电光、计控学院本科生 2015—2016 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A 卷）参考答案

一　**1.** × 　**2.** √ 　**3.** × 　**4. D** 　**5 B** 　**6 D** 　**7B** 　**8 D**

二 、行列式计算　（第 **1** 小题 **6** 分，第 **2** 小题 **8** 分，共 **14** 分）

1．解：原式=2（$\boldsymbol{x+y}$）$\begin{vmatrix}1 & y & x+y\\ 1 & x+y & x\\ 1 & x & y\end{vmatrix}$ （2 分） =2（$\boldsymbol{x+y}$）$\begin{vmatrix}0 & y-x & x\\ 0 & y & x-y\\ 1 & x & y\end{vmatrix}$ （1 分）

=2（$\boldsymbol{x+y}$）$\begin{vmatrix}y-x & x\\ y & x-y\end{vmatrix}$ （1 分） $=-2(x+y)(x^2-xy+y^2)$ $=-2(x^3+y^3)$ （**2** 分）

2. 解：

原式=（a+9）$\begin{vmatrix}a+1 & 0 & 0 & a+2\\ 0 & a+5 & a+6 & 0\\ 0 & a+7 & a+8 & 0\\ a+3 & 0 & 0 & a+4\end{vmatrix}$ **(2 分)=**（a+9）$\begin{vmatrix}a+1 & a+2\\ a+3 & a+4\end{vmatrix}(-1)^{1+4+1+4}\begin{vmatrix}a+5 & a+6\\ a+7 & a+8\end{vmatrix}$ **(2 分)**

=（a+9）[(a+1) (a+4)－ (a+2) (a+3)] [(a+5) (a+8)－ (a+6) (a+7)] (2 分)

=4（a+9）(2 分)

三.

解法 1：计算$|A|$：

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -8\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix} = 2$$ 。（3 分）

$|A| \neq 0$，因此A 可逆。（1 分）

计算A^*，A 的第i 行第j 列元的代数余子式记为A_{ij}：

$$A^* = \begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ 8 & -4 & 2\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}$$ ，（4 分）

所以$A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ 8 & -4 & 2\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}$。（2 分）

解法 2：对 $\begin{pmatrix}A & E\end{pmatrix}$ 作初等行变换：

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -8 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ 。（8 分）

（做对 2 个步骤以上，最后有计算错误扣 1-2 分。）

A 经一系列初等行变换得到单位阵，因此A 可逆。且上式说明，$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ 8 & -4 & 2\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}$。（2 分）

四．解：（1）对线性方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & a & 1 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & a-1 & 1 & b-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & a-2 & 0 & b-1\end{pmatrix}$$

（1 分）　　　　　　　　　　　　（2 分）

故：　当$a=2,\quad b=1$ 时有无穷多解(2 分)；

当 $a\neq 2$ 时有唯一解(2 分)；

当 $a=2,\quad b\neq 1$ 时无解（2 分）

（2）当$a=2,\quad b=1$ 时，$B\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，（1 分）

对应同解线性方程组为$\begin{cases}x_1=1+x_3\\ x_2=-x_3\end{cases}$，令$x_3=0$ 得特解$\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$　　（1 分）

令$x_3=1$ 得对应导出组基础解析$\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$　　　　（1 分）

故方程组的解为 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix},\quad k\in R$　（2 分）　不说$k\in R$ 扣 1 分

五、　在R^2中定义变换 σ：$\sigma\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\ x_1+x_2\end{pmatrix}$ (1) 证明：变换 σ 为线性变换。

(2) 求 σ 在基底α_1,α_2下的矩阵 **A**。

解：显然$\sigma\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\ x_1+x_2\end{pmatrix}\in R^2$

设$\alpha=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\in \mathrm{R}^2,\beta=\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}\in\mathrm{R}^2,k\in R$,则$\alpha+\beta=\begin{pmatrix}a+c\\ b+d\end{pmatrix}\in\mathrm{R}^2$

$$\sigma\alpha=\begin{pmatrix}b\\a+b\end{pmatrix},\ \sigma\beta=\begin{pmatrix}d\\c+d\end{pmatrix},\ \sigma(\alpha+\beta)=\begin{pmatrix}b+d\\a+c+b+d\end{pmatrix}=\sigma\alpha+\sigma\beta \qquad （2 分）$$

$$\sigma(k\alpha)=\sigma\begin{pmatrix}ka\\kb\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kb\\ka+kb\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}b\\a+b\end{pmatrix}=k\sigma\alpha \qquad （2 分）$$

所以变换 σ 为线性变换

$$\sigma\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\alpha_2-\alpha_1=(\alpha_1\alpha_2)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \qquad \sigma\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_2=(\alpha_1\alpha_2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad （3 分）$$

则 σ 在基底α_1,α_2下的矩阵 **A=**$\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$ （2 分）

六．解，二次型f的矩阵为：$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$,（2 分）

计算A的特征多项式：

$$f_A(\lambda)=\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-1\\0&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+8)=(\lambda-2)^2(\lambda-4)。$$

因此A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$和$\lambda_3=4$。 （3 分）

解方程组$(\lambda_1E-A)X=0$**，即**$\begin{cases}-x_2-x_3=0\\-x_2-x_3=0\end{cases}$**，得到该方程组的基础解系**

$X_1=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}^T$和$X_2=\begin{pmatrix}0&1&-1\end{pmatrix}^T$。（2 分）它们是$A$的对应与特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$的两个线性无关的特征向量。且$X_1$和$X_2$已经正交，无需再正交化。再单位化，得到：$e_1=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}^T$和$e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&-1\end{pmatrix}^T$。（2 分）

解方程组$(\lambda_3E-A)X=0$**，即**$\begin{cases}2x_1=0\\x_2-x_3=0\\-x_2+x_3=0\end{cases}$**，得到此方程组的基础解系**

$X_3=\begin{pmatrix}0&1&1\end{pmatrix}^T$。再单位化，得到：$e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&1\end{pmatrix}^T$。（2 分）

因此构造正交矩阵$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，对二次型$f$作正交变换$X=PY$，得到$f$的标准形

$f=2y_1^2+2y_2^2+4y_3^2$。（2 分）该二次型矩阵的特征值都是正数，因此该二次型正定。（1 分）

七．证明：依题意得 $A\alpha_i = 0, i = 1,2,\cdots,s$，$A\beta \neq 0$。

设有一组数 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得

$k_0\beta + k_1(\beta+\alpha_1) + k_2(\beta+\alpha_2) + \cdots + k_s(\beta+\alpha_s) = 0$ （**2** 分）

即 $(k_0+k_1+\cdots+k_s)\beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$ **(1)**

上式两端同左乘矩阵 **A** 得 $(k_0+k_1+\cdots+k_s)A\beta + k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + \cdots + k_sA\alpha_s = 0$

得到 $(k_0+k_1+\cdots+k_s)A\beta = 0$ （**2** 分）

由于 $A\beta \neq 0$，故有 $k_0+k_1+\cdots+k_s = 0$ **(2)** （**1** 分）

代入**(1)**式可得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 基础解系知它们线性无关，故可得 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$ （**2** 分）

则由**(2)**式可得 $k_0 = 0$ （**1** 分）

因此 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_s$ 线性无关。 （**1** 分）

八、 解：法 **1**：因为 $|M| = (-1)^{1+2+\cdots n+(n+1)+(n+2)+\cdots 2n}|A||C| \neq 0$，所以 **M** 逆矩阵存在。（**1** 分）

设 $M^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ 则 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_3 & Ax_4 \\ Cx_1+Dx_3 & Cx_2+Dx_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ （**2** 分）

则有 $Ax_3 = E, Ax_4 = 0, Cx_1 + Dx_3 = 0, Cx_2 + Dx_4 = E$ （**2** 分）

$x_3 = A^{-1}, x_4 = 0, x_2 = C^{-1}, x_1 = -C^{-1}DA^{-1}$ （**2** 分）

所以 $M^{-1} = \begin{pmatrix} -C^{-1}DA^{-1} & C^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ （**2** 分）

法 **2**：构造矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A & E & 0 \\ C & D & 0 & E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & E & A^{-1} & 0 \\ E & C^{-1}D & 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$
$\to \begin{pmatrix} 0 & E & A^{-1} & 0 \\ E & 0 & -C^{-1}DA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E & 0 & -C^{-1}DA^{-1} & C^{-1} \\ 0 & E & A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ （**7** 分）

所以 $M^{-1} = \begin{pmatrix} -C^{-1}DA^{-1} & C^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ （**2** 分）

九．解：

（1）设 A 的特征值 λ 所对应的特征向量为 X。则

$0X = (A^2 - A - 2E)X = A^2X - AX - 2X = A(\lambda X) - \lambda X - 2X = (\lambda^2 - \lambda - 2)X$，

因X ¹ 0，所以$l^2 - l - 2 = 0$。因此$l = 2$或$l = -1$。(2 分)

（2）A 的关于$l = 2$的特征子空间的维数为$n - R(A - 2E)$，故可从中取$n - R(A - 2E)$个向量构成线性无关的向量组S_1，A 的关于$l = -1$的特征子空间的维数为$n - R(A + E)$，故可从中取$n - R(A + E)$个向量构成线性无关的向量组S_2。将S_1和S_2合并得到的向量组S依然是线性无关的向量组，且每一个都是A的特征向量。S含有向量的个数为$2n - [R(A + E) + R(A - 2E)]$，但

由$(A - 2E)(A + E) = 0$得到，$R(A + E) + R(A - 2E)$? n；另一方面，

$R(A + E) + R(A - 2E)$? $R(A \quad E - A + 2E) = R(3E) = n$。

因此$R(A + E) + R(A - 2E) = n$。所以S含有n个向量，即A有n线性无关的特征向量，因此A与对角形矩阵相似。（3 分）