信息学院本科生 2012——2013 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

专业：　　　　　　　　　　　　　年级：　　　　　学号：　　　　　姓名：　　　　　成绩：

说明：A^T表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，O 是零矩阵，
A^{-1}表示可逆矩阵 A 的逆矩阵，$|A|$表示方阵 A 的行列式，$\langle\alpha,\beta\rangle$表示向量$\alpha,\beta$的内积。

草 稿 区

得 分

一 .客观题：1–3 小题为判断题，在对的后面括号中填"√"，错的后面括号中填"×"，4–8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题 2 分，共 16 分)。

1. 若两个 n 维非零列向量α与β正交，则它们线性无关。　　　　（　　　）

2. n 阶矩阵 A 满足 $A^2-3A-2E=O$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，则 A 不可逆。　　　　（　　　）

3. 若 T 为线性空间 V 中的正交变换，$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ (m>1)为 V 中一个正交向量组，则$T\alpha_1,T\alpha_2\cdots,T\alpha_m$一定是一个正交向量组。　　　　（　　　）

4. 下列行列式的值可能不为 0 的是　　　　（　　　）

（A）行列式 D 中有两列对应元素之和都为 0　　　（B）行列式 D 中某行元素全为 0

（C）行列式 D 中有两行含有相同的公因子　　　（D）行列式 D 中有一行与另一行元素对应成比例

5. 如果一个非齐次方程组有解，则有惟一解的充要条件是它的导出组　　　　（　　　）

（A）有解　　(B) 无解　　(C) 只有 o 解　　(D) 有非 o 解

6. 设 n 阶矩阵 A，B 和 C，则下列说法正确的是　　　　（　　　）

（A）$AB=AC$，则 $B=C$　　　（B）$AB=O$，则$|A|=0$或$|B|=0$

（C）$(AB)^T=A^TB^T$　　　（D）$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

7. 设$\lambda=2$是可逆矩阵 A 的一个特征值，则矩阵$\left((1/3)A^2\right)^{-1}$有一个特征值等于　　　　（　　　）

（A）4/3　　(B) 3/4　　(C) 1/2　　(D) 1/4

8. 设 A，B 为 n 阶方阵，A^*，B^*分别为 A，B 对应的伴随矩阵，分块矩阵

$C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$,则 C 的伴随矩阵 C^*等于　　　　（　　　）

(A) $\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{pmatrix}$

得 分

二 、行列式计算　（第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分，共 14 分）

草 稿 区

1. 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

2. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$　$a_i \neq 0 \quad i = 1,2\cdots n$.

得 分

三、求矩阵 X，使下式成立： （本题 8 分）

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

草 稿 区

得 分

四、对于线性方程组：（本题 13 分）

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$$

，λ为何值时，方程组无解、有惟一解和有无穷多解？

并在方程组有无穷多解时，试用其导出组的基础解系表示全部解。

草 稿 区

得 分

五、已知三维向量空间 R^3 的两组基： (本题 12 分)

I: $\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,0)^T,\alpha_3=(0,0,1)^T$；

II: $\beta_1=(2,1,-1)^T,\beta_2=(0,3,1)^T,\beta_3=(5,3,2)^T$；

1）求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵；

2）求在两组基下有相同坐标的向量。

草 稿 区

得 分

六、已知二次型：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_2-8x_1x_2$ **(本题 15 分)**

用正交变换化 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形，并求出其正交变换矩阵 P;

同时说明该二次型的类型(正定、负定、半正定、半负定、不定)。

草 稿 区

得 分

七、设 A 是 n 阶方阵，且 $AA^T = E$，$|A| = -1$，证明 $|A+E| = 0$ (本题 9 分)

(其中 E 是 n 阶单位矩阵)。

草 稿 区

证明：$|A+E| = |A + AA^T|$ (2 分)

$= |A(E+A^T)|$ (1 分)

$= |A||E+A^T|$ (1 分)

$= -|E^T + A^T|$ (2 分)

$= -|(E+A)^T|$ (1 分)

$= -|A+E|$ (1 分)

所以 $|A+E| = 0$ (1 分)

得 分

八、设 X^* 是非齐次线性方程组 $AX=\beta(\beta\neq O)$ 的一个解，$X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$ 是它导出组的基础解系，证明：$X^*,X^*-X_1,X^*-X_2,\cdots,X^*-X_{n-r}$ 线性无关。 **(本题 9 分)**

草 稿 区

得 分

九、设 A 是 $m\times n$ 的实矩阵，已知矩阵 $B=\lambda E+A^TA$，其中 E 是 n 阶单位矩阵，

证明：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 B 为正定矩阵。 **(本题 4 分)**

证明：

$$\begin{aligned}B^T&=(\lambda E+A^TA)^T\\&=(\lambda E)^T+(A^TA)^T\\&=\lambda E+A^TA\\&=B\end{aligned}$$ （1 分）

又 A 是实矩阵

所以， B 是实对称矩阵

设任意 X=$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$是一 n 维实向量。

则 $$\begin{aligned}X^TBX&=X^T(\lambda E+A^TA)X\\&=X^T(\lambda E)X+X^T(A^TA)X\\&=\lambda X^TX+(AX)^T(AX)\end{aligned}$$ （1 分）

因为 X 是一不为 0 的实向量，所以有 $X^TX>0$

又 A 是 $m\times n$ 的实矩阵，所以 AX 是 m 维实向量。

则$(AX)^T(AX)\geq 0$。 （1 分）

所以对于任意不为 0 的 n 维实向量 X，满足

$X^TBX>0$

即 B 是正定矩阵 （1 分）

草 稿 区