第二章 矩阵代数

本章主要内容

* 矩阵概念及运算：加法、数乘、乘法
* 逆矩阵及求取
* 矩阵的初等变换
* 分块矩阵

第一节 矩阵的概念

一、（矩阵概念的）引入

1. 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的解取决于

系数 $a_{ij}\,(i, j = 1, 2, \cdots, n)$,

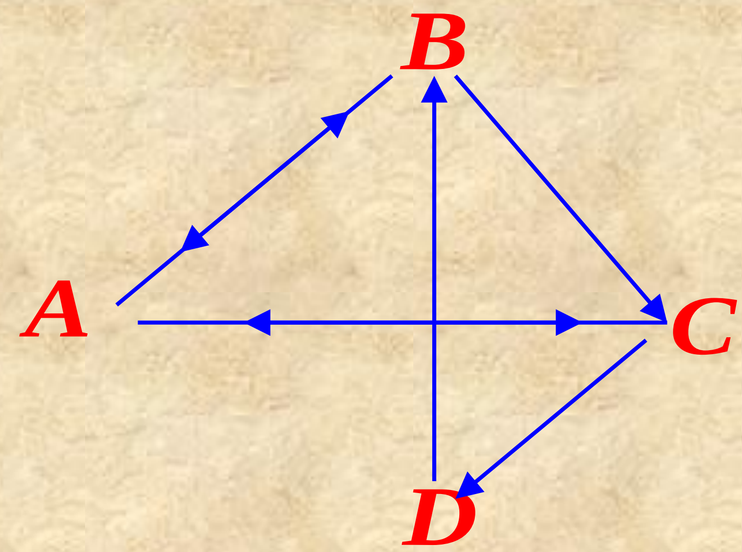
常数项 $b_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$.

线性方程组的系数与常数项按原位置可排为

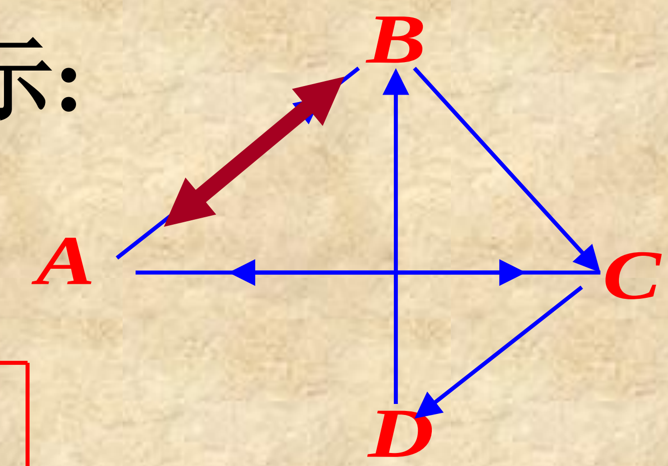
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} \end{pmatrix}$$

对线性方程组的研究可转化为对这张表的研究.

2. 某航空公司在A,B,C,D四城市之间开辟了若干航线 ,如图所示，它表示了四城市间的航班图：如果从A到B有航班，则用带箭头的线连接 A 与B.



四城市间的航班图情况常用表格来表示:



到站

发站

	A	B	C	D
A		√	√	
B	√		√	
C	√			√
D		√		

其中 √ 表示有航班.

为便于计算，把表中的 √ 改成1，空白地方填上0，就得到一个数表:

	A	B	C	D
A		✓	✓	
B	✓		✓	
C	✓			✓
D		✓		

0	1	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

该数表反映了四城市间交通联接情况.

二、矩阵的定义

定义1 由mn个(实或复)数 a_{ij} $(i=1,2,\Lambda\ ,m;\ j=1,2,\Lambda\ ,n)$ 排成m行n列的**阵式**(**矩形表**)，称为$m\times n$矩阵，简称**矩阵**，记为：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

数 a_{ij} 称为矩阵的**元**(**元素**).

表示：大写字母A, B, …,

或 $A=(a_{ij})$, $(a_{ij})_{mn}$, $(a_{ij})_{m\times n}$等.

分类： 元是实数的矩阵称为**实矩阵**.

元是复数的矩阵称为**复矩阵**.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是一个 2×4 实矩阵,

$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个 3×3 复矩阵,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是一个 3×1 矩阵, (4) 是一个 1×1 矩阵,

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ 是一个 1×4 矩阵.

几种特殊矩阵

(1) 行数与列数都等于n的矩阵A，称为n阶**方阵**.
也记作A_n.

例如 $\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个3 阶方阵.

(2) $1\times n$矩阵 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 被称为**行矩阵**
(或**[n维]行向量**).

$n\times 1$矩阵 $B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 被称为**列矩阵**(或**[n维]列向量**).

说明：

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n) \qquad B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

n维行向量和n维列向量统称为**n维向量**，它们的元称为**分量**。

注：在具体场合下，n维向量是指行向量还是列向量将**由上下文来确定**。 如果二者皆可，为书写方便，本书常写成**行**向量的形式。

在多数文献资料中向量一般默认为列向量.

不全为0

（3）形如 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 的方阵，称为**对角矩阵**（或**对角阵**）.

记作 $A=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

（4）元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，$m\times n$零矩阵记作$O_{m\times n}$ 或O .

注意 不同阶数的零矩阵是不相等的.

例如
$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\neq(0\quad 0\quad 0\quad 0).$$

(5)方阵

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & 1 \end{pmatrix}$$

全为1

称为**单位矩阵**（或**单位阵**）.

有的书上也记为I, I_n.

几个概念

(1) 两个矩阵的行数列数分别相等时, 称为**同型矩阵**.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵.

(2) 两个矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 为**同型**矩阵,并且**对应元相等**, 即

$$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称**矩阵 A 与 B 相等**, 记作 $A=B$.

例　设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & x & 3\\ y & 1 & z\end{pmatrix},$$

已知 $A=B$,求 x, y, z.

解: $\because A=B$,

$\therefore x=2,\ y=3,\ z=2.$

(3) 设阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$, 则矩阵$(-a_{ij})_{m\times n}$称为A的**负矩阵**, 记为 $-A$.

另外，对于前面的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

定义

系数矩阵　　常数列矩阵　　增广矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = (A, b)$$

注:有的书上用 $\overline{A}$ 表示增广矩阵.

小结

(1)矩阵的概念　　m行n列的一个数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) 特殊矩阵
- 方阵 $(m = n)$;
- 行矩阵与列矩阵; $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$;
- 单位矩阵; $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$;
- 对角矩阵; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$.
- 零矩阵.

(3) 一些概念: 同型矩阵、矩阵相等、负矩阵等.

思考题

矩阵与行列式的有何区别?

思考题解答

矩阵与行列式有本质的区别

① 行列式是一个算式，一个数字行列式经过计算可求得其值，而矩阵仅仅是一个数表.

② 矩阵的行数和列数可以不同，而行列式的行数和列数是相同的.

③ 矩阵相等有着严格的条件，而行列式相等只需行列式的计算结果相同即可，与行列式的阶数无关.