



南开大学
Nankai University

第三章 机器人运动学

《机器人学导论》

韩建达 教授

Email: hanjianda@nankai.edu.cn



1. 机器人组成与自由度分析



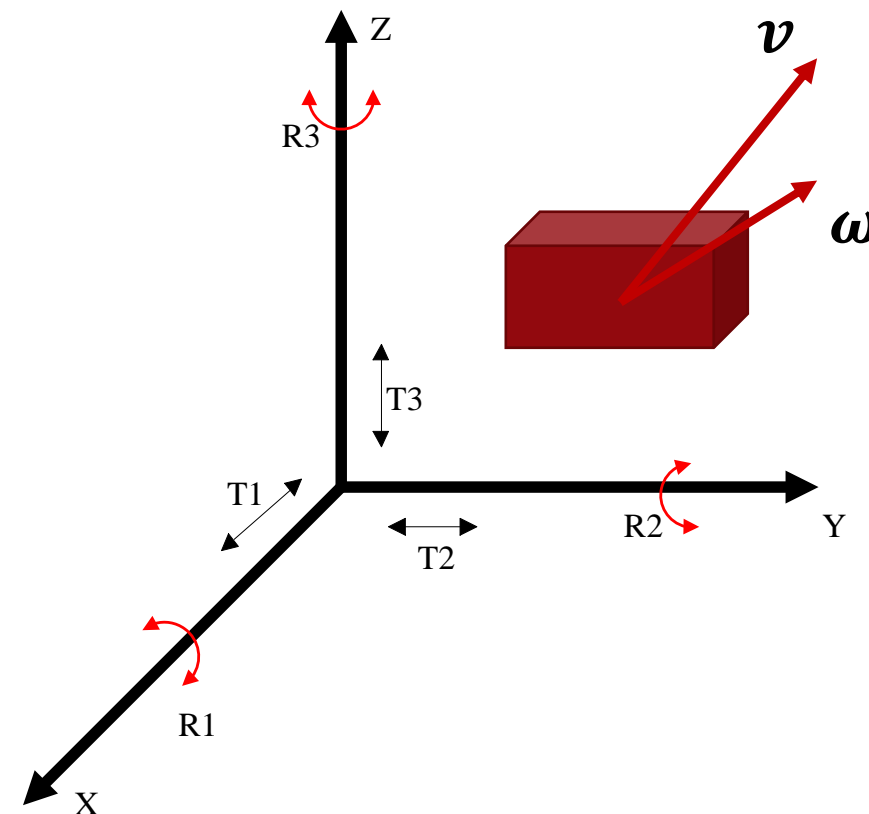
2. 机器人运动学模型描述方法



3. 机器人运动学方程

自由刚体空间运动可分解为：

- 沿着坐标轴 ox 、 oy 和 oz 的三个平移运动 $T1$ ， $T2$ 和 $T3$
- 绕着坐标轴 ox 、 oy 和 oz 的三个旋转运动 $R1$ ， $R2$ 和 $R3$
- 6个自由度



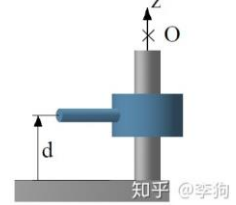
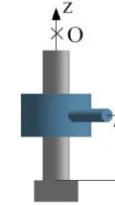
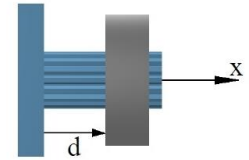
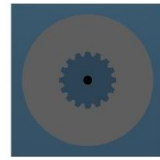
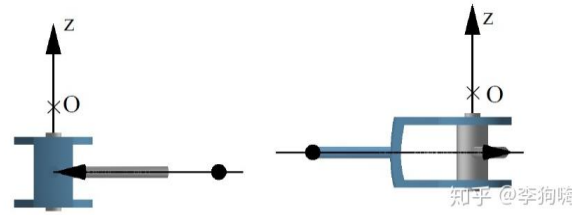
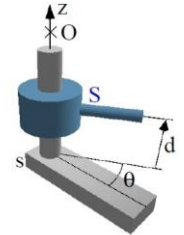
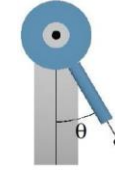
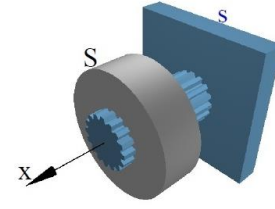
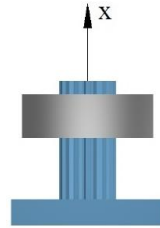
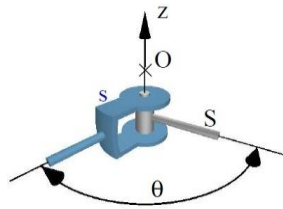
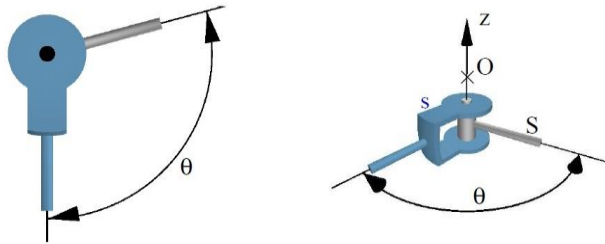
1.2 刚体间的相对运动

- 自由刚体空间运动有6个自由度。
- 当构件（刚体）之间以一定的方式联接起来成为构件系统时，各个构件不再是自由构件，这种链接机构叫做**运动副(Kinematic pairs)**。
- 通过运动副联接的两相互接触的构件间只能作一定的相对运动，自由度减少；这种对构件独立运动所施加的限制称为**约束(constraints)**。
- 可根据引入约束的数目将运动副分类，把引入一个约束的运动副成为一级副，以此类推。
- 按照运动副的接触形式分类。**面和面接触**的运动副在接触部分的**压强较低**，被称为**低副**；而通过**点或线接触**构成的运动副称为**高副**，高副比低副容易磨损。

运动副

- 两个机械构件之间通过直接接触而组成的可动连接。两个构件上参与接触而构成运动副的点、线、面等元素被称为运动副元素。
- A kinematic pair is a connection between two physical objects that imposes constraints on their relative movement.

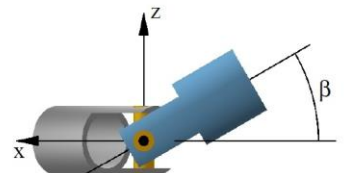
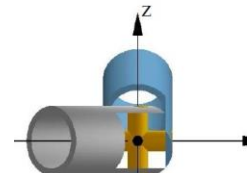
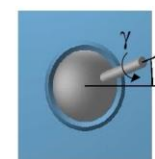
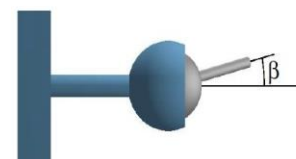
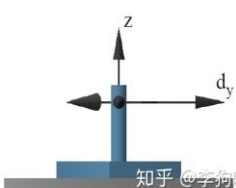
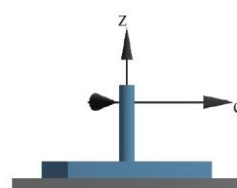
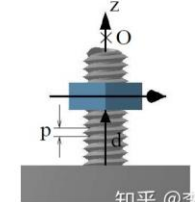
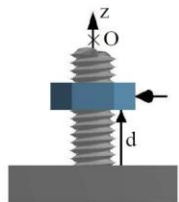
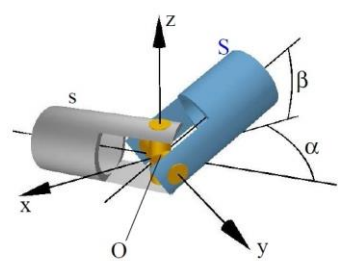
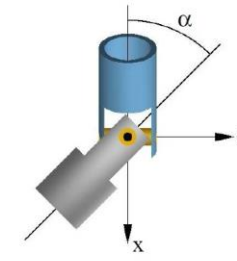
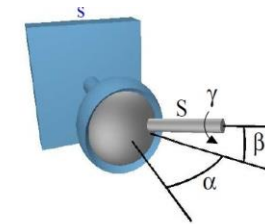
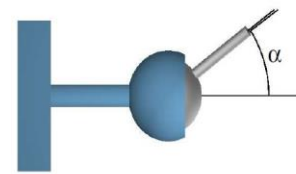
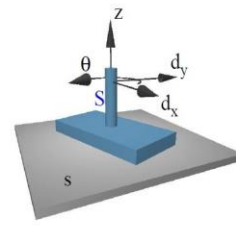
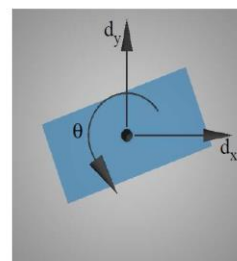
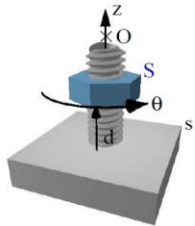
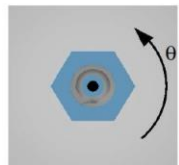
1.2 刚体间的相对运动：低副--面接触



旋转副(1DOF)
Revolute joint

平移副(1DOF)
Prismatic joint

圆柱副(2DOF)
Cylindrical joint



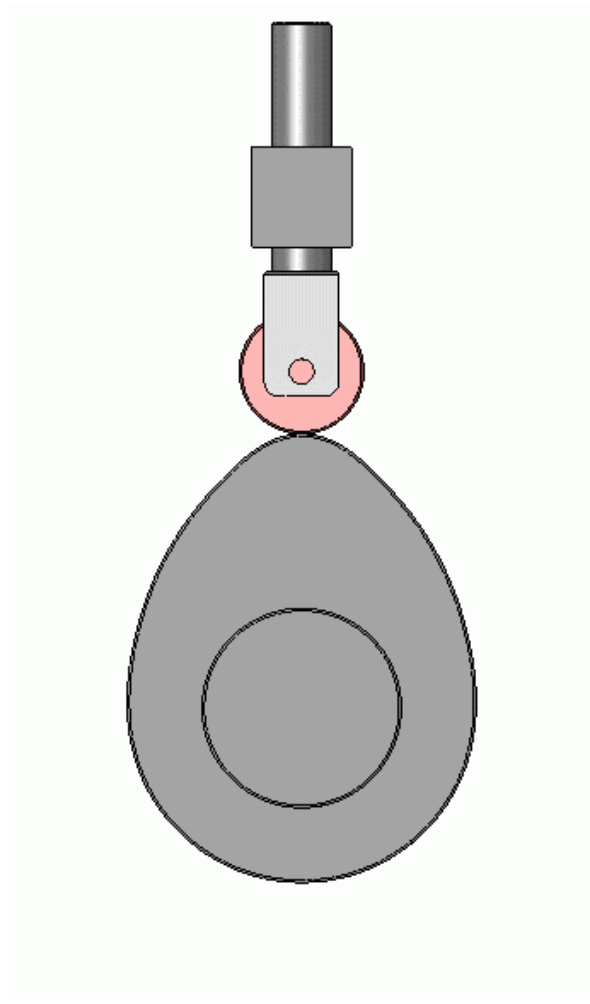
螺旋副(1DOF)
Screw joint

平面副(3DOF)
Planar joint

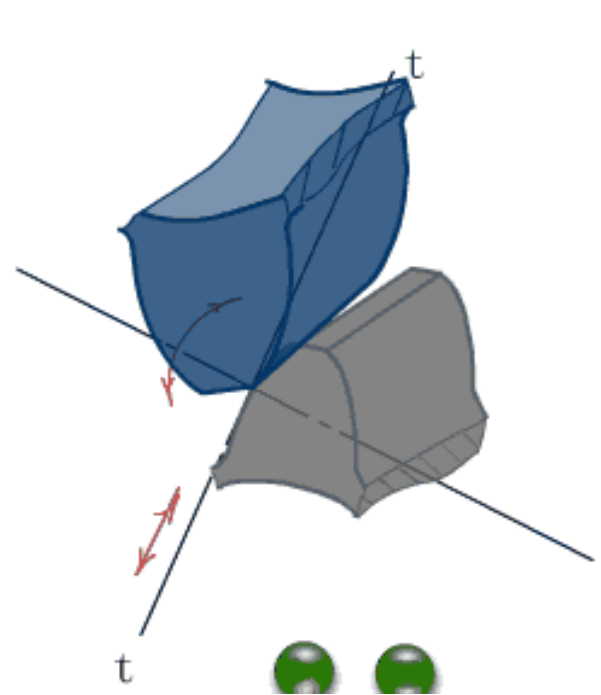
球面副(3DOF)
Spherical joint

万向节副(3DOF)
Gimbal joint

1.2 刚体间的相对运动：高副--点、线接触



凸轮副(2DOF)
Cam joint



齿轮副(2DOF)
Gear joint

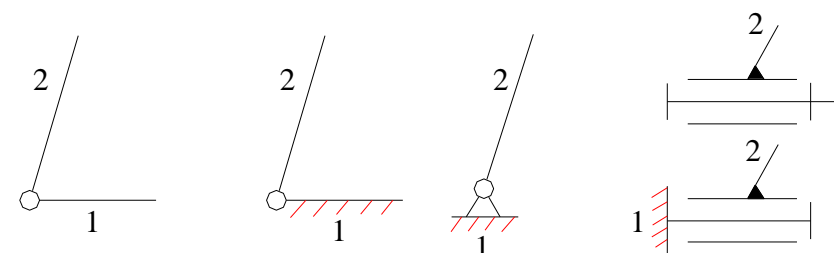
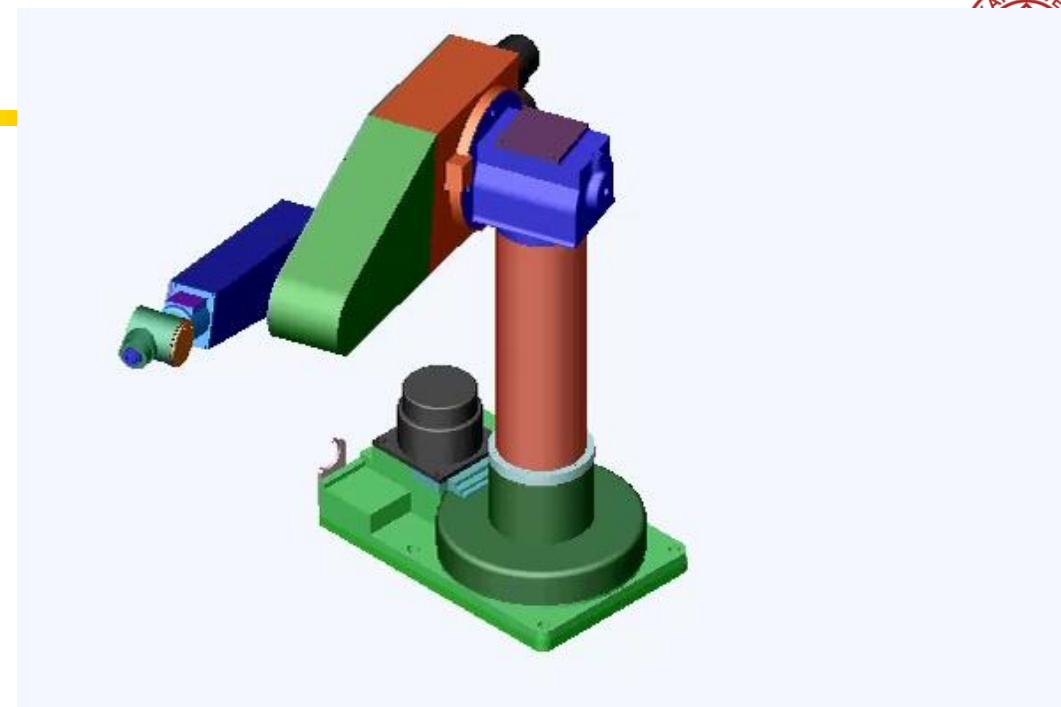
1.3 机器人基本构成

■ 关节(Joint):

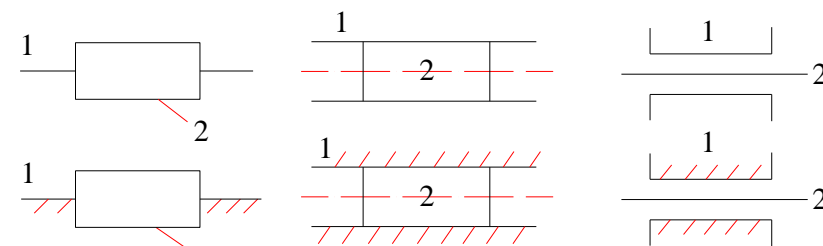
- 联接组成机器人本体各个构建（刚体）间的、能够**主动驱动**产生构件间相对运动的**运动副**
- 机器人关节仅具有**一个自由度**
 - 转动关节(Revolute joint)
 - 移动关节(Prismatic joint)

■ 连杆(Link):

- 组成机器人的由一系列通过关节连接形成运动链的**刚体**

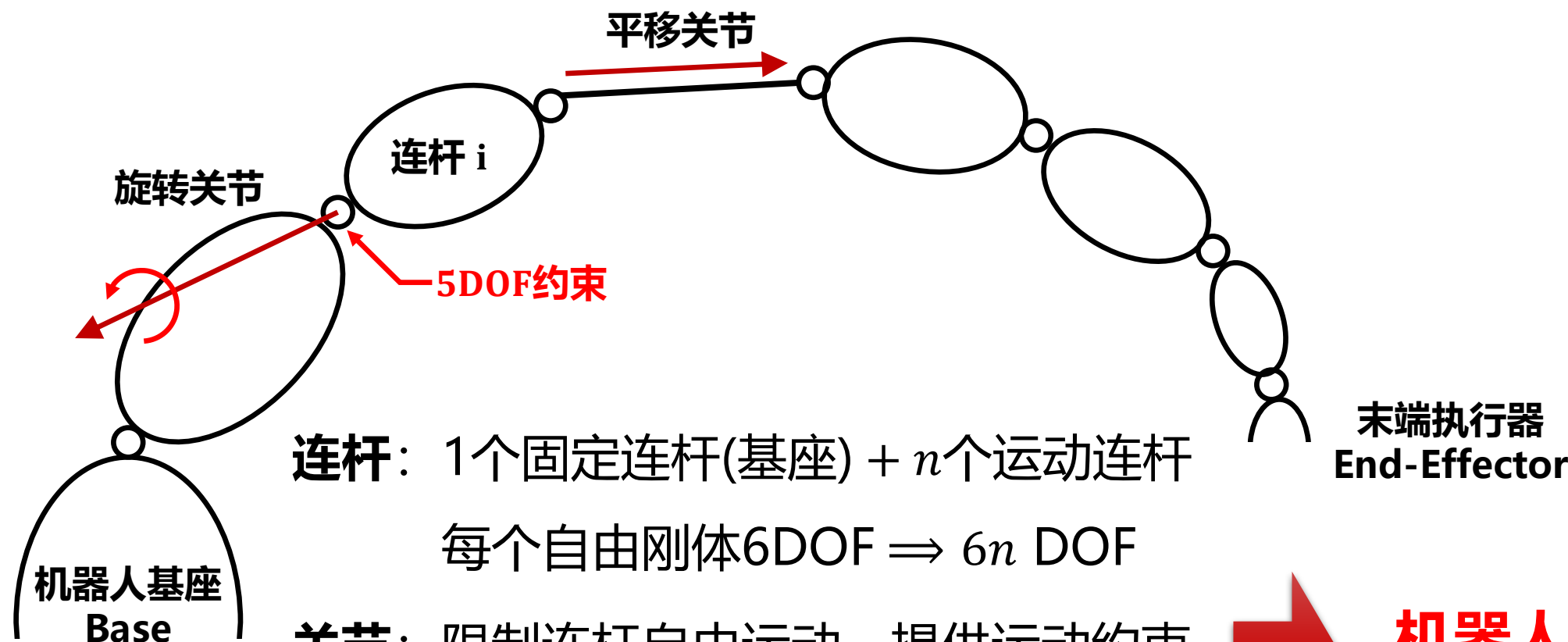


转动关节(Revolute joint)



移动关节(Prismatic joint)

1.4 机器人自由度分析



连杆: 1个固定连杆(基座) + n 个运动连杆

每个自由刚体6DOF $\Rightarrow 6n$ DOF

关节: 限制连杆自由运动, 提供运动约束

$\begin{cases} \text{旋转关节 } 1\text{DOF} \Rightarrow 5\text{DOF约束} \\ \text{平移关节 } 1\text{DOF} \Rightarrow 5\text{DOF约束} \end{cases}$

n 个关节: **$5n$ DOF 运动约束**

机器人自由度:

$$6n - 5n = n \text{ DOF}$$

■ 冗余机器人：

- 一般来说，冗余机器人指的是自由度大于6的空间机器人和自由度大于3的平面机器人为冗余机器人
- 机器人自由度大于作业需求自由度
 - 空间六自由度机器人打乒乓球
 - 空间五自由度机器人码垛
 - 平面三自由度机器人写字
- 冗余自由度可增加机器人的灵活性，可有效避免运动中的奇异，可提升机器人避障能力
- 逆运动学的多解问题，优化与计算复杂度高





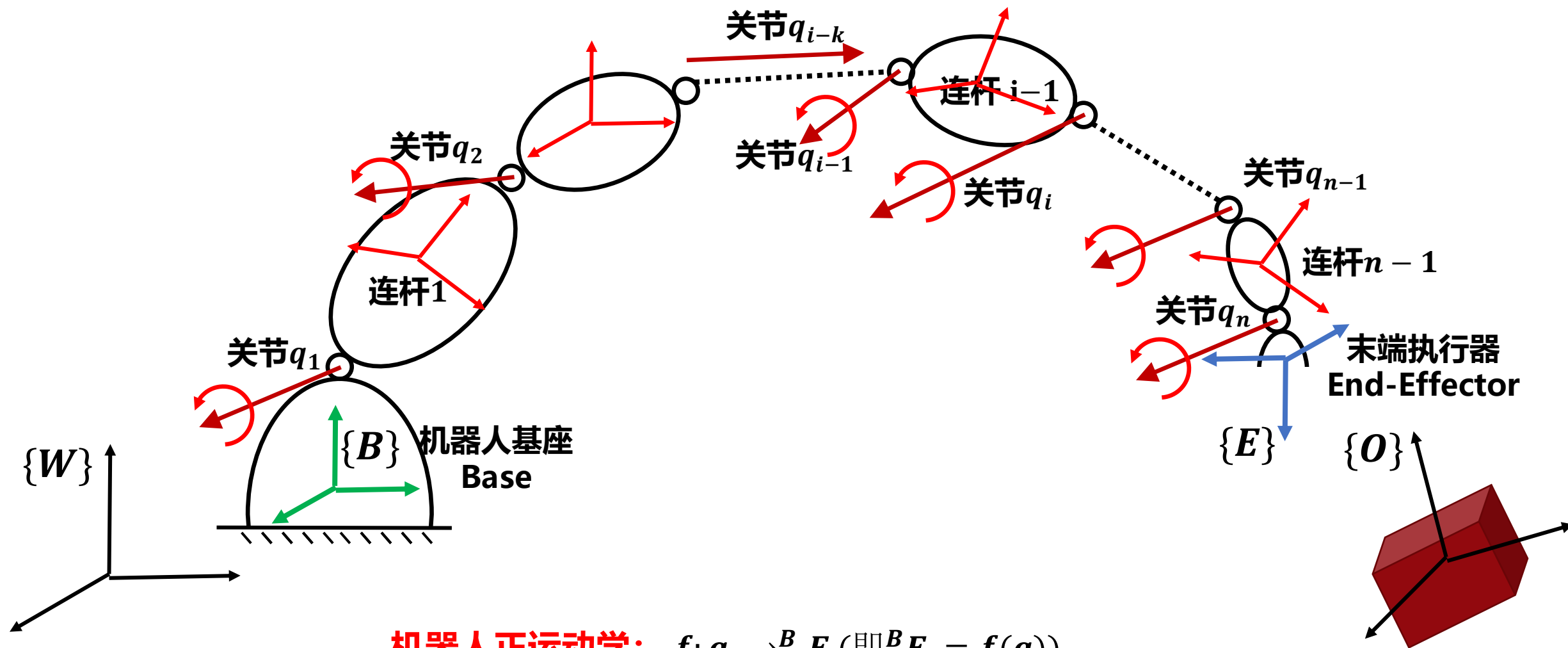
1. 机器人组成与自由度分析



2. 机器人运动学模型描述方法



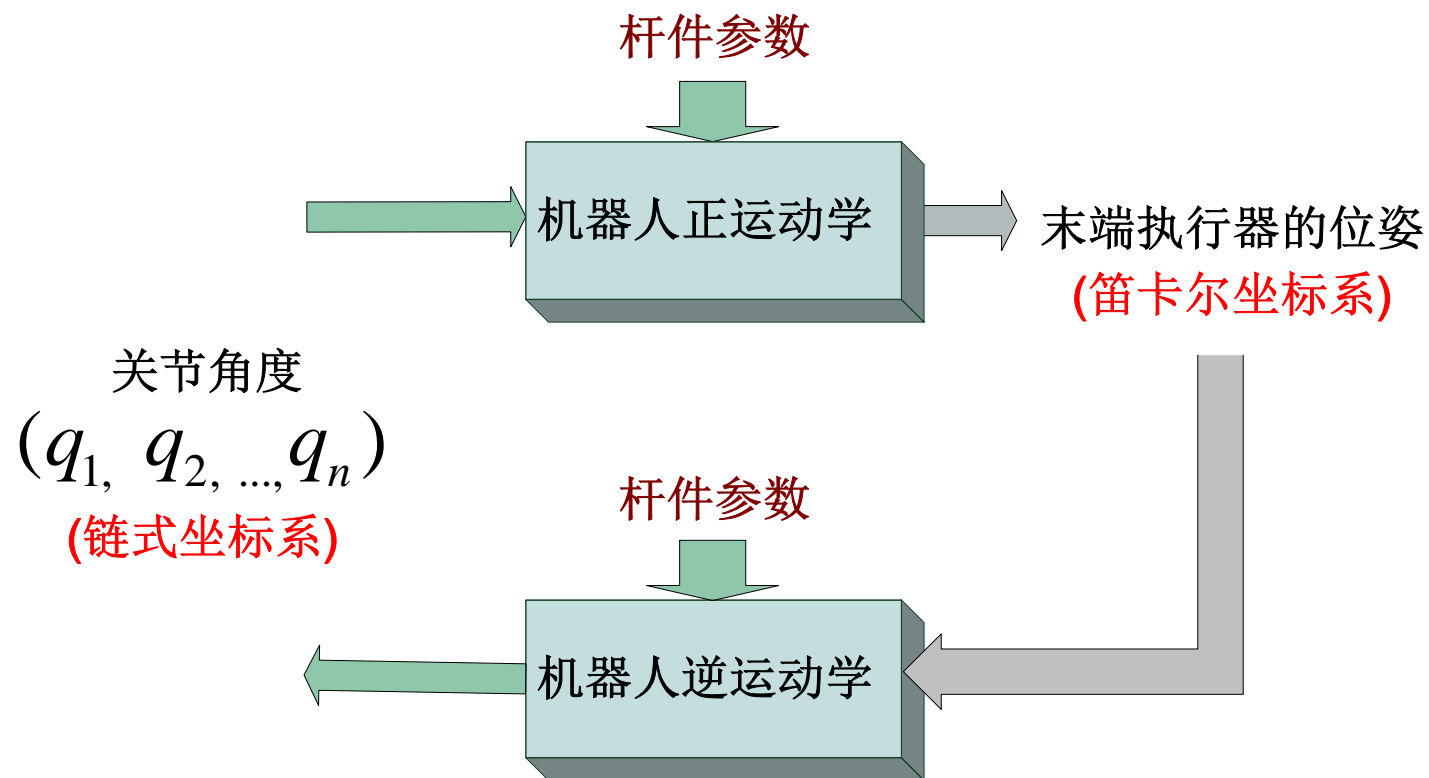
3. 机器人运动学方程



机器人正运动学: $f: q \rightarrow {}^B E$ (即 ${}^B E = f(q)$)

机器人逆运动学: $f: \{{}^B E\} \rightarrow q$ (即 $q = f({}^B E)$)

- 反映运动特性，与运动时施加的力无关
- 运动学的正问题和逆问题



核心问题:

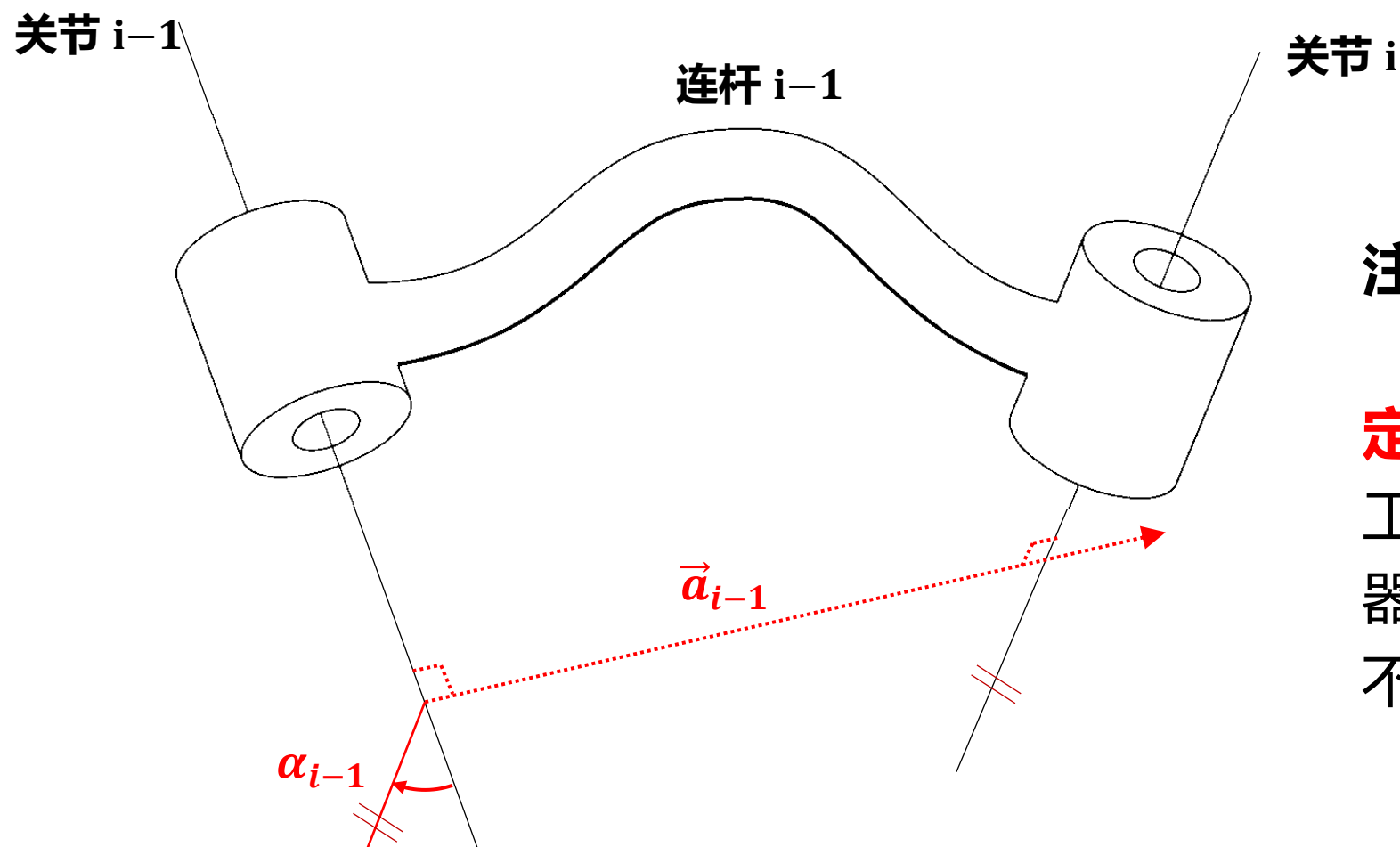
- 确定杆件参数:
 - 连杆
 - 关节
- 构建链式坐标系
- 坐标系间变换

机器人正运动学: $f: q \rightarrow {}^B E$ (即 ${}^B E = f(q)$)

机器人逆运动学: $f: \{{}^B E\} \rightarrow q$ (即 $q = f({}^B E)$)

- 为描述相邻杆件间平移和旋转的关系，Denavit和Hartenberg提出了一种为关节链中的每一个杆件建立附体坐标系的矩阵方法。
- 在1955年，Denavit和Hartenberg在ASME Journal of Applied Mechanics发表了论文 “A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices”
- 这篇论文对机器人进行表示和建模，导出了它们的运动方程。
- D-H表示法已成为表示机器人和对机器人运动进行建模的标准方法。

2.2 机器人运动学描述：机器人连杆参数



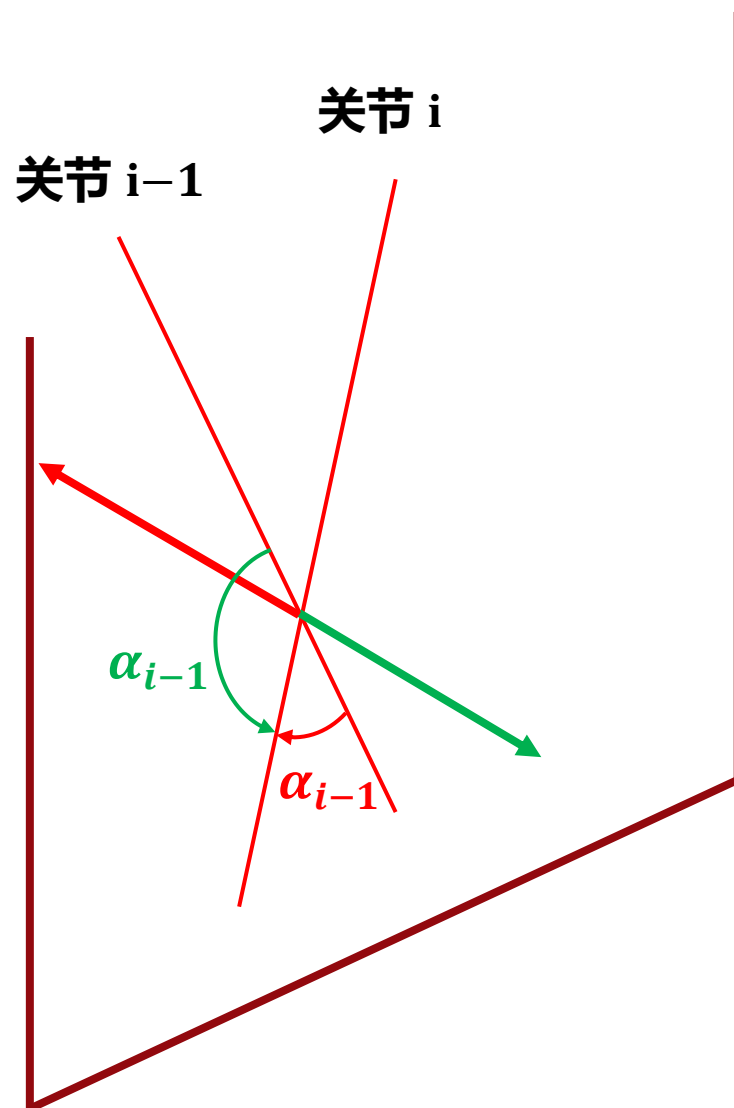
注意：

连杆参数为**定值**。机器人加工组装完毕，机器人连杆参数就不会发生变化

\vec{a}_{i-1} ：连杆长度(Link Length)——**公垂线**，具有**唯一性**（除了两轴相互平行）

α_{i-1} ：连杆扭角(Link Twist)——从关节 $i-1$ 旋转至关节 i ，方向**右手法则**

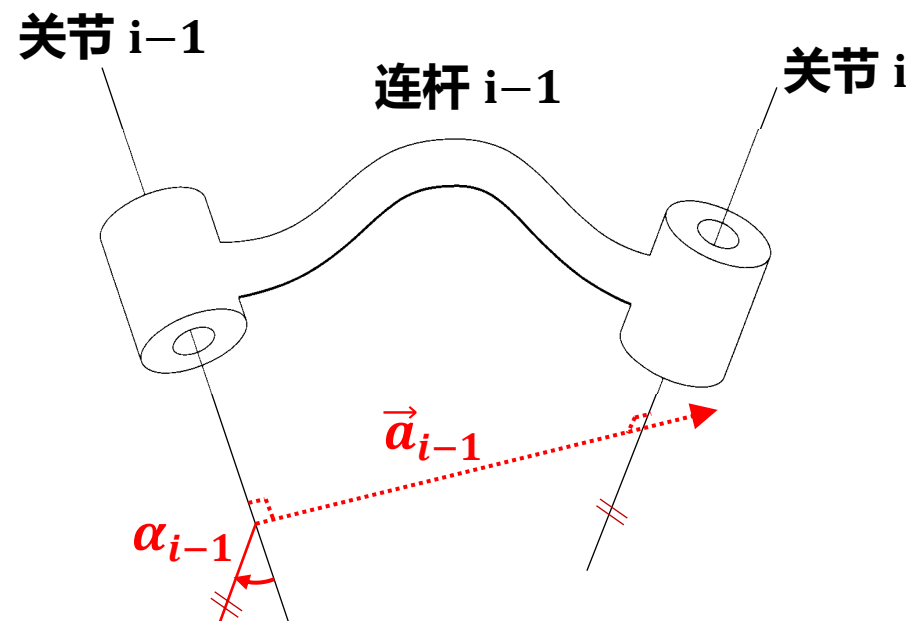
➤ 轴线相交



关节 $i-1$ 轴线由关节 i 轴线相交时:

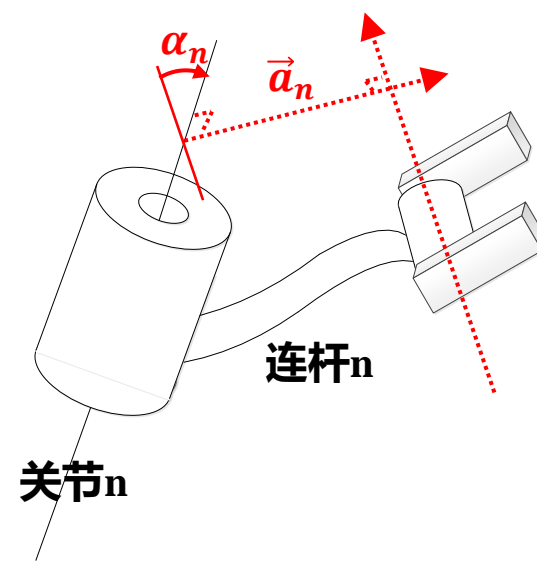
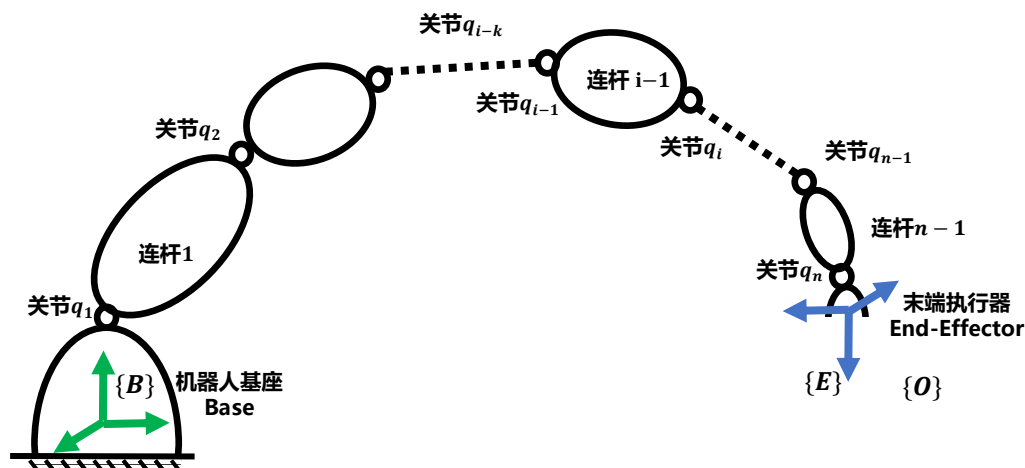
- $a_{i-1} = 0$ (公垂线距离为零)
- 连杆扭角 α_{i-1} 方向、大小与旋转轴方向的选择相关, 一般取由轴 $i-1$ 指向轴 i (机器人末端) 的方向

2.2 机器人运动学描述：机器人连杆参数

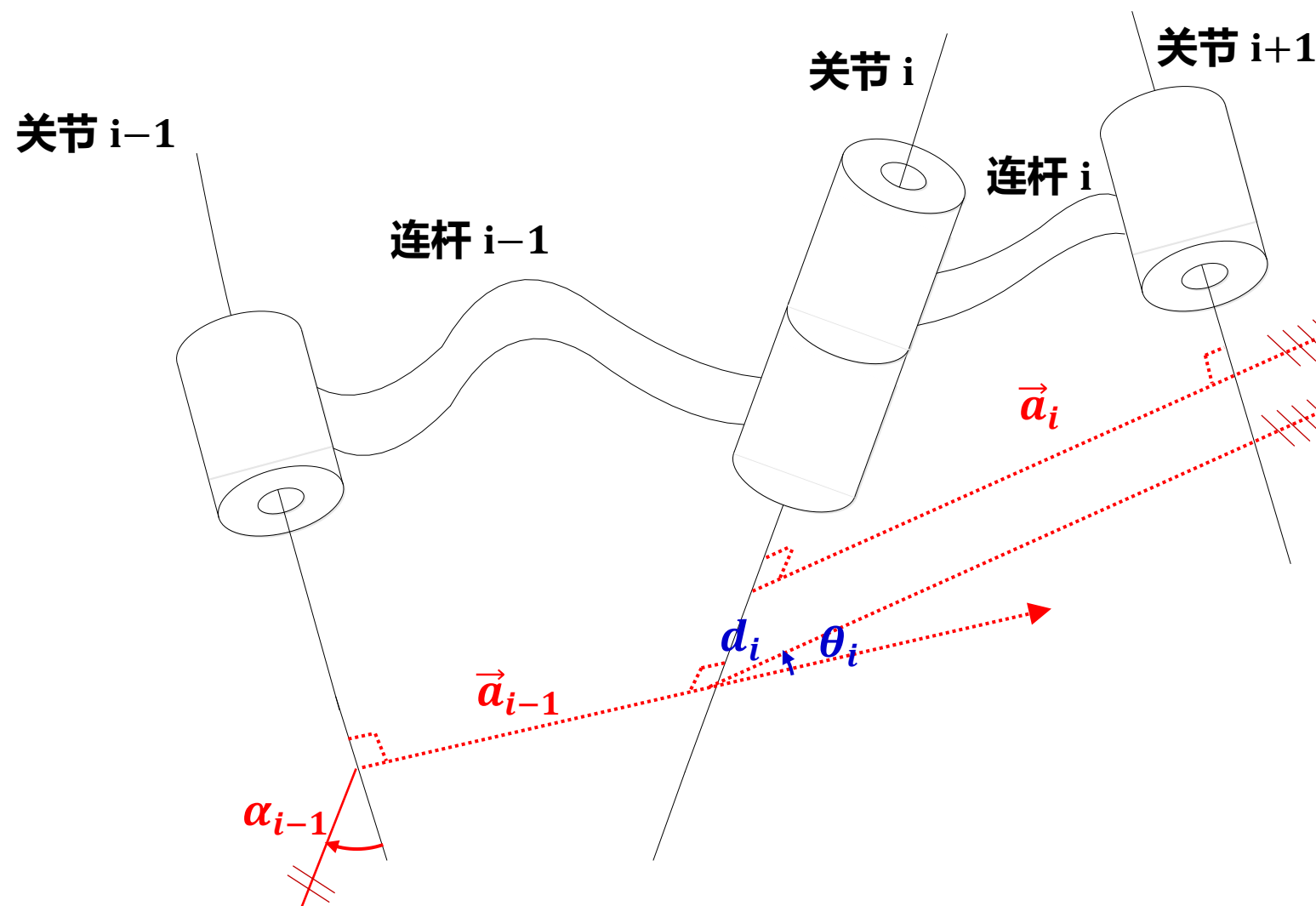


- 连杆参数(连杆长度 \vec{a}_i 和连杆扭角 α_i)由其连接的前后两个关节决定，即由关节 $i-1$ 和关节 i 相互关系求取的。
- 为此，可求得连杆1至连杆 $n-1$ 的参数，即 $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1})$ 和 $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$
- 对于机器人最后一个连杆，即末端执行器仅仅连接关节 n ，如何求取其相关参数，即连杆长度 \vec{a}_n 和连杆扭角 α_n ？
- 一般来说与机器人作业任务相关，通常可设虚拟的关节 $n+1$ 与关节 n 重合为：

$$\vec{a}_n = 0, \quad \alpha_n = 0$$



2.2 机器人运动学描述：机器人关节参数

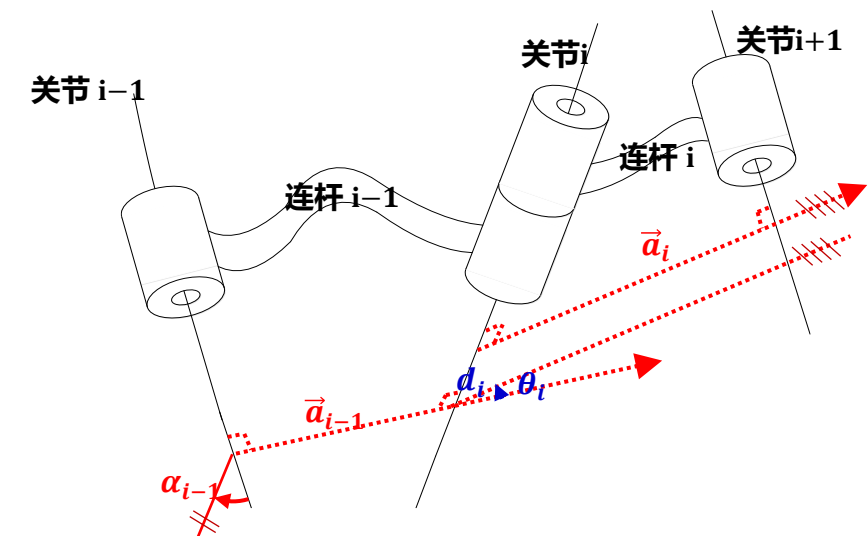


注意：
关节参数与关节性质
相关：

- 平移关节：
 θ_i 定值, d_i 变量
- 旋转关节：
 d_i 定值, θ_i 变量

d_i : 关节偏距 d_i (Joint Offset)——关节连接的两个杆件间的距离
 θ_i : 关节转角 θ_i (Joint Angle)——关节连接的两个杆件间的夹角

2.2 机器人运动学描述：机器人关节参数



- 关节参数(关节偏距 d_i 和关节转角 θ_i)由其连接的前后两个连杆决定，即由连杆 i 和连杆 $i-1$ 相互关系求取的。
- 为此，可求得关节2至关节 n 的参数，即 (d_2, \dots, d_n) 和 $(\theta_2, \dots, \theta_n)$ (注： d_n, θ_n 需要先求取连杆 n 的参数)

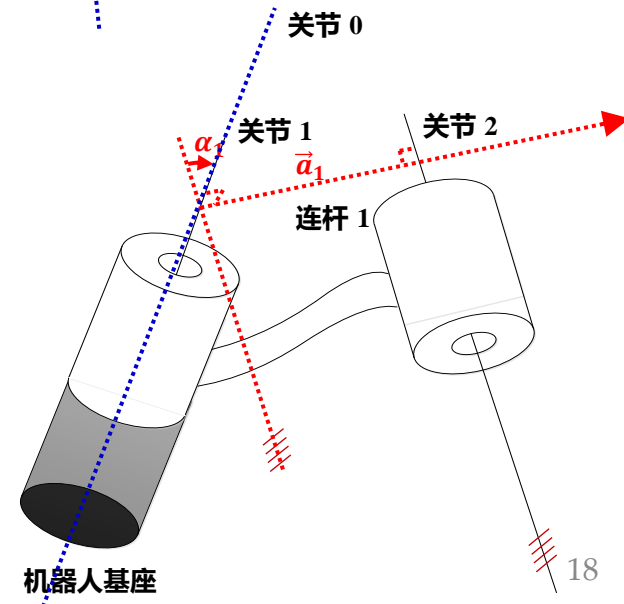
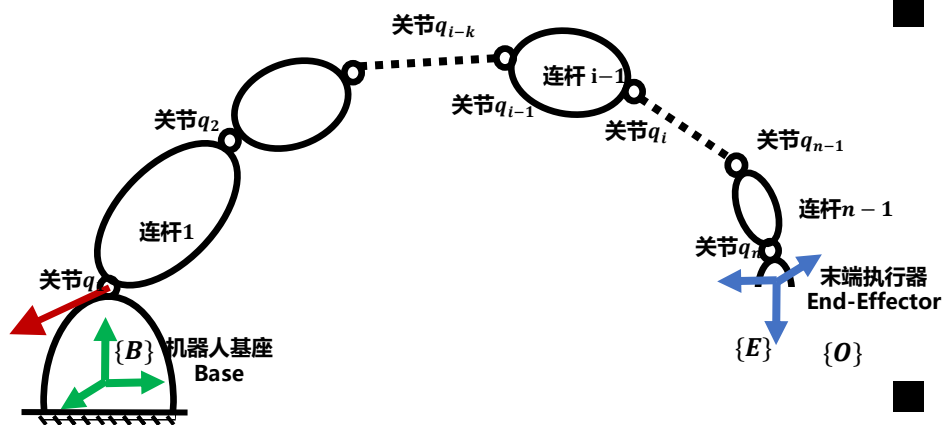
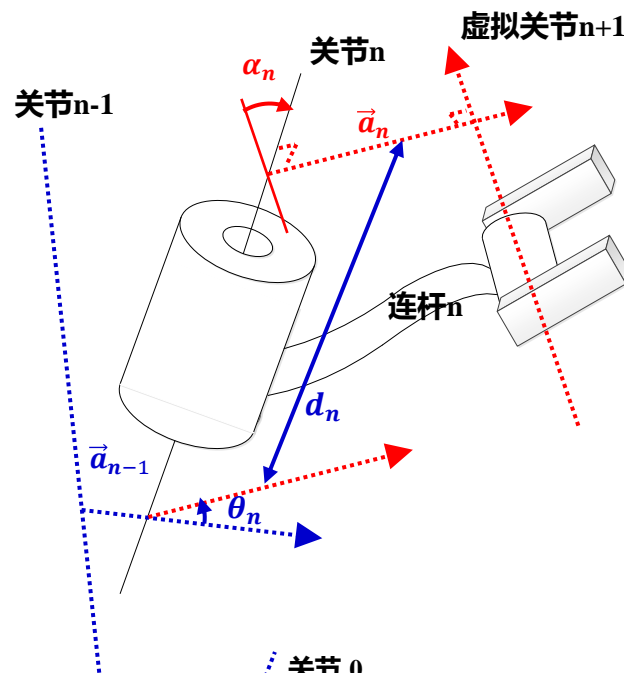
- **对于机器人第一个关节的一端连接在机器人基座上，如何求取其相关参数，即关节偏距 d_1 和关节转角 θ_1 ？**

- 由于基座本身固定在世界坐标系下，通常为了简化计算，可设基座虚拟的关节0与关节1重合，可得：

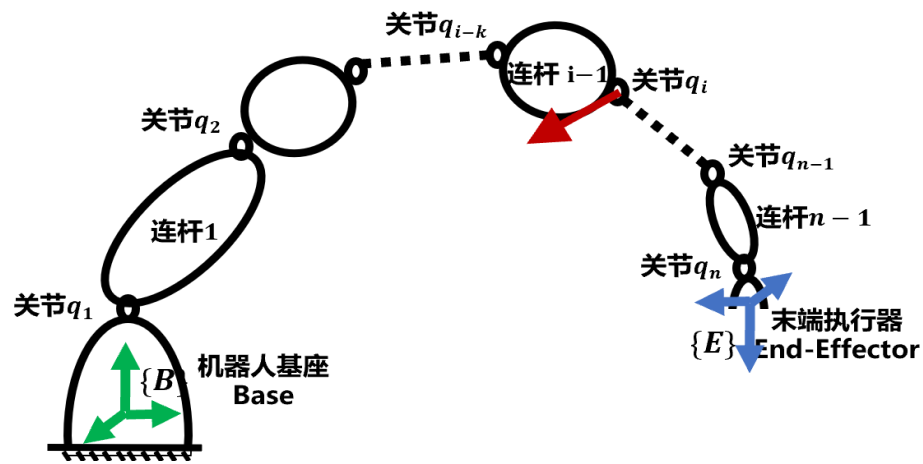
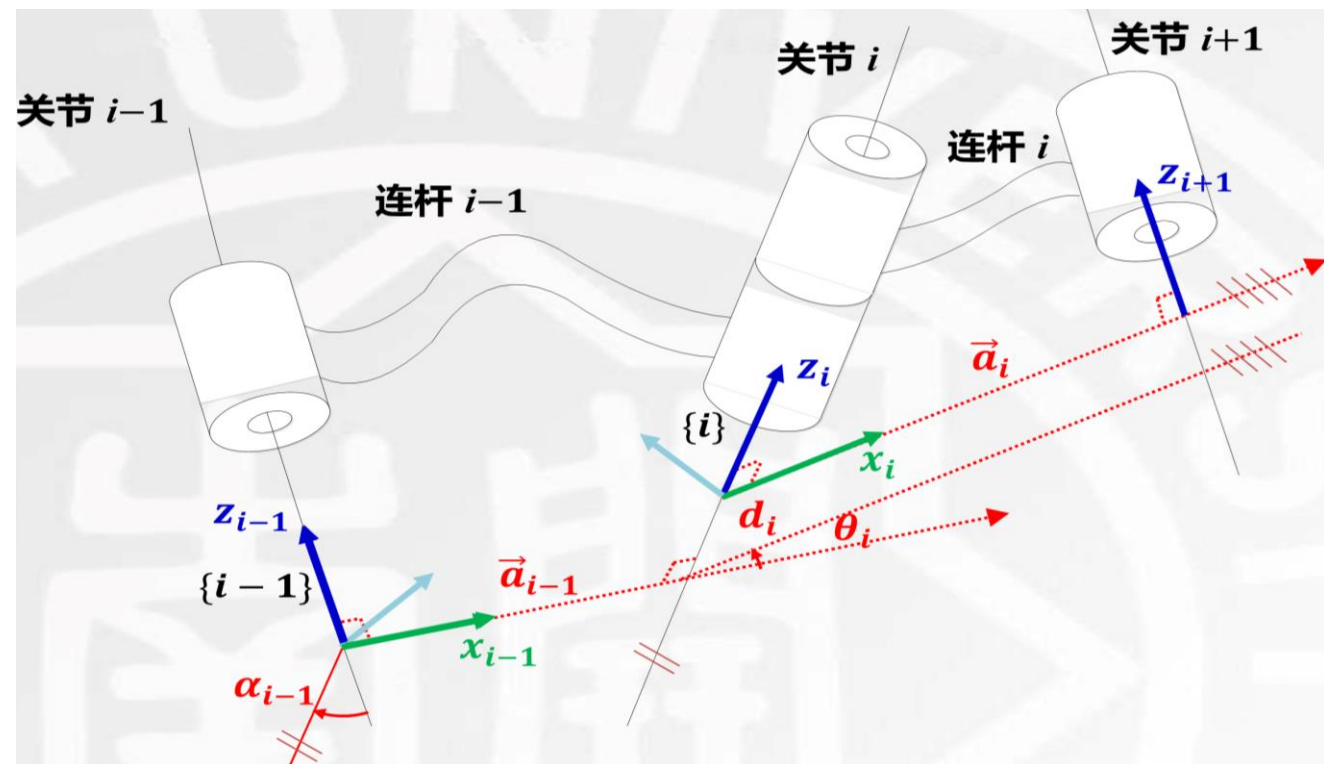
$$d_1 = 0 \quad (\text{关节1为旋转关节})$$

$$\theta_1 = 0 \quad (\text{关节1为平移关节})$$

- 注意：此时 $\alpha_0 = 0, a_0 = 0$



2.2 机器人运动学描述：机器人关节坐标系构建



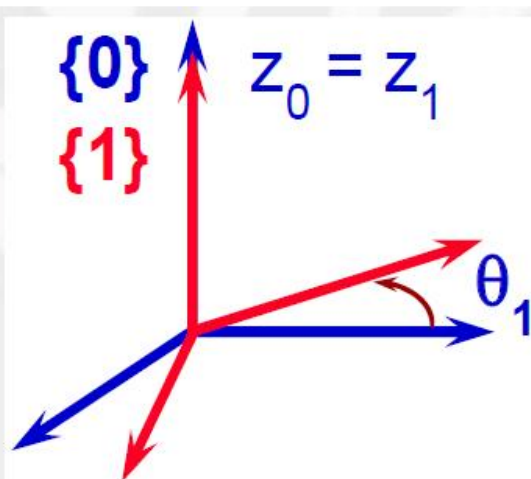
- 坐标系 $\{i\}$ 的 Z_i 轴与关节轴 i 重合，原点位于公垂线 a_i 与关节轴 i 的交点， X_i 沿 a_i 由关节 i 指向关节 $i+1$ ；
- Z_i 的方向有两种选择， α_i 的符号也有两种选择； Y_i 由右手定则确定。
- 坐标系 $\{i\}$ 表征的是作为刚体的连杆 i 在关节 i 绕坐标系 $\{i\}$ 的 z 轴运动后，其相对于坐标系 $\{i-1\}$ 的位置和姿态。
- 参考坐标系 $\{0\}$ 可以任意设定；通常 Z_0 与 Z_1 方向相同，且当 $\theta_1 = 0$ 时，坐标系 $\{0\}$ 与 $\{1\}$ 重合。

- 对于关节 i ，其对应的坐标系为 $\{i\}$ ，其**DH参数**为（注意第1、 n 关节的DH参数）：

$$\alpha_{i-1}, \vec{a}_{i-1}, \theta_i, d_i$$

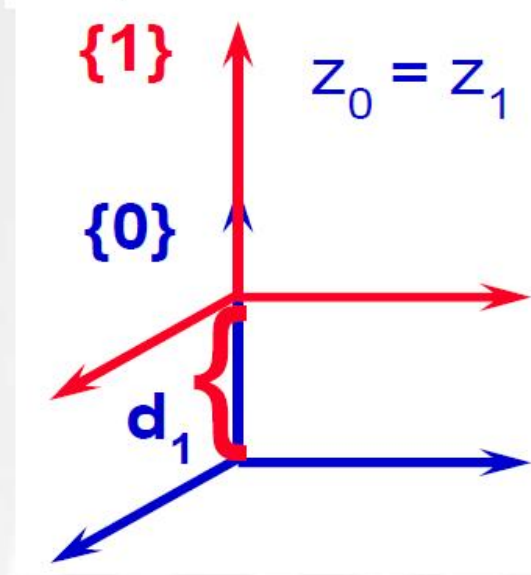
➤ 机器人基坐标系{0}的确定

旋转关节



$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ \alpha_0 &= 0 \\ d_1 &= 0 \\ \theta_1 = 0 &\longrightarrow \{0\} \equiv \{1\} \end{aligned}$$

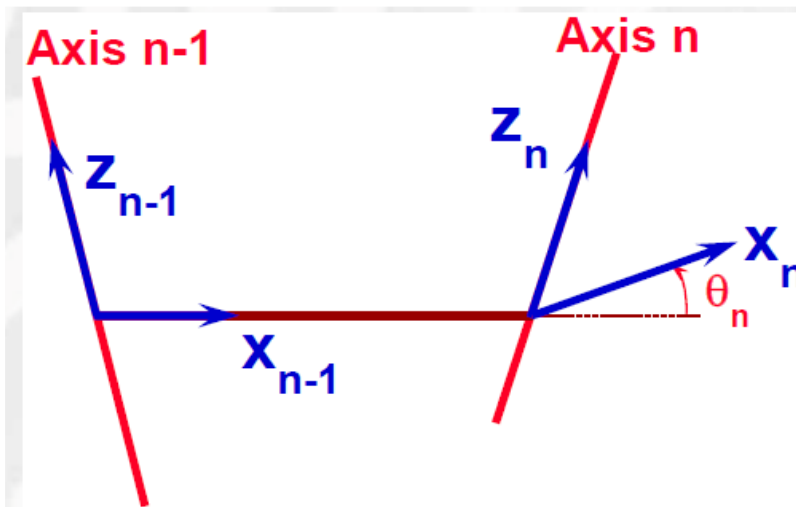
平移关节



$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ \alpha_0 &= 0 \\ \theta_1 &= 0 \\ d_1 = 0 &\longrightarrow \{0\} \equiv \{1\} \end{aligned}$$

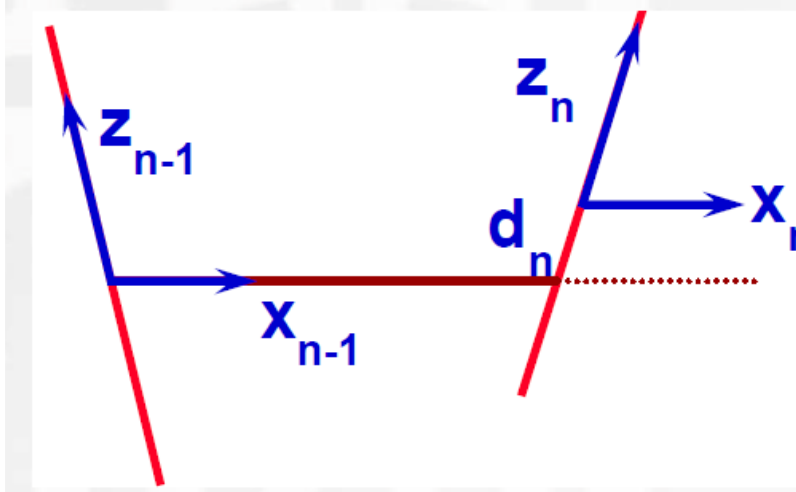
➤ 机器人末关节坐标系 $\{n\}$ 的确定

旋转关节



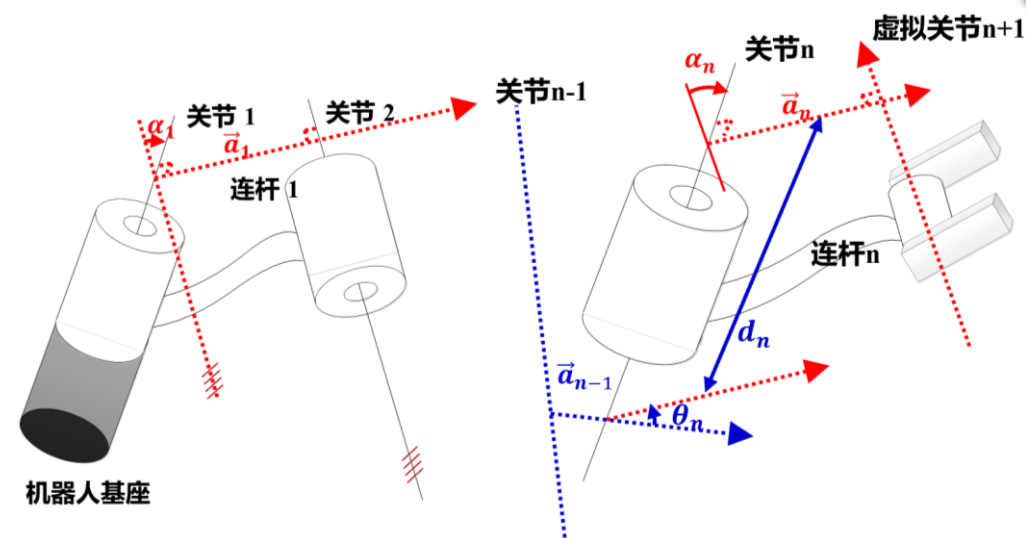
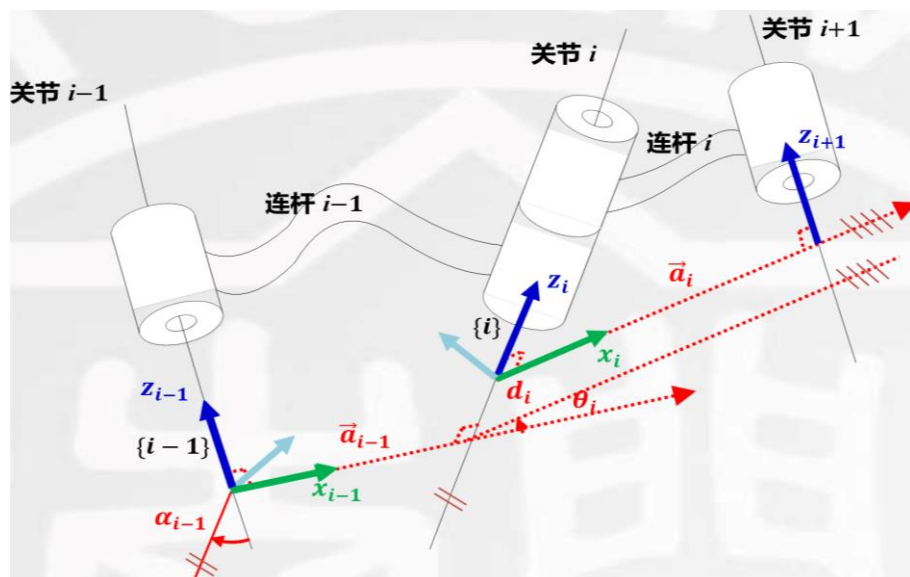
$$d_n = 0$$
$$\theta_n = 0 \longrightarrow x_n = x_{n-1}$$

平移关节



$$\theta_n = 0$$
$$d_n = 0 \longrightarrow x_n = x_{n-1}$$

➤ 机器人DH参数求取步骤



将连杆坐标系固连在连杆上 Z_i

关节*i*
坐标系定义

坐标系 $\{i\}$ 的 Z_i 轴与关节轴 i 重合，原点位于公垂线 a_i 与关节轴 i 的交点， X_i 沿 a_i 由关节 i 指向关节 $i+1$

连杆参数
(关节之间)

\vec{a}_i = 沿 X_i 轴, 从 Z_i 移动到 Z_{i+1} 的距离;
 α_i = 绕 X_i 轴, 从 Z_i 旋转到 Z_{i+1} 的角度;

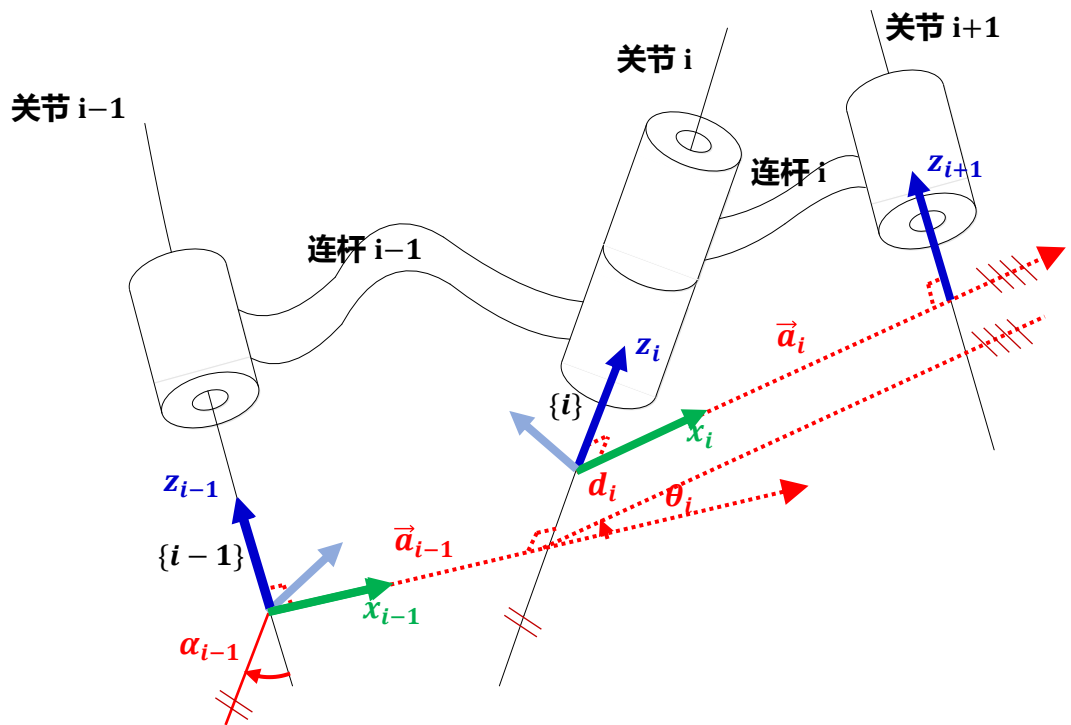
关节参数
(连杆之间)

d_i = 沿 Z_i 轴, 从 X_{i-1} 移动到 X_i 的距离;
 θ_i = 绕 Z_i 轴, 从 X_{i-1} 旋转到 X_i 的角度;

- ✓ 当关节 i 为平动关节时, d_i 为变量;
- ✓ 当关节 i 为转动关节时, θ_i 为变量。

- 连杆四个参数也可分为几何参数(α_i, \vec{a}_i)和运动参数(d_i, θ_i), d_i 和 θ_i 是否可以**同时为常量**? 是否可以**同时为变量**?
- **上述方法建立的坐标系唯一吗,为什么呢?**

2.2 机器人运动学描述：机器人DH参数表



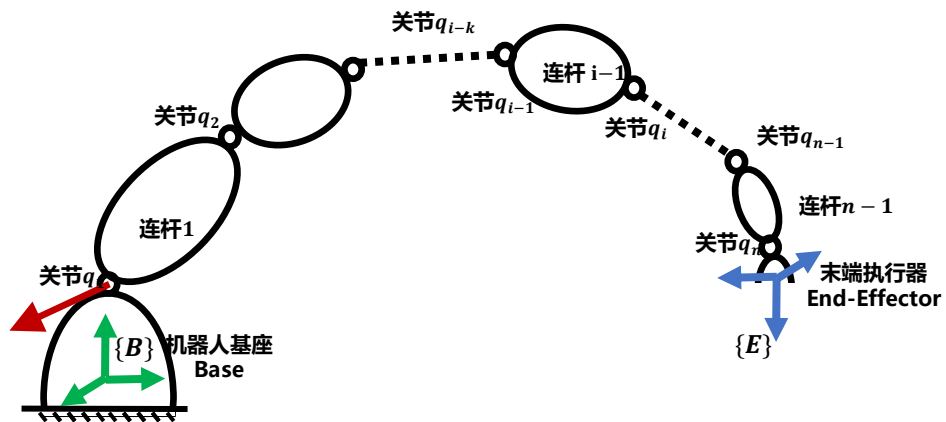
- 对于关节 i ，其对应的坐标系为 $\{i\}$ ，其**DH参数**为：

$$\alpha_{i-1}, \vec{a}_{i-1}, \theta_i, d_i$$

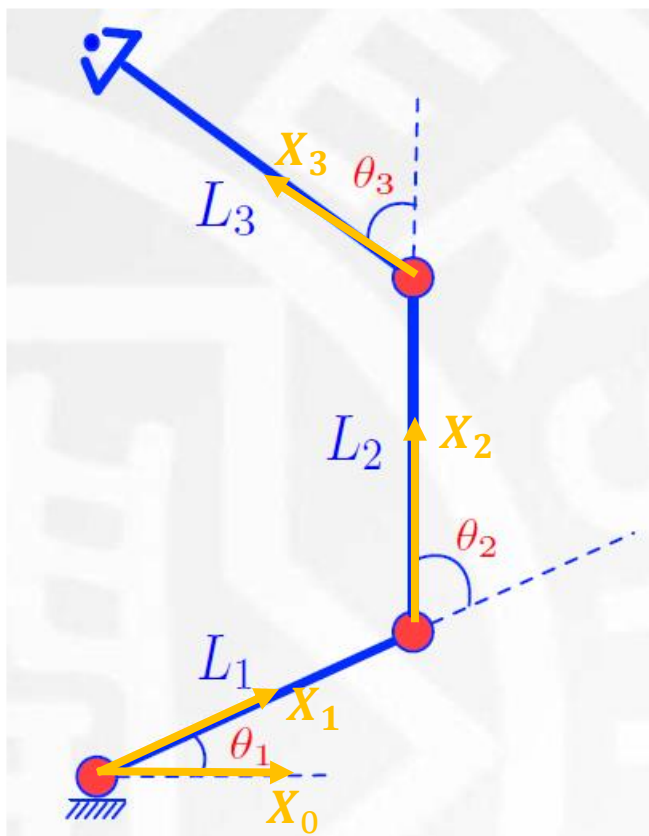
- 从机器人第一个关节依次求取对应的上一个连杆参数和当前的关节参数，作为对应关节坐标系的参数列写道DH参数表中
- 四个参数可分为几何参数(α_i, \vec{a}_i)和运动参数(d_i, θ_i)，因此根据关节类型，先填入变量

DH参数表

关节	α_{i-1}	\vec{a}_{i-1}	θ_i	d_i
1				
2				
3				
4				
.....				



➤ 例1 平面RRR三关节机器人



- 构建关节坐标系
- 从机器人第一个关节依次求取对应的上一个连杆参数和当前的关节参数，作为对应关节坐标系的参数列写道DH参数表中
- 根据关节类型，先填入变量

DH参数表

关节	α_{i-1}	\vec{a}_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3



1. 机器人组成与自由度分析

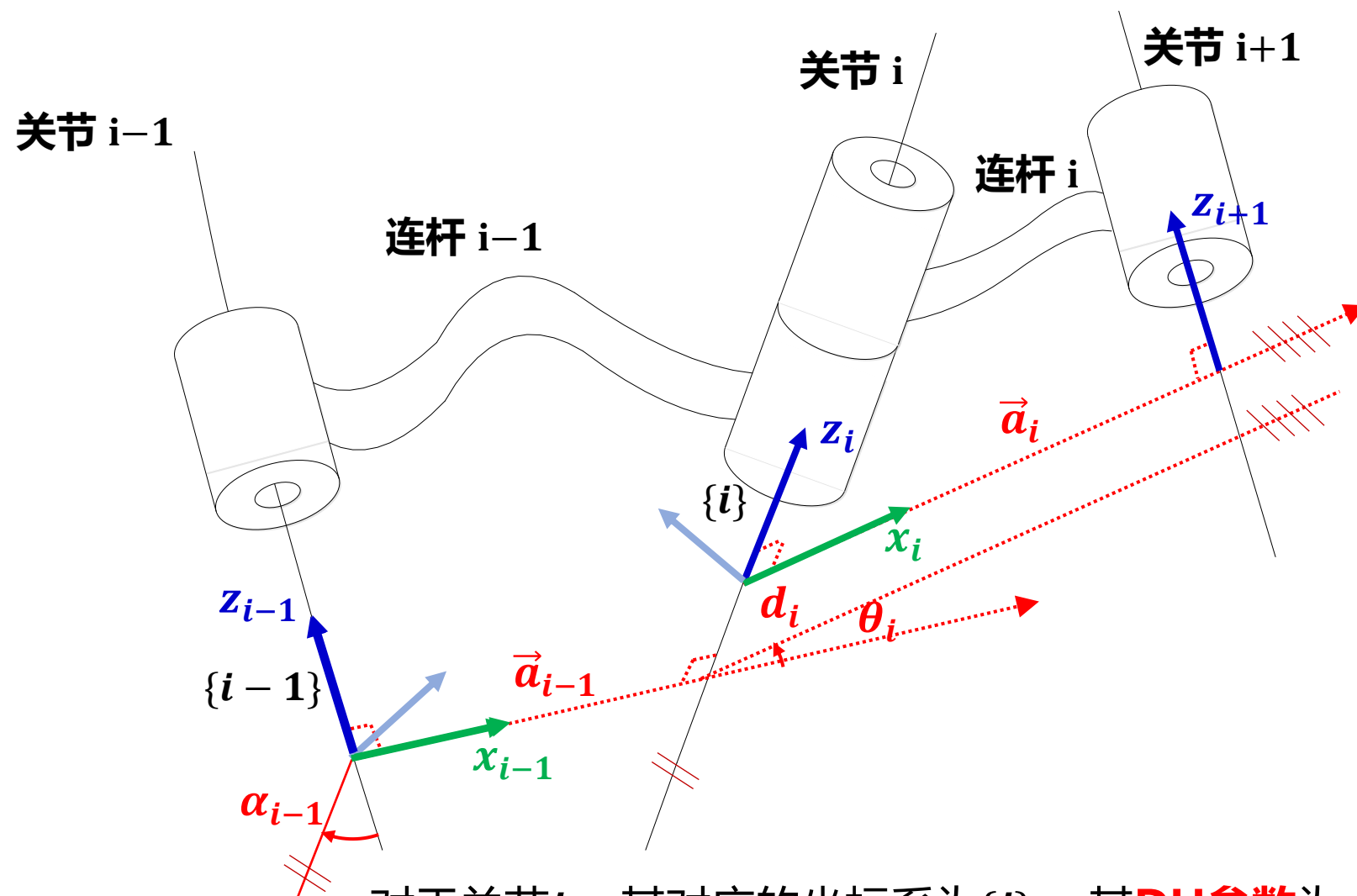


2. 机器人运动学模型描述方法



3. 机器人运动学方程

3.1 机器人关节坐标系变换过程



对于关节 i ，其对应的坐标系为 $\{i\}$ ，其**DH参数**为：
 α_{i-1} ， \vec{a}_{i-1} ， θ_i ， d_i

将坐标系 $\{i\}$ 放置于重合于
坐标系 $\{i-1\}$

绕坐标系 $\{i\}$ 的**x轴**旋转
 α_{i-1}

沿新生成的坐标系**x轴**平移
 \vec{a}_{i-1}

绕新生成的坐标系**z轴**旋转
 θ_i

沿新生成的坐标系**z轴**平移
 d_i

3.2 机器人关节坐标系变换方程

- 关节*i*的DH参数是表征连杆*i* 所在坐标系{*i*}相对与其前一个连杆*i - 1*所在坐标系{*i - 1*}的参数表征
- 坐标系{*i*}表示作为刚体的连杆*i* 在关节*i* 沿坐标系{*i*}的*z*轴运动后，其**相对于连杆*i - 1*的位置和姿态**

将坐标系{*i*}放置于重合于坐标系{*i - 1*}

绕坐标系{*i - 1*}的*x*轴
旋转 α_{i-1}

沿新生成的坐标系*x*轴
平移 \bar{a}_{i-1}

绕新生成的坐标系*z*轴
旋转 θ_i

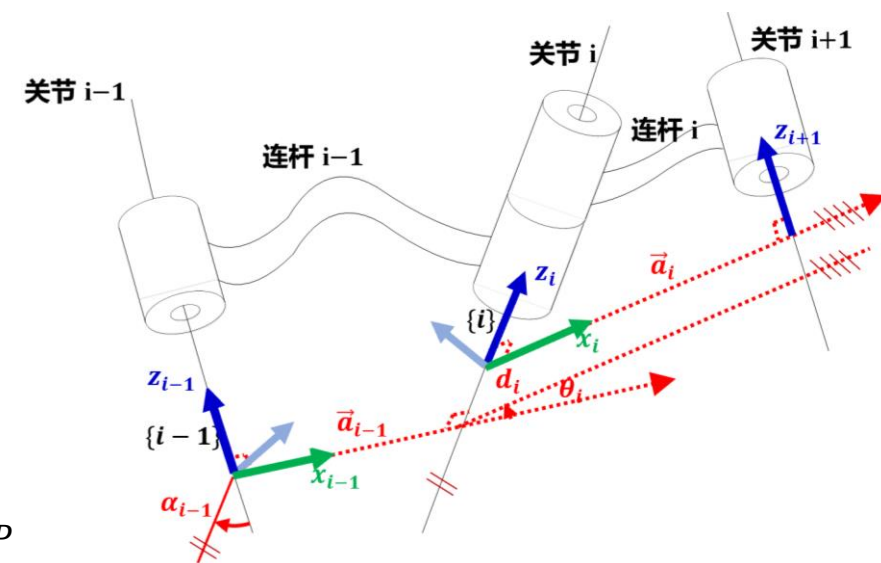
沿新生成的坐标系*z*轴
平移 d_i

$${}^{i-1}P = {}^{i-1}_i T {}^i P = \begin{bmatrix} TR_{x_{i-1}}(\alpha_{i-1}) & \mathbf{0}^{3 \times 1} \\ \mathbf{0}^{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} {}^i P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^i P$$

$${}^i P = {}^i_{i''} T {}^{i''} P = \begin{bmatrix} D_x(\bar{a}_{i-1}) & \mathbf{0}^{3 \times 1} \\ \mathbf{0}^{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} {}^{i''} P$$

$${}^{i''} P = {}^{i''}_{i'''} T {}^{i'''} P = \begin{bmatrix} TR_{z_i}(\theta_i) & \mathbf{0}^{3 \times 1} \\ \mathbf{0}^{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} {}^{i'''} P = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{i'''} P$$

$${}^{i'''} P = {}^{i'''}_i T {}^i P = \begin{bmatrix} D_z(d_i) & \mathbf{0}^{3 \times 1} \\ \mathbf{0}^{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} {}^i P$$



$${}^{i-1}P = {}^{i-1}_i T {}^i P$$

$${}^{i-1}_i T = \underline{TR_{x_{i-1}}(\alpha_{i-1})} \underline{D_x(a_{i-1})} \underline{TR_{z_i}(\theta_i)} \underline{D_z(d_i)}$$

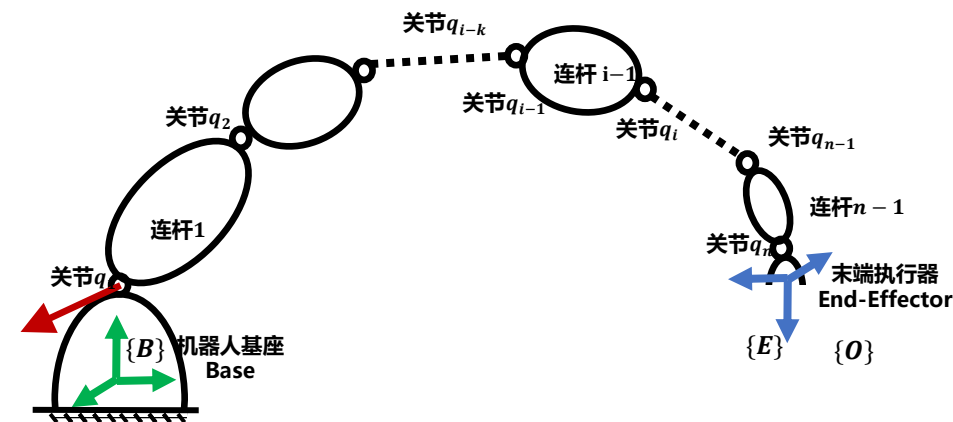
3.3 机器人正运动学方程

$${}^{i-1}P = {}^{i-1}T {}^iP$$

$${}^{i-1}T = \underline{TR_{x_{i-1}}(\alpha_{i-1})D_x(\alpha_{i-1})} \underline{TR_{z_i}(\theta_i)D_z(d_i)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Screw_X(\alpha_{i-1}, a_{i-1}) \quad Screw_Z(\theta_i, d_i)$



机器人正运动学: $f: q \rightarrow {}^B E$ (即 ${}^B E = f(q)$)

$${}^{i-1}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & -d_i \sin \alpha_{i-1} \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & d_i \cos \alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DH参数表

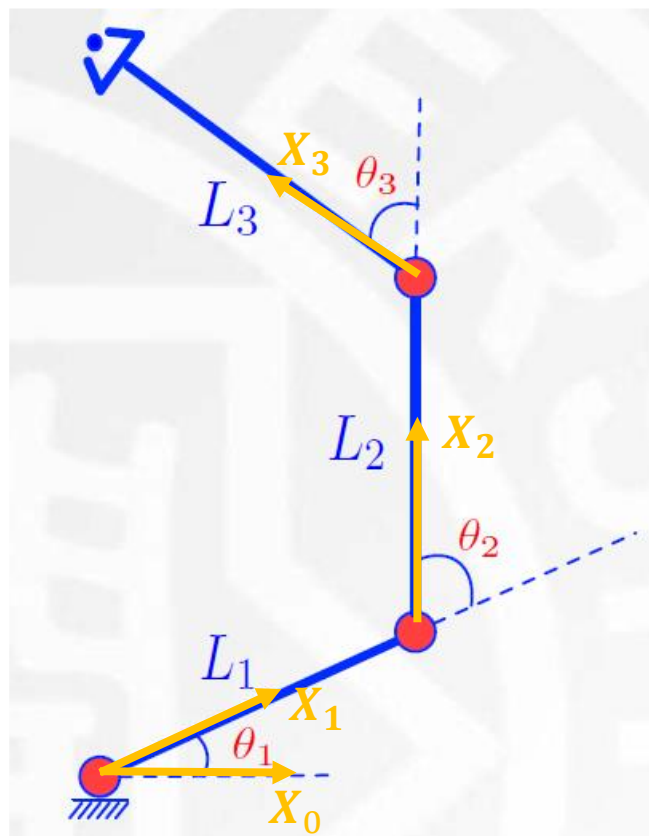
关节	α_{i-1}	\bar{a}_{i-1}	θ_i	d_i	
1					0_1T
2					1_2T
\vdots					\vdots
n					${}^{n-1}_nT$

$${}^0_nT = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot \dots \cdot {}^{n-1}_nT$$

■ 注意: 是映射变换, 应该右乘

- 相对于各个关节参数，我们更关心的是末端执行器的位姿。
- 运动学是静态的
- 只要有**任何关于Y轴的运动，D-H法不再适用**
- 基于D-H法构建机器人正运动学模型步骤：
 - 根据D-H方法，为每个关节建立附体坐标系，Z轴方向沿关节的指向，X轴方向为相邻关节Z轴之间的公垂线指向
 - 构建D-H参数表，将坐标系之间的变换矩阵用 θ 、 d 、 α 、 a 四个标准参数表示。
 - 建立 4×4 齐次变换矩阵，表示它与前一个杆件坐标系的关系。
 - 通过逐次坐标变换（从前一关节至后一关节），得到“**腕部坐标**”，而非“手部坐标”。要得到手部坐标，需增加一个额外的关节，经过一次固定的齐次变换。

3.5 举例：平面RRR三关节机器人



- 构建关节坐标系
- 从机器人第一个关节依次求取对应的上一个连杆参数和当前的关节参数，作为对应关节坐标系的参数列写道DH参数表中
- 根据关节类型，先填入变量

DH参数表

关节	α_{i-1}	\vec{a}_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

3.5 举例：空间RP2R四关节机器人正运动学

将连杆坐标系固连在连杆上 Z_i

关节 i
坐标系定义

坐标系 $\{i\}$ 的 Z_i 轴与关节轴 i 重合, 原点位于公垂线 a_i 与关节轴 i 的交点, X_i 沿 a_i 由关节 i 指向关节 $i+1$

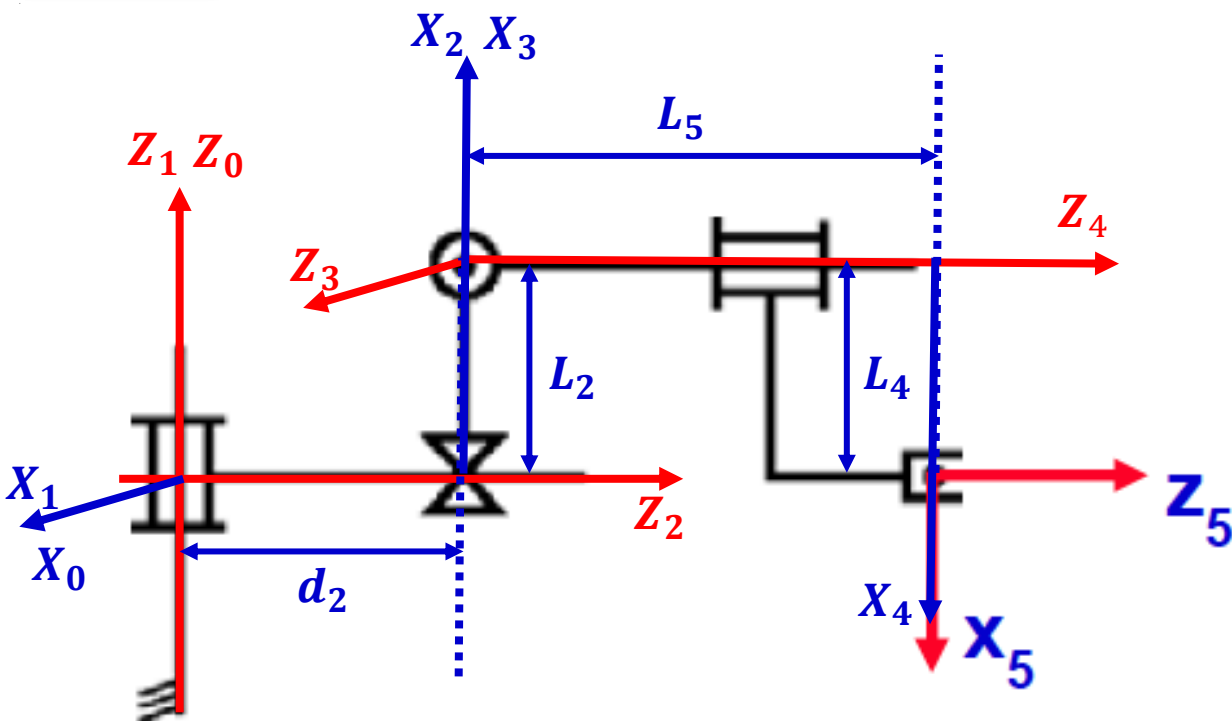
连杆参数
(关节之间)

\vec{a}_i = 沿 X_i 轴, 从 Z_i 移动到 Z_{i+1} 的距离;
 α_i = 绕 X_i 轴, 从 Z_i 旋转到 Z_{i+1} 的角度;

关节参数
(连杆之间)

d_i = 沿 Z_i 轴, 从 X_{i-1} 移动到 X_i 的距离;
 θ_i = 绕 Z_i 轴, 从 X_{i-1} 旋转到 X_i 的角度;

- 构建关节坐标系
- 从机器人第一个关节依次求取对应的上一个连杆参数和当前的关节参数, 作为对应关节坐标系的参数列写道DH参数表中
- 根据关节类型, 先填入**变量**

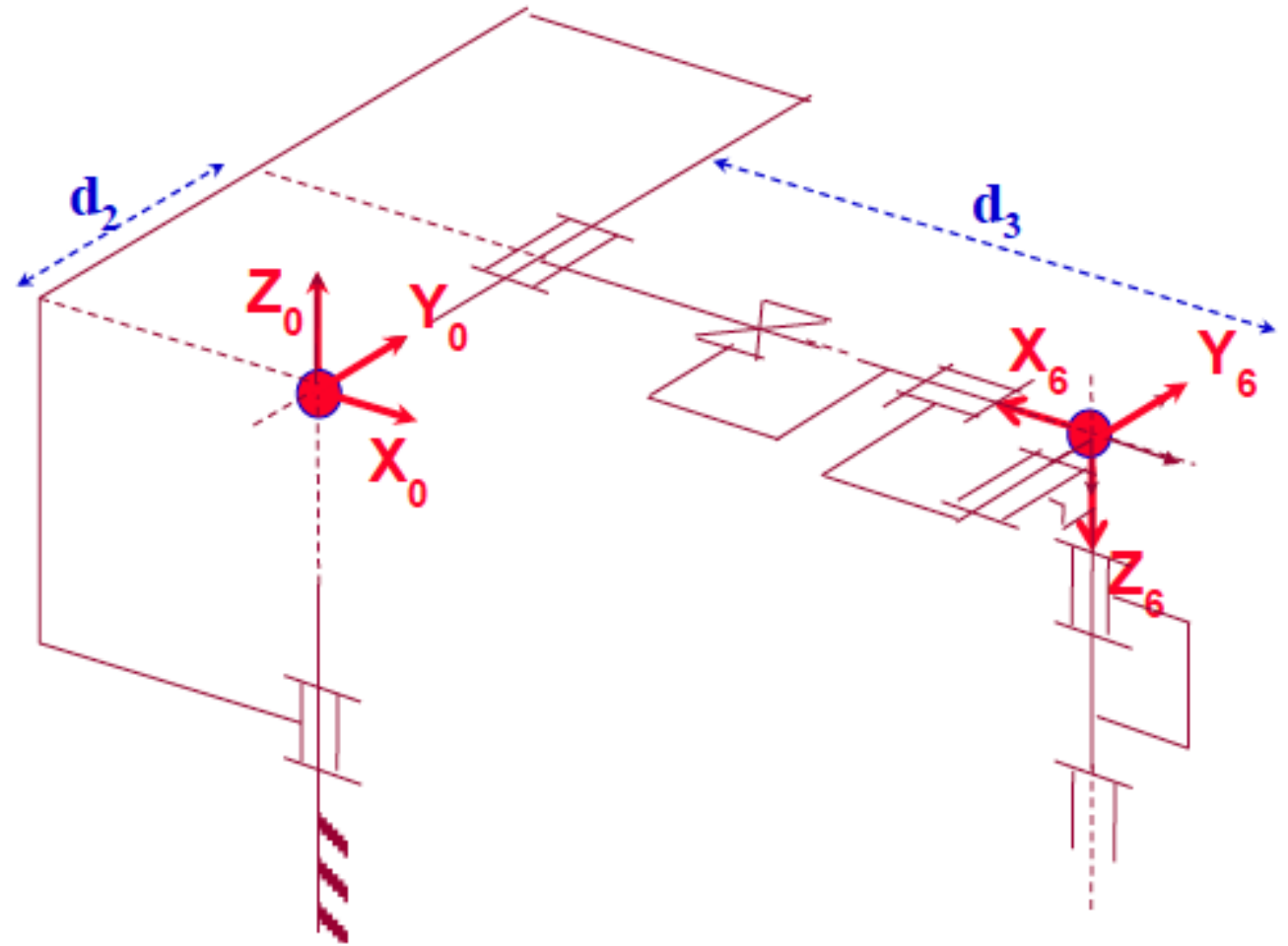


DH参数表

关节	α_{i-1}	\vec{a}_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	-90^0	0	d_2	-90^0
3	-90^0	L_2	0	θ_3
4	90^0	0	L_5	θ_4
5	0	L_4	0	0

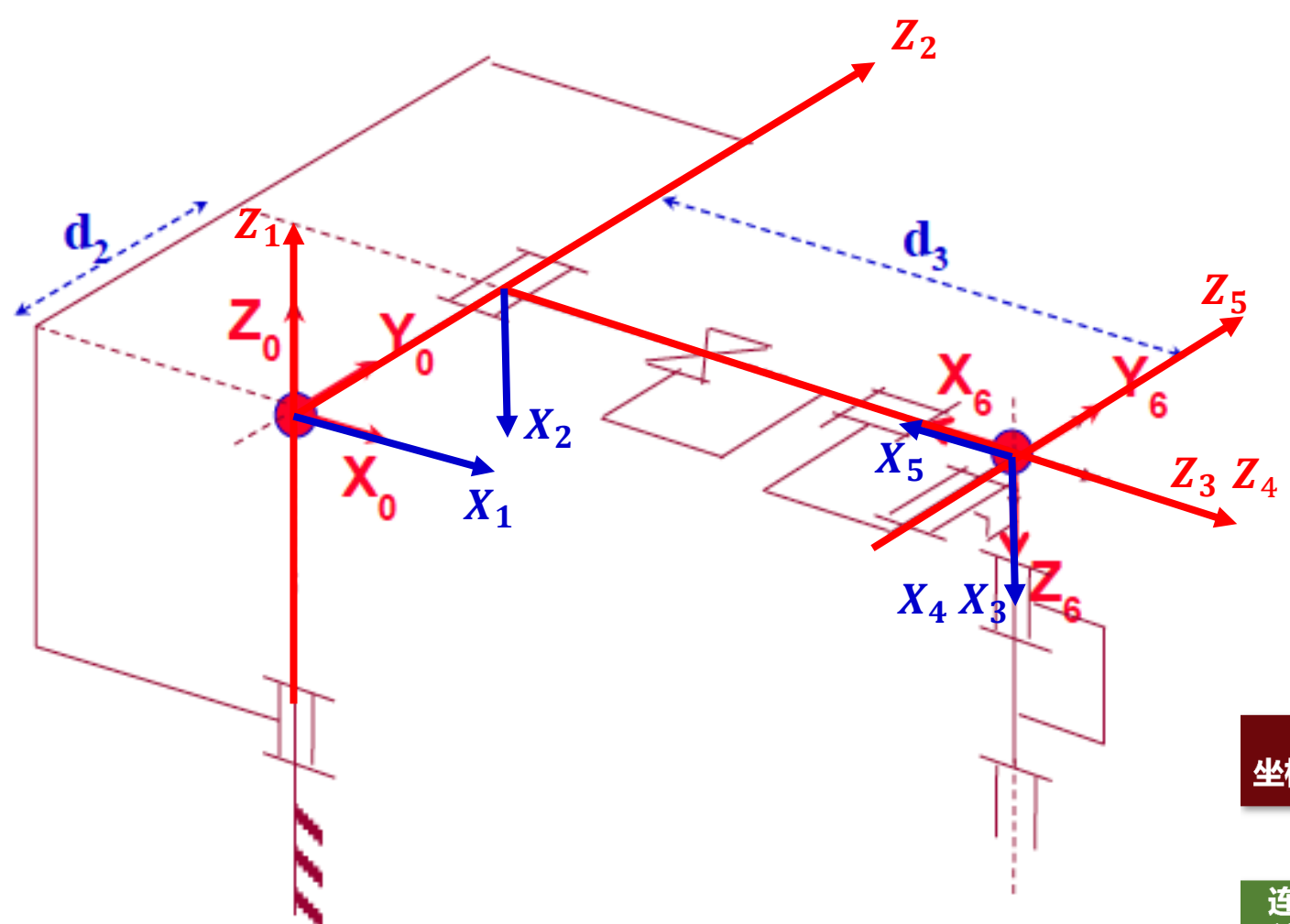
注意：各个关节的零点位置

3.5 举例：Stanford Scheinman机器人正运动学



Stanford Scheinman机器人：空间RRPRRR机器人

3.5 举例：Stanford Scheinman机械臂



Stanford Scheinman机器人：空间2RP3R机器人

■ 根据关节类型，先填入**变量**

DH参数表 (注意：各个关节的零点位置)

关节	α_{i-1}	\vec{a}_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	-90°	0	d_2	θ_2
3	90°	0	d_3	0
4	0	0	0	θ_4
5	-90°	0	0	θ_5
6	90°	0	0	θ_6

将连杆坐标系固连在连杆上 Z_i

关节*i*
坐标系定义

坐标系{*i*}的 Z_i 轴与关节轴*i*重合，原点位于公垂线 a_i 与关节轴*i*的交点， X_i 沿 a_i 由关节*i*指向关节*i+1*

连杆参数
(关节之间)

\vec{a}_i = 沿 X_i 轴, 从 Z_i 移动到 Z_{i+1} 的距离;
 α_i = 绕 X_i 轴, 从 Z_i 旋转到 Z_{i+1} 的角度;

关节参数
(连杆之间)

d_i = 沿 Z_i 轴, 从 X_{i-1} 移动到 X_i 的距离;
 θ_i = 绕 Z_i 轴, 从 X_{i-1} 旋转到 X_i 的角度;

3.5 举例：3DOF 圆柱机械臂

Link parameters for 3-link cylindrical manipulator

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1^*
2	0	-90	d_2^*	0
3	0	0	d_3^*	0

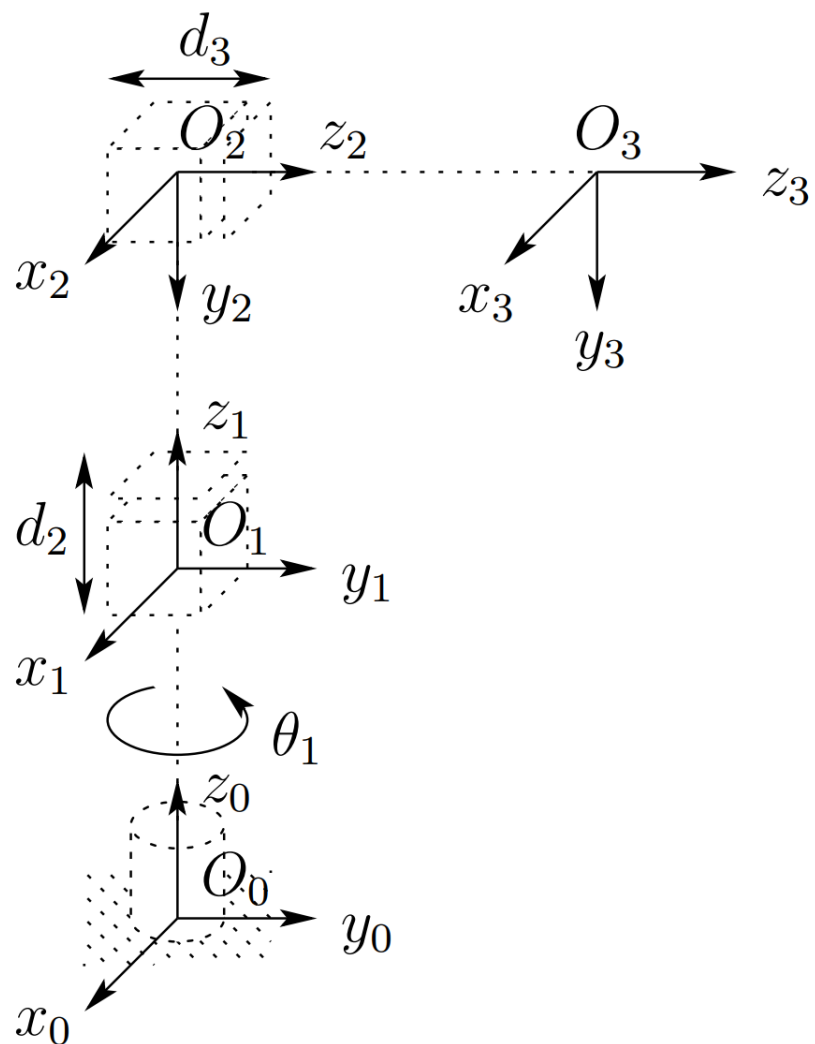
* variable

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

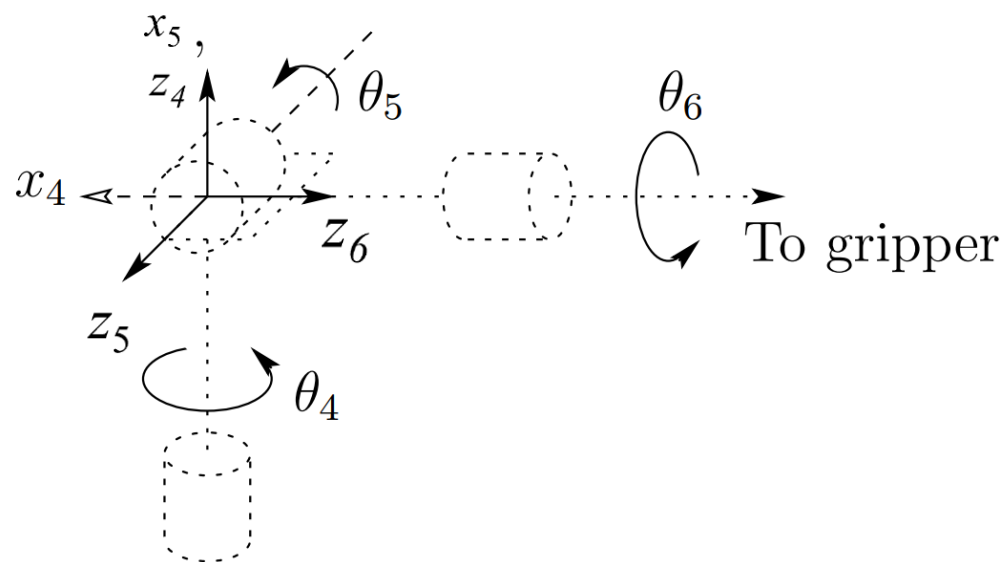
$$T_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 d_3 \\ s_1 & 0 & c_1 & c_1 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Three-link cylindrical manipulator

3.5 举例：3DOF 球形手腕

Spherical Wrist



The spherical wrist frame assignmen

DH parameters for spherical wrist

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
4	0	-90	0	θ_4^*
5	0	90	0	θ_5^*
6	0	0	d_6	θ_6^*

* variable

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

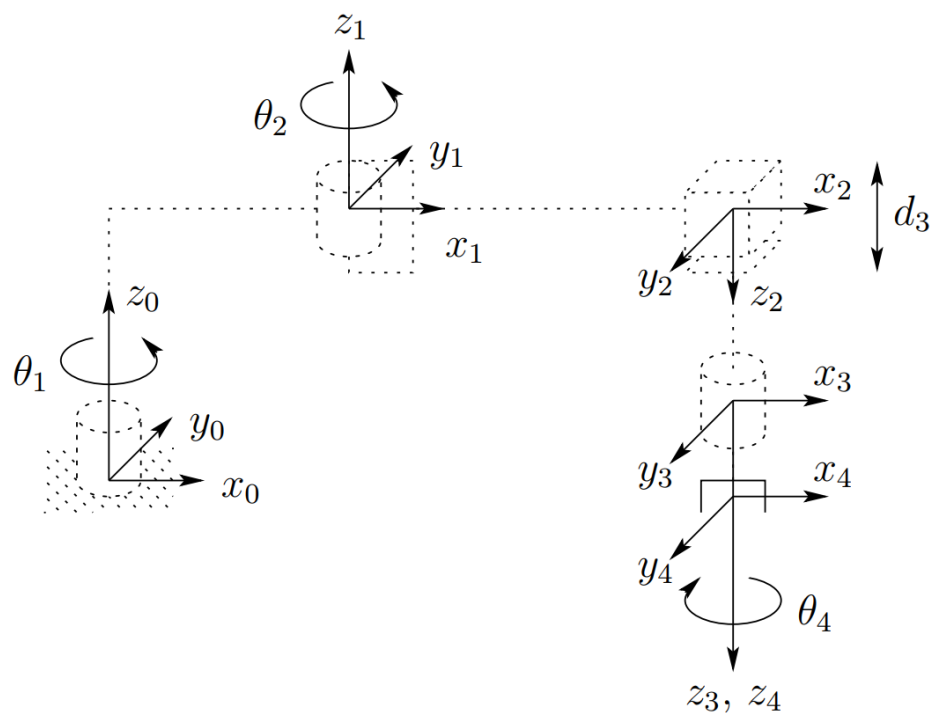
$$A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$T_6^3 = A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} R_6^3 & o_6^3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.5 举例：SCARA机械臂



DH coordinate frame assignment for the SCARA manipulator

Joint parameters for SCARA.

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	*
2	a_2	180	0	*
3	0	0	*	0
4	0	0	d_4	*

* joint variable

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & -c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_4 &= \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$T_4^0 = A_1 \cdots A_4 = \begin{bmatrix} c_{12}c_4 + s_{12}s_4 & -c_{12}s_4 + s_{12}c_4 & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12}c_4 - c_{12}s_4 & -s_{12}s_4 - c_{12}c_4 & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

按要求完成课后习题的3.13, 3.17, 3.20, 3.22题

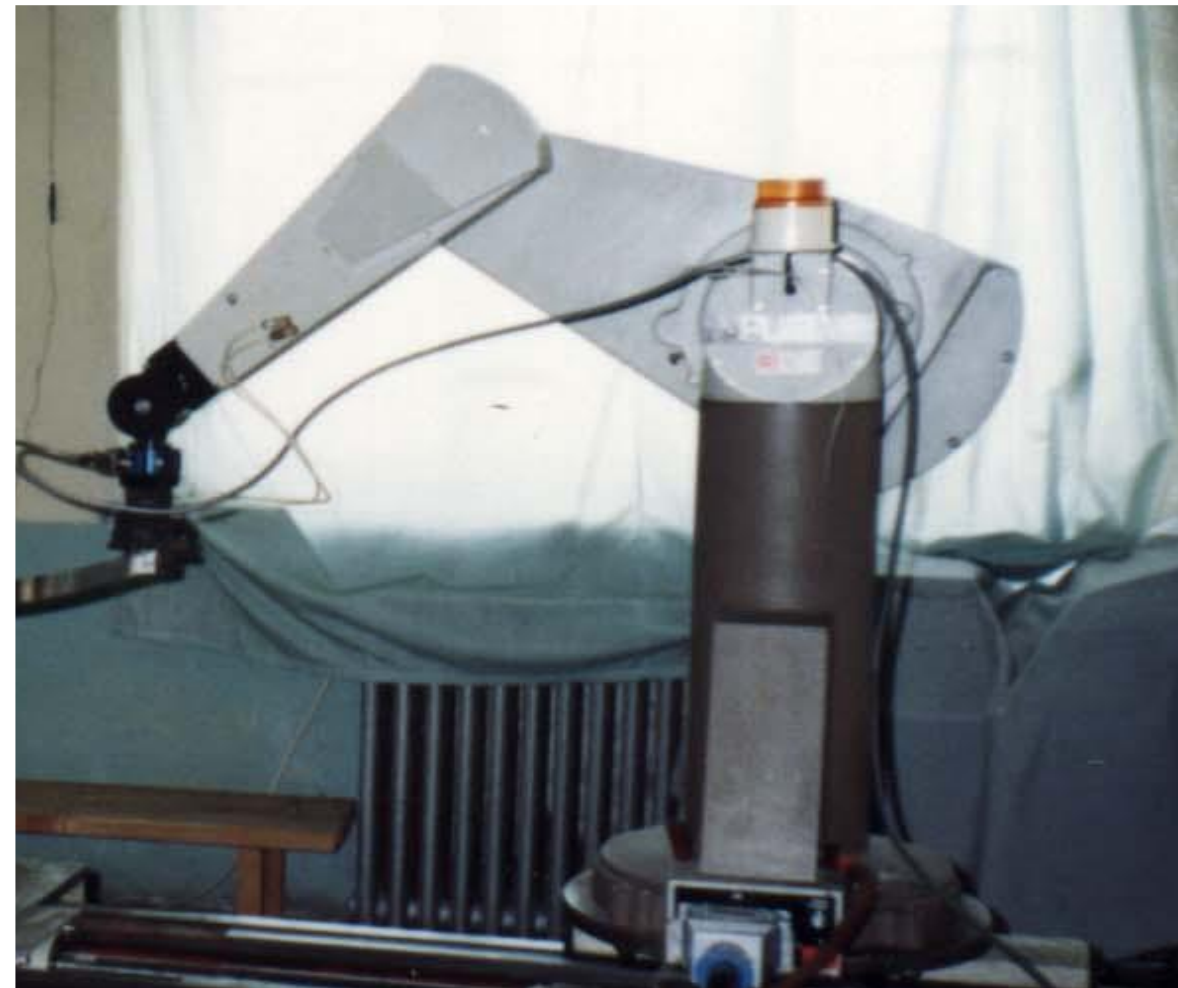
要求:

每道题除了题干规定的内容外, 必须包含如下两部分内容:

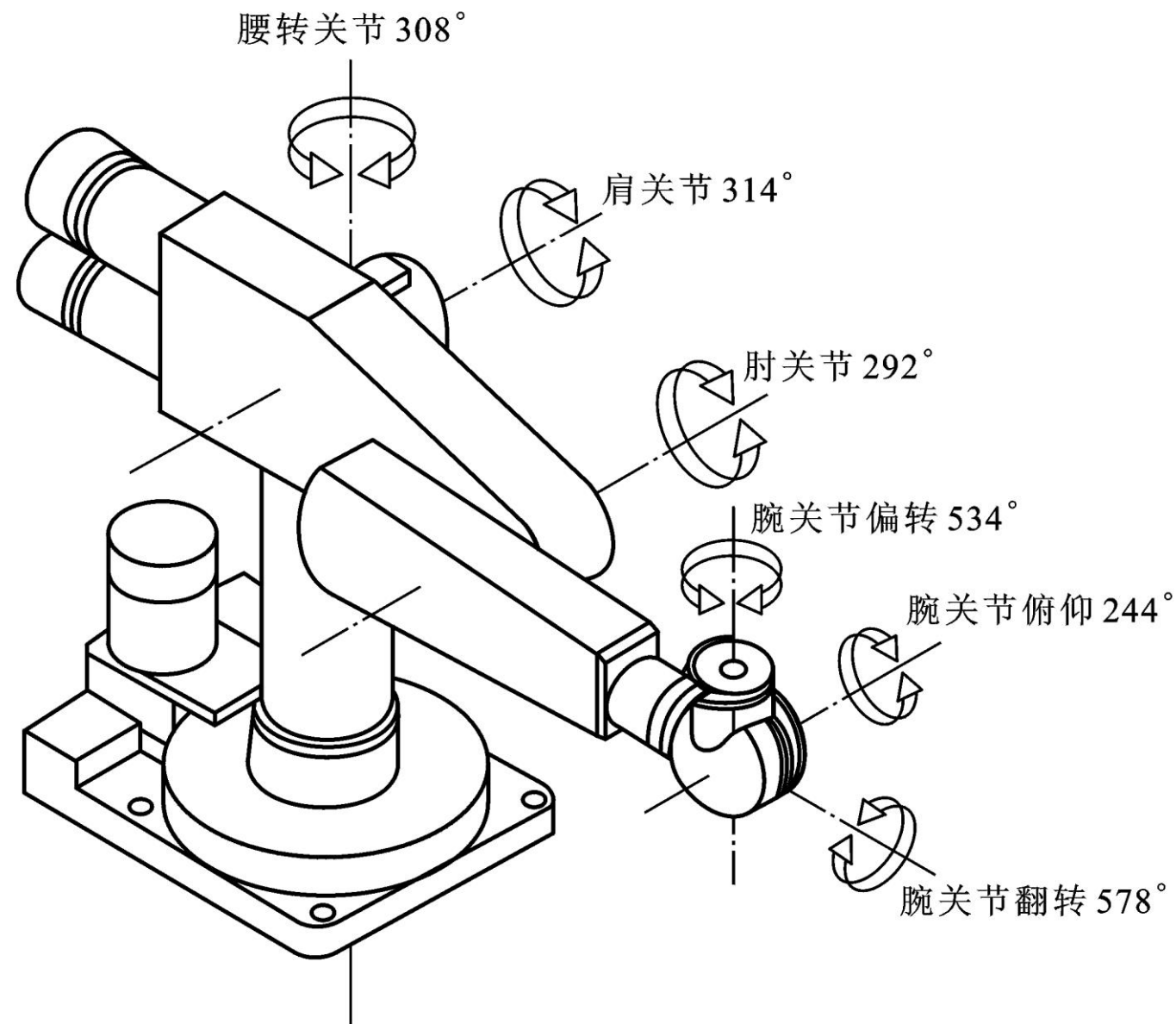
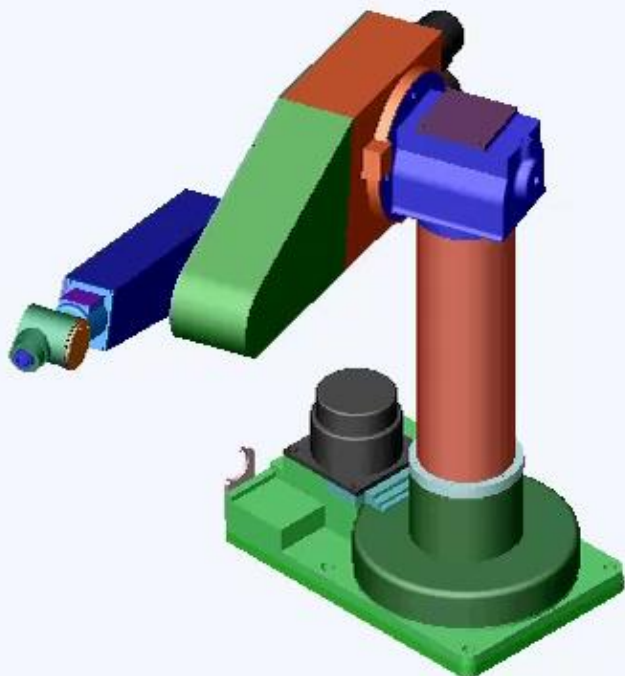
- A. 机器人关节坐标系, 包含X轴, Z轴及其方向,
- B. 列写出其对应的DH参数表

3.6 PUMA机器人正运动学建模

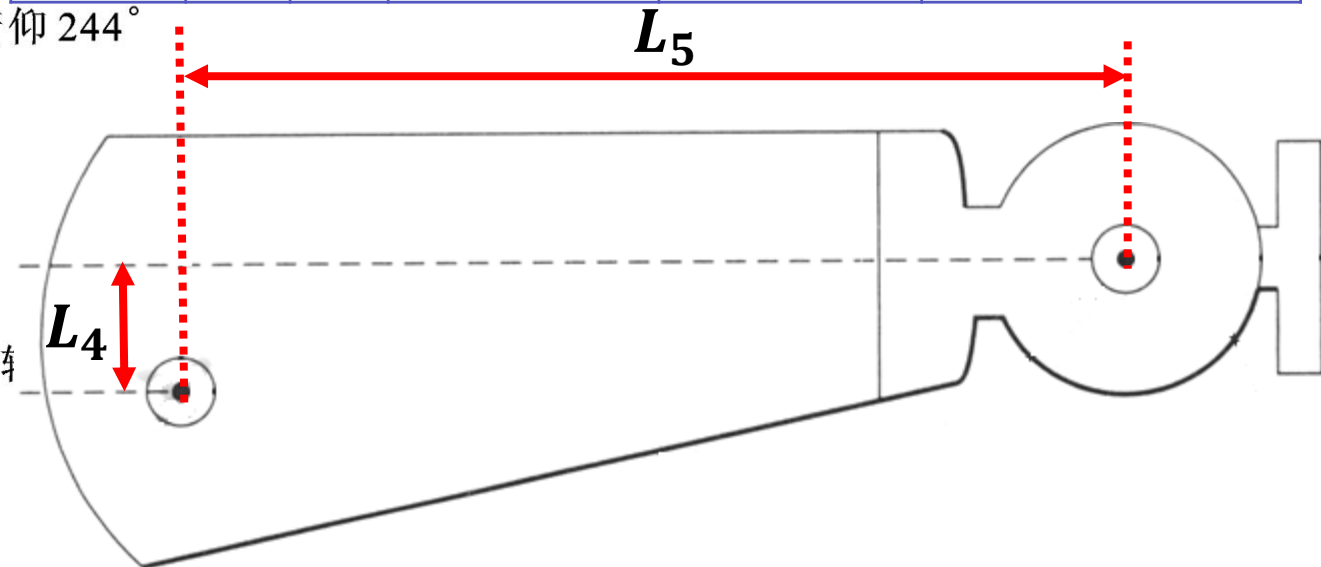
- Programmable Universal Machine for Assembly (**PUMA**) by Unimation
- 1978年美国Unimation公司，是世界第一台可编程机器人
- 美国Unimation公司于1959年由George Devol和Joseph Engelberger开发出**世界第一台工业机器人**
- 美国Unimation公司开发的机器人1961年部署在GM生产线，成为**世界第一台在工业实际应用的机器人**
- 空间6自由度RRRRRR机器人
- 最为经典的机器人，被大部分教材作为机器人教学的范例



■ 空间6自由度6R机器人



《机器人学导论》



3.6 PUMA机器人正运动学建模

PUMA robot arm link coordinate parameters					
Joint i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	Joint range
1	θ_1	0	0	0	-160 to 160
2	θ_2	-90	0	0	-225 to 45
3	θ_3	0	$L_2=431.8\text{mm}$	$L_3=149.09\text{mm}$	-45+180 to 225+180
4	θ_4	-90	$L_4=20.32\text{mm}$	$L_5=433.07\text{mm}$	-110 to 170
5	θ_5	90	0	0	-100 to 100
6	θ_6	-90	0	0	-266 to 266

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S_2 & -C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_2 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -S_4 & -C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4_5T = \begin{bmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5_6T = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S_6 & -C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}_iT = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & -d_i \sin \alpha_{i-1} \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & d_i \cos \alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_6T = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

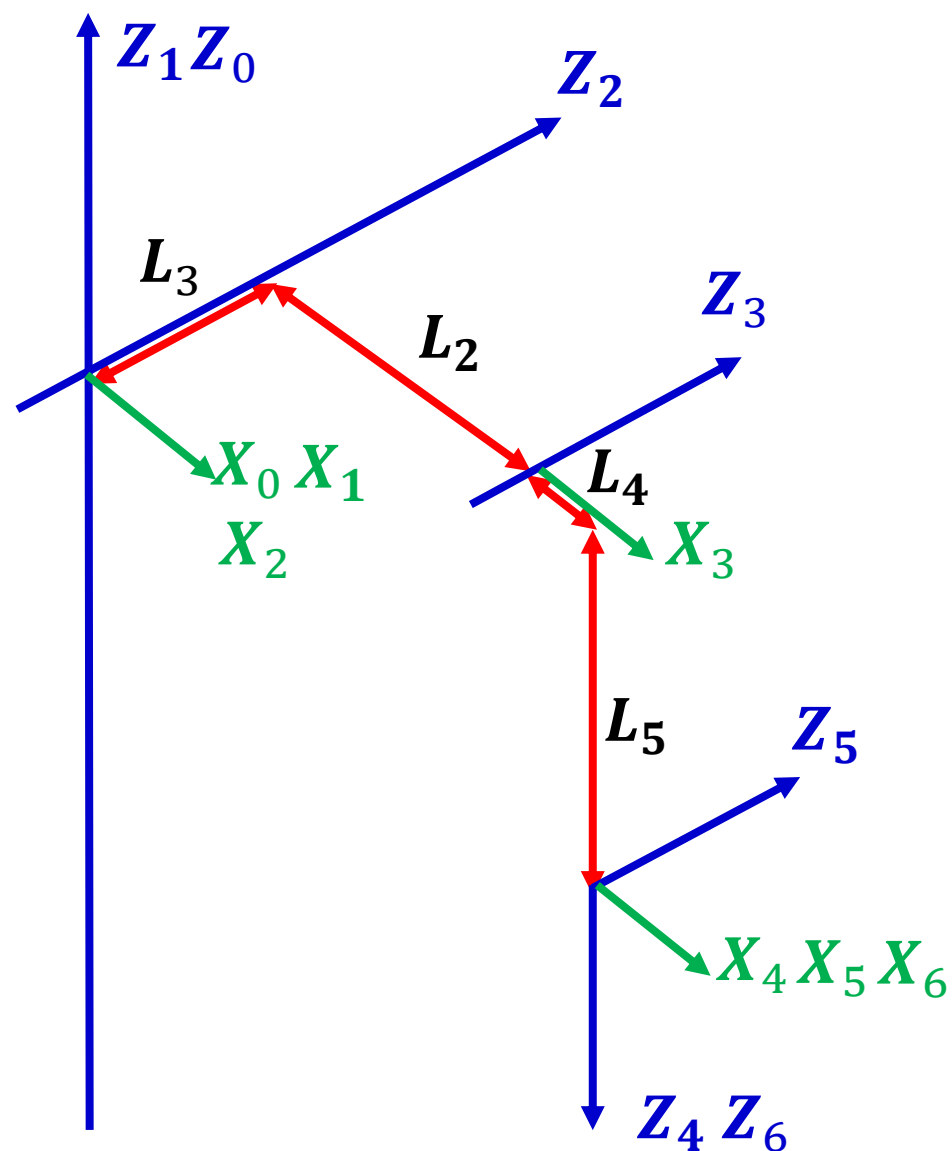
$$\begin{aligned} r_{11} &= C_1[C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] + S_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6) \\ r_{21} &= S_1[C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] - C_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6) \\ r_{31} &= -S_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - C_{23}S_5C_6 \\ r_{12} &= C_1[C_{23}(-C_4C_5S_6 - S_4C_6) + S_{23}S_5S_6] + S_1(C_4C_6 - S_4C_5S_6) \\ r_{22} &= S_1[C_{23}(-C_4C_5S_6 - S_4C_6) + S_{23}S_5S_6] - C_1(C_4C_6 - S_4C_5S_6) \\ r_{32} &= -S_{23}(-C_4C_5S_6 - S_4C_6) + C_{23}S_5S_6 \\ r_{13} &= -C_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) - S_1S_4S_5 \\ r_{23} &= -S_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + C_1S_4S_5 \\ r_{33} &= S_{23}C_4S_5 - C_{23}C_5 \end{aligned}$$

机器人运动学特点:

- 强非线性，紧耦合
- 正解简单，逆解困难
- PUMA机器人末端位置仅跟关节1-3有关，为什么？

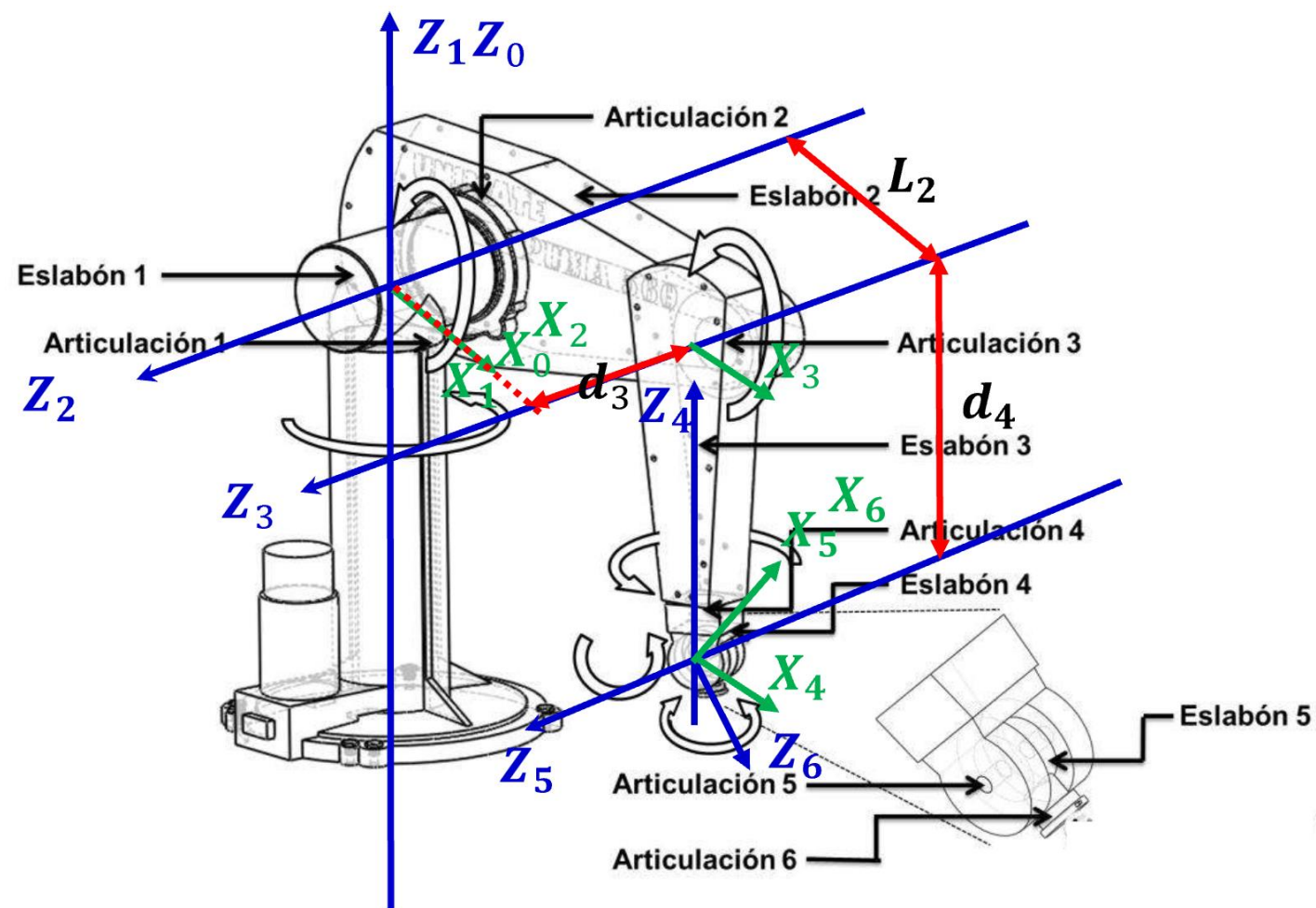
$$\begin{aligned} p_x &= C_1[a_2C_2 + a_3C_{23} - d_4S_{23}] - d_3S_1 \\ p_y &= S_1[a_2C_2 + a_3C_{23} - d_4S_{23}] + d_3C_1 \\ p_z &= -a_3S_{23} - a_2S_2 - d_4C_{23} \end{aligned}$$

3.6 PUMA机器人正运动学建模



注意:

1. 各个关节的零位时的臂形
2. 各个关节角度正方向



- 智慧树下下载RTB.MLTBX
- 打开MATLAB，从主页标签点击打开，选择RTB.MLTBX
- 自动完成安装，运行PUMA.m，测试

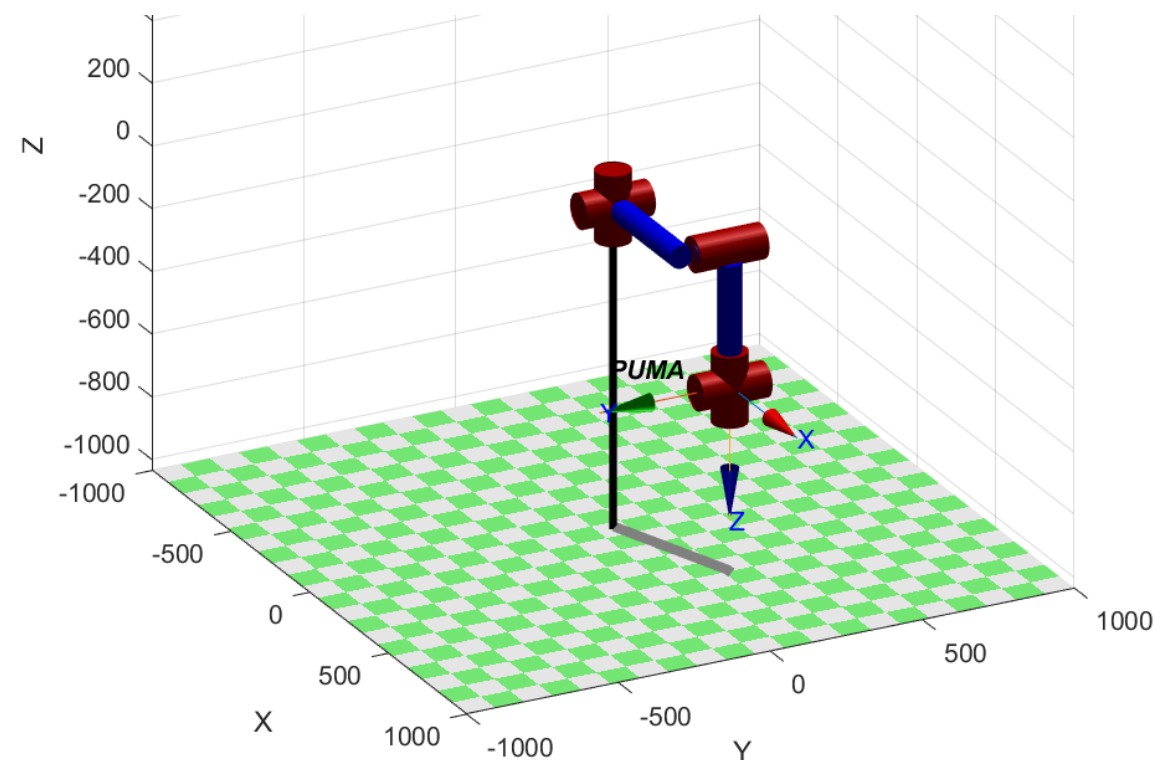
%输入参数：关节转角 θ , 关节偏距 d , 连杆长度 a , 连杆扭角 α

%modified表示按照本课DH参数构建法建模

```
L1=Link([0,0,0,0], 'modified');  
L2=Link([0,0,0,-pi/2], 'modified');  
L3=Link([0,150,432,0], 'modified');  
L4=Link([0,433,20,-pi/2], 'modified');  
L5=Link([0,0,0,pi/2], 'modified');  
L6=Link([0,0,0,-pi/2], 'modified');  
  
robot=SerialLink([L1,L2,L3,L4,L5,L6]);  
robot.name='PUMA';  
robot.display();  
theta0=[0,0,0,0,0,0];  
robot.plot(theta0)
```



Peter Corke



End of Chapter-3