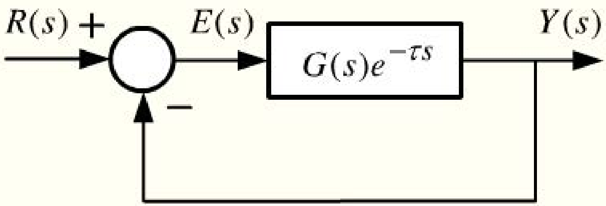
制作-罗家祥
审校-胥布工

5.4 根轨迹法的扩展应用

5.4.2 延迟系统的根轨迹



延迟系统开环传函：

$$G_L(s)=G(s)e^{-\tau s}=K_g\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{l=1}^{n}(s+p_l)}e^{-\tau s}\quad(5-38)$$

特征方程为：

$$\prod_{l=1}^{n}(s+p_l)+K_g\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)e^{-\tau s}=0\quad(5-39)$$

超越方程，将$s=\sigma+j\omega$代入$e^{-\tau s}$，得：

$$e^{-\tau s}=e^{-\tau(\sigma+j\omega)}=e^{-\tau\sigma}(\cos\tau\omega-j\sin\tau\omega)=e^{-\tau\sigma}\angle(-\tau\omega)\quad(5-40)$$

显然，解有无穷多个，有无穷多条根轨迹。

欧拉公式：$e^{jy}=\cos y+j\sin y$

5.4 根轨迹法的扩展应用

根轨迹方程：

$$K_g \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{l=1}^{n}(s+p_l)} e^{-\tau s} = -1 \quad (5-41)$$

1) 幅值条件

$$K_g \frac{\prod_{i=1}^{m}|s+z_i|}{\prod_{l=1}^{n}|s+p_l|} e^{-\tau\sigma} = 1 \quad (5-42)$$

2)相角条件：

$$\sum_{i=1}^{m}\angle(s+z_i) - \sum_{l=1}^{n}\angle(s+p_l) = \pm 180^\circ(2k+1) + \frac{180^\circ}{\pi}\tau\omega, \quad k=0,1,2,\cdots \quad (5-43)$$

例5-10 已知延迟系统的开环传递函数为 $G_L(s) = \dfrac{K_g}{s+2} e^{-\tau s}$

幅值条件： $\dfrac{K_g}{|s+2|} e^{-\sigma} = 1$

相角条件： $-\angle(s+2) = \pm 180^\circ(2k+1) + \dfrac{180^\circ}{\pi}\omega, \quad k=0,1,2,\cdots$

制作-罗家祥
审校-胥布工

5.4 根轨迹法的扩展应用

绘制延迟系统的根轨迹步骤如下：

$$\frac{1}{|s+2|e^{\sigma}}=\frac{1}{K_g}$$

(1) 根轨迹有无穷多条。

起点：实轴上的一个起点位于极点 -2处；

σ=-∞满足幅值条件，无穷多个**无穷远开环极点**；

终点：σ=+∞满足幅值条件，无穷多个**无穷远开环零点**；

(2) 实轴上，$\omega=0$，相角条件为：

$$-\angle(s+2)=\pm180^{\circ}(2k+1),\quad k=0,1,2,\cdots$$

实轴上的根轨迹：$(-\infty,-2]$

(3) 由幅值条件：$K_g\to\infty$，$\sigma\to\infty$，

根轨迹趋于无穷零点。ω有限值，

任何有限极点和零点到 无穷远的相角 为0.

$$\pm180^{\circ}(2k+1)+\frac{180^{\circ}}{\pi}\omega=0,\quad k=0,1,2,\cdots$$

有起始于无穷远极点和趋于无穷远零点的根轨迹的渐近线均为水平线，无穷远零点与虚轴的交点为

$$\omega=\mp(2k+1)\pi,\quad k=0,1,2,\cdots$$

5.4 根轨迹法的扩展应用

(4) 实轴上的根轨迹：$(-\infty,-2]$上必有分离点

$$N_L(s)=e^{-s},\quad D_L(s)=(s+2)$$

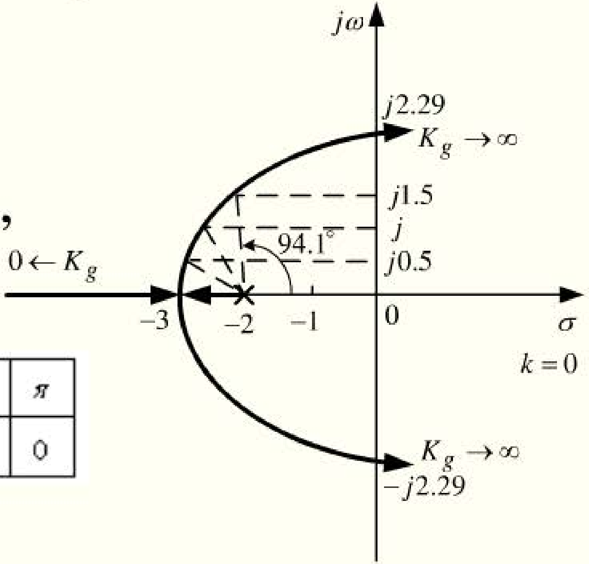
$$\frac{dN_L(s)}{ds}D_L(s)-N_L(s)\frac{dD_L(s)}{ds}=-e^{-s}(s+2)-e^{-s}=0$$

解得：$s=-3$，分离角为直角。

由相角条件：$\angle(s+2)=\pm180^\circ-\dfrac{180^\circ}{\pi}\omega,$

得出$\angle(s+2)$对ω的计算结果。

$\omega\,(rad\cdot s^{-1})$	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3	π
$\angle(s+2)\,(^\circ)$	180	151.4	122.7	94.1	65.4	36.8	8.1	0



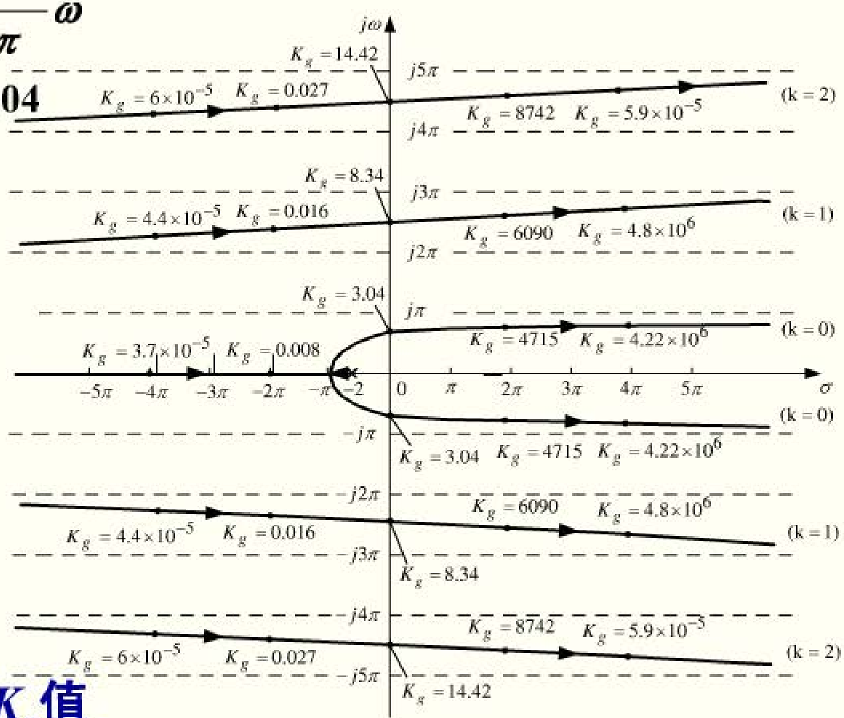
所对应的主根轨迹如图5-21

5.4 根轨迹法的扩展应用

（5）根轨迹与虚轴的交点可由关系式

$$\angle(j\omega+2)=\arctan\frac{\omega}{2}=180^\circ-\frac{180^\circ}{\pi}\omega$$

求得$\omega=2.29$，临界增益$K_g^*=3.04$



（6）*k*取不同数值时候的根轨迹作图方法与*k*=0类似，图5-22为*k*=0，1，2时相对完整的根轨迹。*k*≥1时，根轨迹起始于无穷而终止于无穷。*k*=0时，为主根轨迹，起主导作用。

由于延迟，保证系统稳定K_g值不能取得太大，本例K_g应小于3.04。