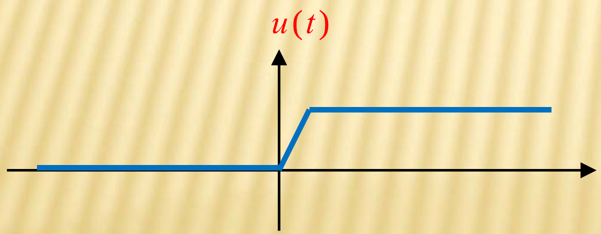
$$u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\cdot dt\qquad \delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

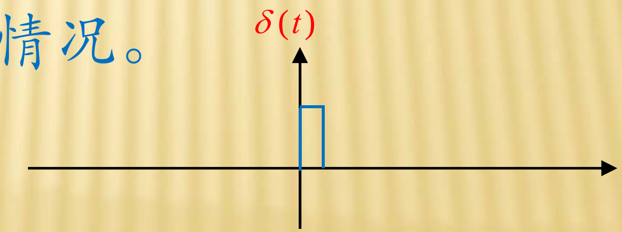
理想情况。





实际情况。



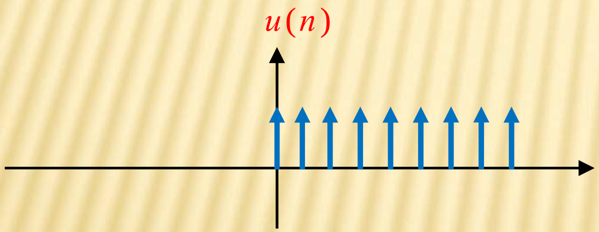


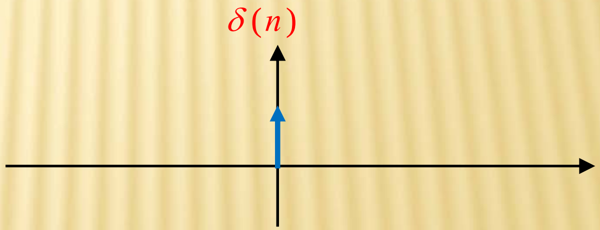
§ 4 基本离散时间信号

1. 离散时间的单位阶跃与单位脉冲信号

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases} \qquad \delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

$$u(n)=\sum_{-\infty}^{n}\delta(n) \qquad \delta(n)=u(n)-u(n-1)$$





2. 离散时间复指数信号

$$x(n) = c \cdot \alpha^{n}, \qquad \alpha = e^{\beta}$$

$$x(n) = c \cdot e^{\beta n}$$

(1). c是实数时：α>1

α<1

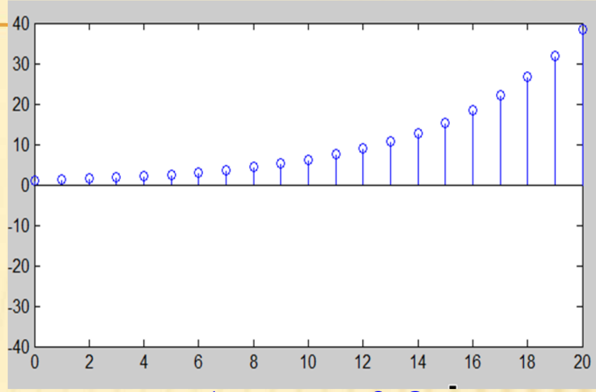
α=1

(2). c是实数时：α>-1

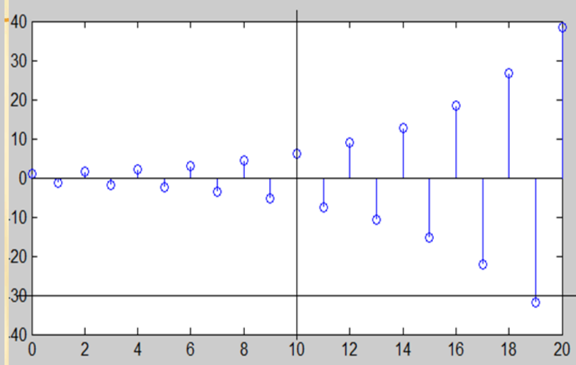
α<-1

α=-1

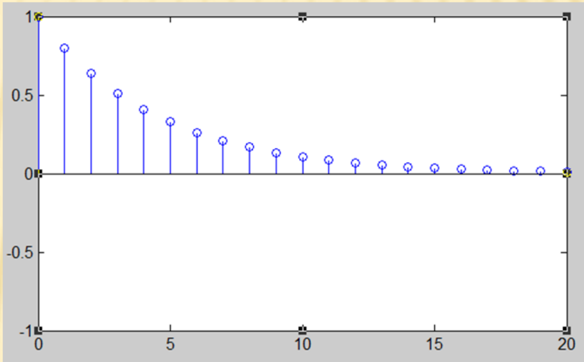
$c = 1, \quad \alpha = 1.5$



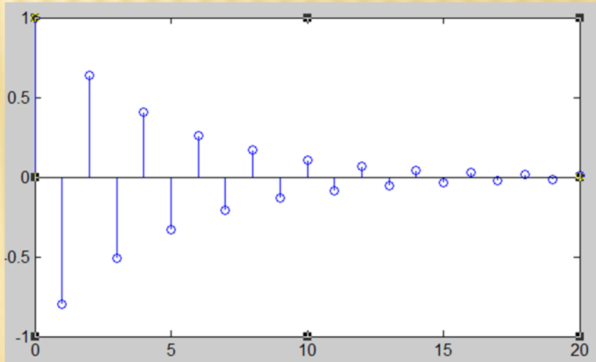
$c = 1, \quad \alpha = -1.5$



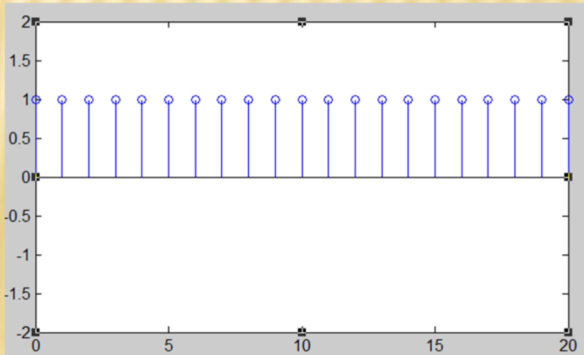
$c = 1, \quad \alpha = 0.8$



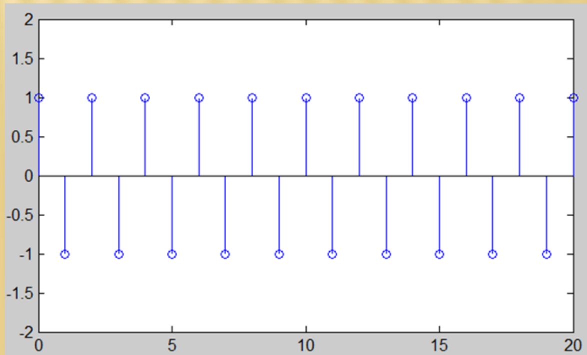
$c = 1, \quad \alpha = -0.8$



$c = 1, \quad \alpha = 1$



$c = 1, \quad \alpha = -1$



(3). c, β是复数时:

$$x(n) = c \cdot e^{\beta n}, \qquad c = |c| \cdot e^{j\theta}, \qquad e^{\beta} = |\alpha| \cdot e^{j\Omega_0}$$

$$\alpha^n = e^{\beta n} = e^{j\Omega_0 n}$$

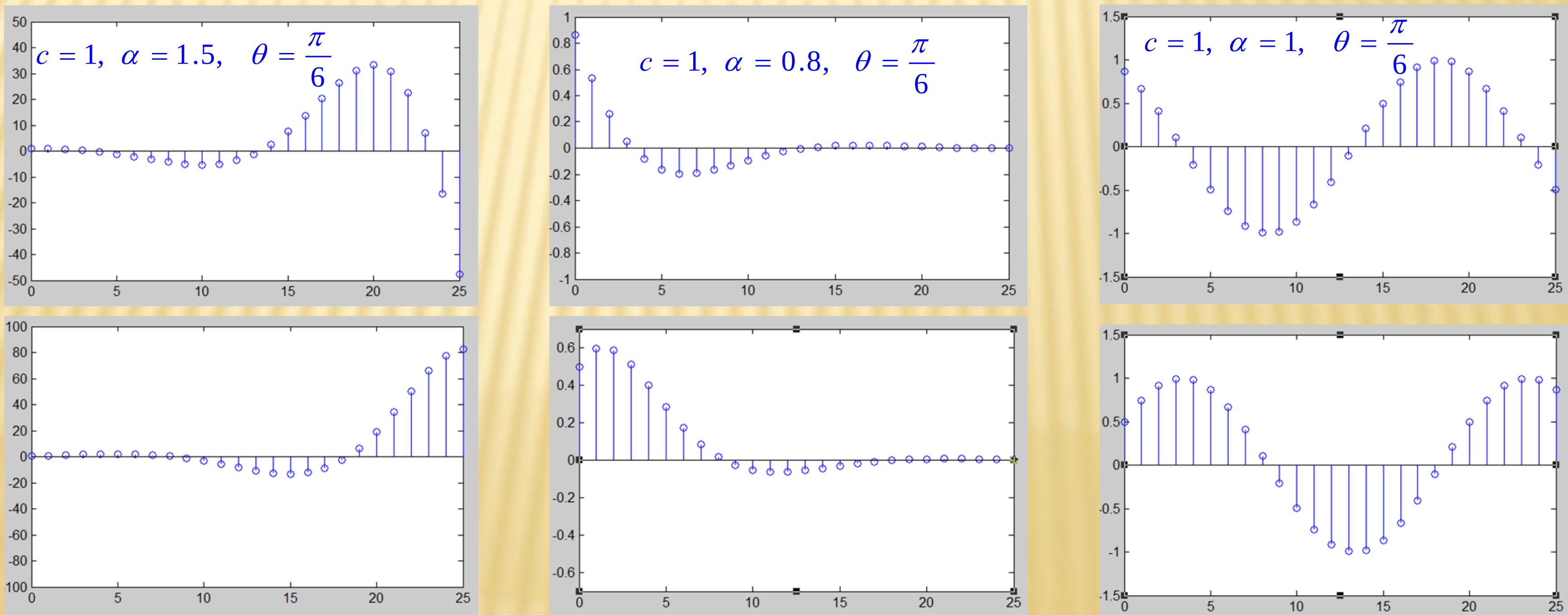
$$x(n) = c \cdot \alpha^n = |c| \cdot e^{j\theta} \cdot |\alpha|^n \cdot e^{j\Omega_0 n}$$

$$= |c| \cdot |\alpha|^n \cdot e^{j(\Omega_0 n + \theta)}$$

$$= |c| \cdot |\alpha|^n \cdot [\cos(\Omega_0 n + \theta) + j\sin(\Omega_0 n + \theta)]$$

Real

Image



§5 系统

系统是产生信号，对信号进行变换（计算、处理）的装置或过程。

一个系统必须要有至少一个输入和一个输出，系统对输入信号进行某种变换（计算、处理）后，得到该输出信号。

连续时间系统：

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{连续时间系统}} \longrightarrow y(t)$$

输入输出都是连续时间信号。

$$x(t) \to y(t)$$

离散时间系统：

输入输出都是离散时间信号。

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\text{离散时间系统}} \longrightarrow y(n)$$

$$x(n) \to y(n)$$

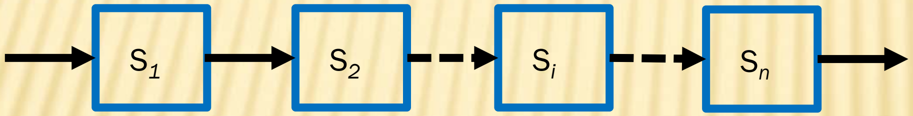
方框图表示

系统与子系统之间的关系：

1、两个（多个）子系统的级联（串联）

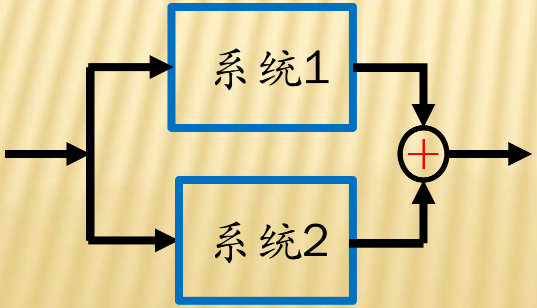
输入

输出

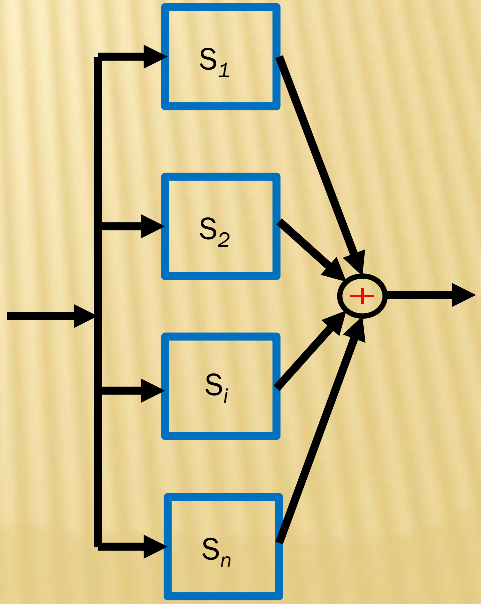


2、两个（多个）子系统的并联

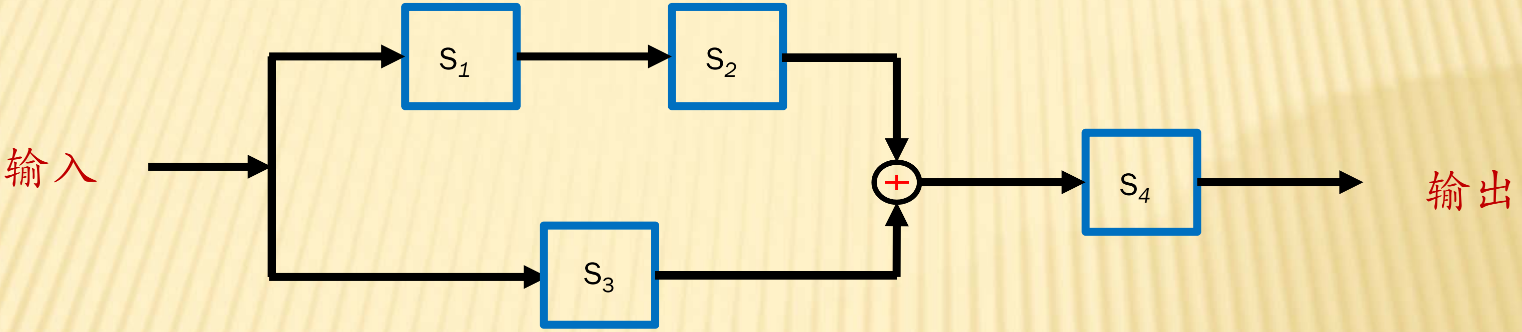
输入



输出

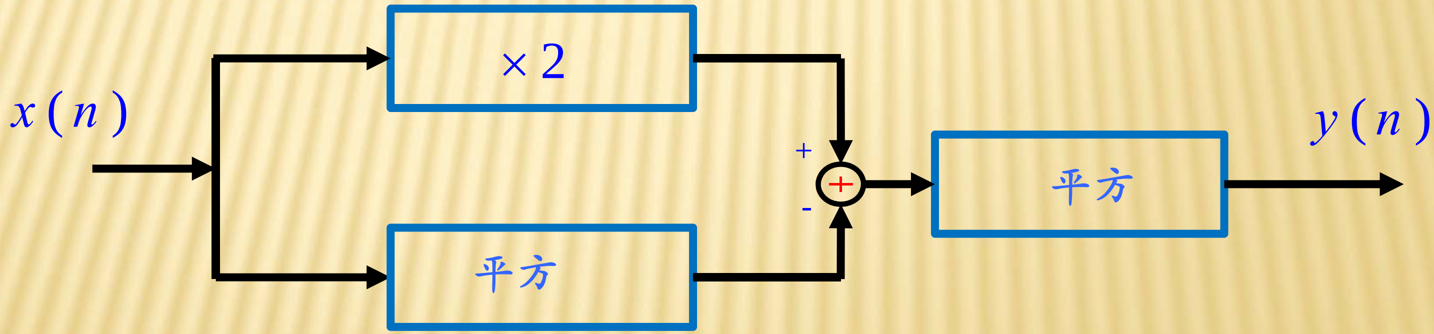


3、多个子系统的混合联接：

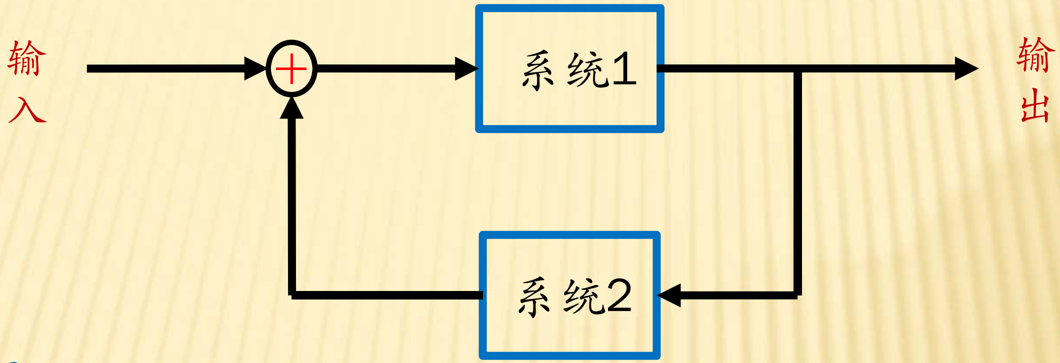


实例：

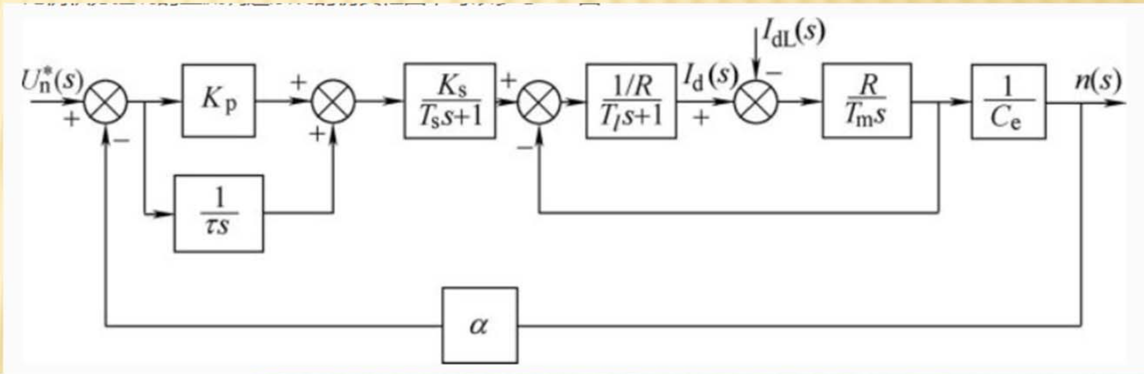
$$y(n) = (2x(n) - x^2(n))^2$$

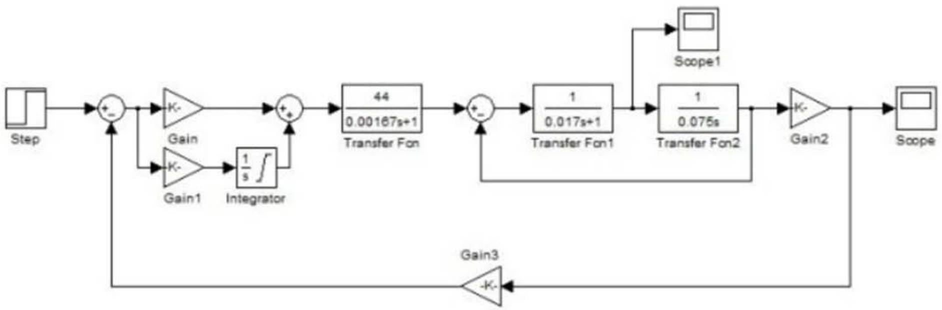


4、带有反馈的系统:



直流电机闭环调速系统框图:





§6 系统的性质

一、记忆系统与非记忆系统

如果对自变量的每一个值，系统的输出只决定于该时刻的输入，则该系统就称为无记忆系统。

无记忆系统:

$$y(t) = f(x(t))$$

$$y(n) = f(x(n))$$

电阻器，欧姆定律。 $v_R(t) = R \cdot i_R(t)$

恒等系统:

$$y(t) = x(t)$$

$$y(n) = x(n)$$

电容器，电感器

$$u_c(t) = \frac{1}{c}\int_0^t i_c(\tau)d\tau$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u_L(\tau)d\tau$$

有记忆系统:

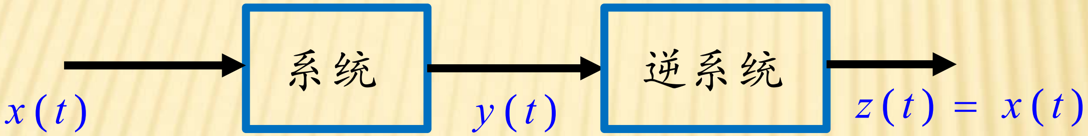
$$y(t) = K\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

$$y(n) = K\sum_{-\infty}^{n} x(n)$$

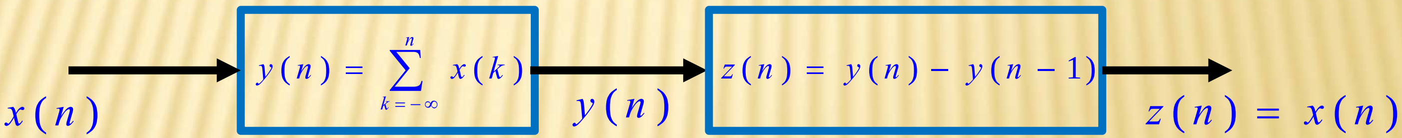
二、可逆性与可逆系统

如果系统可以通过输出量$y(t)$确定其输入量$x(t)$，则称系统是可逆的。

可构造一个可逆系统达到以下效果:



实例：累加与差分



三、因果系统

系统在任何时刻的输出只决定于现在时刻的输入和过去的输入，而不决定于将来的输入，则该系统为因果系统，又称为不可预测的系统。

所有的非记忆系统都是因果系统。

因果系统:
$$y(t) = f(x(t), x(t-\tau))$$
$$y(n) = f(x(n), x(n-m))$$

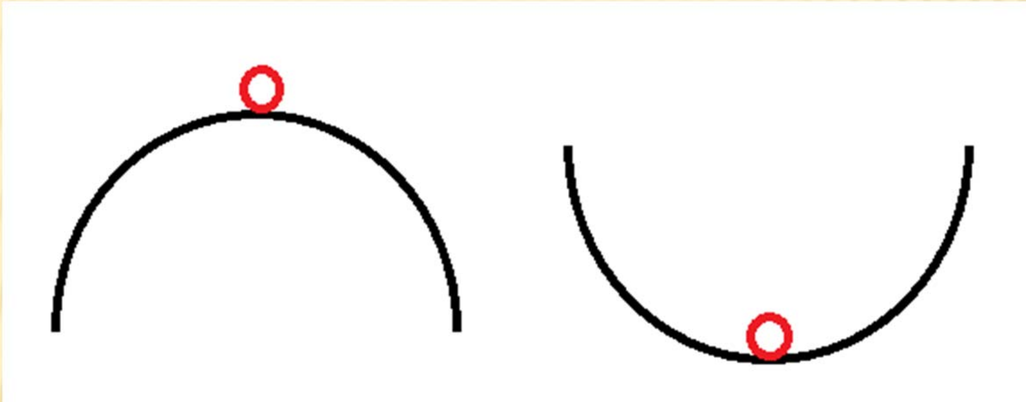
非因果系统:
$$y(t) = f(x(t), x(t+\tau))$$
$$y(n) = f(x(n), x(n+m))$$

实例: $y(n) = x(n) - x(n+1)$

自变量不是时间量，如图像处理，非因果系统是有实际意义的。

四、系统的稳定性

直观讲：一个稳定的系统在小输入（或扰动）下是不会发散的。



系统稳定性的定义：

一个稳定的系统在任何时刻，系统的输入是有界的，则系统的输出也是有界的。

$$y(n)=\frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{+M}x(n-k)\qquad |x(n)|<R$$

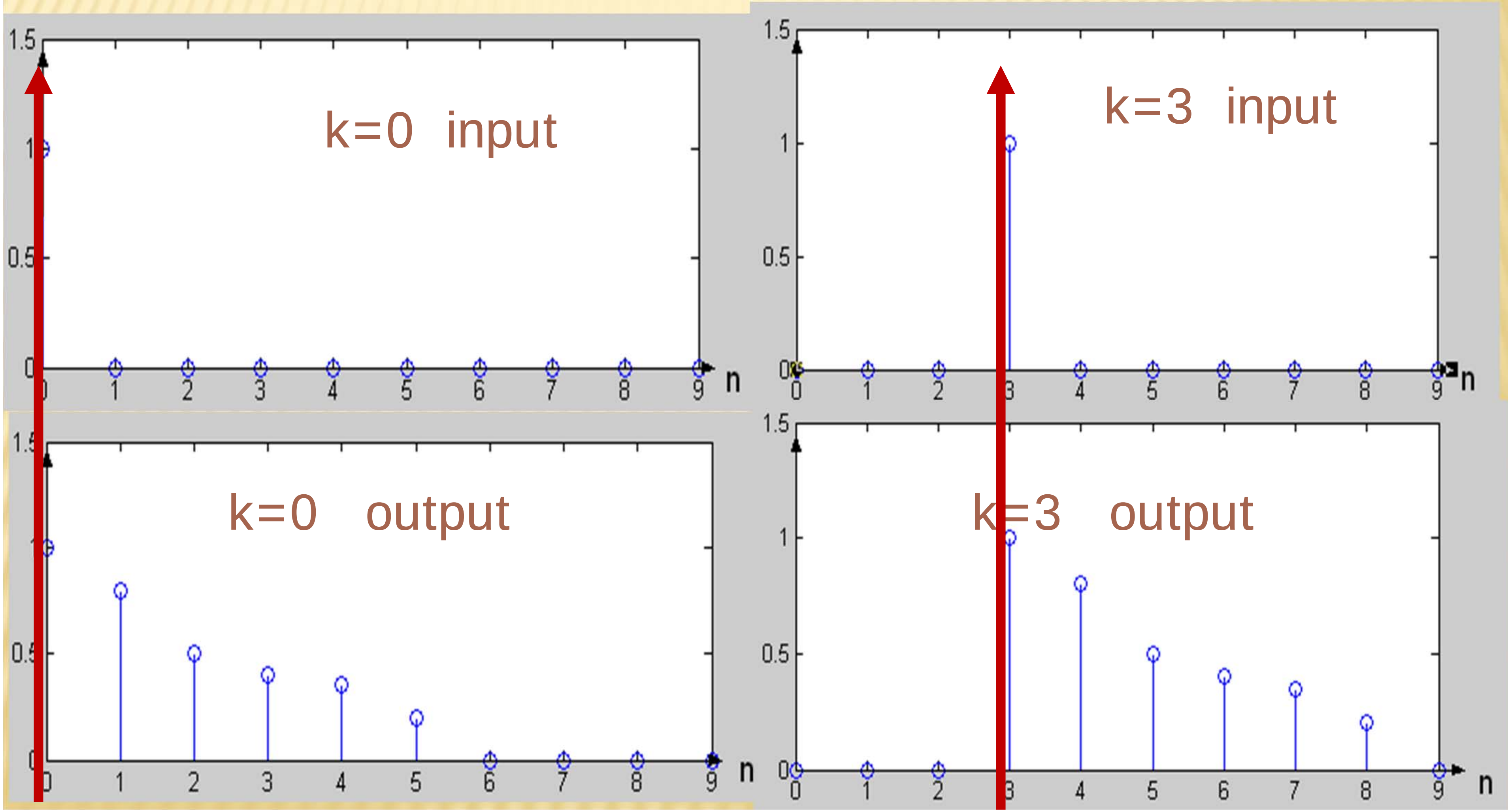
稳定的系统

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}u(k)=(n+1)u(n)$$

不稳定的系统

五、时不变系统

如果加入系统的输入在时间上有个平移，而引起的输出信号也产生一个相同时间的平移，而输入、输出关系不变，该系统就称为时不变系统。



某时不变系统: $y(t)=\sin[x(t)]$

对应两个输入$x_1(t), x_2(t)$:

$$y_1(t)=\sin[x_1(t)]$$

$$y_2(t)=\sin[x_2(t)], \quad x_2(t)=x_1(t-t_0) \quad y_2(t)=\sin[x_2(t)]=\sin[x_1(t-t_0)]$$

$$=y_1(t-t_0)$$

系统的输入输出关系不变，同时滞后了t_0时间:

某时变系统: $y(n)=nx(n)$

对应两个输入$x_1(n), x_2(n)$:

$$y_1(n)=nx_1(n)$$

$$y_2(n)=nx_2(n), \quad x_2(n)=x_1(n-n_0)$$

$$y_2(n)=nx_2(n)=nx_1(n-n_0)$$

$$y_1(n-n_0)=(n-n_0)x_1(n-n_0), \quad y_2(n)\neq y_1(n-n_0)$$

六、线性系统

如果系统的输入是由几个信号的加权和组成的，那么系统的输出也是对应这组信号中每一个信号的响应的，同样形式的加权和。

线性系统的重要性之，满足叠加性。

如果:

$$x_1(t) \to y_1(t)$$
$$x_2(t) \to y_2(t)$$

则有:

$$ax_1(t)+bx_2(t) \to ay_1(t)+by_2(t) \qquad a, b\text{是常数。}$$

推广:

$$x(t)=\sum_k a_k x_k(n)=a_1x_1(n)+a_2x_2(n)+\cdots+a_k x_k(n)$$

$$y(t)=\sum_k a_k y_k(n)=a_1y_1(n)+a_2y_2(n)+\cdots+a_k y_k(n)$$

线性系统的另一个重要性质：

0输入产生0输出。

$$0 \cdot x(t) \to 0 \cdot y(t)$$

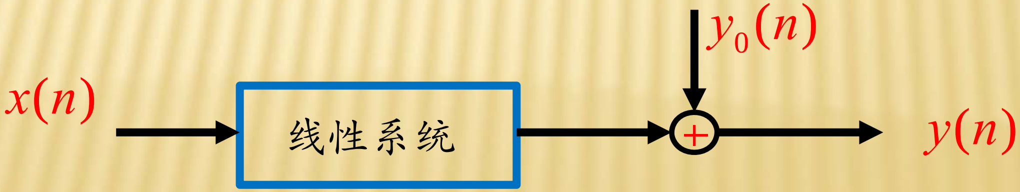
非线性系统举例：

$$y(n) = x(n) + 3$$

线性增量系统

$$y(n) = x(n) + y_0(n), \quad y_0(n) = 3$$

系统输出的增加部分是线性的，但是还存在一个常量。



第一章结束