练习

(第三章 第一部分)

1. 已知向量 $\alpha_1^T = (1,1,1), \alpha_2^T = (1,2,3), \alpha_3^T = (1,3,t)$

（1）t 为何值时，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 ？

（2）t 为何值时，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关 ？

（3）当$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关时，用α_1, α_2 线性表示α_3.

2. 设向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，向量组$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关，问：

（1） α_1能否用α_2, α_3 线性表示 ？证明你的结论

（2） α_4能否由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示？证明你的结论

3. 设向量β 可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性表示，但是不能由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$线性表示. 证明$\alpha_m$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta$ 线性表示.

4. 证明向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ （其中$\alpha_1 \neq 0$， $s>1$）线性相关的充要条件是至少有一个$\alpha_i(1<i\leq s)$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$线性表示.

5. 设$t_1, t_2, \cdots, t_s$是互不相同的实数，向量$\alpha_i = (1, t_i, t_i^2, \cdots, t_i^{n-1})^T$ $(i=1,2,\cdots,s)$, 试讨论向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的线性相关性.

【课本习题11，有所不同需要讨论】

6. 已知向量组A: $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ 的秩为r，并且它可由其一个部分组B $\{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir}\}$ 线性表示。

证明：向量组B是向量组A的一个极大线性无关组.

参 考 答 案

1. 已知向量 $\alpha_1^T=(1,1,1),\alpha_2^T=(1,2,3),\alpha_3^T=(1,3,t)$

（1）t 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 ？

（2）t 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关 ？

（3）当$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关时，用α_1,α_2 线性表示α_3.

解：令矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 对$A$进行一系列的初等行变换，将它化成行阶梯型矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&1&t-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&t-5\end{pmatrix}=B. \qquad R(A)=R(B)$$

(1)当$R(A)=3$时，向量组线性无关，此时$t\neq 5$.

(2)当$R(A)<3$时，向量组线性相关，此时$t=5$.

(3)当$t=5$时，

$$A \to B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A的列向量组与B的列向量组有相同的线性关系

所以 $\alpha_3 = 2\alpha_2 - \alpha_1$

2. 设向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，向量组$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关，问：

（1） α_1能否用α_2, α_3 线性表示 ？证明你的结论

（2） α_4能否由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示？证明你的结论

解：(1) 因为向量组$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，所以α_2, α_3线性无关，又向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，所以α_1能用α_2, α_3 线性表示.

(2) α_4 不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 否则，设

$$\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$$

由(1)知α_1能用α_2, α_3 线性表示. 设 $\alpha_1 = l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3$

则有 $\alpha_4 = k_1(l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3) + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$

即：$\alpha_4 = (k_1 l_2 + k_2)\alpha_2 + (k_1 l_3 + k_3)\alpha_3$

则α_4 可由α_2, α_3线性表出，于是$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关，这与题设矛盾. 所以，α_4 不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

3. 设向量β 可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性表示，但是不能由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$线性表示. 证明$\alpha_m$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta$ 线性表示.

证明：向量β 可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性表示, 设

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m \qquad (1)$$

若$k_m=0$, 则(1)式化为

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1}$$

这表示向量β可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$线性表示与给定条件矛盾. 故(1)式中必有$k_m\neq 0$, 从而

$$\alpha_m = -\frac{k_1}{k_m}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_m}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{m-1}}{k_m}\alpha_{m-1} + \frac{1}{k_m}\beta$$

即α_m可以由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta$ 线性表示.

4. 证明向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ （其中$\alpha_1 \neq 0$， $s>1$）线性相关的充要条件是至少有一个$\alpha_i\,(1<i\le s)$可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$线性表示.

证明：必要性. 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关, 则有不全为0的数 $k_1, k_2, \ldots, k_s$， 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \qquad (1)$$

在$k_1, k_2, \ldots, k_s$中找最后一个不为0的数k_i. 即

$k_i \neq 0$，而$k_{i+1}=\ldots=k_s=0$，

显然$i>1$. 否则，若i=1则(1)化为 $k_1\alpha_1=0$， 且$k_1 \neq 0$

故只能$\alpha_1=0$. 这与$\alpha_1\neq 0$矛盾.

因此(1)化为 $\alpha_i = -\dfrac{k_1}{k_i}\alpha_1 - \dfrac{k_2}{k_i}\alpha_2 + \cdots - \dfrac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1}$

即至少有一个$\alpha_i\,(1<i\le s)$可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$线性表示.

充分性，如果有一个 $\alpha_i (1 < i \le s)$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i\text{-}1}$ 线性表示，则α_i可由其余s−1个向量线性表出，因此向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关。

5. 设$t_1,t_2,\cdots,t_s$是互不相同的实数，向量$\alpha_i=(1,t_i,t_i^2,\cdots,t_i^{n-1})^T$ $(i=1,2,\cdots,s)$，试讨论向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的线性相关性.

解：向量α_i 的维数是n，故当$s>n$时，向量组线性相关.

当$s\le n$时，令

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_s \\ t_1^2 & t_2^2 & \cdots & t_s^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \cdots & t_s^{n-1} \end{pmatrix}$$

A的前s行构成的s阶子式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_s \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_1^{s-1} & t_2^{s-1} & \cdots & t_s^{s-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le s}(t_j-t_i)\ne 0.$$(因$t_1,t_2,\ldots,t_s$互不相同)

故其列向量组线性无关，从而其加长向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关.

6. 已知向量组A: $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 的秩为r，并且它可由其一个部分组B $\{\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}\}$ 线性表示。

证明：向量组B是向量组A的一个极大线性无关组

证明：(要证明B是A的极大无关组，需两个条件，

第一，A可以由B线性表示。（已经满足）

第二，B是线性无关向量组。)

假设向量组B的秩m小于r，其一个极大无关组为B1(含有m个向量). 由于向量组A可由B线性表示，而向量组B可由B1线性表示，故向量组A可由线性无关向量组B1线性表示，从而向量组B1为A的极大无关组，这与向量组A的秩为r矛盾．因此m=r，即向量组B的秩为r。

向量组B的秩为r，且有r个向量，所以向量组B线性无关.

所以，向量组B是A的一个极大线性无关组.

6. 已知向量组A：$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 的秩为r，并且它可由其一个部分组B $\{\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}\}$ 线性表示。

证明：向量组B是向量组A的一个极大线性无关组

证明2：

设向量组A1是A的某极大无关组(含r个向量)，向量组B1是B的某极大无关组，则向量组A1可由A线性表示，向量组B1可由B线性表示。同时向量组A可由B线性表示，故线性无关向量组A1可由B1线性表示，故r<=向量组B1中向量个数<=r，从而向量组B1中必有r个向量，即向量组B的秩为r。

向量组B的秩为r，且有r个向量，所以向量组B线性无关.

所以，向量组B是A的一个极大线性无关组.