

## 第七章

# 线性二次型问题

# 第七章 线性二次型问题

- 7.1 线性二次型问题
- 7.2 线性二次型问题的解
- 7.3 非时变状态调节器
- 7.4 跟踪问题
- 7.5 带有观测器的最优调节器



# § 7.1 线性二次型问题

## ■ 线性二次型问题

状态方程是线性的：

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad x(t_0) = x_0$$

目标函数是状态变量和控制变量的二次型，其一般形式为：

$$J(u) = \frac{1}{2} x^T(t_f) F x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) Q(t) x(t) + 2x^T(t) S(t) u(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt$$

问题是求  $u(t)$  使  $J(u)$  最小。

$x$  ——  $n$  维状态向量

$u$  ——  $m$  维控制向量

$Q$ 、 $R$  和  $S$  ——适当维数的矩阵     $t_f$  给定     $x(t_f)$  自由



## ■ 线性二次型问题的重要性：

- (1) 很大一类最优控制问题是线性二次型问题。它在自动控制和其它很多领域的应用中有非常重要的地位。
- (2) 线性二次型问题在理论上比较完善，因为得到的最优控制是状态变量的反馈，应用也比较方便，并且得到的闭环系统具有优良的品质。
- (3) 非线性最优控制问题的在线执行时也需要解一个线性二次型问题。

线性二次型问题是现代控制理论及其应用中最富成果的一部分。

# 调节器问题和跟踪问题

- 线性调节器问题是最常见的一类线性二次型问题。它的状态方程是

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

控制的目的是使状态  $x(t)$  尽量接近于平衡状态  $x=0$ ，而所用的控制能量又不太大。

控制制能量一般描述为控制变量的二次型，因此目标函数选为

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q(t)x + u^T R(t)u] dt$$

调节器问题是求  $u(t)$  使  $J(u)$  最小。





# 调节器问题和跟踪问题

## ■ 对性能指标的理解

- 1、实际意义——不消耗过大能量的情况下，使系统较快恢复到平衡状态。
- 2、由于性能指标中采用  $x$  的二次型函数，所以性能指标主要反映响应过程初始阶段较大偏差的性质，而对行将结束时较小偏差的性质反映不够。
- 3、其加权阵取为时变的，则  $Q(t)$  的元可以随时间增大，从而加大小状态偏差时的加权系数。因此， $Q(t)$  阵的选择是很灵活的。但实际中常选为对称的，甚至是对角阵。
- 4、通过调整  $Q(t)$  和  $R(t)$  的元素的大小，调整对状态变量接近平衡状态和控制能量不太大重视的程度。

■ 另一类最常见的线性二次型问题是跟踪问题，该问题是使控制系统的输出跟踪要求的输出函数。

# 一个调节器问题的例子

- 【例7-1】 设系统的状态方程为

$$\dot{x} = -x + u \quad x(0) = 1$$

目标函数为

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + ru^2) dt$$

线性调节器问题是求  $u$  使  $J(u)$  最小。

其含义是：求最优控制使系统的状态  $x$  尽量接近平衡状态  $x=0$ ，又不使控制能量过大。

目标函数中的  $r$  是一个正数，它被用来调节对“ $x$  尽量接近于“0”和“控制能量不要过大”的重视程度。



# 调节器问题和跟踪问题

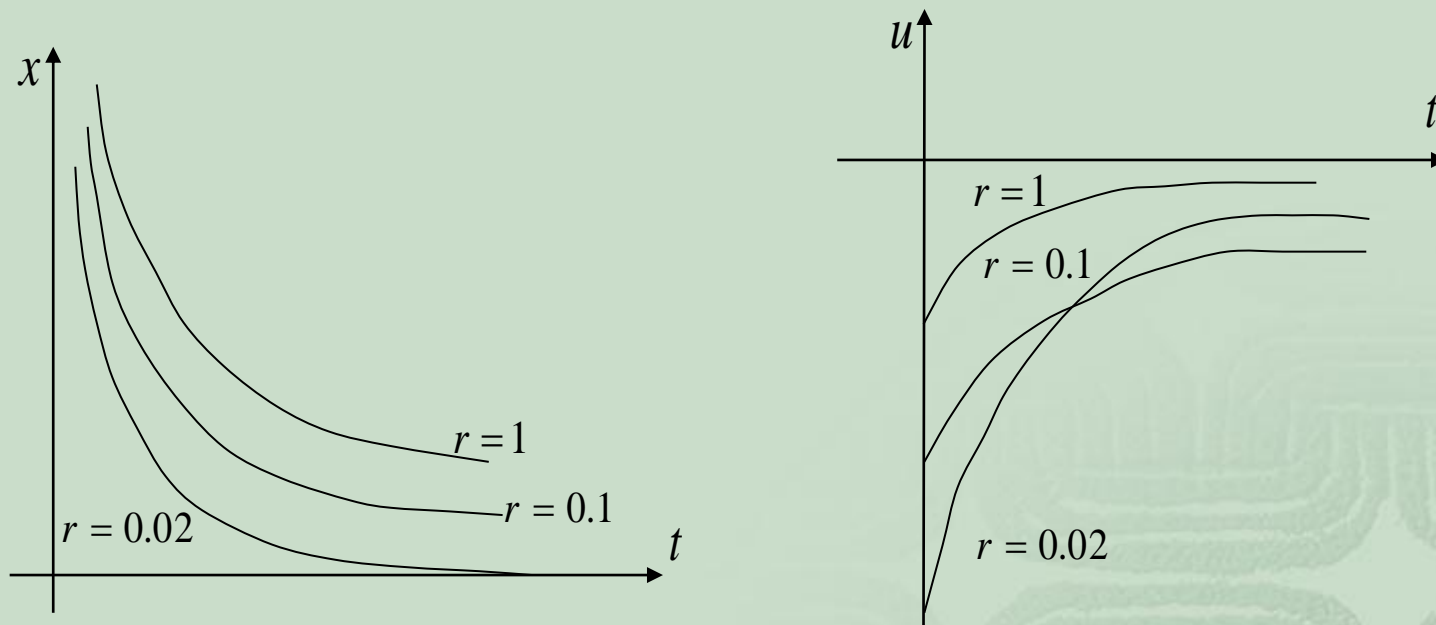


图7-1  $r$  的调节作用

加权因子  $r$  的调节作用：

较大的  $r$ ，表示设计者更重视“控制能量不要过大”；

较小的  $r$ ，表示设计者更重视“ $x$  尽量接近于“0”。



# 研究线性二次型问题的重要性

- 在非线性能最优控制问题中设状态方程为

$$\dot{x} = f(x, u), x(t_0) = x_0$$

$$\text{目标函数为 } J(u) = \theta(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u) dt$$

用变分法或最大值原理求出最优控制  $u^*(t)$  和相应的最优轨迹  $x^*(t)$ 。因为实际系统与模型总有一定的差异，所以应用控制  $u(t) = u^*(t) + \delta u(t)$  使偏差  $x(t) - x^*(t)$  减小。此过程由下图给出

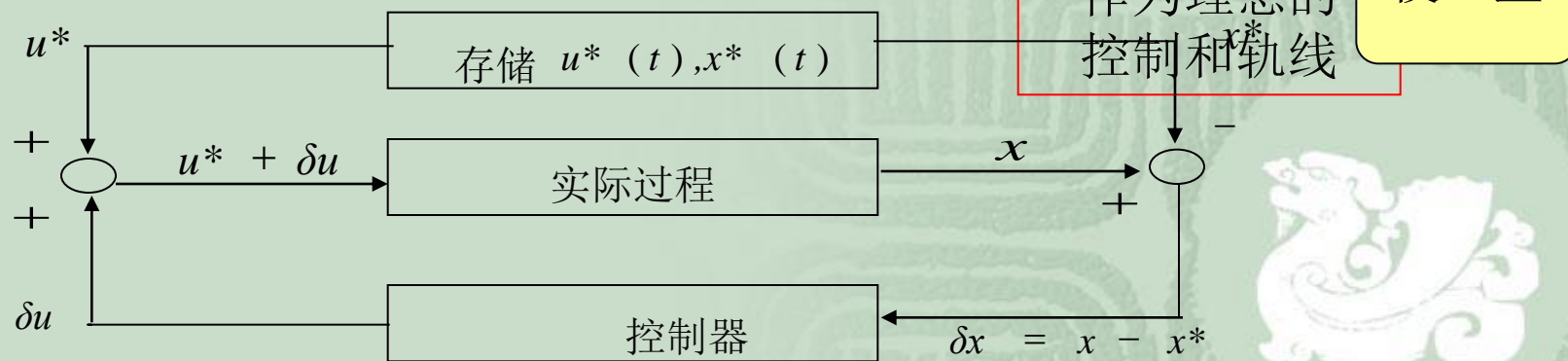


图7-2非线性系统最优控制的在线执行

# 研究线性二次型问题的重要性

图7-2中的控制制器是由解一个线性二次型问题得到的。  
其状态方程为

$$\delta \dot{x} = A_0(t)\delta x + B_0(t)\delta u$$

目标函数为

$$J(u) = \frac{1}{2} \delta x^T(t_f) F \delta x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\delta x^T Q(t) \delta x + \delta u^T R(t) \delta u] dt$$

就是说非线性最优控制问题在线执行时需要解一个线性二次型问题。



## § 7.2 线性二次型问题的解 (有限时间的状态调节器问题)

- 系统的状态方程为

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad x(t_0) = x_0$$

目标函数为

$$J(u) = \frac{1}{2} x^T(t_f) F x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt$$

线性二次型问题是求  $u$  使  $J(u)$  最小。

$F$ 、 $Q$  —— 对称半正定矩阵

$R$  —— 对称正定矩阵



# 线性二次型问题的解

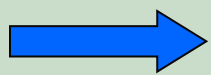
- 线性二次型问题可用变分法或最大值原理求解。

哈密顿函数：

$$H(x, \lambda, u, t) = \frac{1}{2} [x^T Q(t)x + u^T R(t)u] + \lambda^T [A(t)x + B(t)u]$$

必要条件

$$\frac{\partial H}{\partial u} = B^T(t)\lambda(t) + R(t)u(t) = 0$$



$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t) \quad (7-1)$$

关键求  $\lambda(t)$

正则方程组为  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u = A(t)x - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Q(t)x - A^T(t)\lambda$$



# 线性二次型问题的解

正则方程组写成矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -S(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (7-2)$$

$$S(t) = B(t)R^{-1}(t)B^T(t)$$

边界条件为:  $x(t_0) = x_0$      $\lambda(t_f) = Fx(t_f)$

设  $\Phi(t, t_0)$  是正则方程组 (7-2) 的状态转移矩阵,  
并记为如下的分块形式

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t, t_0) & \phi_{12}(t, t_0) \\ \phi_{21}(t, t_0) & \phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

$\phi_{ij}(t, t_0)$  是  $n$  阶方阵,  $i, j = 1, 2$ 。





# 线性二次型问题的解

由上式得

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t, t_0) & \phi_{12}(t, t_0) \\ \phi_{21}(t, t_0) & \phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_0) \\ \lambda(t_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t_f) \\ \lambda(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t_f, t) & \phi_{12}(t_f, t) \\ \phi_{21}(t_f, t) & \phi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}$$

或者

$$\begin{aligned} x(t_f) &= \phi_{11}(t_f, t)x(t) + \phi_{12}(t_f, t)\lambda(t) \\ \lambda(t_f) &= \phi_{21}(t_f, t)x(t) + \phi_{22}(t_f, t)\lambda(t) = Fx(t_f) \end{aligned}$$

将  $x(t_f)$  代入  $\lambda(t_f)$

因此

$$\begin{aligned} \lambda(t_f) &= F\phi_{11}(t_f, t)x(t) + F\phi_{12}(t_f, t)\lambda(t) \\ &= \phi_{21}(t_f, t)x(t) + \phi_{22}(t_f, t)\lambda(t) \end{aligned}$$

由此得到

$$[\phi_{22}(t_f, t) - F\phi_{12}(t_f, t)]\lambda(t) = [F\phi_{11}(t_f, t) - \phi_{21}(t_f, t)]x(t)$$

# 线性二次型问题的解

可以证明：矩阵 $[\phi_{22}(t_f, t) - F\phi_{12}(t_f, t)]$ 可逆，

→ 
$$\lambda(t) = [\phi_{22}(t_f, t) - F\phi_{12}(t_f, t)]^{-1} [F\phi_{11}(t_f, t) - \phi_{21}(t_f, t)] x(t)$$

记 
$$P(t) = [\phi_{22}(t_f, t) - F\phi_{12}(t_f, t)]^{-1} [F\phi_{11}(t_f, t) - \phi_{21}(t_f, t)] \quad (7-3)$$

则 
$$\lambda(t) = P(t)x(t)$$

代入式 (7-1) 得到最优控制

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t) \quad (7-4)$$

或 
$$u(t) = -K(t)x(t) \quad K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t)$$

$K(t)$ ——反馈增益矩阵

按式(7-3)计算  $P(t)$ ，需要计算  $2n$  阶方阵  $\Phi(t_f, t)$ ，还需计算一个  $n$  阶方阵的逆矩阵，比较复杂。



# 计算 $P(t)$ 的方法

## ■ 计算 $P(t)$ 的方法

由  $\lambda(t) = P(t)x(t)$  两边对  $t$  微分得到

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{dP}{dt}x + P(t)\frac{dx}{dt} = \frac{dP}{dt}x + P(t)A(t)x - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x$$

由协状态方程得到  $\frac{d\lambda}{dt} = [-Q(t) -$

比较上二端得到  $\frac{\partial H}{\partial x} = -Q(t)x - A^T(t)P(t)x$   
 $[\frac{dP}{dt} + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t)]x = 0$

由于上式对状态方程的任意解  $x(t)$  均成立，故有

$$\frac{dP}{dt} + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t) = 0$$

因此  $P(t)$  满足矩阵微分方程：

$$\frac{dP}{dt} = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t) \quad (7-5)$$

——矩阵里卡蒂 (Riccati) 微分方程

边界条件  $\lambda(t_f) = P(t_f)x(t_f) = Fx(t_f)$ ,  $\longrightarrow P(t_f) = F \quad (7-6)$

$P(t)$  是  $n \times n$  维的时变矩阵，它依赖于  $t_f$  和终端条件  $F$ ，而与初始状态无关，因此也常记为  $P(t, t_f)$ 。

0

## ■ $P(t)$ 是对称矩阵的证明

式(7-5)、(7-6)两边转置得到:

$$\begin{cases} \frac{dP^T}{dt} = -A^T(t)P^T(t) - P^T(t)A(t) + P^T(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P^T(t) - Q(t) \\ P^T(t_f) = F. \end{cases}$$

这表明  $P^T(t)$  和  $P(t)$  是同一个微分方程的终值问题的解, 由微分方程终值问题解的唯一性, 得到  $P(t) = P^T(t)$ ,  $P(t)$  为对称矩阵。

• 矩阵里卡蒂微分方程, 它是包含  $n^2$  个微分方程的方程组,  $P(t)$  是对称矩阵, 因此式(7-5)实质上包含  $n(n+1)/2$  个微分方程。

由上面的推导我们得到以下结论:

- (1) 控制是状态的反馈  $u(t) = -K(t)x(t)$  ;
- (2) 求反馈增益矩阵的关键步骤是解矩阵里卡蒂微分方程, 这可以离线进行;
- (3) 在线控制的计算量很小, 只需在线计算  $-K(t)x(t)$  。

■ 【例7-2】 考虑线性二次型问题

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$$

$$J(u) = \frac{1}{2}[x_1^2(3) + 2x_2^2(3)] + \frac{1}{2} \int_0^3 [2x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2 + \frac{1}{2}u^2] dt$$

对该问题

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$R = \frac{1}{2} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix}$$

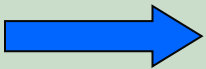


最优控制为  $u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t)$

$$u^* = -2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = -2(p_{12}(t)x_1(t) + p_{22}(t)x_2(t))$$

式中  $p_{12}(t)$ 、 $p_{22}(t)$  是如下的里卡蒂方程的解：

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{11} & \dot{p}_{12} \\ \dot{p}_{12} & \dot{p}_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$


$$\begin{cases} \dot{p}_{11} = 2p_{12}^2(t) - 2 \\ \dot{p}_{12} = -p_{11}(t) + 2p_{12}(t)p_{22}(t) - 1 \\ \dot{p}_{22} = -2p_{12}(t) + 2p_{22}^2 - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} p_{11}(3) = 1 \\ p_{12}(3) = 0 \\ p_{22}(3) = 2 \end{cases}$$

这是一个里卡蒂微分方程组的终值问题，  
里卡蒂微分方程组的终值问题一般需要数值方法求解。

# 证明： $u(t)=-K(t)x(t)$ 必是线性二次型问题的最优解（充分性）

**引理7-1**  $u(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)P(t,t_f)x(t)$  必使  $J(u)$  达最小值，  
并且  $J(u)$  的最小值为：

$$J^*(x(t_0), t_0) = \frac{1}{2} x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0)$$

$P(t_0, t_f)$  ——是  $P(t, t_f)$  在  $t = t_0$  点的值



# 引理 7-1 的证明

■ 证明 先计算

$$\frac{d}{dt}[x^T(t)P(t,t_f)x(t)] = \dot{x}(t)^T P(t,t_f)x(t) + x^T(t)\dot{P}(t,t_f)x(t) + x^T(t)P(t,t_f)\dot{x}(t)$$

由里卡蒂方程和状态方程,

$$\begin{aligned} \longrightarrow \frac{d}{dt}[x^T(t)P(t,t_f)x(t)] &= -x^T(t)Q(t)x(t) - u^T(t)R(t)u(t) \\ &\quad + [u(t) + R^{-1}(t)B^T(t)P(t,t_f)x(t)]^T R(t)[u(t) + R^{-1}(t)B^T(t)P(t,t_f)x(t)] \end{aligned}$$

由  $t_0$  到  $t_f$  积分上式得到:

$$\begin{aligned} x^T(t_f)P(t_f,t_f)x(t_f) - x^T(t_0)P(t_0,t_f)x(t_0) &= -\int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} [u(t) + R^{-1}(t)B^T(t)P(t,t_f)x(t)]^T R(t)[u(t) + R^{-1}(t)B^T(t)P(t,t_f)x(t)]dt \end{aligned}$$

## 引理 7-1 的证明（续）

由于  $P(t_f, t_f) = F$ ，上式化为

$$2J(u) = x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} [u(t) + R^{-1}(t)B^T(t)P(t, t_f)x(t)]^T R(t)[u(t) + R^{-1}B^T P(t, t_f)x(t)]dt$$

由于  $R(t)$  是正定矩阵，因此仅当  $u(t) + R^{-1}(t)B^T(t)P(t, t_f)x(t) = 0$  时  $J(u)$  最小，即

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t, t_f)x(t)$$

使  $J(u)$  达最小值：

$$J^*(x(t_0), t_0) = \frac{1}{2} x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0)$$



# $P(t, t_f)$ 是（半）正定的

**引理7-2** 在  $Q(t)$  半正定、 $R(t)$ 正定的假设下，里卡蒂方程的解  $P(t, t_f)$  是半正定的。如进一步假设  $Q(t)$  正定，则  $P(t, t_f)$  也是正定的。

证明：

$$\begin{aligned} J^*(x(t), t) &= \frac{1}{2} x^T(t) P(t, t_f) x(t) \\ &= \frac{1}{2} x^{*T}(t_f) F x^*(t_f) + \frac{1}{2} \int_t^{t_f} [x^{*T}(\tau) Q(\tau) x^*(\tau) + u^{*T}(\tau) R(\tau) u^*(\tau)] d\tau \end{aligned}$$

由于  $Q(t)$  半正定， $R(t)$  正定，上式右端大于等于0，因而

$$x^T(t) P(t, t_f) x(t) \geq 0$$

$P(t, t_f)$  半正定。

- 如果  $Q(t)$  也是正定的，则上式右端大于零，因而  $P(t, t_f)$  也是正定的。





# 线性二次型问题的解(定理7-1)

- **定理7-1** 在线性二次型问题中假设 $A(t)$ 、 $B(t)$ 、 $Q(t)$ 、 $R(t)$ 连续可微分， $Q(t)$ 半正定， $R(t)$ 正定，那么  $u^*(t)$  是最优控制的充分必要条件是

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t, t_f)x(t)$$

式中  $P(t, t_f)$  是里卡蒂方程的终值问题

$$\frac{dP}{dt} = -PA(t) - A^T(t)P + PB(t)R^{-1}(t)B^T(t)P - Q(t) \quad P(t_f, t_f) = F$$

的解， $P(t, t_f)$  是对称半正定矩阵，并且当  $Q(t)$  正定时， $P(t, t_f)$  也是正定矩阵。

当  $u(t)$  取为最优控制  $u^*(t)$  时，目标函数的最小值为

$$J^*(x(t_0), t_0) = \frac{1}{2} x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0)$$

最优轨线是初值问题：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t, t_f)]x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

的解。

## § 7.3 非时变状态调节器

- 7.3.1 非时变状态调节器的设计
- 7.3.2 闭环系统的稳定性
- 7.3.3 代数里卡蒂方程的解法
- 7.3.4 设计非时变状态调节器MATLAB程序
- 7.3.5 非时变状态调节器的频率特性



# 非时变状态调节器

- 有限时间状态调节器问题，只考虑系统由任意初态恢复到平衡状态的行为。最优设计可以保证在过程恢复快慢、末端脱靶量与控制约束间求一个合理的折衷。
- 工程上更为关心的一类问题是：在有限时间内的最优性，以及此后控制系统保持平衡的能力（即控制系统的动态品质及稳定性问题）。

这种问题无法用有限时间调节器的理论来解决。



# 非时变状态调节器

- 有限时间状态调节器问题的最优控制是状态变量的反馈

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t, t_f)x(t)$$

当  $A$ 、 $B$ 、 $Q$ 、 $R$  都是常阵时，由于  $P(t, t_f)$  是里卡蒂微分方程的终值问题的解  $\frac{dP}{dt} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q$   $P(t_f, t_f) = F$

一般情况下  $P(t, t_f)$  仍然是时间  $t$  的函数 

反馈增益矩阵  $K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t, t_f)$  仍依赖于时间  $t$ ，应用时需要在控制器上存一个依赖于时间  $t$  的矩阵  $K(t)$ 。

当  $A$ 、 $B$ 、 $Q$ 、 $R$  都是常阵时，并且  $t_f = \infty$  时，能够得到常增益反馈控制，这样在控制器上只需存一个常数矩阵  $K$ ，在应用上将更为方便。这时得到的控制器称为**非时变状态调节器**。

## § 7.3.1 非时变状态调节器的设计

### ■ 问题描述

考虑定常线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(t_0) = x_0$$

目标函数为

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt$$

问题是求  $u$  使  $J(u)$  最小。这里假设  $Q$ 、 $R$  为正定矩阵， $(A, B)$  完全能控。

在这个问题中，系统  
必须是能控的么？



# 为什么假定系统是完全能控的 (1)

■ 考察如下问题:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t), & x_1(t_0) = 1 \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u(t), & x_2(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)] dt$$

$t_f = \infty$  的最优控制问题。由方程可以直接看出,  $x_1(t)$  是一个不可控状态。满足  $x_1(t_0) = 1$  的响应为  $x_1(t) = e^t$ 。这时, 性能指标成为

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [e^{2t} + x_2^2(t) + u^2(t)] dt$$

无论怎样选择  $u(t)$ , 上面的积分值都是无穷大, 因而无法比较  $J$  的大小。



# 为什么假定系统是完全能控的（2）

- 对于有限时间调节器问题， $J$ 总是有限值，其最优解必存在，但在无限时间情况下就未必如此。对于上面所给的例子，由于以下三个原因使 $J$ 值变为无穷大：

(1) 状态  $x_I(t)$  是不可控的

(2) 状态轨线的不可控部分是不稳定的。 $(x_I(t) = e^t)$

(3) 状态轨线的不稳定部分能在性能指标中观测出来(即 $x_I(t) = e^t$  反映在性能指标中)



# 为什么假定系统是完全能控的（3）

- 有限时间的最优控制问题中，并不要求系统是能控的。因为在有限控制时间区间  $[t_0, t_f]$  内，不能控的状态对性能指标所呈现的数值总归是有限的。
- 当  $t_f \rightarrow \infty$  时，则必须是能控的，否则性能指标将趋于无穷大而失去最优控制的意义。
- 当然，一般系统能稳就可以了，但能控性条件是一般条件，并不过份苛刻。所以今后讨论中通常认为满足受控系统完全能控性的假定。

# 非时变状态调节器的设计

**引理7.3** 设 $(A, B)$ 能控, 那么

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t, t_f) = \hat{P} \quad (\text{常阵})$$

**证明思路:** 先证明极限  $\lim_{t_f \rightarrow \infty} \mathbf{x}^T(t_0)P(t_0, t_f)\mathbf{x}(t_0)$  存在  
(方法是证明  $\mathbf{x}^T(t_0)P(t_0, t_f)\mathbf{x}(t_0)$  单增有上界。)  
然后再证明  $\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t, t_f)$  存在并且是常阵。



证明 (1)  $x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0)$  有上界。

因为  $(A, B)$  能控, 对任  $x_0$ , 存在  $t_1 > t_0$  和  $\tilde{u}(t)$  使在它的作用下  $x(t_1) = 0$ 。取  $t_f$  为有限时间, 由上节的结果

$$\frac{1}{2} x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0) = \min \left[ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q x + u^T R u] dt \right]$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x^T Q x + \bar{u}^T R \bar{u}] dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [x^T Q x + \bar{u}^T R \bar{u}] dt < \infty$$

$$\text{取 } \bar{u} = \begin{cases} \tilde{u}, & t \in (t_0, t_1), \\ 0, & t \in (t_1, \infty). \end{cases}$$

$\therefore x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0)$  有上界。



(2)  $x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0)$  关于  $t_f$  是单增的

设  $t_{f1} < t_{f2}$  , 并设在区间  $(t_0, t_{f1})$  上的最优控制为  $u_1^*(t)$  ,

在区间  $(t_0, t_{f2})$  上的最优控制为  $u_2^*(t)$  ,

它们相应的轨线分别为  $x_1^*$ 、 $x_2^*$  , 那么 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x^T(t_0)P(t_0, t_{f1})x(t_0) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_{f1}} [x_1^{*T} Q x_1^* + u_1^{*T} R u_1^*] dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_{f2}} [x_2^{*T} Q x_2^* + u_2^{*T} R u_2^*] dt = \frac{1}{2} x^T(t_0)P(t_0, t_{f2})x(t_0) \end{aligned}$$

$\therefore x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0)$  单增有上界,

$\therefore \lim_{t_f \rightarrow \infty} x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0)$  存在。





(3)  $\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t_0, t_f)$  存在

因为  $P(t_0, t_f)$  不依赖于  $x(t_0)$ ,

取  $x(t_0) = [0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$  即只有  $x(t_0)$  的第  $i$  个分量为 1, 其它分量均为 0 时,  $x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0) = P_{ii}(t_0, t_f)$

→  $\lim_{t_f \rightarrow \infty} P_{ij}(t_0, t_f)$  存在。

取  $x(t_0) = [0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ , 即除  $x(t_0)$  的第  $i$  个元素和第  $j$  个元素为 1 外其他元素均为 0 时,

$$x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0) = P_{ii}(t_0, t_f) + P_{ji}(t_0, t_f) + P_{ij}(t_0, t_f) + P_{jj}(t_0, t_f)$$

由于上式左边极限存在, 右边  $P_{ii}, P_{jj}$  极限存在, 而

$$P_{ij}(t_0, t_f) = P_{ji}(t_0, t_f)$$

∴  $\lim_{t_f \rightarrow \infty} P_{ij}(t_0, t_f)$  存在。 →  $\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t_0, t_f)$  存在。



(4)  $\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t_0, t_f)$  是常数阵（不依赖于  $t_0$ ）

由于  $A$ 、 $B$ 、 $Q$ 、 $R$  是常数矩阵，所以不论  $t_0$  取何值，只要向量  $x(t_0)$  相同， $J$  的最小值就不变，因此  $\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t_0, t_f)$  为常阵，记它为  $\hat{P}$ ，即

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t_0, t_f) = \hat{P}$$

由  $t_0$  的任意性，即得到

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t, t_f) = \hat{P}$$

引理证完。

由引理7-2，当矩阵  $Q$ 、 $R$  均为正定矩阵时  $P(t, t_f)$  为正定矩阵，因此  $\hat{P}$  也是正定矩阵。

$Q$  正定的条件可降低为  $Q = C^T C$ ， $(C, A)$  能观测，有如下定理

**引理7-4**  $\hat{P}$  正定的充分必要条件是  $(C, A)$  能观测。

# 对矩阵 $\hat{P}$ 的解释:

■ 对矩阵  $\hat{P}$  的解释:

考虑Ricaati矩阵微分方程,

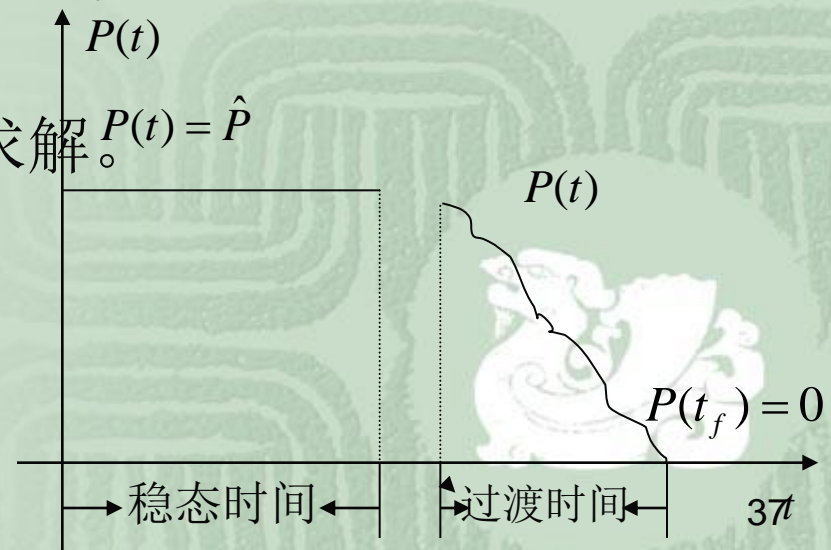
$$\dot{P} = -PA(t) - A^T(t)P + PB(t)R^{-1}(t)B^T(t)P - Q(t)$$

边界条件为终止时刻  $P(t_f) = 0$

对以上微分方程需逆时间求解, 即以  $t_f$  为“初始时刻”,  
以  $P(t_f) = 0$

为“初始条件”对方程求解。  $P(t) = \hat{P}$

如图, 当  $t_f \rightarrow \infty$  时, 由  $P(t_f) = 0$   
的初始条件引起的“过渡响应”  
消失后, 在所有的有限时刻  $P(t)$   
保持恒定的稳态值  $\hat{P}$



# 非时变状态调节器的设计

**引理7-5** 设  $P(t_0, t_f)$  是里卡蒂方程的终值问题的解, 那么

$$\hat{P} = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} P(t_0, t_f)$$

**证明** 已证明  $\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t_0, t_f) = \hat{P}$ 。由于  $A$ 、 $B$ 、 $Q$ 、 $R$  都是常数矩阵, 因此有

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t_0, t_f) = \hat{P} = \lim_{t_f \rightarrow \infty} P(0, t_f - t_0) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} P(0, t_f - t_0) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} P(t_0, t_f)$$

引理证完。

由引理7-3,  $\hat{P}$  是非线性代数方程组

$$-\hat{P}A - A^T \hat{P} + \hat{P}BR^{-1}B^T \hat{P} - Q = 0$$

的解, 上述方程 (组) 称为**代数里卡蒂方程 (组)**。



- **定理7-2** 设 $(A, B)$  能控,  $Q$ 、 $R$ 为正定矩阵, 那么最优调节器问题的解由

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T \hat{P}x(t) \quad (7-7)$$

给出, 式中 $\hat{P}$  是代数里卡蒂方程

$$-\hat{P}A - A^T \hat{P} + \hat{P}BR^{-1}B^T \hat{P} - Q = 0 \quad (7-8)$$

的对称正定解。最优轨线是微分方程的初始问题

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BR^{-1}B^T \hat{P})x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

的解, 目标函数的最小值为

$$J^*(x(t_0), t_0) = \frac{1}{2} x^T(t_0) \hat{P}x(t_0)$$

证明步骤:

(1) 以 $u^*$  作为控制, 则目标函数为 $\frac{1}{2} x^T(t_0) \hat{P}x(t_0)$

(2) 证明 $u^*(t) = -R^{-1}B^T \hat{P}x(t)$  是最优控制。



## 定理7-2的证明

证明 (1) 以  $u^*$  作为控制, 则目标函数为  $\frac{1}{2} x^T(t_0) \hat{P} x(t_0)$

$u^*(t) = -R^{-1} B^T \hat{P} x^*(t)$   $x^*$  是相应的轨线。

以上面的  $u^*$  代入有限时间目标函数中得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^{*T} Q x^* + u^{*T} R u^*] dt &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} x^{*T} [Q + \hat{P} B R^{-1} B^T \hat{P}] x^* dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} x^{*T} [-A^T \hat{P} - \hat{P} A + 2 \hat{P} B R^{-1} B^T \hat{P}] x^* dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [-x^{*T} \hat{P} x^*] dt \\ &= \frac{1}{2} x^T(t_0) \hat{P} x(t_0) - \frac{1}{2} x^{*T}(t_f) \hat{P} x^*(t_f) \leq \frac{1}{2} x^T(t_0) \hat{P} x(t_0) \end{aligned}$$

因此  $\lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^{*T} Q x^* + u^{*T} R u^*] dt \leq \frac{1}{2} x^T(t_0) \hat{P} x(t_0)$  (7-9)



## 定理7-2的证明

另一方面  $\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^{*T} Q x^* + u^{*T} R u^*] dt \geq \frac{1}{2} x^T(t_0) P(t_0, t_f) x(t_0)$

令  $t_f \rightarrow \infty$  得到

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^{*T} Q x^* + u^{*T} R u^*] dt \geq \frac{1}{2} x^T(t_0) \hat{P} x(t_0) \quad (7-10)$$

由式 (7-9) 和 (7-10) 得到

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^{*T} Q x^* + u^{*T} R u^*] dt = \frac{1}{2} x^T(t_0) \hat{P} x(t_0)$$



## 定理7-2的证明

(2) 证明  $u^*(t) = -R^{-1}B^T \hat{P}x(t)$  是最优控制。

反设  $u^*$  不是最优控制, 则存在  $u_1(t)$  使得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x_1^T Q x_1 + u_1^T R u_1] dt &< \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x^{*T} Q x^* + u^{*T} R u^*] dt \\ &= \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^{*T} Q x^* + u^{*T} R u^*] dt = \frac{1}{2} x^T(t_0) \hat{P} x(t_0) \\ &= \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} x^T(t_0) P(t_0, t_f) x(t_0) \end{aligned}$$

式中  $x_1(t)$  是  $u_1(t)$  的相应的轨线。



## 定理7-2的证明

另一方面

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x_1^T Q x_1 + u_1^T R u_1] dt = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x_1^T Q x_1 + u_1^T R u_1] dt$$

因此上面的不等式化为

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x_1^T Q x_1 + u_1^T R u_1] dt < \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} x^T(t_0) P(t_0, t_f) x(t_0)$$

于是对充分大  $t_f$  的成立不等式

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x_1^T Q x_1 + u_1^T R u_1] dt < \frac{1}{2} x^T(t_0) P(t_0, t_f) x(t_0)$$

这与定理7-1矛盾。

因此  $u^*(t) = -R^{-1} B^T \hat{P} x(t)$  给出问题的是最优解。



## § 7.3.2 闭环系统的稳定性

- **定理6-3** 定理7-2中得到的闭环系统

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T \hat{P})x$$

是渐近稳定的。

**证明** 用李雅谱诺夫第二方法，取  $V(x) = x^T(t) \hat{P} x(t)$ 。因为  $\hat{P}$  是正定矩阵， $V(x) > 0$ 。它的时间导数

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{x}^T \hat{P} x(t) + x^T(t) \hat{P} \dot{x} = [(A - BR^{-1}B^T \hat{P})x]^T \hat{P} x + x^T \hat{P} [A - BR^{-1}B^T \hat{P}]x \\ &= x^T [A^T \hat{P} - \hat{P} B R^{-1} B^T \hat{P} + \hat{P} A - \hat{P} B R^{-1} B^T \hat{P}] x = -x^T Q x - x^T \hat{P} B R^{-1} B^T \hat{P} x < 0 \end{aligned}$$

由于定理7-2中假设了  $Q$ 、 $R$  为正定矩阵，因此上式右端  $> 0$ ，即  $\frac{dV}{dt} < 0$ ，因此闭环系统渐近稳定。

**定理7-4** 如果  $Q$  为半正定矩阵，并且  $Q = C^T C$ ， $(C, A)$ 能观测，则闭环系统

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T \hat{P})x$$

是渐近稳定的。

**证明** 同定理7-3的证明，取  $V(x) = x^T(t) \hat{P} x(t)$ 。因为  $\hat{P}$  是正定矩阵。它的时间导数

$$\dot{V} = -x^T Q x - x^T \hat{P} B R^{-1} B^T \hat{P} x \leq 0$$

由关于稳定性的定理，如果再证明：沿着从原点以外出发的解  $\frac{dV}{dt}$  不恒为 0，那么由定理2-4闭环系统就是渐近稳定的。



下面用反证法，设从某个  $x(t_0) \neq 0$  出发的使得  $\dot{V} \equiv 0$ ，那么由上式必须

$$x^T Q x \equiv 0 \qquad x^T \hat{P} B R^{-1} B^T \hat{P} x \equiv 0$$

由后者可以推出

$$B^T \hat{P} x \equiv 0 \quad u(t) = -R^{-1} B^T \hat{P} x(t) \equiv 0 \quad x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0)$$

由  $x^T Q x \equiv 0$  又导出

$$x^T(t_0) e^{A^T(t-t_0)} C^T C e^{A(t-t_0)} x(t_0) \equiv 0$$

即  $C e^{A(t-t_0)} x(t_0) \equiv 0$ ，与  $(C, A)$  能观测矛盾，定理证完。

定理7-3和定理7-4表明，在一定条件下，尽管原来的系统开环可能是不稳定的，用本节设计的反馈得到的闭环系统一定是渐近稳定的。



## § 7.3.3 代数里卡蒂方程的解法

非时变调节器问题的求解最终化为求解代数里卡蒂方程 (7-7) 的问题，它是一个非线性代数方程组。对里卡蒂方程的研究已经引起广泛的重视，人们已经提出了多种解法，这里介绍代数里卡蒂方程最常用的3种解法。

### (1) 直接解非线性代数方程组

关于直接解非线性代数方程组的方法，仅用以下例子说明。

**【例7-3】** 已给系统的状态方程为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

目标函数

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x_1^2 + 2bx_1x_2 + ax_2^2 + u^2] dt$$

式中  $a - b^2 > 0, b > 0$ ，求  $u$  使  $J(u)$  最小。



解 对这个问题

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix} \quad R = 1$$

显然  $(A, B)$  能控,  $Q$ 、 $R$  正定。由解式  $u^*(t) = -R^{-1}B^T \hat{P}x(t)$

$$u^*(t) = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -(P_{12}x_1(t) + P_{22}x_2(t))$$

代数里卡蒂方程为

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## § 7.3.3 代数里卡蒂方程的解法

由此得到

$$\begin{cases} -p_{12}^2 + 1 = 0 \\ p_{11} - p_{12}p_{22} + b = 0 \\ -2p_{12} + p_{22}^2 - a = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} p_{12} = \pm 1 \\ p_{22} = \pm \sqrt{a + 2p_{12}} \\ p_{11} = p_{12}p_{22} - b \end{cases}$$

由于要求代数里卡蒂方程的解为正定矩阵，所以选  $p_{11} > 0, p_{22} > 0$ ，再由  $b > 0$  的假设，及  $p_{11} = p_{12}p_{22} - b$ 。

得到  $p_{12} > 0$ ，因此  $p_{12} = 1$ 。由此得到  $p_{22} = \sqrt{a + 2}$ 。于是得到最优控制

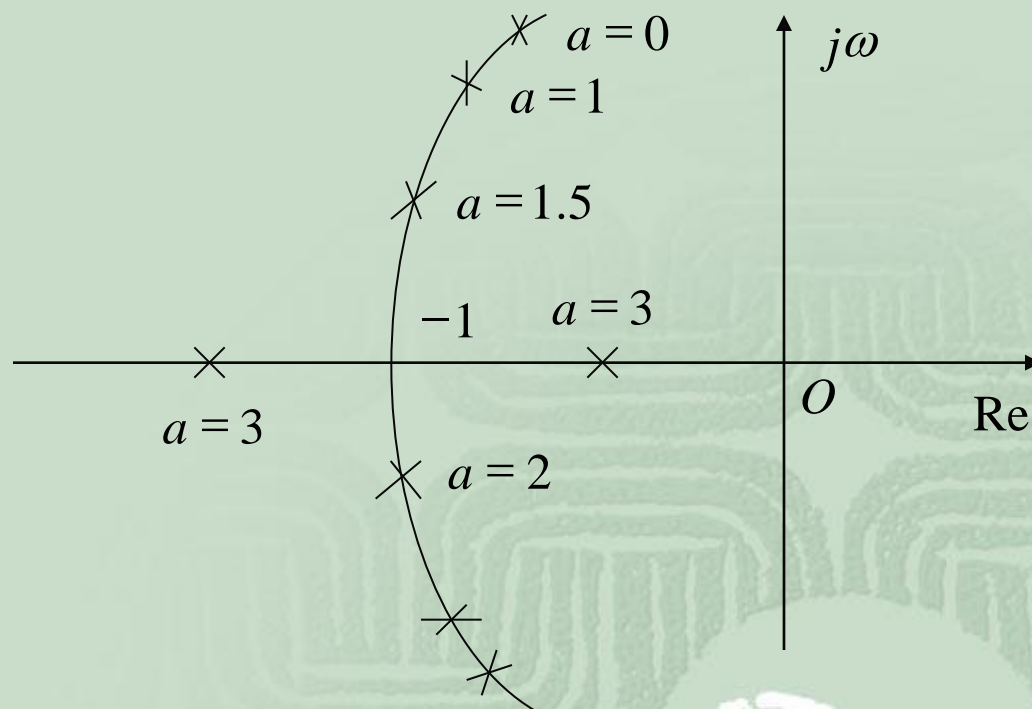
$$u^*(t) = -x_1(t) - \sqrt{a + 2}x_2(t)$$

应用最优控制时得到闭环系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{a+2} \end{bmatrix} x \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

闭环系统的特征值为

$$\lambda = -\frac{\sqrt{a+2}}{2} \pm \frac{\sqrt{a-2}}{2}$$



例7-3系统的闭环极点

当  $a=0$  时，闭环极点位于  $s_{1,2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm j\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，在经典控制论中，这相当于阻尼比  $\xi=0.707$  的振荡二阶系统；而在现代控制论中，这相当于在性能指标  $J$  中对信号  $x_2(t)$ （输出的导数）不加权。当  $a$  增大时，最优系统的极点分布向实轴接近，总的效果是系统响应的振荡减小，动作迟缓；当  $a > 2$  时，最优系统的两个极点位于负实轴上，系统响应的振荡增大。

这是一个二阶系统的例，里卡蒂方程是包含3个非线性方程的方程组。除了  $n \leq 3$  的低阶系统和一些极特殊的高阶系统外，一般解非线性代数方程组都要用数值方法。



## (2) 求里卡蒂微分方程的稳态解

由引理7-4

$$\hat{P} = \lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t, t_f) = \lim_{t \rightarrow -\infty} P(t, t_f)$$

因此可以用数值方法解微分方程的初问题

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q \\ P(0) = 0 \end{cases}$$

由  $t = 0$  向  $t \rightarrow -\infty$  方向求解，得到稳态解即  $\hat{P}$ 。





### (3) 哈密顿矩阵法

定常线性系统在最优控制  $u^*(t) = -R^{-1}B^T \hat{P}x(t)$  作用下得到闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BR^{-1}B^T \hat{P})x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

设  $\lambda$  是闭环系统矩阵  $A - BR^{-1}B^T \hat{P}$  的特征值,  $\eta$  是相应的特征向量。因此成立关系式

$$\lambda \eta = (A - BR^{-1}B^T \hat{P})\eta \quad (7-11)$$

哈密顿矩阵法是构造一个哈密顿矩阵  $H$ , 一个  $2n$  阶方阵, 使它的  $n$  个特征值为  $n$  阶方阵  $A - BR^{-1}B^T \hat{P}$  的特征值, 它的另外  $n$  个特征值为  $n$  阶方阵  $-(A - BR^{-1}B^T \hat{P})$  的特征值  $\{-\lambda_1, \dots, -\lambda_n\}$ 。

# 哈密顿矩阵法求代数里卡蒂方程

这样的哈密顿矩阵  $H$ ，可以按以下方法产生：

令  $\xi = \hat{P}\eta$ ，式 (7-11) 化为

$$\lambda\eta = A\eta - BR^{-1}B^T\xi \quad \longrightarrow \quad \lambda\hat{P}^{-1}\xi = A\eta - BR^{-1}B^T\hat{P}\eta$$

$$\longrightarrow \lambda\xi = (\hat{P}A - \hat{P}BR^{-1}B^T\hat{P})\eta$$

由代数里卡蒂方程，上式又可化为

$$\lambda\xi = (-Q - A\hat{P})\eta = -Q\eta - A^T\xi$$

由  $\lambda\eta$  和  $\lambda\xi$  的两个表示式得到

$$\lambda \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

$H$  就是要求的哈密顿矩阵。

# 哈密顿矩阵法求代数里卡蒂方程

为了说明  $H$  就是要求的哈密顿矩阵，分析它的特征值，为此令

$$T = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \hat{P} & I_n \end{bmatrix}$$

对  $H$  做变换

$$\begin{aligned} T^{-1}HT &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -\hat{P} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \hat{P} & I_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T \hat{P} & -BR^{-1}B^T \\ -Q - A^T \hat{P} - \hat{P}A + \hat{P}BR^{-1}B^T \hat{P} & -(A - BR^{-1}B^T \hat{P})^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T \hat{P} & -BR^{-1}B^T \\ 0 & -(A - BR^{-1}B^T \hat{P})^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$



# 哈密顿矩阵法求代数里卡蒂方程

这表明矩阵  $H$  的特征值

$$\begin{aligned}\sigma(H) &= \sigma(A - BR^{-1}B^T \hat{P}) \cup \sigma(-(A - BR^{-1}B^T \hat{P})^T) \\ &= \sigma(A - BR^{-1}B^T \hat{P}) \cup \sigma(-(A - BR^{-1}B^T \hat{P}))\end{aligned}$$

即对  $A - BR^{-1}B^T \hat{P}$  的每个特征值  $\lambda$ ，哈密顿矩阵有一对特征值： $\lambda$  和  $-\lambda$

现假设哈密顿矩阵有不同的特征值，导出代数里卡蒂方程的解。

设  $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$  表示它的有负实部的特征值。

用  $-\lambda_i (i = 1, \dots, n)$  表示它的另外  $n$  个特征值。

用  $\begin{bmatrix} \eta_i \\ \xi_i \end{bmatrix}$  表示哈密顿矩阵  $H$  对应特征值  $\lambda_i$  的特征向量。



# 哈密顿矩阵法求代数里卡蒂方程

令

$$V_1 = [\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_n] \quad V_2 = [\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n]$$

由于  $\xi_i = \hat{P}\eta_i$  于是有

$$\hat{P}V_1 = V_2$$

又由于  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  是闭环系统的不同的特征值,  $\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_n$  是相应的特征向量, 因此  $V_1$  可逆, 于是由上式解得

$$\hat{P} = V_2 V_1^{-1}$$

这就得到了代数里卡蒂方程的解。



# 哈密顿矩阵法求代数里卡蒂方程的解的步骤:

- 第一步 构造哈密顿矩阵 
$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$
- 第二步 求闭环系统的（也是  $H$  的） $n$  个不同的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  和  $H$  的与它们相应的  $n$  个特征向量记为

$$\begin{bmatrix} \eta_i \\ \xi_i \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, n$$

记  $V_1 = [\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_n]$        $V_2 = [\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n]$

- 第三步 计算  $\hat{P} = V_2 V_1^{-1}$   
即所求代数里卡蒂方程的解。





## § 7.3.4 设计非时变状态调节器 MATLAB程序

- **【例7-4】** 考虑非时变状态调节器问题

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + u^2] dt \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

得到非时变控制器为  $u^*(t) = -R^{-1}B^T \hat{P}x(t)$ ，式中  $\hat{P}$  是代数里卡蒂方程的解。

## § 7.3.4 利用哈密顿矩阵法求解上述问题的MATLAB程序

- 下面是解代数里卡蒂方程的MATLAB程序：

```
A=[0 1;0 0];
B=[0;1];
Q=[1 1;1 3];
R=1;
H=[A -B*inv(R)*B';-Q -A'];
[X,D]=eig(H);
j=1;
for i=1:rank(H)
    if real(D(i,i)) < 0
        temp(:,j)=X(:,i);
        j=j+1;
    end
end
```

```
j=j-1;
for i=1:j
    v1(i,:)=temp(i,:);
    t=i+j;
    v2(i,:)=temp(t,:);
end
p=v2*(inv(v1))
```

运行结果：

```
p =
    1.2361    1.0000
    1.0000    2.2361
```

## § 7.3.5 非时变状态调节器的频率特性

### ■ 1. 最优性的频率条件

为了进一步研究非时变状态调节器，对单输入的情况导出最优性的频率条件及最优控制系统的增益裕度和相位裕度。

单输入非时变状态调节器问题的状态方程和目标函数为

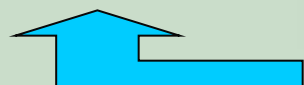
$$\dot{x} = Ax + bu \quad J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x^T Q x + r u^2] dt$$

假设  $(A, b)$  能控， $Q$  为正定矩阵（或者  $Q$  为半正定矩阵，

$Q = C^T C$ ,  $(C, A)$  能观测）， $r > 0$ ，则最优控制为

$$u^* = -\frac{1}{r} b^T \hat{P} x(t) = -k^T x(t) \quad k^T = \frac{1}{r} b^T \hat{P}$$

式中  $\hat{P}$  是代数里卡蒂方程的正定解。



$$-\hat{P}A - A^T \hat{P} + \hat{P}B \frac{1}{r} B^T \hat{P} - Q = 0$$



## § 7.4 跟踪问题

——有限时间时变输出跟踪系统

### ■ 跟踪问题

要求系统的输出尽量接近所希望的轨线（理想输出），并使某种性能指标最小。

此种问题也可称为**最优跟踪问题**。

### ■ 调节器问题——零轨线的跟踪问题



# 跟踪问题

## ■ 问题的数学表述

已知线性受控系统其状态方程和输出方程为

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (x(t_0) \text{已知}) \quad (7-12)$$

$$y = C(t)x \quad (7-13)$$

$y$  是  $r$  维输出向量，各矩阵有适当维数，假定  $[C, A]$  完全能观  
求一最优控制  $u^*(t)$  使受控系统的输出  $y(t)$  跟踪预期的轨线  $y^d(t)$   
且使如下的性能指标最小：

$$J(u) = \frac{1}{2} [y(t_f) - y^d(t_f)]^T F [y(t_f) - y^d(t_f)] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{ [y(t) - y^d(t)]^T Q(t) [y(t) - y^d(t)] + u^T R u \} dt \quad (7-14)$$

对控制幅度的限制

非负定对称阵  
体现跟踪误差小的要求

正定对称阵

# 跟踪问题

- 构造最优跟踪问题的哈密顿函数:

$$H = \frac{1}{2}[C(t)x - y^d(t)]^T Q(t)[C(t)x - y^d(t)] + \frac{1}{2}u^T R u + \lambda^T [A(t)x + B(t)u] \quad (7-15)$$

由于  $u$  不受约束, 则由极值条件

$$\frac{\partial H}{\partial u} = R(t)u + B^T(t)\lambda = 0 \quad \longrightarrow \quad u = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t) \quad (7-16)$$

将上述  $u(t)$  代入状态方程7-12, 并由协状态方程, 得如下正则方程

$$\dot{x} = A(t)x - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda \quad (7-17)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -C^T(t)Q(t)[C(t)x - y^d(t)] - A^T(t)\lambda \quad (7-18)$$

其边界条件为

$$x(t_0) = x_0$$

$$\lambda(t_f) = C^T(t_f)FC(t_f)x(t_f) - C^T(t_f)Fy^d(t_f) \quad (7-19)$$



# 跟踪问题

考虑到  $\lambda(t)$  和  $x(t)$  满足线性微分方程，末态时刻  $\lambda(t_f)$  又有(7-19)

形式的关系，不妨设  $\lambda(t) = P(t)x(t) - \xi(t)$  (7-20)

将上式两边求导，并由以上各式可得

$$\begin{aligned} & [\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + C^T(t)Q(t)C(t)]x(t) \\ & + [-\dot{\xi}(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\xi(t) - A^T(t)\xi(t) - C^T(t)Q(t)y^d(t)] = 0 \end{aligned} \quad (7-21)$$

只要最优解存在，上式对状态空间的  $x$  任意成立，由此可得如下结论：

$P(t)$  是如下的黎卡提方程的终值问题的解

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + C^T(t)Q(t)C(t) = 0$$

$$P(t_f) = C^T(t_f)FC(t_f)$$

# 跟踪问题

$\xi(t)$ 是如下的向量微分方程的终值问题的解——伴随向量

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= -[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)]^T \xi(t) - C^T(t)Q(t)y^d(t) \\ \xi(t_f) &= C^T(t_f)Fy^d(t_f)\end{aligned}$$

由上述分析可得最优跟踪问题的如下结论：

最优跟踪问题的最优控制唯一存在，并具有如下形式

$$u^* = -R^{-1}(t)B^T(t)[P(t)x(t) - \xi(t)]$$

其中  $P(t)$  和  $\xi(t)$  由以上两个微分方程给出

最优控制轨线是如下线性微分方程且满足初始条件的解

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - BR^{-1}B^T P(t))x(t) + BR^{-1}B^T \xi(t) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$



# 跟踪问题的几点说明

- (1) 控制律由两部构成，即  $R^{-1}B^T P(t)x(t)$  和  $R^{-1}B^T \xi(t)$ 。如图所示，前者是状态的线性反馈，它构成最优跟踪系统的闭环部分，后者可以看成是系统的外部控制输入（前馈控制项）。

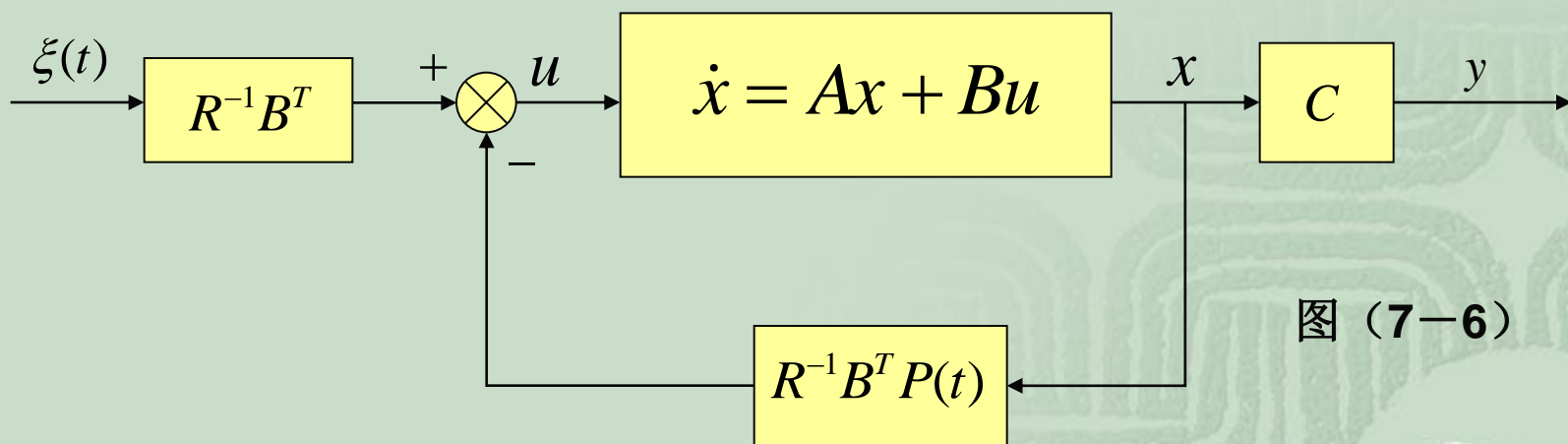


图 (7-6)

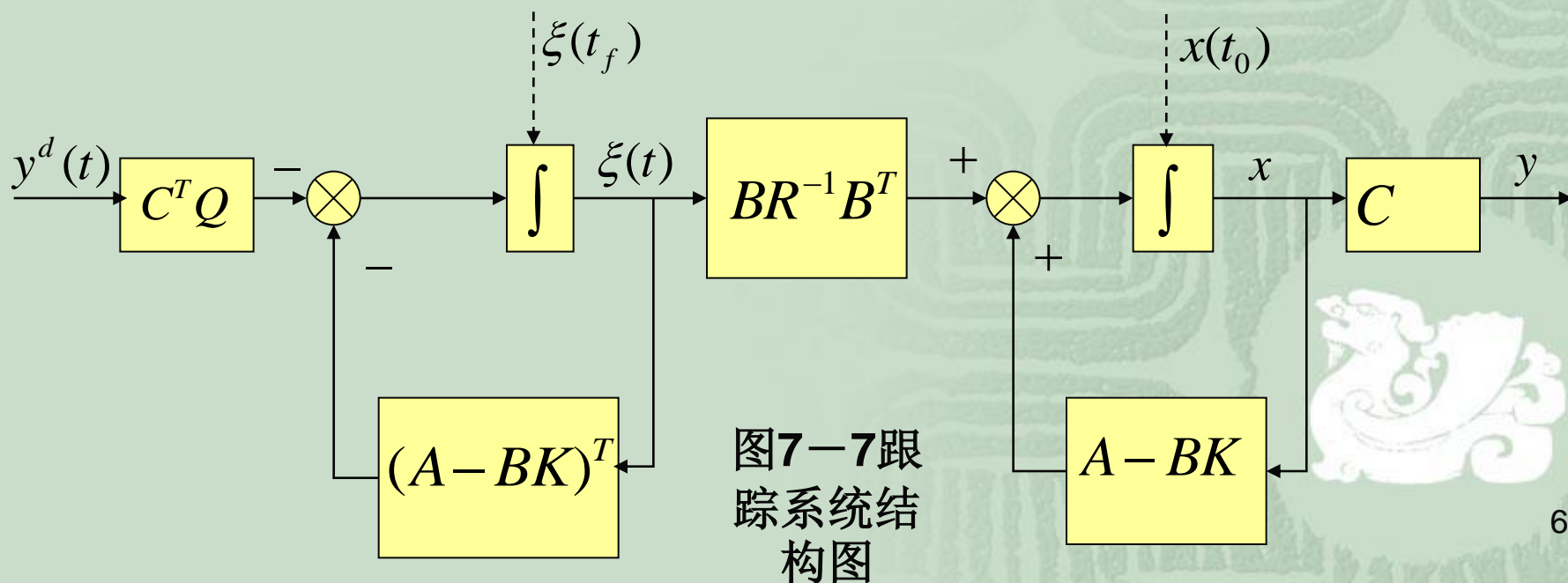
黎卡提方程的解矩阵  $P(t)$  只与矩阵  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $F$  以及末端时刻  $t_f$  有关，受控系统、性能指标及末端时间一旦确定，时变矩阵  $P(t)$  便是已知的，它与预期输出  $y^d(t)$  无关。

# 跟踪问题的几点说明

(2) 考察求解  $\xi(t)$  的微分方程可知，其齐次部分与闭环系统的微分方程的齐次部分的矩阵存在负的转置关系， $\xi(t)$  的微分方程表示的系统是闭环系统的伴随系统。

$\xi(t)$ ——看成是图7-7所示动态系统的输出

$P(t)$  确定之后，该动态系统的结构也如图所示



# 跟踪问题的几点说明

(3) 从形式上看，最优跟踪系统结构及参数均与  $y^d(t)$  无关。  
实际上，为了计算  $\xi(t)$  的当前值，尚须知道  $y^d(t)$  全部未来值，即整个预期输出函数  $y^d(t)$  必须事先知道。

$$\dot{\xi} = -[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)]\xi(t) - C^T(t)Q(t)y^d(t)$$

由此可见，实现最优跟踪，不仅要知道全部状态信息  $x(t)$ ，而且还要掌握全部外部输入信息  $y^d(t)$ 。

如，控制雷达天线跟踪人造地球卫星，假定该卫星运行在一个稳定的轨道上；又比如跟踪一飞行目标，该目标的整个飞行轨道虽不预先知道，但在一段时间内的运动轨迹可以测量并推算出来。

这里可以看到，实现最优控制要知道全部信息。

注：本节讨论的方法只适用于  $y^d(t)$  已知的情况，对象“随动系统”这类目标轨迹并不知道的问题，无法使用本节提供的方法

## § 7.5 带有观测器的最优调节器

对线性调节器问题，状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

目标函数为

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

最优控制

$$u = -Kx \quad K = R^{-1} B^T P$$

是状态的反馈，式中  $P$  为里卡蒂方程的对称正定解。当不是所有状态变量都能用作反馈时，可设计观测器，估计系统的状态。



# 带有观测器的最优调节器

设系统的输出方程为：

$$y = Cx$$

那么观测器为：

$$\dot{z} = (A + GC)z + Bu - Gy$$

当系统有外输入  $v$  时，考虑由反馈  $u = -Kx + v$  得到的闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ \dot{z} = (A + GC)z + Bu - Gy \\ u = -Kz + v \end{cases}$$

问题1：带有观测器的最优调节器的极点是什么？

问题2：带有观测器的最优调节器的传递函数阵？



# 带有观测器的最优调节器

闭环系统的增广的状态方程与式（3-33）相同，为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -GC & A + GC - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v \\ y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{cases}$$

经变换

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix}$$



# 带有观测器的最优调节器的极点

系统矩阵和输入矩阵化为：

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & BK \\ -GC & A+GC-BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A+GC \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = [C \quad 0] \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} = [C \quad 0]$$

由此得到带有观测器的最优调节器的极点集为  $(A+BK)$  的极点集与  $(A+GC)$  的极点集的并。

# 带有观测器的最优调节器的传递函数阵

下面看传递函数阵

$$\begin{aligned}\bar{G}(s) &= \bar{C}(sI - A)^{-1}\bar{B} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - (A - BK) & -BK \\ 0 & sI - (A + GC) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= C(sI - (A - BK))^{-1}B\end{aligned}$$

即带观测器的最优调节器与原最优调节器有相同的传递函数阵。

综合以上讨论得到如下结论：

- (1) 带有观测器的最优调节器的极点集合由调节器的极点与观测器的极点构成。
- (2) 带有观测器的最优调节器与不带观测器的最优调节器有相同的传递函数阵，对研究输入输出关系来讲两者是相同的。