第二章 矩阵代数

第五节 分块矩阵

上页 下页 返回

§ 2.5.1 分块矩阵及其运算

一、矩阵的分块

对于行数和列数较高的矩阵A，为了简化运算，经常采用**分块法**，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算。

具体做法：将矩阵A用若干条纵线和横线分成许多个**小矩阵**，每一个小矩阵称为A的**子块**，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**。

例 $$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix},$$

即 $$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

即

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ E & B \end{pmatrix},$$ 其中 [illegible]

$$A=\left(\begin{array}{c:c:c:c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$ 其中 [illegible]

……

二、分块矩阵的运算规则

(1) 设A，B为同型矩阵,采用相同的分块法,有

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}与B_{ij}为同型矩阵,那末

$$A+B=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}+B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}.$$

即: $(A_{ij})_{sr}+(B_{ij})_{sr}=(A_{ij}+B_{ij})_{sr}$

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, λ为数, 那末

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

即: $\lambda(A_{ij})_{sr} = (\lambda A_{ij})_{sr}$

(3) 设A为$m\times l$矩阵, B为$l\times n$矩阵, 分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

其中$A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$的列数分别等于$B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$的行数, 那末

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中$C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\quad (i=1,\cdots,s;j=1,\cdots,r)$.

即$(A_{ij})_{st}(B_{ij})_{tr}=(C_{ij})_{sr}=\left(\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\right)_{sr}$

上页 下页 返回

(4) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, 则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots\cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots\cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$.

(5) 设A为n阶矩阵,若A的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块,其余子块都为零矩阵,且非零子块都是方阵.即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_i\ (i=1,2,\cdots s)$ 都是方阵,那末称 A为分块对角矩阵. 记做$diag(A_1, A_2, \ldots, A_s)$.

(准对角阵)

分块对角矩阵的行列式具有下述性质:

$$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

上页 下页 返回

(6)设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$,

若 $|A_i| \neq 0 (i=1,2,\cdots,s)$,则 $|A| \neq 0$,并有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

即 $A^{-1}=diag(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \cdots, A_s^{-1})$

上页 下页 返回

(7) 假设运算可行，则

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

即

$$AB = diag(A_1, A_2, \cdots, A_s)diag(B_1, B_2, \cdots, B_s)$$
$$= diag(A_1B_1, A_2B_2, \cdots, A_sB_s)$$

例1 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix},$$

求 AB.

解 把A,B分块成

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}E&O\\A_1&E\end{pmatrix},$$

上页 下页 返回

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

则 $$AB=\begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}.$$

上页 下页 返回

$$AB=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}.$$

又 $$A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1+B_{22}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

于是 $$AB=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

上页 下页 返回

例2　设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

求 $A+B$,　ABA.

解 将 A, B 分块

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$ 其中 $$A_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix},$$ 其中 $$B_1=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$A+B=\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1 & \\ & B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & \\ & A_2+B_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1+B_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2a \end{pmatrix},$$

$$A_2+B_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2b & 1 \\ 2 & 2b \end{pmatrix},$$

$$\therefore \quad A+B=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2b \end{pmatrix}.$$

$$ABA = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & \\ & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1B_1A_1 & \\ & A_2B_2A_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1B_1A_1 = \begin{pmatrix} a^3+a & 2a^2+1 \\ a^2 & a^3+a \end{pmatrix}, \qquad A_2B_2A_2 = \begin{pmatrix} b^3+2b & 2b^2+1 \\ 3b^2 & b^3+2b \end{pmatrix},$$

$$\therefore \; ABA = \begin{pmatrix} a^3+a & 2a^2+1 & 0 & 0 \\ a^2 & a^3+a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^3+2b & 2b^2+1 \\ 0 & 0 & 3b^2 & b^3+2b \end{pmatrix}.$$

例3 设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

解 $A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\\hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$,

$A_1=(5)$, $A_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\end{pmatrix}$; $A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$, $A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$;

$\therefore\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/5&0&0\\0&1&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}$.

例4 设分块矩阵 $A=\begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix}$，其中

$B=B_{r\times r},D=D_{s\times s}$ 均为可逆矩阵，求 A^{-1} .

解：由拉普拉斯定理知 $|A|=\begin{vmatrix} B & O \\ C & D \end{vmatrix}=|B||D|\neq 0$

故 A可逆．设 A^{-1} 的分块形式为

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

其中，$X=X_{r\times r},T=T_{s\times s}$

利用分块乘法有

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} BX & BY \\ CX+DZ & CY+DT \end{pmatrix}=E=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{pmatrix}$$

于是 $\begin{cases} BX=E_r \\ BY=O \\ CX+DZ=O \\ CY+DT=E_s \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X=B^{-1} \\ Y=O \\ Z=-D^{-1}CB^{-1} \\ T=D^{-1} \end{cases}$

故

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

特别的，当 $C=O$ 时， $A=\begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}$$

这与对角形矩阵的结论是一致的.

§ 2.5.2 方阵的迹

定义 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则A的**迹**为

$$tr(A)=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$$

性质

- $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$
- $tr(kA)=k\cdot tr(A)$
- $tr(AB)=tr(BA)$
- $tr(P^{-1}AP)=tr(A)$
- $A=diag(A_1,A_2,\cdots,A_s)$，则

$$tr(A)=tr(A_1)+tr(A_2)+\cdots+tr(A_s)$$