

第五章 线性变换

线性空间中向量之间的联系是通过线性空间到线性空间的
映射(变换)来实现的.

第一节 线性变换的定义

一、线性变换的概念

1. 映射

定义1: 设有两个非空集合 X, Y , 如果有一个确定的**法则** f , 使得 X 中每个元 x 在 f 的作用下在集合 Y 中唯一确定的元 y 与之对应, 则称此法则 f 是 X 到 Y 的一个**映射**, 记为

$$f : X \rightarrow Y$$

若 X 中的元 x 通过 f 得到 Y 中的对应元 y , 则记为

$$f : x \mapsto y$$

称 y 为在映射 f 下元 x 的**象**, 并记为 $y = f(x)$.

而 x 称为 y 在映射 f 下的**原象**.

若 $f(X)$ 代表 X 在映射 f 下象的集合，则显然 $f(X) \subseteq Y$ ，
如果 $f(X) = Y$ ，映射 f 就称为是**映上的**或**满射**。

特别的

- 若在映射 f 下， X 中不同的元的象也一定不同，即有 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 时一定有 $f(\alpha_1) \neq f(\alpha_2)$ ，则称 f 是**1—1的**或**单射**。
- 一个映射如果既是单射又是满射，就称为**1—1对应**或**双射**。

2. 变换

定义2 线性空间 V 到**自身**的映射称为 V 的一个**变换**，即

$$T: V \rightarrow V$$

这时，向量 α 在变换 T 下的象 β 记为 $T(\alpha)$ ，即

$$\beta = T(\alpha) \text{ 或 } \beta = T\alpha$$

注：变换概念是函数概念的推广.

3. 线性变换

定义3 设线性空间 V 上的一个变换 T 满足：

(1) 对 $\forall \alpha, \beta \in V$, 有 $T(\alpha + \beta) = T\alpha + T\beta$.

(2) 对 $\forall \alpha \in V$ 和 $\lambda \in F$, 有 $T(\lambda\alpha) = \lambda T\alpha$.

则称 T 是线性空间 V 上的一个**线性变换**.

由(1)(2)有对于 V 上的任意向量 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$

$$T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s) = k_1T\alpha_1 + k_2T\alpha_2 + \dots + k_sT\alpha_s$$

定理 数域 F 上线性空间 V 上的变换 T 是线性变换

$\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in V$ 及 $\forall a, b \in F$ **恒有** $T(a\alpha + b\beta) = aT(\alpha) + bT(\beta)$ 成立.

例1：线性空间 V 中的**零变换** O ： $O(\alpha)=0$ 是线性变换.

证明：设 $\alpha, \beta \in V, k \in F$, 则有

$$O(\alpha+\beta)=0 = 0+0 = O(\alpha)+O(\beta),$$

$$O(k\alpha)=0 = k0 = kO(\alpha).$$

所以，**零变换** O 是线性变换.

注意：零变换中对应的元素必须是空间的**零元** 0 .

例2：由关系式 $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

确定 xoy 平面上的一个变换, 说明 T 的几何意义.

解：先证明变换 T 是线性变换. 设

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad k \in R$$

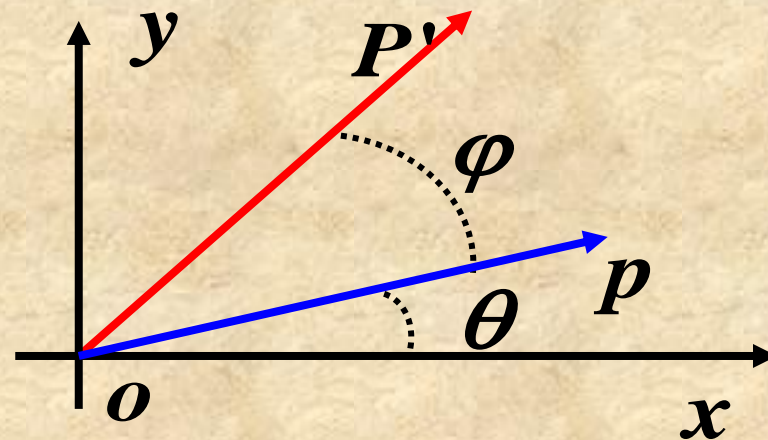
$$\text{则 } T(p_1+p_2)=A(p_1+p_2)=Ap_1+Ap_2=T(p_1)+T(p_2),$$

$$T(kp_1)=A(kp_1)=kAp_1=kT(p_1).$$

所以, 变换 T 是线性变换.

记 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, 于是

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi - r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi + r \sin \theta \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta + \varphi) \\ r \sin(\theta + \varphi) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$



上式表明: 变换 T 把任一向量按逆时针方向旋转 φ 角.

一般地, 在线性空间 R^n 中, 设 A 为 n 阶方阵, $x \in R^n$, 变换 $T(x)=Ax$ 是本节所定义的线性变换.

事实上, 对任意的 $x', x'' \in R^n$,

$$T(x'+x'') = A(x'+x'') = Ax' + Ax'' = T(x') + T(x''),$$

$$T(kx') = A(kx') = kAx' = kT(x').$$

例3: 定义在闭区间 $[a, b]$ 上的全体连续函数组成实数域上的一个线性空间 $C[a, b]$, 在这个空间中变换.

$$T(f(x)) = \int_a^x f(t) dt$$

是一个线性变换.

证明: 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$, 则有

$$\begin{aligned} T[f(x)+g(x)] &= \int_a^x [f(t) + g(t)] dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_a^x g(t) dt = T[f(x)] + T[g(x)], \end{aligned}$$

$$T[k f(x)] = \int_a^x k f(t) dt = k \int_a^x f(t) dt = k T[f(x)]$$

故命题得证.

例4: 线性空间 V 中的**恒等变换**(或称**单位变换**) E :

$$E(\alpha) = \alpha, \quad \alpha \in V,$$

是线性变换.

证明: 设 $\alpha, \beta \in V, k \in F$, 则有

$$E(\alpha + \beta) = \alpha + \beta = E(\alpha) + E(\beta),$$

$$E(k\alpha) = k\alpha = kE(\alpha).$$

所以, 恒等变换 E 是线性变换.

例5 设 V 是数域 F 上的线性空间, k 是 F 中的某个数, 定义 V 的变换如下:

$$\alpha \rightarrow k\alpha$$

这是一个线性变换, 称为由数 k 决定的**数乘变换**.

当 $k=1$ 时, 便得**恒等变换**, 当 $k=0$ 时, 便得**零变换**.

例6: 在 R^3 中定义变换:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2 + x_3, 0),$$

则 T 不是 R^3 的一个线性变换.

证明: 对任意的 $\alpha = (a_1, a_2, a_3), \beta = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$,

$$\begin{aligned} T(\alpha + \beta) &= T(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= ((a_1 + b_1)^2, (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3), 0) \\ &\neq (a_1^2, a_2 + a_3, 0) + (b_1^2, b_2 + b_3, 0) \\ &= T(\alpha) + T(\beta). \end{aligned}$$

故, T 不是 R^3 的一个线性变换.

二、线性变换的性质

以下设 T 为线性空间 V_n 的线性变换.

1. $T(0)=0, T(-\alpha)=-T(\alpha).$

实际上, $T(0)=T(0\alpha)=0T(\alpha)=0;$

$$T(-\alpha)=T((-1)\alpha)=(-1)T(\alpha)=-T(\alpha).$$

2. 若 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$, 则

$$T\beta=k_1T\alpha_1+k_2T\alpha_2+\cdots+k_mT\alpha_m.$$

此性质表明: 线性变换对线性组合保持不变.

3. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关, 则 $T\alpha_1, T\alpha_2, \cdots, T\alpha_m$ 亦线性相关.

利用性质2即可证明.

注意: 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关, 则 $T\alpha_1, T\alpha_2, \cdots, T\alpha_m$ 不一定线性无关.

性质1—3可表述成：线性变换保持零向量和负向量、保持线性组合与线性线性相关性不变。

4. 证明线性变换 T 的象集 $T(V_n)$ 是线性空间 V_n 的一个子空间（称 $T(V_n)$ 为线性变换 T 的象空间）。

证明：由于 T 是 V_n 上的线性变换，故 $T(V_n) \subseteq V_n$ 。

又由于 $0 \in V_n$ ，则 $0 = T(0) \in T(V_n)$ ，故 $T(V_n)$ 非空。

则对任意的 $\beta_1, \beta_2 \in T(V_n)$ ，有 $\alpha_1, \alpha_2 \in V_n$ ，使得 $T\alpha_1 = \beta_1, T\alpha_2 = \beta_2$ ，

从而 $\beta_1 + \beta_2 = T\alpha_1 + T\alpha_2 = T(\alpha_1 + \alpha_2) \in T(V_n)$ ，（因 $\alpha_1 + \alpha_2 \in V_n$ ）

$k\beta_1 = kT\alpha_1 = T(k\alpha_1) \in T(V_n)$ ，（因 $k\alpha_1 \in V_n$ ）

由上述证明知： $T(V_n)$ 对 V_n 中的线性运算封闭，故 $T(V_n)$ 是 V_n 的子空间。

5. (补) $S_T = \{ \alpha \mid T\alpha = 0, \alpha \in V_n \}$ (经 T 变换到 0 的全体元素构成的集合) 是 V_n 的子空间. 称 S_T 为线性变换 T 的核.

证明: 显然 $S_T \subseteq V_n$. 由于 $T(0) = 0$, 则 $0 \in S_T$, 故 S_T 非空. 则对任意的 $\alpha_1, \alpha_2 \in S_T$, 有 $T(\alpha_1) = 0, T(\alpha_2) = 0$, 从而

$$T(\alpha_1 + \alpha_2) = T(\alpha_1) + T(\alpha_2) = 0 + 0 = 0, \quad \text{故 } \alpha_1 + \alpha_2 \in S_T,$$
$$T(k\alpha_1) = kT(\alpha_1) = k0 = 0, \quad \text{故 } k\alpha_1 \in S_T,$$

由上述证明知: S_T 对 V_n 中的线性运算封闭, 故 S_T 是 V_n 的子空间.

R^n 上某些线性变换象空间与核空间含义

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2n} \\ \text{M} & \text{M} & & \text{M} \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_n), \text{ 其中 } \alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \text{M} \\ a_{ni} \end{pmatrix},$$

对 R^n 上的线性变换: $T(x)=Ax, x \in R^n$, 则有

(1) $T(x)=Ax$ 的**象空间** $T(R^n)$ 就是由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots; \alpha_n$ 所生成的向量空间: 即

$$\begin{aligned} T(R^n) &= \{ y = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n \mid x_1, x_2, \cdots; x_n \in R \} \\ &= L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots; \alpha_n) \end{aligned}$$

(2) $T(x)=Ax$ 的**核** S_T 就是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间.

小结

- 知道一些基本概念，如映射、象、原象、变换等
 - 线性变换的定义和判定（重点）
 - 线性变换的性质
-

要证明线性空间 V_n 的一个变换 T 是线性变换, 必须证明 T 保持加法和数量乘法运算, 即

$$T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta), \quad T(k\alpha) = kT(\alpha).$$

反之, 若要证明一个变换 T 不是线性变换, 只须证明 T 不保持加法或数量乘法运算, 实际上只须举出一个反例即可.

思考题

1. 在线性空间 V 中, 定义变换如下

$$T\xi = \xi + \alpha, \text{ 其中 } \alpha \in V \text{ 是一固定向量.}$$

问 T 是否为 V 上的线性变换?

2: 在线性空间 $P_3[x]$ 中. 证明

(1) 求导运算 D 是一个到其自身的线性变换.

(2) 如果 $T(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_0$, 则 T 也是 $P_3[x]$ 上的一个线性变换.

(3) 如果 $T_1(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = 1$, 则 T_1 是 $P_3[x]$ 上的一个变换, 但不是线性变换.

思考题解答

1. 在线性空间 V 中, 定义变换如下

$$T\xi = \xi + \alpha, \text{ 其中 } \alpha \in V \text{ 是一固定向量.}$$

问 T 是否为 V 上的线性变换?

解: $\forall \xi, \eta \in V, \lambda \in F$, 有 $T\xi = \xi + \alpha, T\eta = \eta + \alpha$

$$T(\xi + \eta) = (\xi + \eta) + \alpha, T(\lambda\xi) = \lambda\xi + \alpha$$

$$(1) \text{ 当 } \alpha=0 \text{ 时有 } \begin{aligned} T(\xi + \eta) &= \xi + \eta = T\xi + T\eta, \\ T(\lambda\xi) &= \lambda\xi = \lambda T\xi \end{aligned}$$

此时 T 为线性变换.

$$(2) \text{ 当 } \alpha \neq 0 \text{ 时有 } T\xi + T\eta = (\xi + \eta) + 2\alpha \neq T(\xi + \eta)$$

此时 T 不为线性变换.

2: 在线性空间 $P_3[x]$ 中. 证明

(1) 求导运算 D 是一个到其自身的线性变换.

证明: 对任意的 $p=p(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$,
 $q=q(x)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0\in P_3[x]$, $k\in R$, 由求导运算性质可得

$$D(p+q) = \frac{d}{dx}(p(x)+q(x)) = \frac{d}{dx}p(x) + \frac{d}{dx}q(x) = Dp + Dq$$

$$D(kp) = \frac{d}{dx}(kp(x)) = k \frac{d}{dx}p(x) = kDp$$

(2) 如果 $T(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)=a_0$, 则 T 也是 $P_3[x]$ 上的一个线性变换.

事实上, 对任意的

$$p=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0, q=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0 \in P_3[x],$$

$$T(p+q)=a_0+b_0=T(p)+T(q),$$

$$T(kp)=ka_0=kT(p).$$

(3) 如果 $T_1(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)=1$, 则 T_1 是 $P_3[x]$ 上的一个变换, 但不是线性变换.

$$\text{由于 } T_1(p+q)=1, \quad \text{但 } T_1(p)+T_1(q)=1+1=2,$$

所以

$$T_1(p+q) \neq T_1(p)+T_1(q).$$