



南開大學  
Nankai University

# 《过程控制系统》

## 第2章 被控过程的数学模型

于宁波

南开大学人工智能学院

## 第2章 被控过程的数学模型

- 在对过程控制系统进行分析、设计之前，必须首先掌握构成系统的各个环节的特性，特别是被控过程的特性，即建立系统（或环节）的数学模型。
- 建立被控过程数学模型的目的是用于过程控制系统的分析和设计，以及用于新型控制系统的开发和研究。
- 建立控制系统中各组成环节和整个系统的数学模型，不仅是分析和设计控制系统方案的需要，也是过程控制系统投运、控制器参数整定的需要，它在操作优化、故障检测和诊断、操作方案的制订等方面也是非常重要的。

# 第2章 被控过程的数学模型

## ➤ 2.1 过程模型概述

## ➤ 2.2 机理法建模

## ➤ 2.3 测试法建模

## ➤ 2.4 利用MATLAB建立过程模型

# 被控过程的动态特性

- 在过程控制中，被控过程（可简称为过程）乃是工业生产过程中的各种装置和设备，例如换热器、工业窑炉、蒸汽锅炉、精馏塔、反应器等等。被控变量通常是温度、压力、液位、成分、转速等等。
- 被控对象内部所进行的物理、化学过程是各式各样的。但是，从控制的观点看，它们在本质上有许多相似之处。
- 在生产过程中，控制作用能否有效地克服扰动对被控变量的影响，关键在于选择一个可控性好的操作变量，这就需要研究被控对象的动态特性。因此，研究被控对象动态特性的目的是据以配置合适的控制系统，以满足生产过程的要求。

# 被控过程的分析

➤ 工业生产过程的数学模型有静态和动态之分

## ➤ 静态数学模型

过程输出变量和输入变量之间不随时间变化时的数学关系

## ➤ 动态数学模型

过程输出变量和输入变量之间随时间变化时动态关系的数学描述

➤ 过程控制中通常采用动态数学模型，也称为动态特性

➤ 在实现生产过程自动化时，一般是由工艺工程师提出对被控对象的控制要求。控制工程师的任务则是设计出合理的控制系统以满足这些要求。此时，他考虑问题的主要依据就是被控对象的动态特性。控制系统的设计方案都是依据对被控对象的控制要求和动态特性进行的。特别是控制器参数的整定也是根据对象的动态特性进行的。

# 被控过程的分析

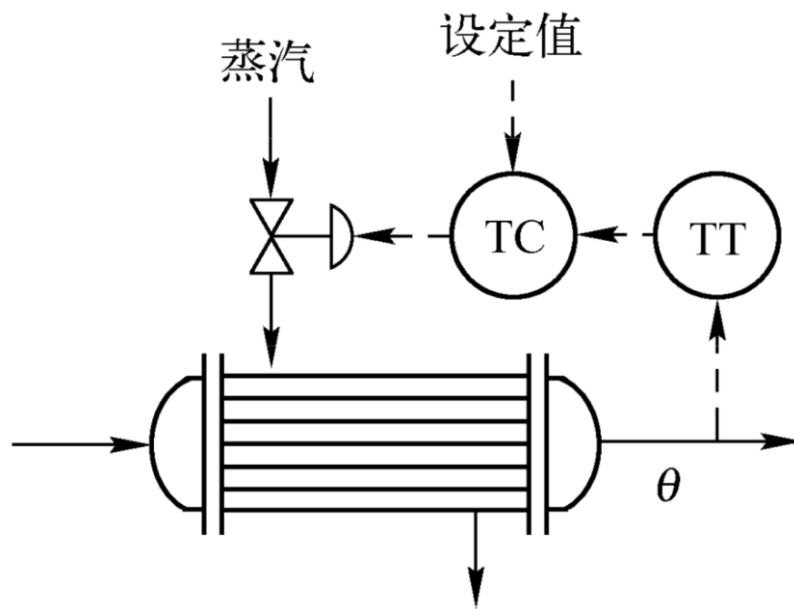
- 过程控制中的被控对象所进行的过程几乎都离不开物质或能量的流动。
- 可以把被控对象视为一个隔离体，从外部流入对象内部的物质或能量流量称为流入量，从对象内部流出的流量称为流出量。
- 只有流入量与流出量保持平衡时，对象才会处于稳定平衡的工况。而平衡关系一旦遭到破坏，就必然会反映在某一个量的变化上，如液位变化反映物质平衡关系遭到破坏，温度变化反映热量平衡遭到破坏，转速变化可以反映动量平衡遭到破坏等。在工业生产中，这种平衡关系的破坏是经常发生、难以避免的。
- 如果生产工艺要求把那些如温度、压力、液位等标志平衡关系的量保持在它们的设定值上，就必须随时控制流入量或流出量。在通常情况下，实施这种控制的执行器就是调节阀。
- 它不但适用于流入量、流出量属于物质流的情况，也适用于流入量、流出量属于能量流的情况。这是因为能量往往以某种流体作为它的载体，改变了作为载体的物质流也就改变了能量流。因此，在过程控制系统中几乎离不开调节阀，用它控制某种流体的流量，只有极个别情况例外（如需要控制的是电功率时）。

# 被控过程的分析

- 过程控制中的被控对象大多属于慢过程，也就是说被控变量的变化十分缓慢，时间尺度往往以若干分钟甚至若干小时计。这是因为被控对象往往具有很大的储蓄容积，而流入量、流出量的差额只能是有限值的缘故。
- 例如，对于一个被控变量为温度的对象，流入、流出的热流量差额累积起来可以储存在对象中，表现为对象平均温度水平的升高（如果流入量大于流出量），此时，对象的储蓄容积就是它的热容量。储蓄容积很大就意味着温度的变化过程不可能很快。对于其他以压力、液位、成分等为被控变量的对象，也可以进行类似的分析。
- 由此可见，在过程控制中，流入量和流出量是非常重要的概念，通过这些概念才能正确理解被控对象动态特性的实质。
- 同时也需要注意，不要把流入量、流出量的概念与输入量、输出量混淆起来。在控制系统方块图中，无论是流入量或流出量，它们作为引起被控变量变化的原因，都应看做是被控对象的输入量。

# 被控过程的分析

- 被控对象的动态特性大多具有**纯迟延**，即传输迟延。
- 它是信号传输途中出现的迟延。
- 例如，温度计的安装应该紧靠换热器的出口，如果安装在离出口较远的管道上，就造成了不必要的纯迟延，它对控制系统的工作极为不利。在物料输送中，有时也会出现类似的纯迟延现象。





# 被控过程的特点

过程控制涉及的被控对象大多具有下述特点:

## (1) 对象的动态特性是单调不振荡的

- 对象的阶跃响应通常是单调曲线，幅频特性和相频特性，随频率增大都是**单调衰减没有峰值**；
- 在根平面上，只有分布在根左平面的实数根。

## (2) 大多被控对象属于慢过程

- 大多被控对象具有很大的储蓄容积，或者由多个容积组成
- 所以，对象的**时间常数比较大**，变化过程较慢（与机械系统、电系统相比）。

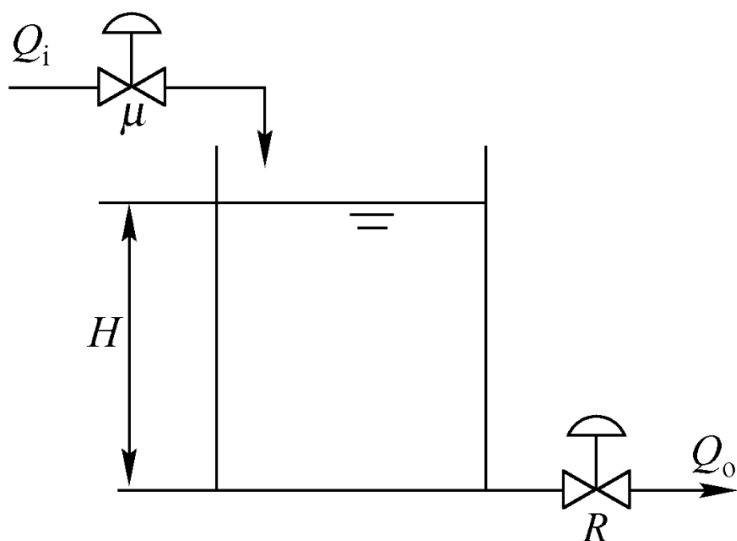
## (3) 对象动态特性的迟延性

- 迟延的主要来源是多个容积的存在。容积愈大或数目愈多，容积迟延时间愈长。有些被控对象还具有传输迟延。
- 由于迟延的存在，调节阀动作的效果往往需要经过一段迟延时间后才会**在被控变量上表现出来**。

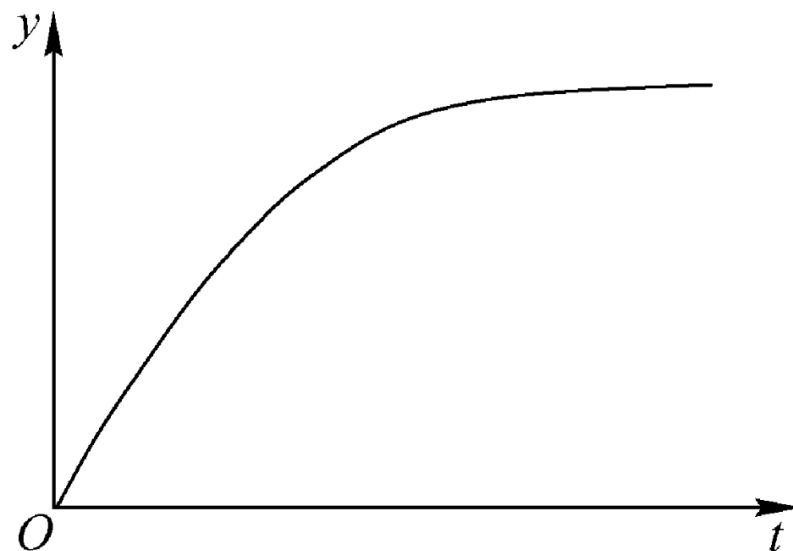
# 被控过程的特点

## (4) 被控对象的自平衡特性与非自平衡特性

- 有些被控对象，受到扰动作用致使原来的平衡关系遭到破坏后，无须外加控制，依靠对象本身，自动随被控变量的变化，最后能够自动稳定在新的平衡点上。这种特性称为**自平衡**，具有这种特性的被控过程称为**自平衡过程**。



自平衡过程单容水槽

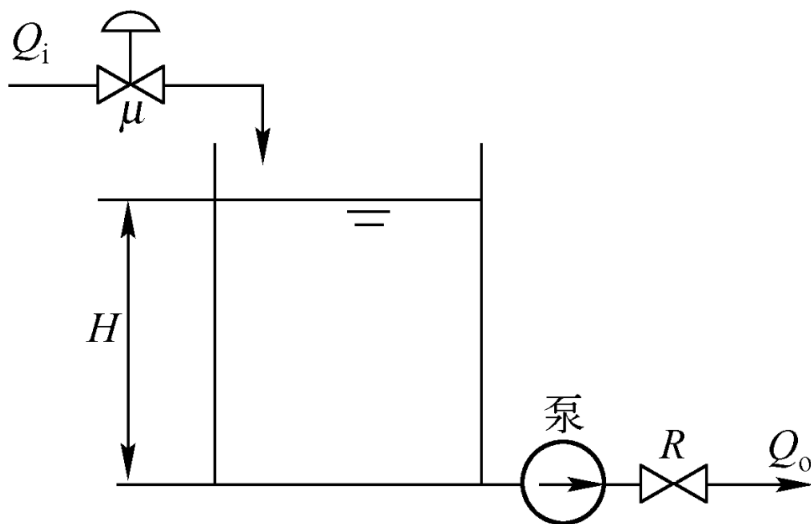


自平衡过程的阶跃响应

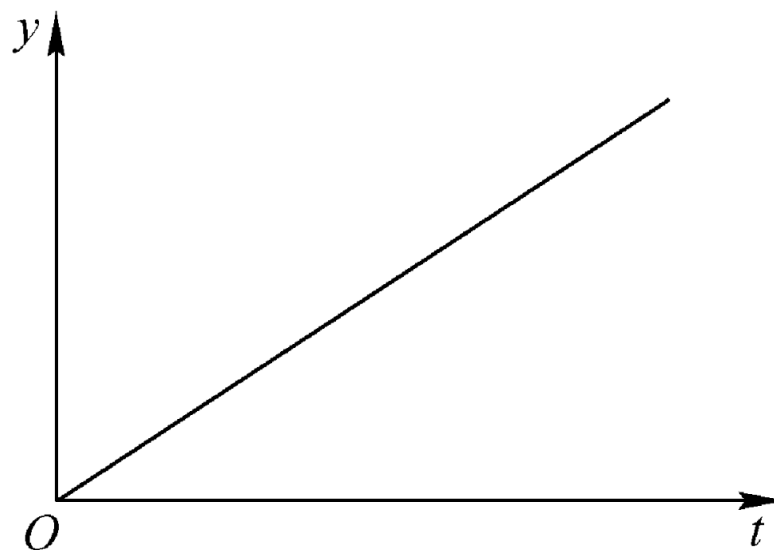
# 被控过程的特点

## (4) 被控对象的自平衡特性与非自平衡特性

- 有一些被控对象，平衡关系破坏后，被控变量不会自动在新的水平上恢复平衡。这种对象不具有自平衡特性，具有这种特性的被控过程称为**非自平衡过程**。



非自平衡过程单容积分水槽



非自平衡过程的阶跃响应

# 被控过程的特点

## (5) 被控对象往往具有非线性特性

严格来说，几乎所有被控对象的动态特性都呈现非线性特性，只是程度上不同而已。如许多被控对象的增益就不是常数。

除存在于对象内部的连续非线性特性外，在控制系统中还存有另一类非线性，如调节阀、继电器等元件的**饱和、死区和滞环等典型的非线性特性**。

虽然这类非线性通常并不是被控对象本身所固有，但考虑到在过程控制系统工程中，往往把被控对象、测量变送装置和调节阀三部分串联在一起统称为**广义被控对象**，因而它包含了这部分非线性特性。

# 建立数学模型的目的

- 在过程控制中，建立被控对象数学模型的目的主要有以下几种：
  - 1) 设计过程控制系统和整定控制器的参数
  - 2) 控制器参数的整定和系统的调试
  - 3) 利用数学模型进行仿真研究
  - 4) 进行工业过程优化
- 另外，设计工业过程的故障检测与诊断系统、制订大型设备启动和停车的操作方案和设计工业过程运行人员培训系统，等等都需要被控过程的数学模型。

# 被控对象数学模型的利用方式

- 被控对象数学模型的利用有离线的和在线的两种方式。
- 过去被控对象数学模型只是在进行控制系统的设计研究时或在控制系统的调试整定阶段中发挥作用，这种利用方式是**离线**的。
- 近十多年来，由于计算机的发展和普及，相继推出新型计算机控制系统，其特点是要求把被控对象的数学模型作为一个组成部分砌入控制系统中，如预测控制系统。这种利用方式是**在线**的，它要求数学模型具有实时性。

# 对被控对象数学模型的要求

- 工业过程数学模型的要求总的来说是**既简单又准确可靠**
- 但是这并不意味着愈准确愈好，应根据实际情况提出适当的要求，超过实际需要的准确性要求必然造成不必要的浪费。
- 在线运用的数学模型还有**实时性**的要求，它与准确性要求往往是矛盾的。
- 一般说来，用于控制的数学模型并不一定要求非常准确。因为闭环控制本身具有一定的**鲁棒性**，对模型的误差可视为干扰，而**闭环控制在某种程度上具有自动消除干扰影响的能力**。

# 建立数学模型的依据

要想建立一个好的数学模型，要掌握好以下三类主要的信息源。

- 1) 要确定明确的输入量与输出量
- 2) 要有先验知识
- 3) 试验数据



# 被控对象数学模型的表达形式

被控对象的数学模型可以采取各种不同的表达形式，主要可以从以下几个观点加以划分：

- 按系统的连续性划分为：连续系统模型和离散系统模型。
- 按模型的结构划分为：输入输出模型和状态空间模型。
- 输入输出模型又可按论域划分为：时域表达（阶跃响应，脉冲响应）和频域表达（传递函数）。

# 被控过程传递函数的一般形式

- 根据被控过程动态特性的特点，典型工业过程控制所涉及的被控对象的传递函数一般具有下述几种形式：

① 一阶惯性加纯迟延 
$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau s}$$

② 二阶惯性环节加纯迟延 
$$G(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} e^{-\tau s}$$

③  $n$ 阶惯性环节加纯迟延 
$$G(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^n} e^{-\tau s}$$

④ 用有理分式表示的传递函数 
$$G(s) = \frac{b_ms^m + \cdots + b_1s + b_0}{a_ns^n + \cdots + a_1s + a_0} e^{-\tau s}, (n > m)$$

# 建立过程数学模型的基本方法

建立过程数学模型的基本方法有两个，即机理法和测试法。

## 1. 机理法建模

- 根据生产过程中实际发生的变化机理，写出各种有关的平衡方程、运动方程、物性参数方程和设备的特性方程等，获得所需数学模型。

## 2. 测试法建模

- 测试法一般只用于建立输入输出模型。它是根据工业过程的输入和输出的实测数据进行某种数学处理后得到的模型。它的主要特点是把被研究的工业过程视为一个黑匣子，完全从外特性上测试和描述它的动态性质。

测试法建模一般比机理法要简单和省力，对于复杂的工业过程更为明显。

如果机理法和测试法两者都能达到同样的目的，一般采用测试法建模。

# 第2章 被控过程的数学模型

➤ 2.1 过程模型概述

➤ **2.2 机理法建模**

➤ 2.3 测试法建模

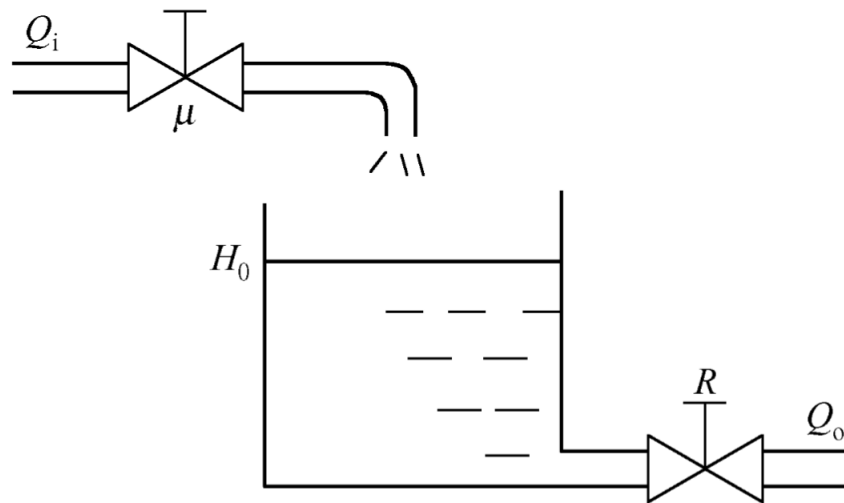
➤ 2.4 利用MATLAB建立过程模型

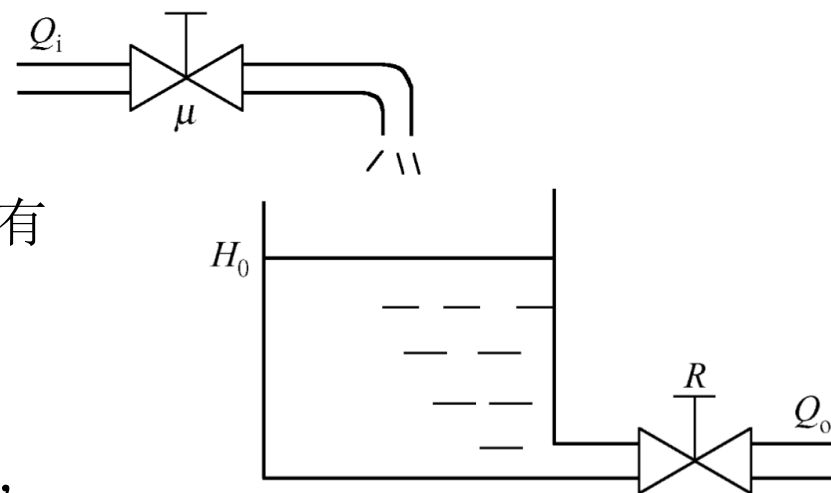
# 单容对象的传递函数

- 不同的生产部门中被控对象千差万别，但最终都可由微分方程来表示。
- 微分方程的阶次是由被控对象中储能部件的数目决定的。最简单的形式，是仅有一个储能部件的单容对象。

## 1. 单容水槽

- 不断有水流入槽内，同时也有水不断流出。
- 水流入量由调节阀开度加以控制，流出量由用户根据需要通过负载阀来改变。
- 被控变量为水位，它反映水的流入量与流出量之间的平衡关系。





- 对于水槽，在起始稳定平衡工况下，有

$$H = H_0 \quad Q_{i0} = Q_{o0}$$

- 在流出侧负载阀的开度不变的情况下，当进水阀开度发生阶跃变化  $\Delta\mu$  时，若进水流量和出水流量的变化量分别为

$$\Delta Q_i = Q_i - Q_{i0}, \Delta Q_o = Q_o - Q_{o0}$$

- 则在任何时刻液位的变化  $\Delta H = H - H_0$  均满足下述物料平衡方程：

$$\frac{d\Delta H}{dt} = \frac{1}{F} (Q_i - Q_o) = \frac{1}{F} (\Delta Q_i - \Delta Q_o)$$

- $F$  为水槽横截面面积。

当进水阀前后压差不变时,  $\Delta Q_i$  与  $\Delta\mu$  成正比关系, 即

$$\Delta Q_i = k_\mu \Delta\mu$$

对于流出侧的负载阀, 其流量与水槽的水位高度有关, 即

$$Q_o = k \sqrt{H}$$

这个非线性给下一步分析带来很大困难, 应在条件允许的情况下尽量避免。

如果水位始终保持在其稳态值附近很小的范围内变化, 就可将上式

$$Q_o = Q_{o0} + \frac{k}{2\sqrt{H_o}} (H - H_o) + \cdots = Q_{o0} + \frac{k}{2\sqrt{H_o}} \Delta H +$$



则:

$$\Delta Q_o \approx \frac{k}{2\sqrt{H_o}} \Delta H$$

如果假设系统的稳定平衡工况在原点，即各变量都以自己的零值（ $H_0 = 0, \mu_0 = 0$ ）为平衡点，则可去掉上式中的增量符号，写成

$$\left(\frac{2\sqrt{H_0}}{k} F\right) \frac{dH}{dt} + H = \left(k_\mu \frac{2\sqrt{H_0}}{k}\right) \mu$$

可得水位变化与阀门开度变化之间的传递函数为

$$G(s) = \frac{H(s)}{\mu(s)} = \frac{k_\mu \frac{2\sqrt{H_0}}{k}}{1 + \frac{2\sqrt{H_0}}{k} Fs} = \frac{K}{1 + Ts}$$

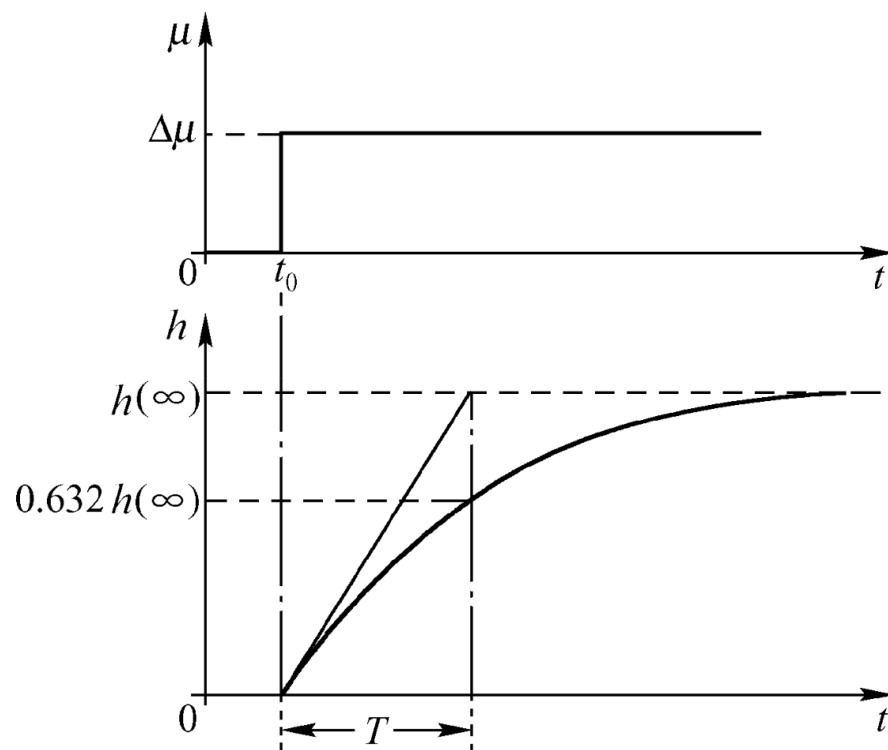
其中  $R = \frac{2\sqrt{H_0}}{k}$  ,  $T = RF = \frac{2\sqrt{H_0}}{k} F$  ,  $K = k_\mu R = k_\mu \frac{2\sqrt{H_0}}{k}$



$G(s) = \frac{K}{1+Ts}$  是最常见的一阶惯性系统，它的阶跃响应

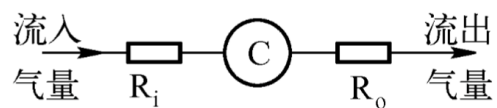
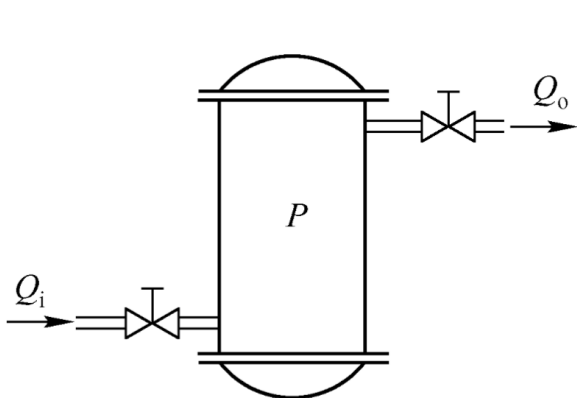
$$h(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

是指数曲线：

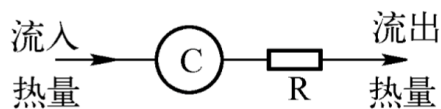
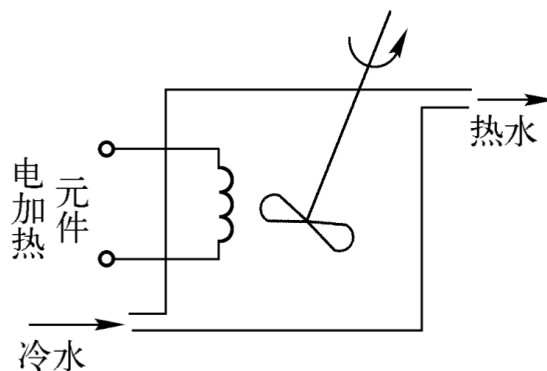


单容水槽水位的阶跃响应

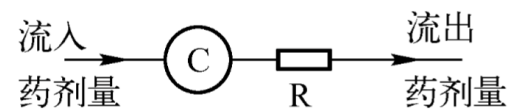
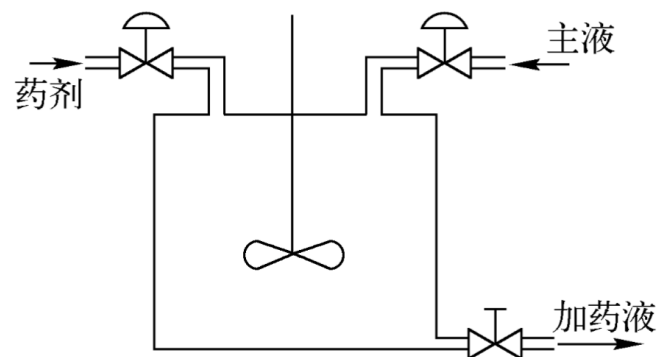
- 凡是只具有一个储蓄容积，同时还有阻力的被控对象（简称单容对象）都具有相似的动态特性，单容水槽只是一个典型的代表。
- 如下三种都属于这一类被控对象，图中给出了它们的容积和阻力的分布情况。



(a) 储气罐



(b) 电加热槽



(c) 混合槽

## 2. 具有纯迟延的单容储罐

如下图所示的储罐，它与前述单容水槽不同的是，进料调节阀流出的物料，还要再经过一段较长距离  $l$  的皮带传送才能到达储罐。因此该调节阀开度变化引起的流入量变化，需要经过一段传输时间才能对储罐液位产生影响。

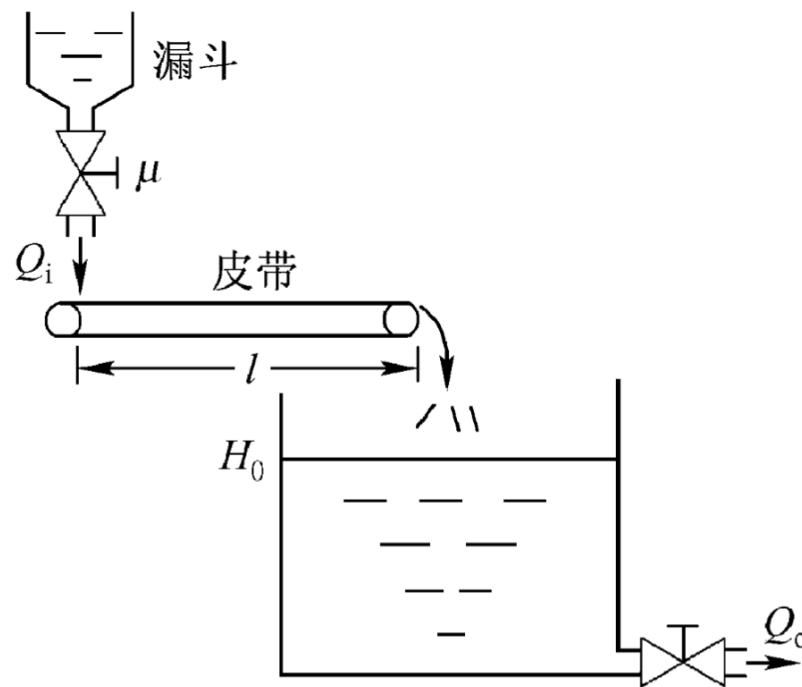
具有纯迟延的单容水槽的微分方程为

$$T \frac{d\Delta H(t)}{dt} + \Delta H(t) = K\Delta\mu(t - \tau)$$

其中， $\tau$  为纯迟延时间。传递函数

$$G(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta\mu(s)} = \frac{K}{1 + Ts} e^{-\tau s}$$

多了一个纯迟延环节。



### 3. 单容积水槽

区别于单容水槽：流出侧装有排水泵。

水泵排水量仍然可以用负载阀  $R$  来改变，但排水量并不随水位的高低而变化：

$$\Delta Q_o = 0$$

负载阀开度不变，水槽流出量也不变。

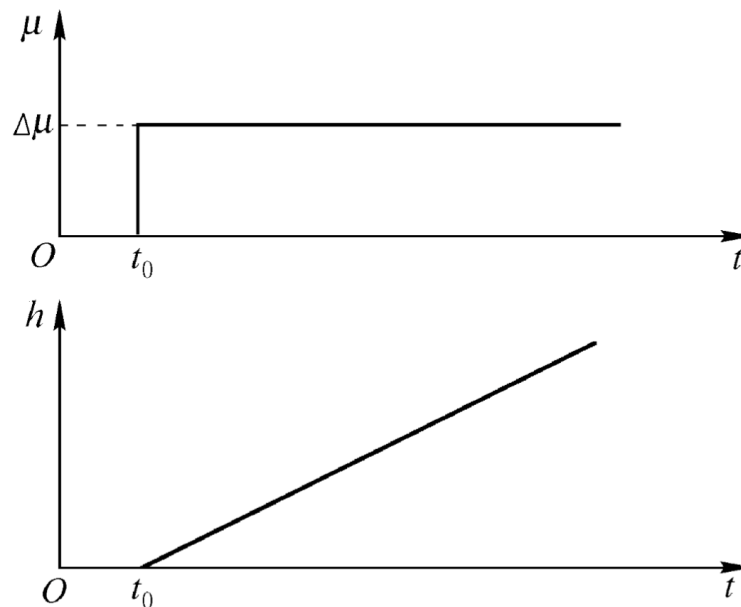
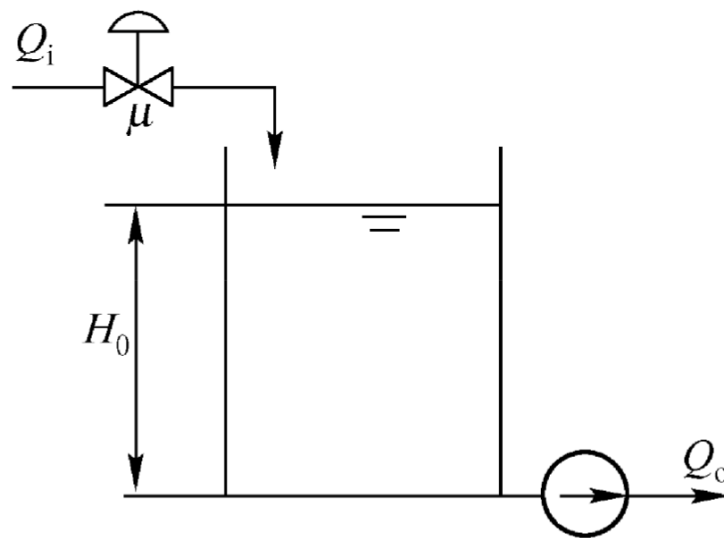
水位在调节阀开度扰动下的变化为：

$$\frac{d\Delta H}{dt} = \frac{1}{F} k_\mu \Delta \mu \quad \text{或} \quad \frac{dH}{dt} = \frac{1}{F} k_\mu \mu$$

水位变化与阀门开度间的传递函数为

$$G(s) = \frac{H(s)}{\mu(s)} = \frac{k_\mu}{Fs}$$

其阶跃响应为：  $h(t) = \frac{k_\mu \mu}{F} t$



# 多容对象的传递函数

➤ 实际被控过程较复杂，往往具有一个以上的储能部件。

## 1. 双容水槽

水槽1和水槽2的物料平衡方程分别为

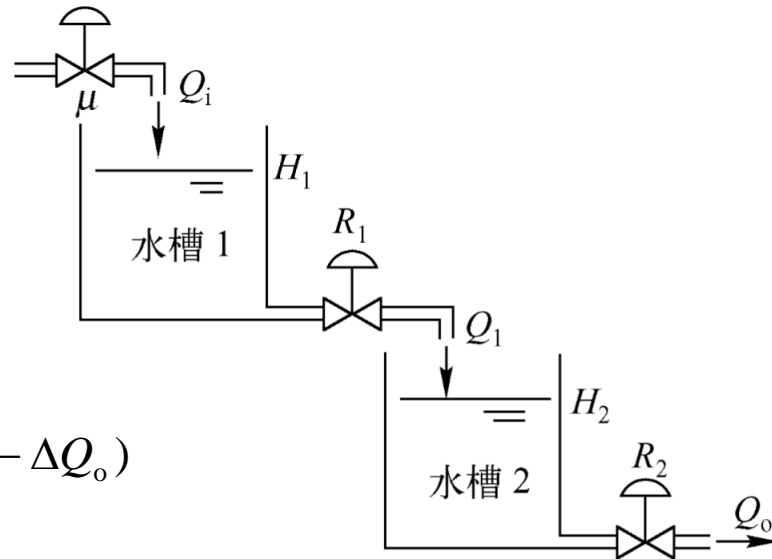
$$\frac{d\Delta H_1}{dt} = \frac{1}{F_1}(\Delta Q_i - \Delta Q_1) \quad \frac{d\Delta H_2}{dt} = \frac{1}{F_2}(\Delta Q_1 - \Delta Q_o)$$

假设调节阀均采用线性阀，则有

$$\Delta Q_i = k_\mu \Delta \mu \quad \Delta Q_1 = \frac{1}{R_1} \Delta H_1 \quad \Delta Q_o = \frac{1}{R_2} \Delta H_2$$

可得：

$$T_1 T_2 \frac{d^2 \Delta H_2}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{d\Delta H_2}{dt} + \Delta H_2 = K \Delta \mu$$



$$T_1 = R_1 F_1$$

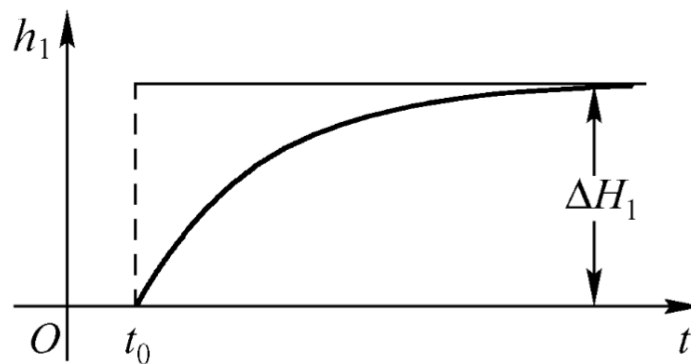
$$T_2 = R_2 F_2$$

$$K = k_\mu R_2$$

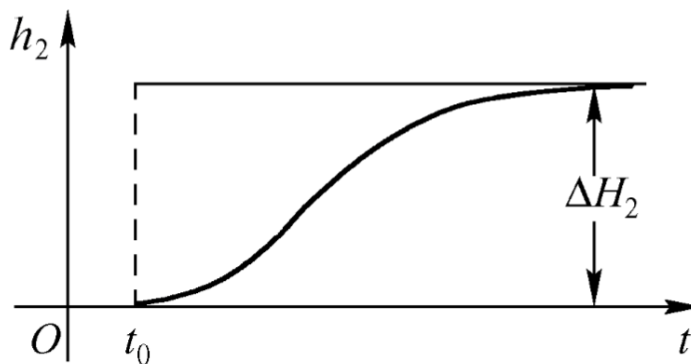
对应的传递函数为

$$G(s) = \frac{\Delta H_2(s)}{\Delta \mu(s)} = \frac{K}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}$$

因此，双容水槽为一个二阶系统，  
其阶跃响应为：



(a)



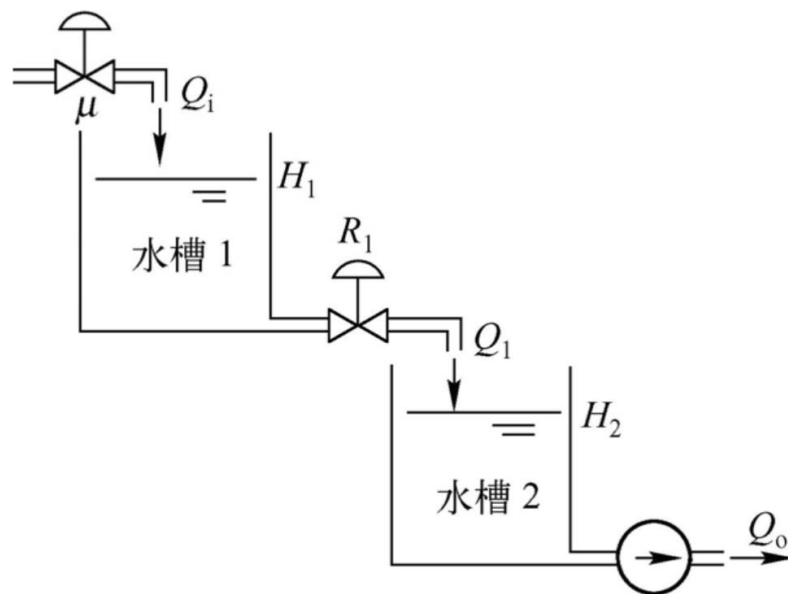
(b)

- 如果双容水槽进水调节阀流出的水，也要再经过一段距离为  $l$  的管道才能到达水槽。也就是说该调节阀开度变化所引起的流入量变化也需要经过一段传输时间  $\tau$  才能对水槽液位产生影响。
- 其对应的传递函数为

$$G(s) = \frac{\Delta H_2(s)}{\Delta \mu(s)} = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-\tau s}$$

## 2. 无自平衡能力的双容水槽

- 与有自平衡能力的双容水槽的区别：  
在水槽2的流出侧装有一只排水泵。



- 水槽1和水槽2的物料平衡方程分别为：

$$\frac{d\Delta H_2}{dt} = \frac{1}{F_2} \Delta Q_1 \quad \frac{d\Delta H_1}{dt} = \frac{1}{F_1} (\Delta Q_i - \Delta Q_1)$$

其中：  $\Delta Q_i = k_\mu \Delta \mu$        $\Delta Q_1 = \frac{1}{R_1} \Delta H_1$

- 可得：  $T_1 \frac{d^2 \Delta H_2}{dt^2} + \frac{d\Delta H_2}{dt} = \frac{1}{T_2} \Delta \mu$

$$T_1 = R_1 F_1$$

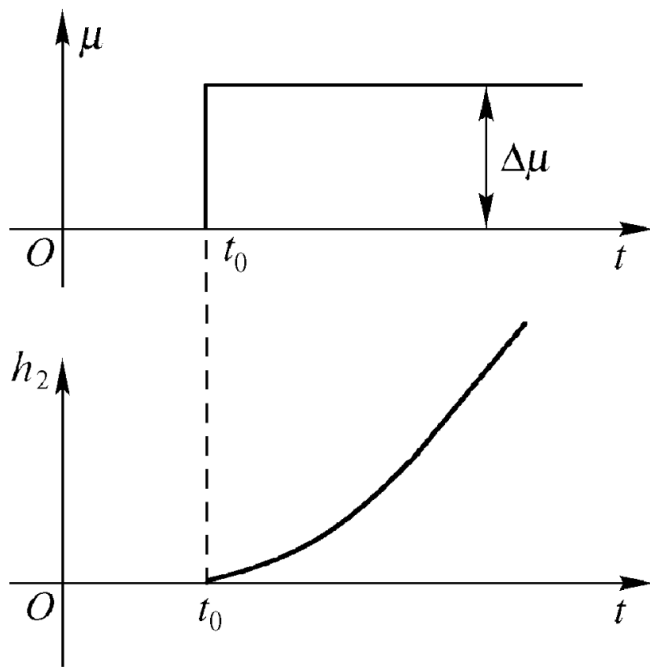
$$T_2 = F_2 / k_\mu$$



对应的传递函数为

$$G(s) = \frac{\Delta H_2(s)}{\Delta \mu(s)} = \frac{1}{T_2 s (T_1 s + 1)}$$

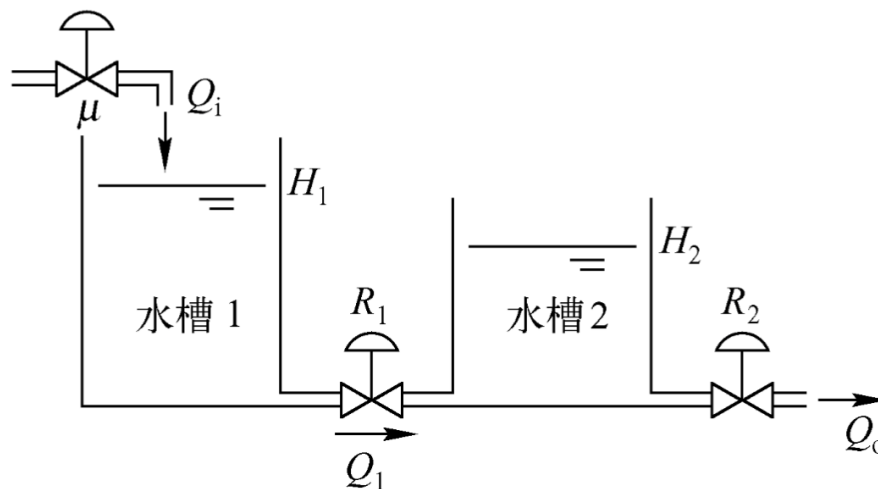
其阶跃响应为：



无自平衡能力双容水槽的阶跃响应

### 3. 具有相互作用的双容水槽

如图所示双容水槽，两个水槽串联在一起，每个水槽的水位变化都会影响另一个水槽的水位变化。另外，由于它们之间的连通管路具有一定的阻力，因此两者的水位可能是不同的。



水槽的物料平衡方程分别为:

$$\frac{d\Delta H_1}{dt} = \frac{1}{F_1} (\Delta Q_i - \Delta Q_1)$$

$$\frac{d\Delta H_2}{dt} = \frac{1}{F_2} (\Delta Q_1 - \Delta Q_o)$$

其中:  $\Delta Q_i = k_\mu \Delta \mu$     $\Delta Q_1 = \frac{1}{R_1} (\Delta H_1 - \Delta H_2)$     $\Delta Q_o = \frac{1}{R_2} \Delta H_2$

可得:  $T_1 T_2 \frac{d^2 \Delta H_2}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{d\Delta H_2}{dt} + (1 - r) \Delta H_2 = K \Delta \mu$

传递函数为:  $G(s) = \frac{\Delta H_2(s)}{\Delta \mu(s)} = \frac{K}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2) s + 1 - r}$

$$T_1 = R_1 F_1$$

$$T_2 = r R_1 F_2$$

$$r = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$K = r k_\mu R_1$$

- 在生产过程中，大多数对象是**多容对象**。
- 对象每增加一个容积，就会使被控变量的**响应在时间上落后**一些。
- 系统中增加的容积个数越多，被控变量的响应在时间上落后的就越多，这往往是有些工业过程难以控制的原因。

# 第2章 被控过程的数学模型

- 2.1 过程模型概述
- 2.2 机理法建模
- **2.3 测试法建模**
- 2.4 利用MATLAB建立过程模型

对于某些生产过程的机理，人们往往还未充分掌握，有时会出现模型中有些参数难以确定的情况。这就需要用**实验测试方法**估计出数学模型。

# 对象特性的实验测定方法

- 对象内部的工艺过程复杂，难以按物理、化学过程寻求对象的微分方程。并且工业对象通常是由高阶非线性微分方程描述的复杂对象，较难求解。
- 根据加入的激励信号和结果的分析方法，测试对象动态特性的实验方法主要有：

## (1) 测定动态特性的时域方法

- 对被控对象施加**阶跃输入或脉冲输入**，测出对象输出变量随时间的响应曲线，分析确定出被控对象的**传递函数**。
- 这种方法测试设备简单，测试工作量小，应用广泛，缺点是测试精度不高。

## (2) 测定动态特性的频域方法

- 对被控对象施加**不同频率的正弦波**，测出输入量与输出量的幅值比和相位差，从而获得对象的**频率特性**，来确定被控对象的传递函数。
- 这种方法在原理和数据处理上都比较简单，测试精度比时域法高，但此法需要用专门的超低频测试设备，且测试工作量较大。

# 对象特性的实验测定方法

## (3) 测定动态特性的统计相关法

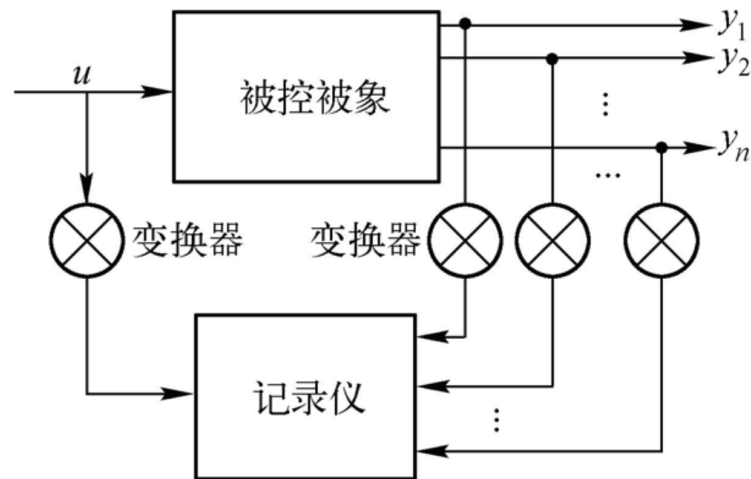
- 对被控对象施加某种随机信号或者直接利用对象输入端本身存在的随机噪音进行观察和记录，由于它们引起对象各参数变化，故可采用统计相关法研究对象的动态特性。
- 这种方法可在生产过程正常状态下进行，可以在线辨识，精度也较高。但是统计相关法要求积累大量数据，并用相关仪表和计算机对数据计算和处理。

# 非参数模型 vs. 参数模型

- 前述三种方法测试的动态特性，表现形式是**以时间或频率为自变量的实验曲线，称为非参数模型**。其建立数学模型的方法称为非参数模型辨识方法或称经典的辨识方法。它假定过程是在线性的前提下，不必事先确定模型具体结构，因而这类方法可适用于任意复杂的过程，应用也较广泛。
- 此外，还有一种**参数模型辨识方法**，或称为现代的辨识方法。该方法必须假定一种模型结构，通过极小化模型与过程之间的误差准则函数来确定模型的参数。这类辨识方法根据基本原理可分为**最小二乘法、梯度校正法、极大似然法**三种。
- 经典辨识法不考虑测试数据中偶然性误差的影响，只需对少量的测试数据进行比较简单的数学处理，计算工作量一般很小。
- 现代辨识法的特点是可以消除测试数据中的偶然性误差即噪声的影响，为此就需要处理大量的测试数据，计算机是不可缺少的工具。它所涉及的内容很丰富，已形成一个专门的学科分支。

# 测定动态特性的时域法

该方法是在被控对象上，人为地加非周期信号，测定被控对象的响应曲线，再求出被控对象的传递函数，测试原理如图。



测试过程响应曲线的原理图

## 1. 输入信号选择及实验注意事项

- 对象的阶跃响应曲线比较直观地反映对象的动态特性。因此，**阶跃输入信号**是时域法首选的输入信号。
- 有时生产现场运行条件受到限制，不允许被控对象的被控参数有较大幅度变化，或无法测出完整的阶跃响应曲线，可改用**矩形脉冲**作为输入信号，得到响应后再转换。
- 为了得到可靠的测试结果，应**注意以下事项**：合理选择阶跃扰动信号的幅度，保证测试的可靠性和安全性；确保被控对象处于稳定工况，避免发生偶然性的其它扰动；考虑到实际被控对象的非线性，应在不同情况下多次测试，全面掌握对象动态特性。



## 2. 阶跃响应的获取

为了能够施加较大的扰动幅度而又不严重干扰正常生产，可以用矩形脉冲输入代替通常的阶跃输入，即大幅度的阶跃扰动施加一小段时间后立即将它切除。

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

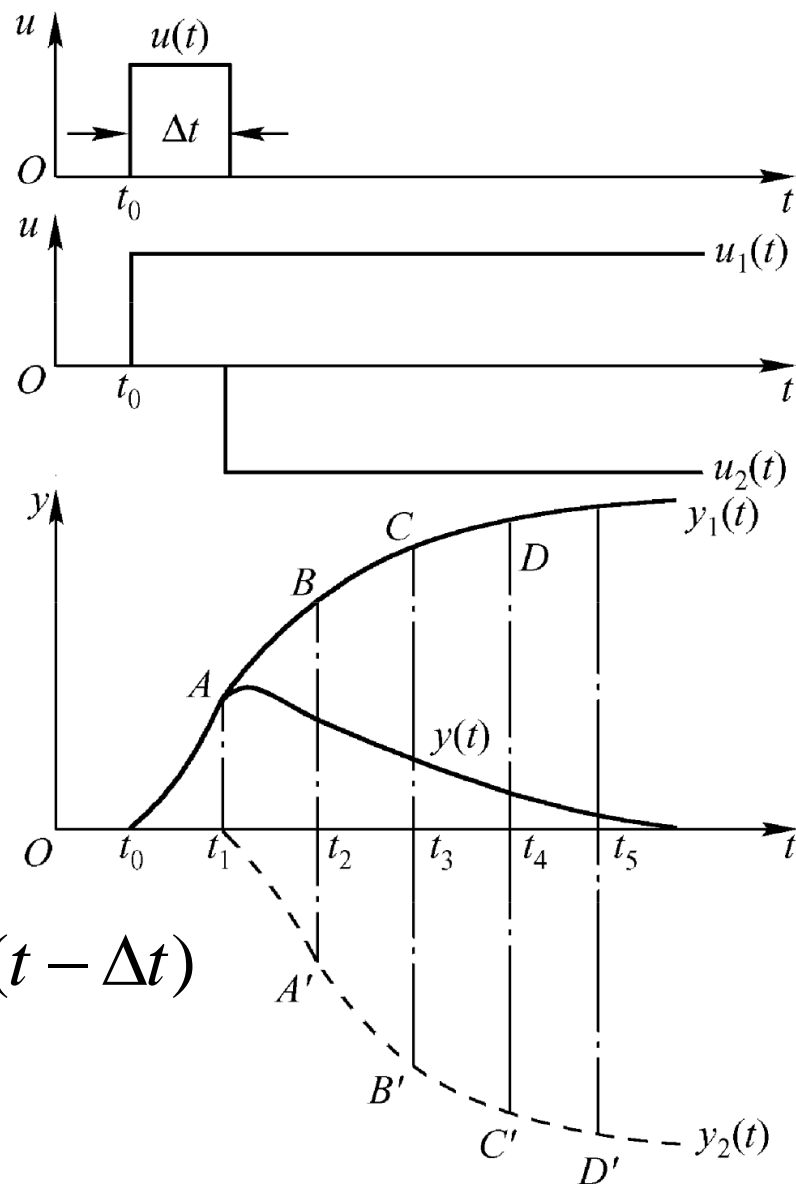
$$u_2(t) = -u_1(t - \Delta t)$$

$$y_2(t) = -y_1(t - \Delta t)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = y_1(t) - y_1(t - \Delta t)$$

$$y_1(t) = y(t) + y_1(t - \Delta t)$$

逐段递推作图!



由矩形脉冲响应确定阶跃响应

### 3. 由阶跃响应确定近似传递函数

- 由阶跃响应曲线来确定被控过程的数学模型，首先要根据曲线的形状，选定**模型的结构形式**
- 一般来说，模型阶数越高，参数愈多，拟合得越完美，但计算量也愈大
- 闭环控制，尤其是最常用的PID控制，并不要求非常准确的被控对象的数学模型
- 在满足精度要求的情况下，尽量使用低阶传递函数来拟合
- 简单的工业过程对象一般采用**一、二阶惯性加纯迟延的传递函数**来拟合。

## 1) 一阶惯性加纯迟延传递函数的确定

- 如果对象的阶跃响应是一条起始速度较慢、显 **S** 形的单调曲线，就可以用一阶惯性加纯迟延的传函去拟合。

### (1) 作图法

#### ① 计算增益 $K$

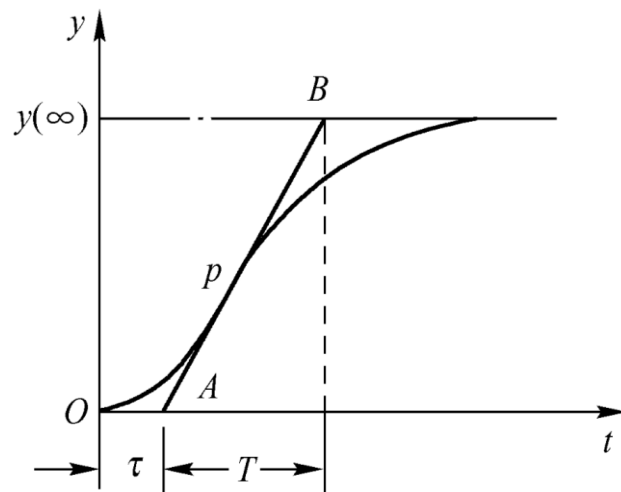
- 设阶跃输入  $u(t)$  的变化幅值为  $\Delta u(t)$ ，输出  $y(t)$  的起始值为  $y(0)$ ，稳态值为  $y(\infty)$
- 则增益  $K$ : 
$$K = \frac{y(\infty) - y(0)}{\Delta u(t)}$$

#### ② 利用作图确定 $T$ 和 $\tau$

在阶跃响应曲线的拐点  $p$  处作一切线，它与时间轴交于  $A$  点，与曲线的稳态渐近线交于  $B$  点，这样就可以根据  $A$ 、 $B$  两点处的时间值确定参数  $\tau$  和  $T$ 。

作图法的**拟合程度较差**。然而，作图法十分**简单**，而且实践证明它可成功地应用于 PID 控制器的参数整定。

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts} e^{-\tau s}$$
$$y(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}} \right)$$



## (2) 算法

利用如图所示阶跃响应上两个点的数据去计算参数 $T$ 和 $\tau$ 。

### ① 计算增益 $K$

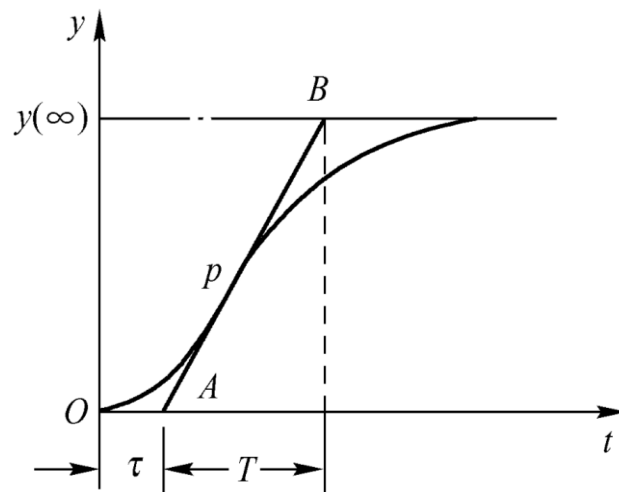
如阶跃输入 $u(t)$ 的变化幅值为 $\Delta u(t)$ ，则增益 $K$ 仍根据输入/输出稳态值的变化来计算，即

$$K = \frac{y(\infty) - y(0)}{\Delta u(t)}$$

其中， $y(0)$  和  $y(\infty)$  分别为输出  $y(t)$  的起始值和稳态值。

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts} e^{-\tau s}$$

$$y(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}} \right)$$



## ② 计算参数 $T$ 和 $\tau$

首先需要把输出  $y(t)$  转换成它的无量纲形式

$$y^*(t) = \frac{y(t)}{y(\infty)}$$

所对应的**一阶惯性加纯迟延传递函数**为

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} e^{-\tau s}$$

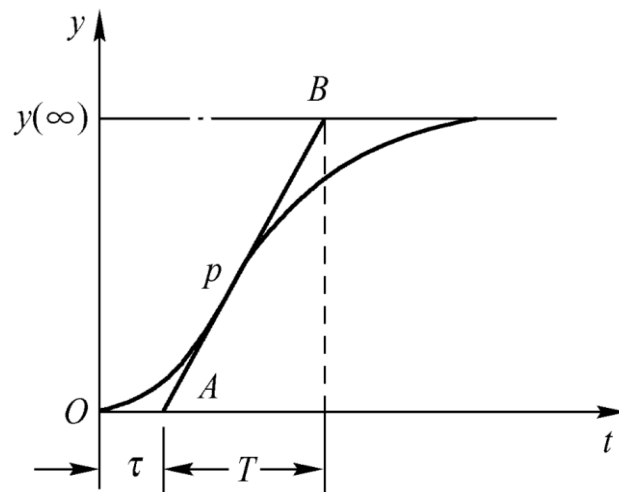
可得其单位阶跃响应为

$$y^*(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < \tau \\ 1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}} & , \quad t \geq \tau \end{cases}$$

选取两个时刻，即可求取两个参数即 $T$ 和 $\tau$ 。

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts} e^{-\tau s}$$

$$y(t) = K(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}})$$



- 选取两个时刻 $t_1$ 和 $t_2$  ( $t_2 > t_1 \geq \tau$ ), 然后从测试结果中读出这两个时刻的输出信号 $y^*(t_1)$ 和 $y^*(t_2)$ :

$$\left. \begin{aligned} y^*(t_1) &= 1 - e^{-\frac{t_1 - \tau}{T}} \\ y^*(t_2) &= 1 - e^{-\frac{t_2 - \tau}{T}} \end{aligned} \right\}$$

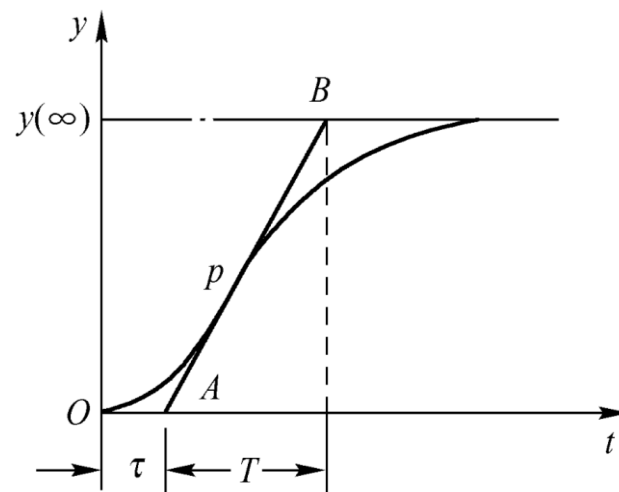
- 可以解出

$$T = \frac{t_2 - t_1}{\ln[1 - y^*(t_1)] - \ln[1 - y^*(t_2)]}$$

$$\tau = \frac{t_2 \ln[1 - y^*(t_1)] - t_1 \ln[1 - y^*(t_2)]}{\ln[1 - y^*(t_1)] - \ln[1 - y^*(t_2)]}$$

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts} e^{-\tau s}$$

$$y(t) = K(1 - e^{-\frac{t - \tau}{T}})$$



➤ 为了计算方便，一般选取在 $t_1$ 和 $t_2$ 时刻的输出信号分别为

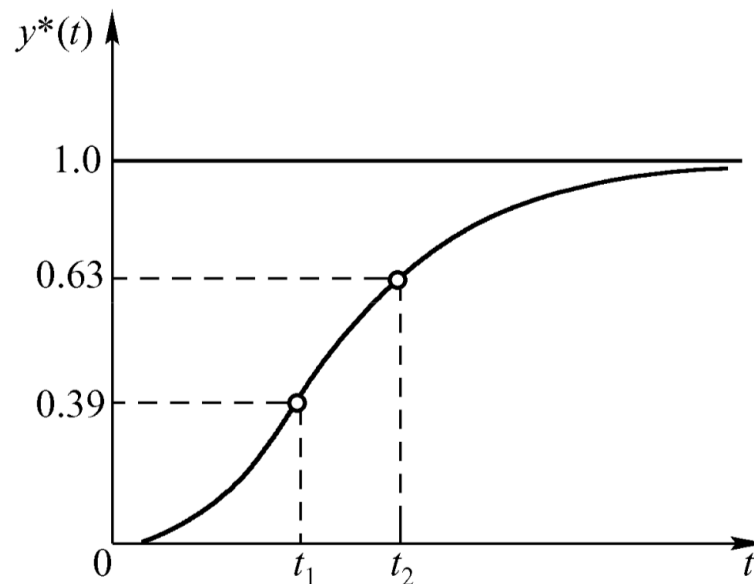
$$y^*(t_1)=0.39, \quad y^*(t_2)=0.63,$$

➤ 此可得

$$T=2(t_2-t_1), \quad \tau=2t_1-t_2$$

➤ 求取的参数 $\tau$ 和 $T$ 准确与否，可取另外两个时刻进行校验。

➤ **缺点**是单凭两个孤立点的数据进行拟合，未能顾及整个测试曲线的形态。此外，两个特定点的选择也具有随意性。



用两点法确定一阶对象参数

## 2) 二阶或n阶惯性加纯迟延传递函数的确定

- 如果阶跃响应是一条如图所示的 S 形单调曲线，并且在起始段明显有毫无变化的阶段，则可用二阶或 n 阶惯性加纯迟延的传递函数去拟合。由于它们包含两个或 n 个一阶惯性环节，因此拟合效果可能更好。

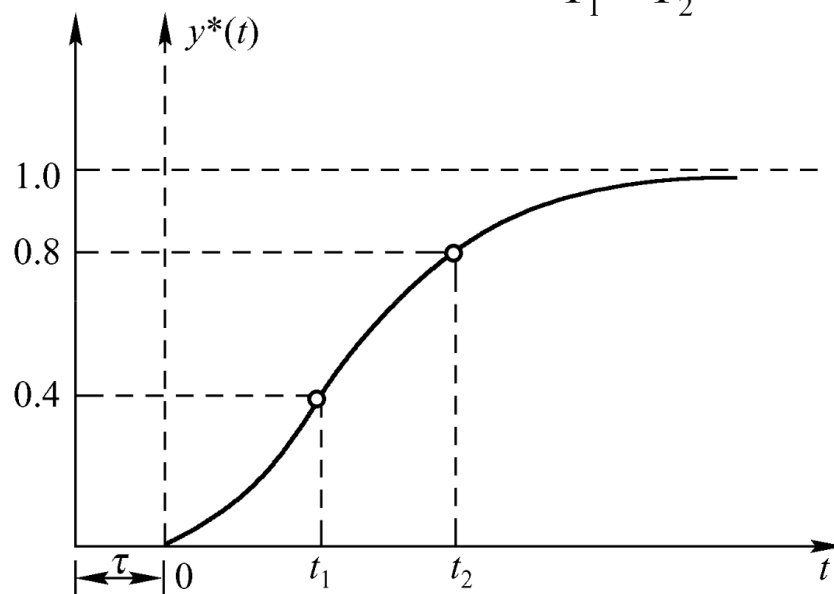
$$G(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$
$$y(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}$$

### (1) 计算二阶传递函数的参数

#### ① 计算增益 K

- 设阶跃输入  $u(t)$  的变化幅值为  $\Delta u(t)$ ，输出  $y(t)$  的起始值为  $y(0)$ ，稳态值为  $y(\infty)$
- 则增益  $K$

$$K = \frac{y(\infty) - y(0)}{\Delta u(t)}$$



用两点法确定二阶对象参数



## ② 计算纯迟延时间 $\tau$

- 纯迟延时间  $\tau$ ，可根据阶跃响应曲线脱离起始的毫无反应的阶段开始、出现变化的时刻确定。

$$G(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$y(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}}$$

## ③ 计算时间常数 $T_1$ 和 $T_2$

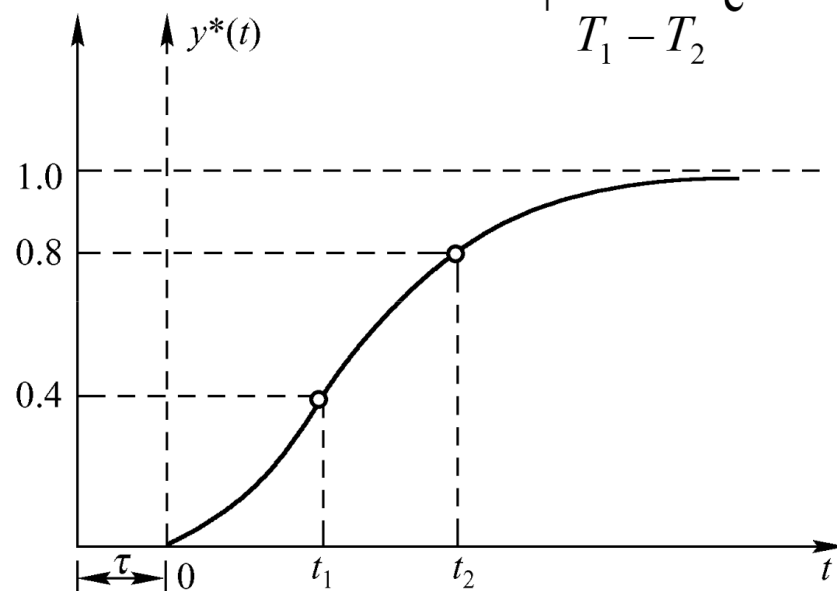
- 首先把截去纯迟延部分的输出  $y(t)$  转换成它的无量纲形式  $y^*(t)$ ，即

$$y^*(t) = \frac{y(t)}{y(\infty)}$$

- 阶跃响应截去纯迟延部分并已化为无量纲形式后，传递函数可表示为

$$G(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, T_1 \geq T_2$$

$$+ \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}$$



用两点法确定二阶对象参数

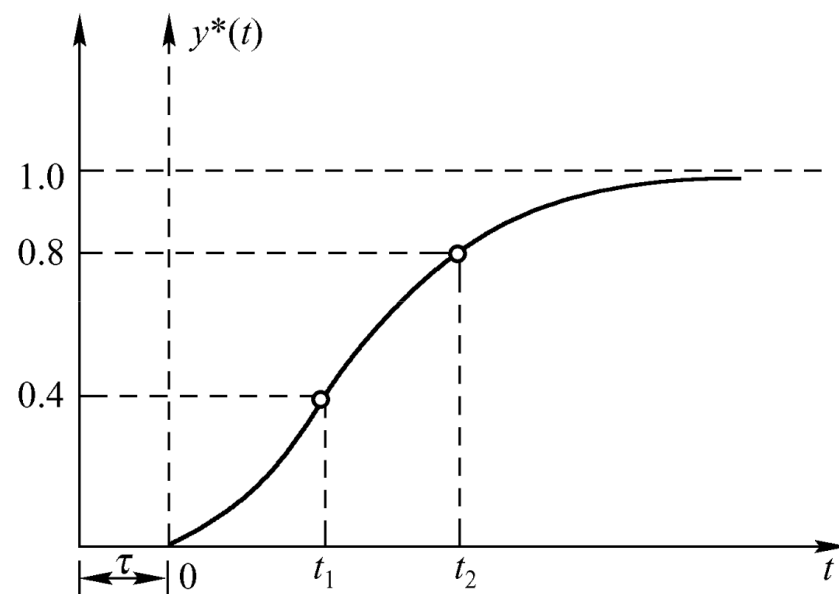
➤ 所示传递函数的单位阶跃响应为

$$y^*(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}$$

➤ 可利用阶跃响应上的两个点  $(t_1, y^*(t_1))$  和  $(t_2, y^*(t_2))$  确定参数  $T_1$  和  $T_2$ 。

➤ 例如，可以取  $y^*(t_1)$  和  $y^*(t_2)$  分别等于0.4和0.8，从曲线上定出  $t_1$  和  $t_2$ ，可得下述联立方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_1}{T_1}} - \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_1}{T_2}} &= 0.6 \\ \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_2}{T_1}} - \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_2}{T_2}} &= 0.2 \end{aligned} \right\}$$



用两点法确定二阶对象参数

## (2) 确定传递函数的形式

➤ 计算出传递函数的参数后，还需要根据时刻 $t_1$ 和 $t_2$ 的比值，进一步确定传递函数的具体形式。

①当  $t_1 / t_2 \leq 0.32$  时，表示系统比较简单，可用一阶对象来表示；

②当  $0.32 < t_1 / t_2 < 0.46$  时，系统可用二阶对象来表示；

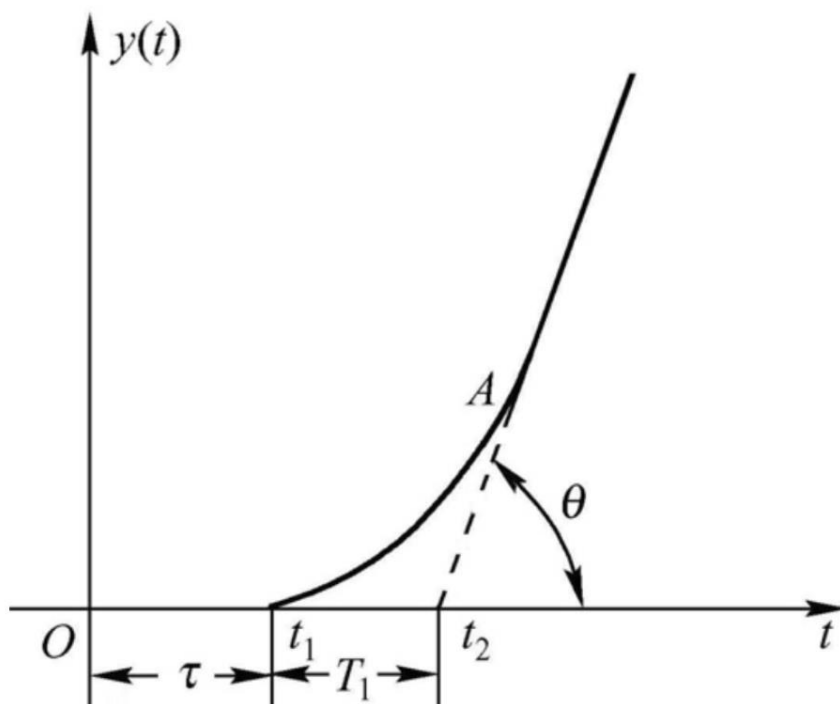
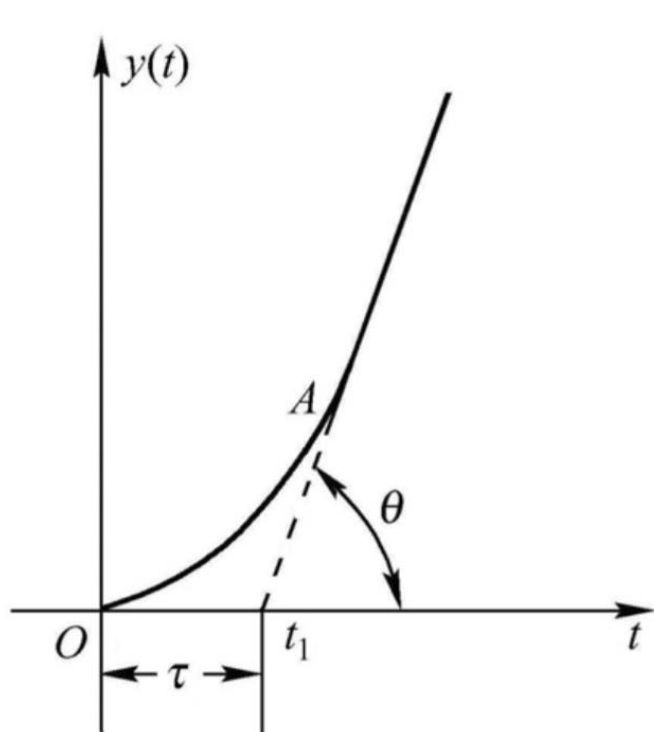
③当  $t_1 / t_2 = 0.46$  时，系统可用二阶对象来表示，且  $T_1 = T_2$ ；

④ 当  $t_1 / t_2 > 0.46$  时，系统比较复杂，要用高阶惯性对象来表示。

### 3) 确定非自平衡过程的参数

➤ 对于图示的阶跃响应曲线，它所对应的传递函数可用下式来近似：

$$G(s) = \frac{1}{Ts} e^{-\tau s} \quad \text{或} \quad G(s) = \frac{1}{T_2 s (T_1 s + 1)} e^{-\tau s}$$



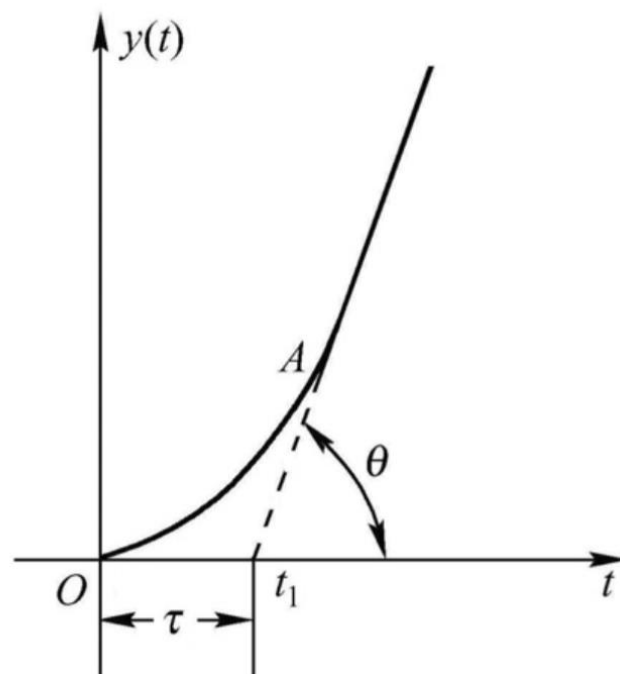
### 3) 确定非自平衡过程的参数

$$\textcircled{1} \quad G(s) = \frac{1}{Ts} e^{-\tau s}$$

作响应曲线稳态上升部分过拐点A的切线，交点时间轴于 $t_1$ ，夹角为 $\theta$ 。

$$\tau = t_1; \quad T = \frac{\Delta u}{\tan(\theta)}$$

$\Delta u$  为阶跃输入幅值



② 用下式来近似图示响应曲线

$$G(s) = \frac{1}{T_2 s(T_1 s + 1)} e^{-\tau s}$$

➤ 可见从0到 $t_1$ ,  $y(t)=0$ , 纯迟延, 故

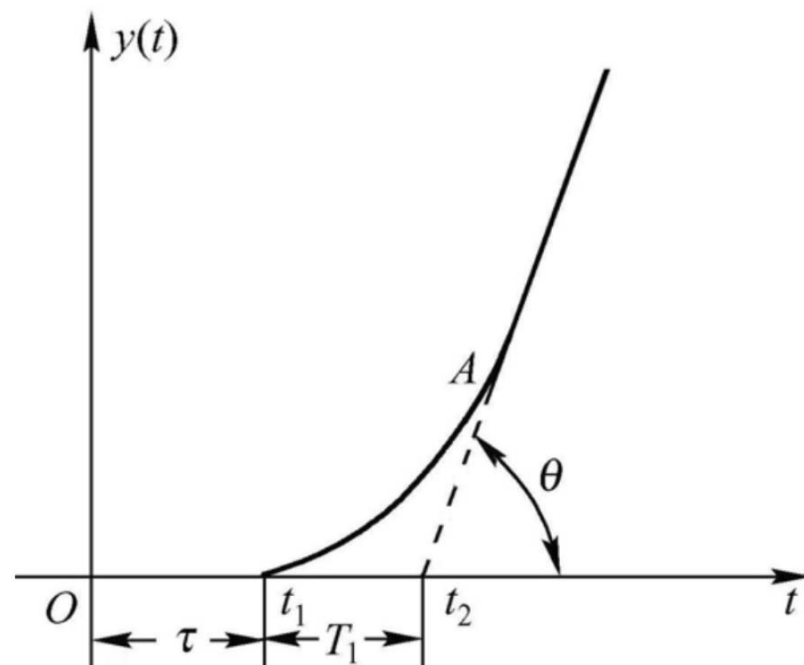
$$\tau = t_1$$

➤ 在曲线 $t_1$ 到A之间是惯性环节作用为主, 故

$$T_1 = t_2 - t_1$$

➤ 在曲线稳态之后是积分环节作用为主, 故

$$T_2 = \frac{\Delta u}{\tan(\theta)}$$



# 测定动态特性的频域法

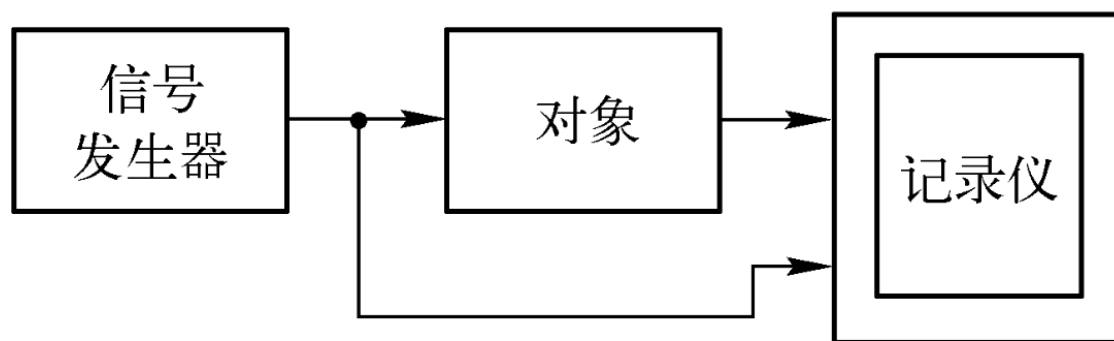
- 被控对象的动态特性也可用频率特性来描述：

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$$

- 它与传递函数及微分方程一样，同样表征了系统的运动规律。
- 一般动态特性测试中，**幅频特性**较易测得，而**相角信息**的精确测量则较为困难。
- 一般工业控制对象的惯性都较大。因此，测试对象的频率特性需持续很长时间。
- 而测试时，将有较长的时间使生产过程偏离正常运行状态，这在生产现场往往是不允许的，
- 所以，用测频率的方法在线来求对象的动态特性受到一些限制。

## 1. 正弦波方法

- 频率特性表达式可通过频率特性测试的方法来得到，测试方法如图所示。
- 在研究对象的输入端加入某个频率的正弦波信号，同时记录输入和输出的稳定振荡波形，在选定的各频率重复上述测试，便可测得该被控对象的频率特性。



正弦波测定对象频率特性原理图

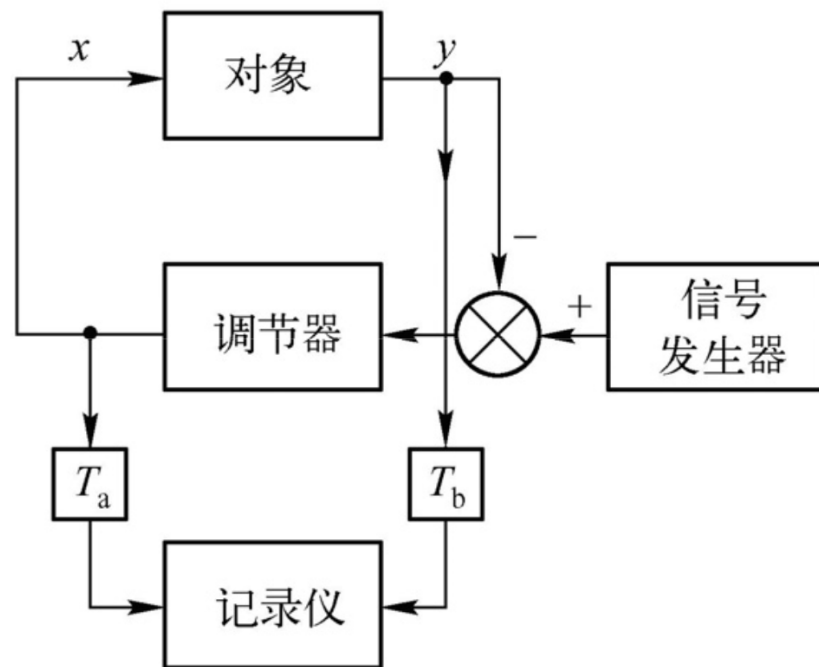


## 2. 频率特性的相关测试法

- 尽管可以采用随机激励信号、瞬态激励信号来迅速测定系统动态特性，但是为了获得精确的结果，仍然广泛采用稳态正弦激励试验来测定。
- **稳态正弦激励**试验是利用线性系统的频率保持性，即在单一频率强迫振动时系统的输出也应是单一频率，且把系统的噪音干扰以及非线性因素引起输出畸变的谐波分量都看作干扰。
- 因此，测量装置应能滤出与激励频率一致的有用信号，并显示其响应幅值，相对于参考（激励）信号的相角，或者给出其同相分量及正交分量，以便画出在该测点上系统响应的奈氏图。

### 3. 闭路测定法

- 上述两种测定法都是在开路状态下输入周期信号 $x(t)$ ，测定其输出 $y(t)$ 。
- 缺点是，被控变量 $y(t)$ 的振荡中线，即零点的漂移不能消除，因而不能长期进行试验。另外，它要求输入的振幅不能太大，以免增大非线性的影响，降低测定频率特性的精度。
- 若利用调节器组成的闭路系统进行测定，就可避免上述缺点。



闭路测定法原理图