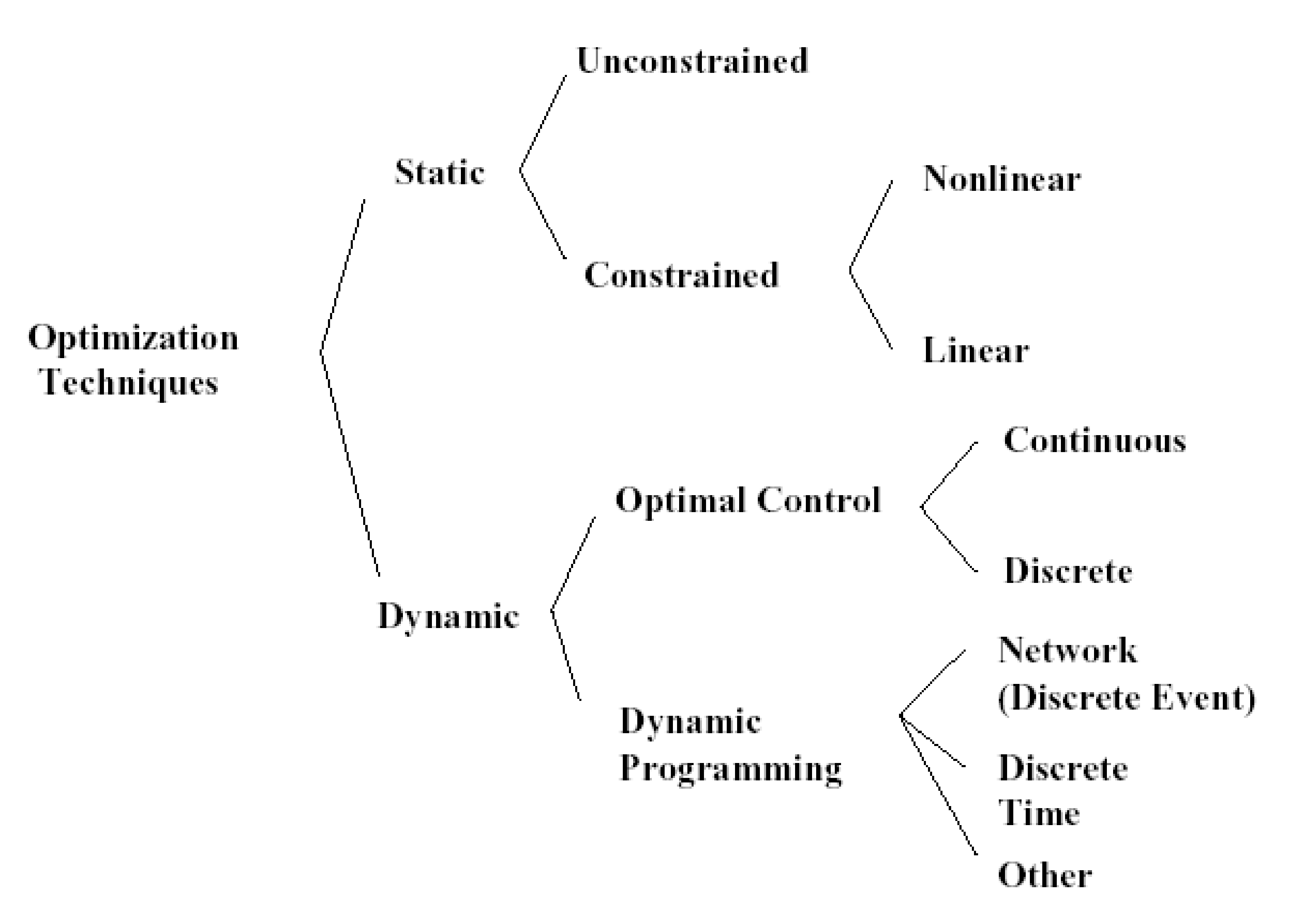
第六章 最优控制
(Optimal Control Methodology)

Taxonomy of Optimization
（最优化问题分类）



General Solution Approaches

- • **Lagrange Multipliers**
  – Relax difficult constraints
  – Derive necessary conditions
- • **Calculus of Variations**
  – Add perturbation on control
  – Derive necessary conditions
- • **Dynamic Programming**
  – n-stage optimization
  – Principle of Optimality

6.1最优控制问题

- 6.1.1　最优控制问题的提法
- 6.1.2　几种典型的最优控制问题
- 6.1.3　最优控制问题的实例

6.1.1　最优控制问题的提法

- 最优控制是现代控制理论的核心问题之一。

  恒温的自动控制系统、雷达高炮随动系统

- 最优控制研究的主要问题是：

  依据各种不同的控制对象和人们期望达到的目的而提出的性能指标来分析、设计在一定意义下的最优控制系统。

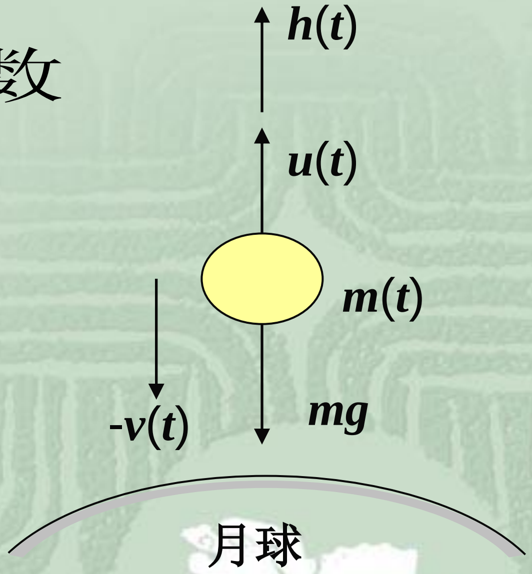
根据已建立的**被控对象的数学模型**，选择一个容许的**控制律**，使得被控对象按预定要求运行，并使给定的**某一个性能指标达到极小值**（或极大值）。

登月舱的燃耗最优控制

运动方程：$\dot{h}(t) = v(t)$

$$\dot{v}(t) = \frac{u(t)}{m(t)} - g$$

$$\dot{m}(t) = -ku(t),\ \ k\text{为正常数}$$



登月舱软着陆示意图

m(t)—登月舱质量

v(t)—登月舱垂直速度

h(t)—登月舱所在高度

u(t)—登月舱发动机推力

g—月球重力加速度

登月舱的燃耗最优控制（续）

h_0—登月舱登月时的初始高度　　v_0—初始垂直速度

m_0—登月舱初始质量

M—登月舱不含燃料时的质量　　F—登月舱所载燃料质量

t_f—登月舱发动机工作的末端时刻

边界条件：

初始条件：$h(0)=h_0, v(0)=v_0, m(0)=m_0=M+F$

末端条件：$h(t_f)=0, v(t_f)=0$

登月舱的燃耗最优控制（续）

控制约束：

$$0 \le u(t) \le u_{\max} \qquad u_{\max}—发动机最大推力$$

性能指标：

$$J = m(t_f) \quad 最大$$

最优控制任务是在满足控制约束条件下，寻求发动机推力的最优变化律$\boldsymbol{u}^*(t)$，使登月舱由已知初态转移到要求的末态，并使性能指标 J=$m(t_f)$=max, 从而使登月过程中燃料消耗量最小

实现最优控制的必备条件（1）

(1)　　系统数学模型

$$\dot{x}(t) = f\left[x(t), u(t), t\right], x(t_0) = x_0$$

$\mathbf{x}(t) \in R^n$——状态向量；

$\mathbf{u}(t) \in R^m$——控制向量，在$[t_0, t_f]$上分段连续；

$\boldsymbol{f}(\cdot) \in R^n$——连续向量函数，对 $\mathbf{x}(t)$ 和 t 连续可微。

(2)　　边界条件与目标集

- 边界条件：　初态 $\mathbf{x}(t_0)$，末态 $\mathbf{x}(t_f)$
- 对于末端时刻t_f，末端状态$\mathbf{x}(t_f)$是固定还是自由可由如下目标集加以概括：

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{\Psi}(\cdot) \in R^r$, 为连续可微向量函数，$r \leq n$。

实现最优控制的必备条件（2）

(3) 容许控制

控制向量$\boldsymbol{u}(t)$的取值范围称为控制域，以U表示。

$\boldsymbol{u}(t) \in U$且为分段连续的控制向量，称为容许控制。

(4) 性能指标

$$J = \theta\left(x(t_f), t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f} L\left(x(t), u(t), t\right) dt$$

$\theta\left(x(t_f), t_f\right)$—末值项，$\theta(\cdot)$为连续可微的标量函数。

$\int_{t_0}^{t_f} L\left(x(t), u(t), t\right) dt$ —过程项，$\boldsymbol{L}(\cdot)$为连续可微的标量函数。

性能指标是衡量系统在不同控制向量下工作优良度的标准

最优控制的主要方法

- 古典变分法——泛函极值
- 最大值原理——是古典变分法的推广

苏联数学家庞特里金在五十年代末提出

- 动态规划法——由R. Bellman在1957年提出

6.1.2 几种典型的最优控制问题

- **1.最小时间问题**

将系统的状态由初始状态$\boldsymbol{x_0}$转移到指定的状态$\boldsymbol{x_f}$所用时间最短。即求$\boldsymbol{u}(t)$使在它的作用下$\boldsymbol{x}(t_f)= \boldsymbol{x_f}$并使

$$J(\mathrm{u}) = \int_{t_0}^{t_f} \mathrm{d}t = t_f - t_0$$

最小。

6.1.2 几种典型的最优控制问题

- **2.最小能量问题**

将系统的状态由初始状态$\boldsymbol{x_0}$转移到指定的状态$\boldsymbol{x_f}$所用能量最小。即求u(t)使在它的作用下$\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{x_f}$并使

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_f} u^T u dt$$

最小。

更一般的最小能量问题，目标函数可改为控制变量$\boldsymbol{u_i}$的加权平方和的积分，即

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_f} u^T R u dt$$

6.1.2　几种典型的最优控制问题

- **3.最省燃料问题**

　　由于飞行体推力有限，省了燃料就可以多载货物或乘客。超音飞机的燃料消耗正比于推力$\boldsymbol{u}(t)$的绝对值，因此最省燃料问题的目标函数取为

$$J(\mathrm{u})=\int_{t_0}^{t_f}|\mathrm{u}(t)|\,\mathrm{d}t$$

6.1.2　几种典型的最优控制问题

- **4.状态调节器问题(1)**

当系统的状态$\boldsymbol{x}(t)$偏离平衡状态$\boldsymbol{x}_e$=0时，可用状态变量的平方和的积分衡量误差的积累。状态调节器问题的目标函数可取为

$$J(\mathbf{u})=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}x^T(t)x(t)\mathrm{d}t$$

更一般的取为状态变量的加权平方和的积分：

$$J(\mathbf{u})=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}x^TQxdt$$

6.1.2 几种典型的最优控制问题

- **4.状态调节器问题(2)**

当特别重视终点的偏差时，目标函数取为:

$$J(\mathrm{u}) = \frac{1}{2}\mathrm{x}^T(t_f)F\mathrm{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \mathrm{x}^T Q\mathrm{x}\mathrm{d}t$$

这时控制$\boldsymbol{u}(t)$要有约束，不然最优解将需要无穷大的能量。去掉对控制能量的约束可考虑目标函数:

$$J(\mathrm{u}) = \frac{1}{2}\mathrm{x}^T(t_f)F\mathrm{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} (\mathrm{x}^T Q\mathrm{x} + \mathrm{u}^T R\mathrm{u})\mathrm{d}t$$

式中F、Q、R是加权矩阵。

6.1.2 几种典型的最优控制问题

- **5.跟踪问题**

当要求状态轨线$\boldsymbol{x}(t)$跟踪某给定的轨线$\boldsymbol{x_d}(t)$时，目标函数取为

$$J(\mathrm{u})=\frac{1}{2}[\mathrm{x}(t_f)-\mathrm{x}_d(t_f)]^T F[\mathrm{x}(t_f)-\mathrm{x}_d(t_f)]$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{[\mathrm{x}(t)-\mathrm{x}_d(t)]^T Q[\mathrm{x}(t)-\mathrm{x}_d(t)]+\mathrm{u}^T R\mathrm{u}\}\mathrm{d}t$$

- **6.输出跟踪问题**

当要求系统的输出$y(t)$跟踪某给定的轨线$\boldsymbol{y_d}(t)$(理想输出）时。

6.1.3 最优控制问题的实例

- **例6.1 升降机的最速下降问题**

升降机质量为m，质心到地面的距离$x(t)=x_1$,牵引力为u

升降机系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_2, & x_1(0)=x_{10} \\ \dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{1}{m}u-g, & x_2(0)=x_{20} \end{cases}$$

假设升降机的最大推力为u_{max}，则升降机的最速下降问题是:

求最优控制力$u^*(t)$, 满足约束条件 $|u|< u_{max}$, 使得 $x_1(t_f)=0$, $x_2(t_f)=0$,并使

$$J(u)=\int_0^{t_f} dt = t_f$$

最小。

6.1.3　最优控制问题的实例

- **例6.2 生产库存系统的最优控制**

$$x(k+1)=x(k)+u(k)-S(k)$$

$\boldsymbol{x(k)}$——产品第**k**月的库存量（期初库存）

$\boldsymbol{u(k)}$——产品第**k**月的生产量

$\boldsymbol{S(k)}$——产品第**k**月的销售量

求最优控制序列 $u(0), u(1), \cdots, u(N-1)$

使目标函数

$$J(u)=\sum_{k=0}^{N-1}[h(x(k)-x_d)^2+c(u(k)-u_d)^2]$$

最小，$h>0, c>0$是加权系数

$\boldsymbol{u_d}$是该生产库存系统的理想的生产量

$\boldsymbol{x_d}$是该生产库存系统的理想的库存量

6.2 解无约束最优控制问题的变分法

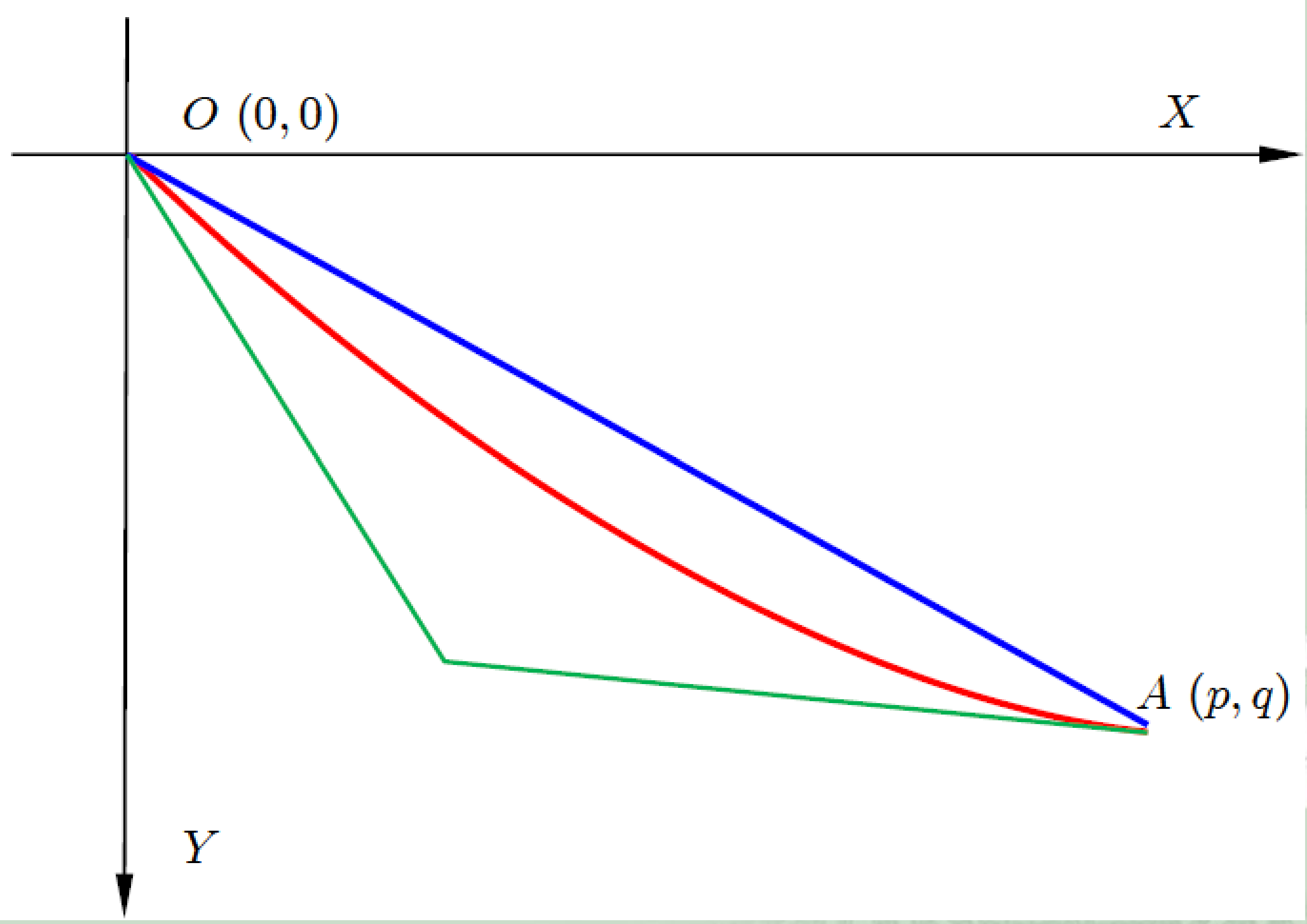
- 6.2.1　泛函与变分
- 6.2.2　欧拉—拉格朗日方程
- 6.2.3　自由端点问题和可动边界问题
- 6.2.4　推广到多变量的情况
- 6.2.5　无约束最优控制问题的解

变分法的起源

- 意大利科学家伽利略在1630年提出最速降线问题—— “一个质点在重力作用下，从一个给定点到不在它垂直下方的另一点，如果不计摩擦力，问沿著什么曲线滑下所需时间最短”。
- 瑞士数学家约翰．伯努利在1696年再提出这个最速降線的问题，征求解答。次年已有多位数学家得到正确答案，其中包括牛顿、莱布尼兹、洛必达和伯努利家族的成员。
- 这问题的正确答案是连接两个点的唯一一段旋轮线。
- 旋轮线与1673年荷兰科学家惠更斯讨论的摆线相同。因为钟表摆锤作一次完全摆动所用的时间相等，所以摆线（旋轮线）又称等时曲线。
- 数学家十分关注最速降線问题，大数学家欧拉也在1726年开始发表有关的论著，在1744年最先给了这类问题的普遍解法，并产生了变分法这一新数学分支。

最速降线问题

- 质点从O点到A点，哪一条路线时间最短？

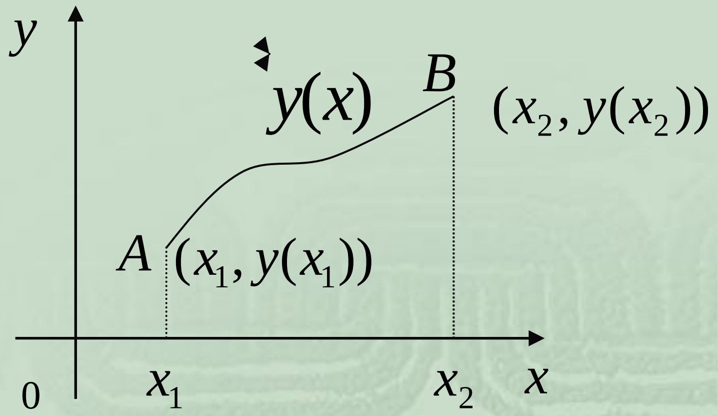


最速降线问题（实验视频）

▪ 6.2.1　　泛函与变分

最短弧长问题

$y=y(x)$ 是连接A、B 两点的一条曲线且连续可微，则A、B 两点的弧长为：



$$S(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\dot{y}^2(x)}\,dx$$

泛函的概念：

每给定一个函数 $y(x)$，$S(y(x))$ 就有一个确定的数与之对应，那么，就称S为依赖函数$y(x)$的泛函。

通常记为：　$J = J(y(x))$

- 泛函规定了数 J 与函数 $y(x)$ 对应关系
- 泛函可以理解为“函数的函数”。

注： $J(y(x))$中的 $y(x)$ 应理解为某一个函数的整体，而不是对应于 x的函数值$y(x)$。

在最优化问题中，如果取如下形式的性能指标：

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$

则 J 的值取决于 n 维向量函数 $x(t)$，故上式为泛函，常称为积分型指标泛函。

- **容许函数类**

  就上述最短弧长问题而言，泛函 $S(y(x))$ 所能考虑的函数仅仅是那些通过A、B两点的连续可微函数。

  满足上述条件的函数称为泛函$S(y(x))$的容许函数类。

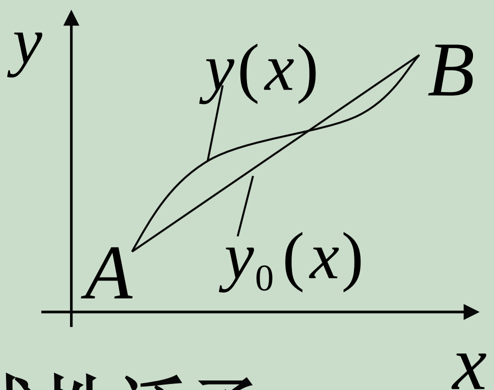
  用空间来表示时，则称容许函数空间。

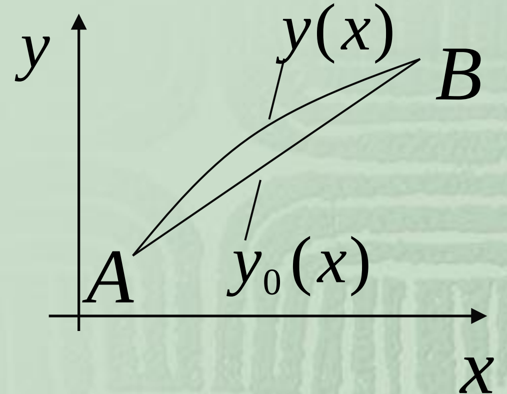
- ## 宗量变分

泛函宗量 $y(x)$ 变分 $\delta y(x)$ 是指两函数之差，即

$$\delta y(x)=y(x)-y_0(x)$$

这里 $y(x)$ 和$y_0(x)$ 时容许函数类中两个不同的函数。$\delta y(x)$也是独立自变量 x 的函数。





- ## 线性泛函

连续泛函 $J(y(x))$ 如果满足下列两个条件：

$$(1)\,J(y_1(x)+y_2(x))=J(y_1(x))+J(y_2(x))$$

$$(2)\,J(cy(x))=cJ(y(x))$$ 其中c是任意常数

- **泛函的变分**

如果连续泛函 $J(y(x))$ 的增量可以表示为：

$$\Delta J = J(y(x)+\delta y(x)) - J(y(x))$$
$$= L(y(x), \delta y(x)) + r(y(x), \delta y(x))$$

$L(y(x), \delta y(x))$——关于 $\delta y(x)$ 的线性连续泛函

$r(y(x), \delta y(x))$——关于 $\delta y(x)$ 的高阶无穷小

$L(y(x), \delta y(x))$ **——泛函的变分**

记为 $\delta J = L(y(x), \delta y(x))$

泛函的变分是泛函增量的线性主部，所以泛函的变分也可以称为泛函的微分

泛函变分的求法

$J(y(x))$ 的变分为泛函 $J(y(x)+\varepsilon\delta y(x))$ 对 ε 的导数在 $\varepsilon=0$ 时的值，即

$$\delta J=L(y(x),\delta y(x))=\frac{\partial J(y(x)+\varepsilon\delta y(x))}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$$

对某个 δy，$y+\varepsilon\cdot\delta y$ 对应一条接近 $y(x)$ 的允许曲线，进而对应一个实数 J。因此，对给定 δy，J 可以看作 ε 的标量函数。

- **泛函极值的必要条件**

如果具有变分的泛函 $J(y(x))$ 在 $y=y_0(x)$ 上达到极值，则在 $y_0(x)$上有：$\delta J = 0$

即 $$\frac{\partial J(y(x)+\varepsilon\delta y(x))}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = 0$$

- 例6.3

求泛函 $J=\int_0^1 y^2(x)dx$ 的变分

解：

$$\delta J=\frac{d}{d\varepsilon}J(y(x)+\varepsilon\delta y(x))\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$=\frac{d}{d\varepsilon}\int_0^1(y(x)+\varepsilon\delta y(x))^2dx\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$=\int_0^1\frac{d}{d\varepsilon}(y(x)+\varepsilon\delta y(x))^2\Big|_{\varepsilon=0}dx$$

$$=\int_0^1 2y(x)\delta y(x)dx$$

函数微分与泛函变分的比较（1）

- **微分**

1.函数 $y = f(x)$

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \Delta x = dx$$

2.函数微分

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$= f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

$$dy = f'(x)dx$$

- **变分**

1.泛函 $J(y(x)) = \int_b^a F(x, y)dx$

$$\Delta y = y(x) - y_0(x)$$

$$\lim_{y(x) \to y_0(x)} \Delta y = \delta y$$

2.泛函变分

$$\Delta J = J(y + \Delta y) - J(y)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} J(y)\Delta y + o(\Delta y)$$

$$\delta J = \frac{d}{dy} J(y)\delta y$$

函数微分与泛函变分的比较（2）

- **微分**

3. $\Delta x = x - x_0$ 很小时

$y(x) - y(x_0) \geq 0,\ y(x_0)$为极小

$y(x) - y(x_0) \leq 0,\ y(x_0)$为极大

4.函数极值的必要条件

$$x = x_0\,,\ \frac{dy}{dx} = 0$$

- **变分**

3.$y(x)$与$y_0(x)$很靠近时

$J(y(x)) - J(y_0(x)) \geq 0$

J在$y_0(x)$上极小

$J(y(x)) - J(y_0(x)) \leq 0$

J在$y_0(x)$上极大

4.$y=y_0(x)$ 上泛函取极值的必要条件

$$y = y_0(x)\,,\ \delta J = 0$$

函数微分与泛函变分的比较（3）

- **微分**

5.函数极值的充分条件

$$\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}>0,\text{极小}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}<0,\text{极大}$$

- **变分**

5.泛函极值的充分条件

$$\delta J=0$$

$$\delta^2 J>0,\text{极小}$$

$$\delta^2 J<0,\text{极大}$$

6.2.2 欧拉一拉格朗日方程

- **问题的提出**

最简单的一类泛函为：

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f(x, \dot{x}, t)\, dt$$

假定 $x(t)$ 关于 t 二次连续可微；$f(x, \dot{x}, t)$ 不仅是 t、x、$\dot{x}$ 的连续函数，而且对 x, $\dot{x}$ 的二阶偏导数存在且连续。

找出一条容许曲线 $x(t)$, 使给定函数 $f(x, \dot{x}, t)$ 沿该曲线的积分为极小，这是一个确定一容许函数 $x(t)$, 使泛函 J 取极小值的问题

——————拉格朗日问题

- **引理6-1（变分预备定理）**

设 $\eta(t)$ 在 $[t_0,t_f]$ 上连续，并且 $\eta(t_0)=0,\eta(t_f)=0,g(t)$ 在 $[t_0,t_f]$ 连续，如果对满足以上条件的一切 $\eta(t)$ 有

$$\int_{t_0}^{t_f} g(t)\eta(t)\mathrm{d}t=0$$

则在 $[t_0,t_f]$ 上必有

$$g(t)\equiv 0$$

- **定理6-1**

设有如下泛函极值问题：

$$\min_{x(t)} J(x) = \int_{t_0}^{t_f} f(x, \dot{x}, t)\mathrm{d}t$$

其中，$f(x, \dot{x}, t)$关于其所有变元二次连续可微；

$x(t)$ 在 $[t_0, t_f]$上有逐段连续的一阶导数，

t_0及 t_f给定,已知边界条件 $x(t_0) = x_0 \quad x(t_f) = x_f$

则极值轨线$x^*(t)$ 满足如下欧拉方程

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

以上方程也可称为欧拉一拉格朗日方程

欧拉—拉格朗日方程推导与证明

证明：设 $x^*(t)$是满足边界条件 $x(t_0)=x_0$ 和 $x(t_f)=x_f$的极值轨线，$x(t)$是 $x^*(t)$ 邻域中的一条容许轨线。$x(t)$ 与$x^*(t)$ 之间有下列关系：

$$x(t)=x^*(t)+\delta x(t), \qquad \dot{x}(t)=\dot{x}^*(t)+\delta\dot{x}(t)$$

其中 $$\delta\dot{x}=\frac{d}{dt}(\delta x)$$

以及

$$x(t_0)=x^*(t_0)=x_0, \qquad x(t_f)=x^*(t_f)=x_f$$

即

$$\delta x(t_0)=0 \qquad \delta x(t_f)=0$$

取泛函增量

$$\Delta J(x) = J(x^* + \delta x) - J(x^*)$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} [f(x^* + \delta x, \dot{x}^* + \delta \dot{x}, t) - f(x^*, \dot{x}^*, t)] dt$$

上式的线性主部，也就是其变分为

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} [(\frac{\partial f}{\partial x}) \quad \delta x + (\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}) \quad \delta \dot{x}] dt \qquad \textbf{(6-1)}$$

上式可通过下式得到

$$\left.\frac{dJ(x + \varepsilon \delta x)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_0}^{t_f} f(x + \varepsilon \delta x, \dot{x} + \varepsilon \delta \dot{x}, t) dt \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} [\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}] dt = 0$$

由泛函极值的必要条件 $\delta J = 0$

以及对式**(6-1)**的第二项应用分部积分，得到

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x dt = 0 \qquad \textbf{(6-2)}$$

由于 $\delta x(t_0) = 0, \delta x(t_f) = 0,$ 上式化为

$$\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x dt = 0 \qquad \textbf{(6-3)}$$

运用**引理** 6-**1**（变分预备定理），及考虑到(6-**3**)式对任意 δx 成立

得到 $x^*(t)$ 满足的必要条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \\ x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f \end{cases}$$

—— 欧拉方程

- **例6.4** 已给系统

$$\dot{x} = -x + u \qquad x(0) = 1$$

求 $u(t)$，使在它的作用下，在 t_f 时刻将系统的状态转移到 $x(t_f) = 0$, 并使

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}(x^2 + u^2)dt$$

最小。

解 为应用变分法求解，由状态方程解出 $u=\dot{x}+x$ 代入 $J(u)$ 得到

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}[x^2+(\dot{x}+x)^2]dt$$

化为一个最简单的变分问题。对这个问题的欧拉方程为

$$x+(\dot{x}+x)-\frac{d}{dt}(\dot{x}+x)=0$$

于是 x 使 $J(x)$ 达极小值的必要条件是

$$\begin{cases} \ddot{x}-2x=0 \\ x(0)=1 \quad x(t_f)=0 \end{cases} \Longrightarrow \text{通解为：} x(t)=Ae^{\sqrt{2}t}+Be^{-\sqrt{2}t}$$

代入边界条件得： $$x(t)=\frac{1}{D}[e^{-\sqrt{2}t_f}e^{\sqrt{2}t}-e^{\sqrt{2}t_f}e^{-\sqrt{2}t}]$$

将它代入 $u=\dot{x}+x$ 即得到最优控制

$$u(t)=\frac{1}{D}[(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t_f}e^{\sqrt{2}t}+(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t_f}e^{-\sqrt{2}t}]$$

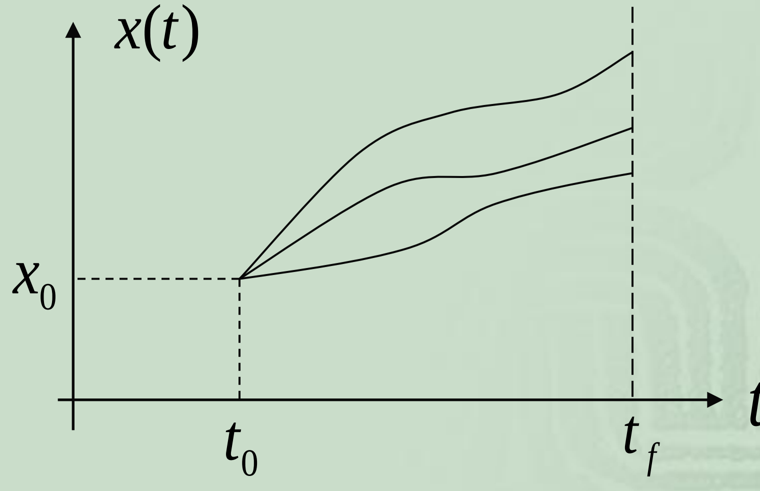
$$D=e^{\sqrt{2}t_f}-e^{-\sqrt{2}t_f}$$

6.2.3 自由端点问题和可动边界问题

- **1　自由端点问题**

求 $x(t)$ 使满足 $x(t_0)=x_0$ ，并使泛函

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_f} f(x,\dot{x},t)\mathrm{d}t$$ 最小。



边界条件：右端点 $x(t_f)$ 的值是自由的

因此这种最优问题被称为可变（自由）端点问题

自由端点问题的必要条件的推导

假设$x(t)$ 是自由端点问题的解， 那么 $x(t_f)=x_f$也就是已知的。

$x(t)$是 $x(t_f)$的值自由时的变分问题的解

↓

$x(t)$是 $x(t_0)=x_0, x(t_f)=x_f$ 的固定端点问题的解

↓

自由端点问题仍然应该满足欧拉方程和初始条件 $x(t_0)=x_0$

于是由式(6-2)得到 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\delta x\right|_{t_f}=0$ 由 δx的任意性 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}=0$

得到了关于自由端点问题的必要条件：

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x\,dt=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)=0\\ x(t_0)=x_0 \qquad \left.\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}=0\end{cases}$$

自由端点问题的一个例子

- **例6.5** 已给系统 $\dot{x}=ax+u \qquad x(0)=x_0$

  求 $u(t)$使 $J(u)=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}(x^2+r^2u^2)dt$

  最小。这里 t_f是给定的。

解 为使用变分法，由状态方程解出 $u=\dot{x}-ax$, 代入目标函数化为

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}[x^2+r^2(\dot{x}-ax)^2]\mathrm{d}t$$

$x(0)=x_0$ 给定，$x(t_f)$ 自由，

由自由端点必要条件得到 $x(t)$ 满足条件：

$$\begin{cases} \ddot{x}=\frac{1}{r^2}(1+a^2r^2)x \\ x(0)=x_0 \qquad [\dot{x}-ax]_{t_f}=0 \end{cases}$$

2　有可动边界问题

可动边界问题 ——在自由端点问题中 t_f 也不是固定的变分问题

例如：利用地空导弹截击无人侦察机

问题的描述：

求 $x(t)$ 使 $x(t_0)=x_0$，并使泛函

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_f} f(x,\dot{x},t)\mathrm{d}t$$

取极小值。

可动边界问题的解法：

设 t_f 和 $x(t)$ 是该问题的解，令 $x(t_f)=x_f$

$\downarrow$

$x(t)$是以 t_f 为最终时刻，x_f 为边值的两端固定的变分问题的解

$\downarrow$

可动边界问题的解仍满足欧拉方程和 $x(t_0)=x_0$

另一个边界条件的推导

考虑 ε 的函数

$$\Phi(\varepsilon)=\int_{t_0}^{t_f+\varepsilon\delta t_f} f(x+\varepsilon\delta x,\dot{x}+\varepsilon\delta\dot{x},t)dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_f} f(x+\varepsilon\delta x,\dot{x}+\varepsilon\delta\dot{x},t)dt+\int_{t_f}^{t_f+\varepsilon\delta t_f} f(x+\varepsilon\delta x,\dot{x}+\varepsilon\delta\dot{x},t)dt$$

而

$$\int_{t_f}^{t_f+\varepsilon\delta t_f} f(x+\varepsilon\delta x,\dot{x}+\varepsilon\delta\dot{x},t)dt\approx f(x,\dot{x},t)\Big|_{t_f}\cdot\varepsilon\delta t_f$$

由于 t_f 和 $x(t)$ 是可动边界问题的解,$\Phi(\varepsilon)$ 应在 $\varepsilon=0$ 点导数为0，即

$$\left.\frac{d\Phi}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\frac{d}{d\varepsilon}\int_{t_0}^{t_f+\varepsilon\delta t_f} f(x+\varepsilon\delta x,\dot{x}+\varepsilon\delta\dot{x},t)dt\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$=\int_{t_0}^{t_f}[\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}]dt+f(x,\dot{x},t)\Big|_{t_f}\delta t_f=0$$

对积分的第二项应用分部积分法，上式化为

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x dt+f(x,\dot{x},t)\Big|_{t_f}\delta t_f=0$$

由 $\delta x(t_0)=0$ 及解满足欧拉方程，上式化为：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}\delta x(t_f)+f(x,\dot{x},t)\Big|_{t_f}\delta t_f=0 \qquad \textbf{(6-4)}$$

下面分两种情况讨论：

（1）如果$\delta x(t_f)$与δt_f 是互相独立的，则式(6-4)化等价于

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}=0 \qquad f(x,\dot{x},t)\big|_{t_f}=0$$

（2）如果终端必须落到曲线 $x(t_f)=\varphi(t_f)$ 上，则终端时刻 $t_f+\varepsilon\delta t_f$ 取决于 $x+\varepsilon\delta x$ 到达靶线 $\varphi(t_f)$ 的时刻，两者不是相互独立的。

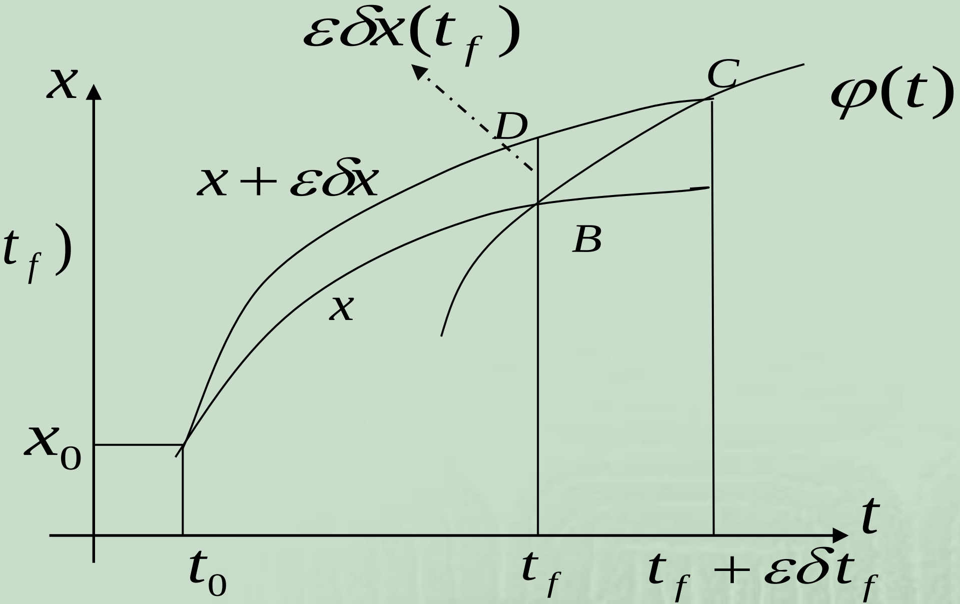


图6－1

当要求端点落到曲线$x(t_f)=\varphi(t_f)$上时,则可动边界问题的必要条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)=0 \\ x(t_0)=x_0 \qquad \left[f(x,\dot{x},t)+(\dot{\varphi}(t)-\dot{x})\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right]_{t_f}=0 \end{cases}$$

可得到可动边界问题的必要条件为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = 0 & x(t_0) = x_0 \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f} = 0 & f(x,\dot{x},t)\big|_{t_f} = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(6-7)}$$

当要求端点落到曲线$x(t_f) = \varphi(t_f)$上时,则可动边界问题的必要条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \\ x(t_0) = x_0 \qquad \left[f(x,\dot{x},t) + (\dot{\varphi}(t) - \dot{x})\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right]_{t_f} = 0 \end{cases}$$

- **例6.6** 已给直线 $l: x=2-t$ 和

$x(0)=1$, 求 $x(t)$ 使得 $x(t_f)$落 l 到上，

并使泛函

$$J(x)=\int_0^{t_f}\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt$$

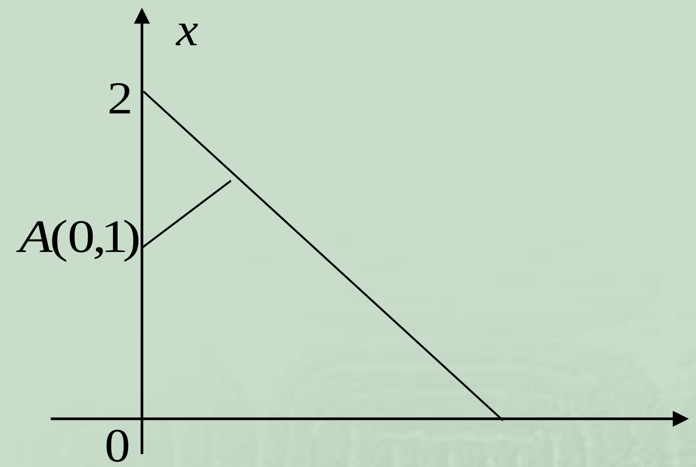


图6-2　　例6.6示意图

最小，即求过点 A 的曲线$x(t)$使与 l 相截的线段

AB弧长最短。

解 关于这个问题的欧拉方程为 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right)=0$

或 $\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}=c$(常数) $\dot{x}^2=c^2(1+\dot{x}^2)$ ⇨ $\dot{x}=\pm\sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}}$ 式中$a=\pm\sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}}$

$x=at+b$

由条件 $x(0)=1$, 解得 $b=1$，再由条件(6-7)的最后一个条件

$$\left[\sqrt{1+\dot{x}^2}+(-1-\dot{x})\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right]_{t_f}=0$$

解得$\dot{x}(t_f)=1\Rightarrow a=1$，由此得到满足必要条件(6-7)的$x(t)$为 $x=t+1$ 。

由题意知问题的解一定存在，而求出的满足必要条件的曲线只有一条，因此 $x=t+1$ 即所求。

由于由本例显示的几何意义，条件

$$\left[f(x,\dot{x},t)+(\dot{\varphi}(t)-\dot{x})\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right]_{t_f}=0$$ 称为横截条件

6.2.4 推广到一般泛函

考虑一般泛函：

$$J(x)=\theta(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f} f(x,\dot{x},t)\mathrm{d}t$$

的极值问题，假设 $x(t_0)=x_0$ 和 t_f 已给，$x(t_f)$ 自由，

$\theta(x(t_f),t_f)$ ——表示对终端时刻的特殊要求。

边界条件的推导：

设 $x(t)$ 使 $J(x)$ 达极小值，考虑

$$\Phi(\varepsilon)=\theta(x(t_f)+\varepsilon\delta x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f} f(x+\varepsilon\delta x,\dot{x}+\varepsilon\delta\dot{x},t)dt$$

一阶必要条件为

$$\frac{d\Phi}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\frac{\partial\theta(x(t_f),t_f)}{\partial x(t_f)}\cdot\delta x(t_f)+\left[\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\delta x\right]_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\right)\right]\delta x\mathrm{d}t=0$$

由于 $x(t_0)=x_0$ 已给，于是 $\delta x(t_0)=0$，上式化为

$$\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x\mathrm{d}t+\left[\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}+\frac{\partial\theta(x(t_f),t_f)}{\partial x(t_f)}\right]\delta x(t_f)=0$$

最优 $x(t)$ 取定后，$x(t_f)$ 也取定了，泛函 $\int_{t_0}^{t_f} f(x,\dot{x},t)dt$ 做为边界固定的问题，也应在 $x(t)$ 上取极小值，因此 $x(t)$ 仍应满足欧拉方程。

综上， $x(t)$ 应满足的必要条件是：

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)=0 \qquad \textbf{(6-8)}$$

$$x(t_0)=x_0 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}=-\frac{\partial\theta\left(x(t_f),t_f\right)}{\partial x(t_f)}$$

可动边界问题(一般泛函)的边界条件的推导(1)

问题的描述：

如果 t_f 也是自由的，则一般泛函最优问题化为求 t_f 和 $x(t)$ 使

$$J(x(t),t_f)=\theta(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f} f(x,\dot{x},t)\mathrm{d}t$$

达极大或极小值。

必要条件的推导：

设 t_f 和 $x(t)$ 已求出，使 $J(x(t),t_f)$ 达极大或极小值，则函数

$$\Phi(\varepsilon)=\theta(x(t_f+\varepsilon\delta t_f)+\varepsilon\delta x(t_f+\varepsilon\delta t_f),t_f+\varepsilon\delta t_f)+$$

$$\int_{t_0}^{t_f+\varepsilon\delta t_f} f(x+\varepsilon\delta x,\dot{x}+\varepsilon\delta\dot{x},t)dt$$

在 $\varepsilon=0$ 达极大或极小值。

可动边界问题(一般泛函)的边界条件的推导(2)

令 $\dfrac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}=0$ ，可得：

当 $\delta x(t_f)$ 与 δt_f 互相独立时，必要条件为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)=0 \qquad x(t_0)=x_0 \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}=-\dfrac{\partial \theta(x(t_f),t_f)}{\partial x(t_f)} \\ \left[f(x,\dot{x},t)-\dot{x}\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}+\dfrac{\partial \theta(x(t_f),t_f)}{\partial t_f}\right]_{t_f}=0 \end{cases}$$

6.2.4 推广到多变量的情况

- 多变量泛函极值问题的描述

求 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$，使得$x_i(t_0)=x_{i0}\quad x_i(t_f)=x_{if}\quad i=1,2,\cdots,n$

并使泛函

$$J(x_1,\cdots,x_n)=\int_{t_0}^{t_f} f(x_1,\cdots,x_n;\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_n;t)dt$$

达极小值。

泛函 J 有 n 个未知函数

考虑有两个变量的泛函

$$J(x_1, x_2) = \int_{t_0}^{t_f} f(x_1, x_2; \dot{x}_1, \dot{x}_2; t)dt$$ 的极值问题。

设$x_1(t)$，$x_2(t)$给出的 $J(x_1, x_2)$最小或最大值。

则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 的函数

$$\varPhi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{t_0}^{t_f} f(x_1 + \varepsilon_1 \delta x_1, x_2 + \varepsilon_2 \delta x_2, \dot{x}_1 + \varepsilon_1 \delta \ddot{x}_1, \dot{x}_2 + \varepsilon_2 \delta \ddot{x}_2, t)dt$$

应在 $\varepsilon_1 = 0$、$\varepsilon_2 = 0$ 达最小或最大值。

有必要条件 $$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \qquad \varepsilon = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2]^T$$

由上述必要条件得

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}\right|_{\substack{\varepsilon_1=0\\ \varepsilon_2=0}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1\right]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_1}\right)\right]\delta x_1 dt = 0$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}\right|_{\substack{\varepsilon_1=0\\ \varepsilon_2=0}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2\right]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_2}\right)\right]\delta x_2 \mathrm{d}t = 0$$

利用类似于单变量问题中的引理，得到多变量边界的必要条件：

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_1}\right) = 0 \qquad x_1(t_0) = x_{10} \qquad x_1(t_f) = x_{1f}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_2}\right) = 0 \qquad x_2(t_0) = x_{20} \qquad x_2(t_f) = x_{2f}$$

令 $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，定义梯度向量：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix},\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}_2} \end{bmatrix}$$

上两个必要条件可写为如下向量形式：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) \\ x(t_0)=x_0, x(t_f)=x_f \end{cases} \quad \textbf{(6-9)}$$

式（6-9）是多变量变分问题的必要条件的向量形式，当变量个数为任意个时，形式完全一样。

注：对于其他边界条件的情况，都可以将相应单变量的必要条件看作向量形式的必要条件应用于多变量的相应问题。

6.2.5　无约束最优控制问题的解

- 无约束最优控制问题

  已给系统的状态方程

$$\dot{x} = f(x,u,t) \qquad x(t_0) = x_0$$

  和目标函数

$$J(u) = \theta(x(t_f),t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x,u,t)dt$$

求$u(t)$使 $J(u)$ 最小（或最大）。

t_f 给定，$x(t_f)$是自由的。

无约束最优控制问题的必要条件的推导(1)

$f(x,u,t)-\dot{x}=0$ ：状态方程作为约束条件

引入的拉格朗日乘子向量 $\lambda(t)$

目标函数 J 化为

$$\bar{J}(x,u,\lambda)=\theta(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f}[L(x,u,t)+\lambda^T(f(x,u,t)-\dot{x})]dt$$

$$=\theta(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f}\overline{H}(x,\lambda,u,t)dt$$

其中

$$\overline{H}(x,u,\lambda)=L(x,u,t)+\lambda^T(f(x,u,t)-\dot{x})$$

无约束最优控制问题的必要条件的推导(2)

如果

$f(x,u,t)$、$L(x,u,t)$ 关于其所有变元二次连续可微

x,u,λ 的一阶导数逐段连续

利用上几小节的结果，得到 x,u,λ 使 $\bar{J}$ 达相对极值的必要条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \underline{x}} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \underline{\dot{x}}}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \underline{u}} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \underline{\dot{u}}}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \lambda} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \dot{\lambda}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \\ \dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \\ \dot{x} = f(x,u,t)\left(= \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}\right) \end{cases}$$

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u},t) = L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t),$$

——哈密顿（Hamilton）函数

无约束最优控制问题的必要条件的推导(3)

由必要条件 $x(t_0)=x_0$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}=-\dfrac{\partial \theta(x(t_f),t_f)}{\partial x(t_f)}$ ，边界条件为：

$$x(t_0)=x_0 \qquad \lambda(t_f)=\frac{\partial \theta(x(t_f),t_f)}{\partial x(t_f)}$$

由于 $J(x,u,t)$ 中 u,λ 在两个端点都是自由的，以下四个边界条件成立

$$\Rightarrow \qquad \left.\frac{\partial \overline{H}}{\partial \dot{u}}\right|_{t_0}=0 \qquad \left.\frac{\partial \overline{H}}{\partial \dot{u}}\right|_{t_f}=0 \qquad \left.\frac{\partial \overline{H}}{\partial \dot{\lambda}}\right|_{t_0}=0 \qquad \left.\frac{\partial \overline{H}}{\partial \dot{\lambda}}\right|_{t_f}=0$$

由于 $\overline{H}$ 不依赖于$\dot{u}$ 和 $\dot{\lambda}$ ，这些条件显然都是成立的。

综前所述，无约束最优控制问题的必要条件为：

存在$\lambda(t)$, 它与 $x(t)$ 一起满足正则方程组及边界条件

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} & x(t_0) = x_0 \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} & \lambda(t_f) = \dfrac{\partial \theta(x(t_f),t_f)}{\partial x(t_f)} \end{cases} \quad \textbf{(6-10)}$$

两点边值问题

u 由 $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$ **(5-11)** 确定。

协状态方程—— $\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}$ 协状态向量—— $\lambda(t)$

(1)如果 $\boldsymbol{x}(t_f)$也是给定的，则用边界条件 $x(t_f) = x_f$ $\xrightarrow{\text{替代}}$ $\lambda(t_f) = \dfrac{\partial \theta(x(t_f),t_f)}{\partial x(t_f)}$

(2)如果 t_f 也是自由的，则根据 $\left[f(x,\dot{x},t) - (\dot{x})^T \dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \dfrac{\partial \theta(x(t),t_f)}{\partial t_f} \right]\Big|_{t_f} = 0$

可得另一边界条件

$$H(x(t_f),\lambda(t_f),u(t_f),t_f) + \frac{\partial \theta(x(t_f),t_f)}{\partial t_f} = 0$$

求最优控制的计算步骤

- **第1步** 构造哈密顿函数

$$H(x,\lambda,u,t)=L(x,u,t)+\lambda^T f(x,u,t)$$

根据 $\dfrac{\partial H}{\partial u}=0 \xrightarrow{\text{求出}} u^*=u(x,\lambda)$

- **第2步** 以 $u^*=u(x,\lambda)$ 代入正则方程,消去 u ,解两点边值问题:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}),t) & \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} & \boldsymbol{\lambda}(t_f)=\dfrac{\partial\theta(\boldsymbol{x}(t_f),t_f)}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}\end{cases} \Longrightarrow x=x^*(t),\lambda=\lambda^*(t)$$

- **第3步** 以 $x=x^*(t),\lambda=\lambda^*(t)$ 代入 u^* 得到

$$u^*=u(x^*(t),\lambda^*(t))=u(t) \Longrightarrow \text{所求的最优控制}$$

注：对两端固定的问题关于$\lambda(t_f)$ 的边界条件应换为 $x(t_f)=x_f$ 。

无约束最优控制问题举例

- **例6.7** 已给系统的状态方程为

$$\dot{x} = -x + u \qquad x(0) = 1$$

目标函数为 $J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}(x^2 + u^2)\mathrm{d}t$

求$u(t)$, 将 $x(0)=1$ 转移到 $x(t_f)=0$, 并使$J(u)$最小。

解 **第1步** 构造该问题的哈密顿函数

$$H(x,\lambda,u,t)=\frac{1}{2}(x^2+u^2)+\lambda(-x+u)$$

由条件

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0$$

得到 $u+\lambda=0$, 或 $u=-\lambda$ 。

第2步 将 $u=-\lambda$ 代入正则方程，得到

$$\begin{cases}\dot{x}=-x-\lambda & x(0)=1\\ \dot{\lambda}=-x+\lambda & x(t_f)=0\end{cases}$$

边界条件 $x(0)=1, x(t_f)=0$ ，解方程得

$$x(t)=\frac{1}{D}[e^{-\sqrt{2}t_f}e^{\sqrt{2}t}-e^{\sqrt{2}t_f}e^{-\sqrt{2}t}] \qquad D=e^{-\sqrt{2}t_f}-e^{\sqrt{2}t_f}$$

由此得到

$$u(t)=-\lambda(t)=x+\frac{dx}{dt}=\frac{1}{D}[(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t_f}e^{\sqrt{2}t}+(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t_f}e^{-\sqrt{2}t}]$$

关于允许控制u的条件

在上面的推导中, $u(t)$应满足$x(t)$的假设条件——一阶导数逐段连续但控制向量 $u(t)$ 在很多情况下其分量仅是一个逐段连续函数。对逐段连续函数也得到与(6-10)、(6-11)相同的必要条件。

记 $\Phi\left(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n;\varepsilon_{n+1},\cdots,\varepsilon_{2n};\varepsilon_{2n+1},\cdots,\varepsilon_{2n+m}\right)$

$$=\int_{t_0}^{t_f}\overline{H}(x_1+\varepsilon_1\delta x_1,\cdots,x_n+\varepsilon_n\delta x_n;\dot{x}_1+\varepsilon_1\delta\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_n+\varepsilon_n\delta\dot{x}_n;$$
$$\lambda_1+\varepsilon_{n+1}\delta\lambda_1,\cdots,\lambda_n+\varepsilon_{2n}\delta\lambda_n;u_1+\varepsilon_{2n+1}\delta u_1,\cdots,u_m+\varepsilon_{2n+m}\delta u_m,t)dt$$

在极值点 $\left.\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_i}\right|_{\varepsilon=o}=0,\ i=1,\cdots,2n+m$

$$\int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial\overline{H}}{\partial u_i}\delta u_i dt=0\qquad i=1,\cdots,m$$

$$\frac{\partial\overline{H}}{\partial u_i}=\frac{\partial H}{\partial u_i}=0$$

对任意逐段连续函数 δu_i 成立

其他情况下的必要条件

- (1) 当要求 $\boldsymbol{x}(t_f)$ 满足约束

$$\begin{cases} N_1(x(t_f),t_f)=0 \\ \vdots \\ N_r(x(t_f),t_f)=0 \end{cases} \qquad (\text{向量形式为 } N(x(t_f),t_f)=0)$$

r 维实向量

如果 t_f 是给定的，则正则方程的边界条件为：

$$\begin{cases} x(t_0)=x_0 \\ \lambda(t_f)=\dfrac{\partial\theta(x(t_f),t_f)}{\partial x(t_f)}+\dfrac{\partial N^T(x(t_f),t_f)}{\partial x(t_f)}*v \\ N(x(t_f),t_f)=0 \end{cases}$$

(6-13)

式中 $\dfrac{\partial N}{\partial x}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial N_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial N_r}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial N_r}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

如果 t_f 也是自由的，这时多了一个未知量，必要条件再增加一个方程：

$$H(x(t_f),\lambda(t_f),u(t_f),t_f)+\frac{\partial N^T(x(t_f),t_f)}{\partial t_f}*v+\frac{\partial\theta(x(t_f),t_f)}{\partial t_f}=0$$

(6-14)

其他情况下的必要条件

- (2) 当哈密顿函数不显含 t 时，沿最优轨线

$$\dot{H} = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T \dot{x} + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T \dot{\lambda} + \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T \dot{u} = 0$$

因此，当 H 不显含 t 时，沿最优轨线

$$H(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) = 常数$$

- (3)当 t_f 自由时，如果 H 不依赖于 t ,并且 θ 和 N 也都不依赖于 t_f,则由边界条件(5-14)进一步得到

$$H(x(t_f), \lambda(t_f), u(t_f)) = 0$$

沿最优轨线

$H(x, \lambda, u)$沿最优轨线等于常数 ⟹ $H(x^*(t_f), \lambda^*(t_f), u^*(t_f)) \equiv 0$

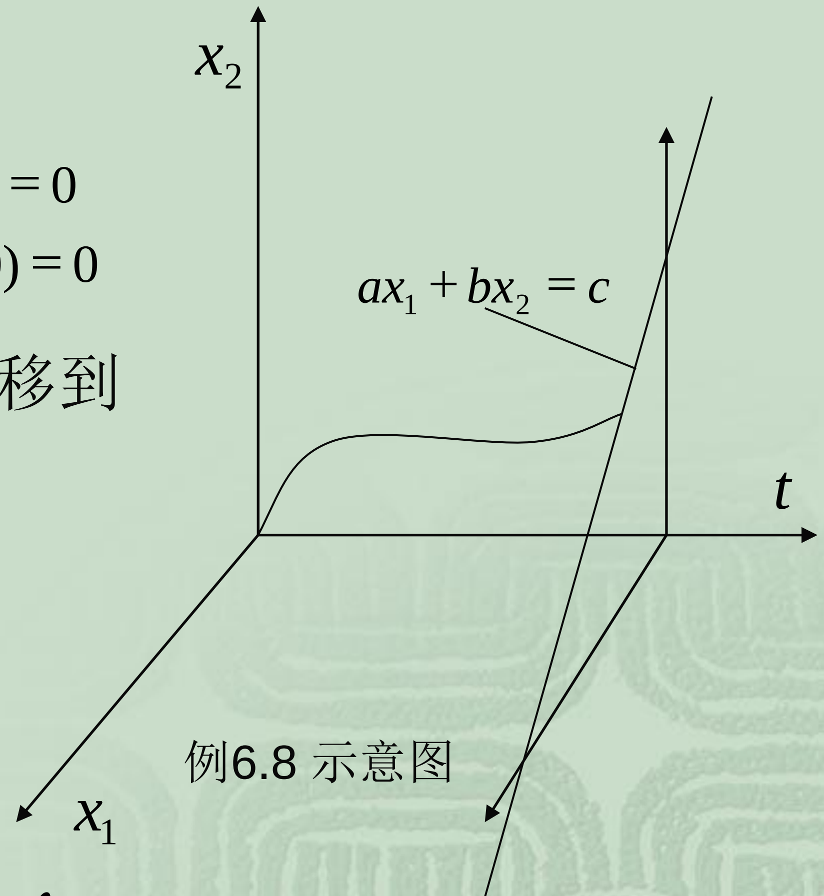
(必要条件)

- **例6.8** 设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u & x_2(0) = 0 \end{cases}$$

求 $u(t)$ 使在给定的时刻 t_f 将状态转移到直线 $ax_1 + bx_2 = c$ 上，

并使 $J(u) = \dfrac{1}{2}\int_0^{t_f} u^2 \mathrm{d}t$ 最小。



例6.8 示意图

解 **第1步** 写出哈密顿函数

$$H(x,\lambda,u) = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-x_2 + u)$$

由必要条件 $\dfrac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\lambda_2$

- **第2步** 解正则方程组 $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u = -x_2 - \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$

由协状态方程可解出 $\begin{cases} \lambda_1 = C_1 \\ \lambda_2 = C_2 e^t + C_1 \end{cases}$

将 λ_2 代入状态方程的第二个方程，得到

$$x_2(t) = C_3 e^{-t} - \frac{1}{2} C_2 e^t - C_1$$

代入第一个方程积分，得到

$$x_1(t) = -C_3 e^{-t} - \frac{1}{2} C_2 e^t - C_1 t + C_4$$

边界条件：
$$\begin{cases} x_1(0)=0 \qquad x_2(0)=0 \\ \lambda_1(t_f)=\dfrac{\partial N}{\partial x_1}\cdot v=av \\ \lambda_2(t_f)=\dfrac{\partial N}{\partial x_2}\cdot v=bv \\ ax_1(t_f)+bx_2(t_f)=c \end{cases}$$

代入上面求得的正则方程的通解中，得到

$$-C_3-\frac{1}{2}C_2+C_4=0$$

$$C_3-\frac{1}{2}C_2-C_1=0 \qquad \frac{\lambda_1(t_f)}{\lambda_2(t_f)}=\frac{C_1}{C_2e^{t_f}+C_1}=\frac{a}{b}$$

$$a(-C_3e^{-t_f}-\frac{1}{2}C_2e^{t_f}-C_1t_f+C_4)+b(C_3e^{-t_f}-\frac{1}{2}C_2e^{t_f}-C_1)=c$$

如果 a,b,c 已给，解上面的方程组得到 C_1,C_2,C_3,C_4 ，代入 λ_2 中就得到最优控制

$$u^*=-(C_2e^t+C_1)$$

§ 6.3 最大值原理

- 经典变分法解最优控制问题的局限性

1.变分法要求控制变量u无约束（或者 u 属于某个开集）

2.变分法要求 $f(x,u,t)$ 和 $L(x,u,t)$关于 所有自变量二次连续可微，要求哈密顿函数 H 关于控制变量的偏导数存在

1.实际工程问题中，控制变量 u 往往受到一定的限制。

2.像最省燃料这一类的问题，它的目标函数中出现了$|u|$，从而使 $L(x,u,t)$ 关于 u 不可微，哈密顿函数 H 关于 u 的偏导数不存在。

- 最大值原理，它是变分法的推广，可以克服上述的局限性

▪ 最大值原理

设系统的状态方程为

$$\dot{x} = f(x,u,t) \qquad x(t_0) = x_0$$

控制向量 u 属于 R^m 中的某个有界闭集 U，最优控制问题是求 $u \in U$，使得

$$J(u) = \theta(x(t_f),t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x,u,t)dt$$ 最小。

假设 $f(x,u,t)$ 的分量为 $f_i(x,u,t)$，并假设

$$f_i(x,u,t),\ \frac{\partial f_i(x,u,t)}{\partial t},\ \frac{\partial f_i(x,u,t)}{\partial x_j},\ L(x,u,t),\ \frac{\partial L(x,u,t)}{\partial t},\ \frac{\partial L(x,u,t)}{\partial x_i}$$

$$\theta(x(t_f),t_f),\ \frac{\partial \theta(x(t_f),t_f)}{\partial x_j(t_f)},\ \frac{\partial \theta(x(t_f),t_f)}{\partial t_f} \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

都是其自变量的连续函数。

$f(x,u,t),L(x,u,t)$ 没有对u求偏导数

- $u^*(t)$使$J(u)$ 达最小值的必要条件是：

(1) 存在协状态向量 $\lambda^*(t)$，它和 $x^*(t)$、$u^*(t)$ 一起满足正则方程

最优轨线

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

(2) 哈密顿函数作为 u 的函数在 $u = u^*(t)$ 达最小值，即

$$H(x^*,\lambda^*,u^*,t) = \min_{u \in U} H(x^*,\lambda^*,u,t)$$

(3)正则方程的边界条件：

1.若 $x(t_f)=x_f$ 是给定的,则边界条件为：

$$x(t_0)=x_0 \qquad x(t_f)=x_f$$

2.如果 t_f 给定, $x(t_f)$ 自由,那么边界条件为:

$$x(t_0)=x_0, \quad \lambda(t_f)=\frac{\partial\theta(x(t_f),t_f)}{\partial x(t_f)}$$

3.如果 t_f 也是自由的,还要加一个条件以确定 t_f:

$$H(x(t_f),\lambda(t_f),u(t_f),t_f)+\frac{\partial\theta(x(t_f),t_f)}{\partial t_f}=0$$

即　在最优轨线的末端 $H^*(t_f^*)=-\dfrac{\partial\theta}{\partial t_f}$

若 $\theta(x(t_f))$ 即不显含 t_f 则 $H^*(t_f^*)=0$

4.如果要求 $x(t_f)$ 落在流型 S 上,

$$S:\begin{cases} N_1(x(t_f),t_f)=0 \\ N_2(x(t_f),t_f)=0 \\ \quad\vdots \\ N_r(x(t_f),t_f)=0 \end{cases} \qquad \text{或} N(x(t_f),t_f)=0$$

那么边界条件为

$$\begin{cases} x(t_0)=x_0 \\ \lambda(t_f)=\dfrac{\partial\theta(x(t_f),t_f)}{\partial x(t_f)}+\dfrac{\partial N^T(x(t_f),t_f)}{\partial x(t_f)}v \\ \mathrm{N}(x(t_f),t_f)=0 \qquad v=[v_1,\cdots,v_r]^T \end{cases}$$

如果 t_f 是自由的,再增加条件:

$$H(x(t_f),\lambda(t_f),u(t_f),t_f)+\frac{\partial N^T(x(t_f),t_f)}{\partial t_f}v+\frac{\partial\theta(x(t_f),t_f)}{\partial t_f}=0$$

- 在最优轨线 $x^*(t)$ 上，哈密顿函数具有如下性质：

$$H(x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t)=H(x^*(t_f),u^*(t_f),\lambda(t_f),t_f)-\int_t^{t_f}\frac{\partial H}{\partial t}dt$$

最大值原理应用举例

- **例6.9** 已给系统

$$\dot{x} = x - u \qquad x(0) = 5$$

求控制 $u(t)$ 满足约束 $\frac{1}{2} \le u \le 1$, 使 $J(u) = \int_0^1 (x+u)dt$ 最小 ，并求出目标函数的最小值。

解 首先写出该问题的哈密顿函数

$$H = (x+u) + \lambda(x-u) = (1+\lambda)x + (1-\lambda)u$$

由最大值原理，应选取 $u(t)$ 使 H 最小，即

$$u = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{当}\lambda < 1\text{时} \\ 1 & \text{当}\lambda > 1\text{时} \end{cases}$$

协状态方程为 $\dot{\lambda} = -(1+\lambda)$ 通解为 $\lambda = Ce^{-t} - 1,$

由边界条件 $\lambda(1) = 0,$ 解方程得 $\lambda = e^{1-t} - 1,$

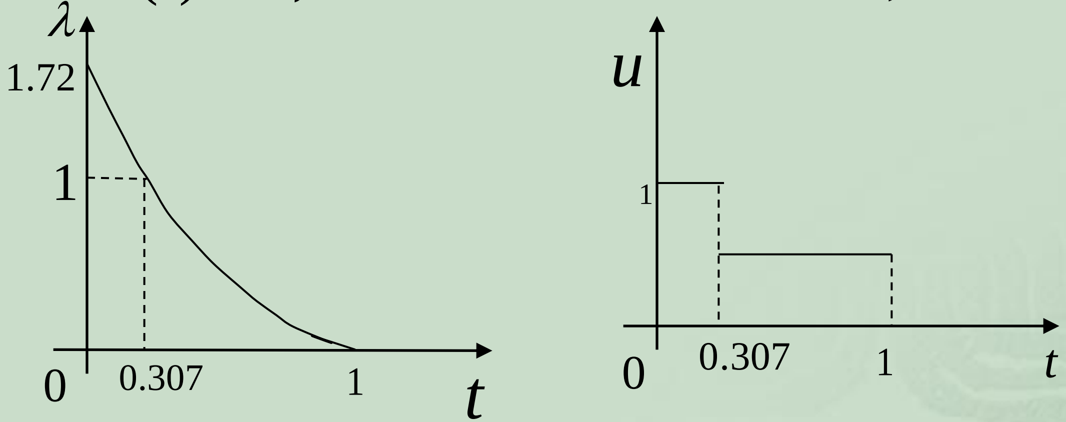


图5-3 例5-7的解

设 $\lambda(t_s) = 1 \longrightarrow t_s = 1 - \ln 2 \doteq 0.307$

最优控制:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{当}t < 0.307\text{时} \\ \dfrac{1}{2} & \text{当}t > 0.307\text{时} \end{cases}$$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

由状态方程和初始条件，最优轨线为

$$x^*(t) = 5e^t - \int_0^t e^{t-\tau}u(\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 4e^t + 1 & \text{当} 0 \le t < 0.307 \text{时} \\ 4e^t + e^{t-1} + \dfrac{1}{2} & \text{当} 0.307 \le t \le 1 \text{时} \end{cases}$$

将 x^* 和 u^* 代入目标函数中，得到目标函数的最小值为

$$J^* = \int_0^{0.307}[(4e^t + 1) + 1]\mathrm{d}t + \int_{0.307}^{1}[(4e^t + e^{t-1} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}]\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{3}{2} - \ln 2 + 4e = 8.679$$

最大值原理的其他形式

- （1）最大值原理的第二种叙述：

求 $u^*(t)$ 使目标函数

$$J_1(u)=\int_{t_0}^{t_f} L_1(x,u,t)dt$$ 达到最大。

$u^*(t)$ 使 $J_1(u)=\int_{t_0}^{t_f} L_1(x,u,t)dt$ 达最大值的必要条件是存在

协状态变量 λ_1^* 它与 x^* 一起满足正则方程

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{\partial H_1}{\partial \lambda_1}\\ \dot{\lambda}_1=-\dfrac{\partial H_1}{\partial x}\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}\dot{x}=\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}\\ \dot{\lambda}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}\end{cases}$$

并且最优控制 u 使 $H_1(x,\lambda_1,u,t)=L_1(x,u,t)+\lambda_1^T f(x,u,t)$ 达最大值

- **例 6.10** 已知系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2 = u & x_2(0) = 1 \end{cases}$$

求控制 $u(t)$, 满足约束条件 $|u| \le 1$, 将系统的初始状态转移到 $x(t_f) = 0$, 所用时间最短， 式中 $x(t_f) = [x_1(t_f) \quad x_2(t_f)]^T$

解 目标函数取为 $J(u) = \int_0^{t_f} \mathrm{d}t = t_f$

首先写出哈密顿函数： $H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$

由最大值原理 $u^*(t) = \begin{cases} -1 & \text{当}\lambda_2 > 0\text{时}, \\ 1 & \text{当}\lambda_2 < 0\text{时}, \\ \text{不确定} & \text{当}\lambda_2 = 0\text{时}, \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $u^*(t) = -\mathrm{sgn}(\lambda_2(t))$

协状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = A, \lambda_2 = -At + B. \Rightarrow u^* \text{至多有一次切换}$$

（通解）

当 $u^* = -1$ 时，状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2 = -1 & x_2(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow l_1: \begin{cases} x_1 = 1 + t - \frac{1}{2}t^2 \\ x_2 = 1 - t \end{cases}$$

当 $u^* = 1$ 时，状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2 = 1 & x_2(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow l_2: \begin{cases} x_1 = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 \\ x_2 = 1 + t \end{cases}$$

显然，从l_2可看出，当 t 增大时它将远离(1,1)点，也远离(0,0)点。因此最优控制开始应取为 $u^* = -1$ 。这时最优轨线 l_1。

$$\begin{cases} 1 - T = 0 \\ 1 + T - \frac{1}{2}T^2 = 0 \end{cases} \text{无解} \Rightarrow l_1\text{不能到达原点}$$

l_1因此必须在某时刻切换一次才能达到原点。

终值问题：$(u^*=1)$

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 & x_1(t_f)=0 \\ \dot{x}_2 = 1 & x_2(t_f)=0\end{cases} \Rightarrow l_3:\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}t^2-t_f t+\frac{1}{2}t_f^2 \\ x_2 = t-t_f\end{cases}$$

求 l_1 和 l_3 的交点：

$$\begin{cases}t_s-t_f=-t_s+1 \\ \frac{1}{2}t_s^2-t_f t_s+\frac{1}{2}t_f^2=-\frac{1}{2}t_s^2+t_s+1\end{cases} \Rightarrow t_s\approx 2.225 \quad t_f\approx 3.45$$

$\Rightarrow$ 最优控制为：
$$u^*=\begin{cases}-1 & \text{当}0\le t<2.225\text{时} \\ 1 & \text{当}2.225\le t\le 3.45\text{时}\end{cases}$$

这是一个开环控制策略，在 u^* 作用下，到时刻 $t_f=3.45$ 达到原点。

升降机快速降落问题

设升降机的质量 $m=1$，于是升降机的数学模型为

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad x_1(0) = x_{10}$$

$$\dot{x}_2 = u - g \qquad x_2(0) = x_{20}$$

$u(t)$ 满足拉力约束 $|u| \le M$，为保证控制力能操纵升降机，显然应满足$M > g$ 。

升降机的快速降落问题是

求 u 将 $x(0)$ 转移到 $x(t_f) = 0$,使所用时间最短 。

解 取目标函数为 $$J(u) = \int_0^{t_f} dt$$

该问题的哈密顿函数为 $H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 (u - g)$

单输入系统，且是完全能控的。

升降机快速降落问题

由最大值原理，最优控制

$$u^* = -M\,\mathrm{sgn}(\lambda_2(t)) = \begin{cases} -M & 当\lambda_2(t) > 0时 \\ M & 当\lambda_2(t) < 0时 \\ 不确定 & 当\lambda_2(t) = 0时 \end{cases}$$

协状态方程

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = C_1, \lambda_2 = -C_1 t + C_2$$

$\lambda_2(t)$是一条直线，于是 u^* 有四种情况

（1）对于 $t > 0, \lambda_2(t) > 0$ ， $u = -M$ ；

（2）对于 $t > 0, \lambda_2(t) < 0$ ， $u = M$ ；

（3）对于 $t > 0$， $\lambda_2(t)$由大于0切换到小于0， $u = -M$ 切换到 $u = M$

（4）对于 $t > 0$， $\lambda_2(t)$由小于0切换到大于0, $u = M$ 切换到 $u = -M$

升降机快速降落问题

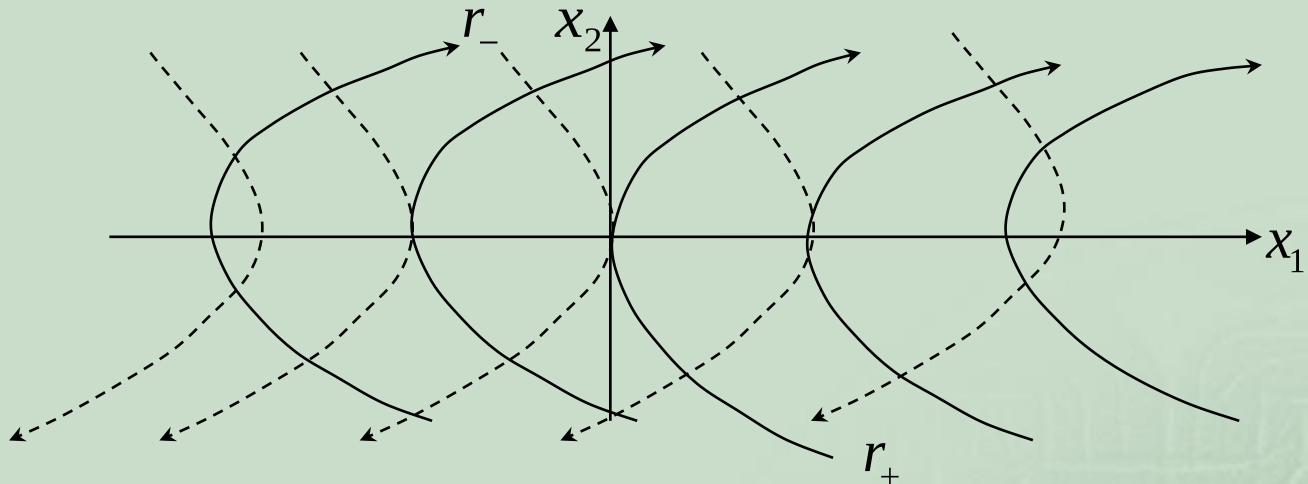


图6-5升降机系统的抛物线族

当 $u = M$ 时状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = M - g \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\frac{x_2^2}{M-g} + C$$

它是 x_1、x_2 平面上的一族抛物线(图6-5中的实线族)。

当 $u = -M$ 时状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -M - g \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}\frac{x_2^2}{M+g} + C$$

它是 x_1、x_2 平面上的一族抛物线(图6-5中的虚线族)。

升降机快速降落问题

图6-5中轨线沿时间运动的方向由箭头指出，因此只有

$$r_+ : \quad x_1 = \frac{1}{2}\frac{x_2^2}{M-g} \qquad x_2 \le 0$$

$$r_- : \quad x_1 = -\frac{1}{2}\frac{x_2^2}{M+g} \qquad x_2 \ge 0$$

可达到原点。r_+和 r_-拼起来构成曲线 r，它将x_1、x_2平面分成两部分：R_- 和 R_+ (见图6-6) 。

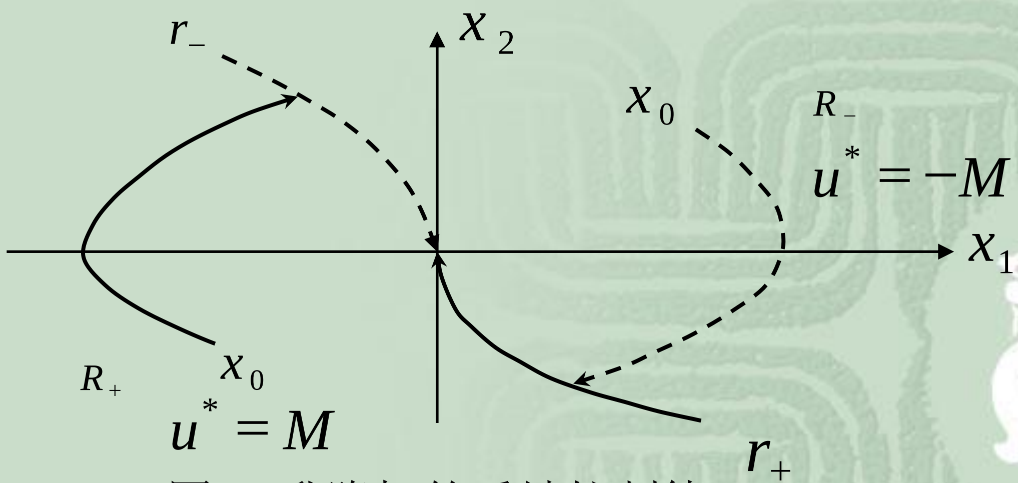


图6-6升降机的反馈控制律

升降机快速降落问题

记 $x_0 = x(0) = [x_1(0), x_2(0)]^T$，控制律为

（1） $x_0 \in r_+, u^* = M,$ 系统直接达到原点。

（2） $x_0 \in r_-, u^* = -M,$ 系统直接达到原点。

（3） $x_0 \in R_-, u^* = -M,$ 到 r_+ 切换为 $u^* = M,$ 系统沿 r_+ 达到原点。

（4） $x_0 \in R_+, u^* = M,$ 到 r_- 切换为 $u^* = -M,$ 系统沿 r_- 达到原点。

由于 u 的取值总是在 r 上切换，因此 r 称为**切换曲线**。

如果定义 R_- 包含 r_-，R_+ 包含 r_+，则控制策略为

$$u^* = \begin{cases} -M & \text{当} x \in R_- \text{时} \\ M & \text{当} x \in R_+ \text{时} \end{cases}$$

6.4 最小时间控制

- 如果把系统由初始状态转移到目标集的时间作为性能指标，则使转移时间最短的控制称为**时间最优控制**（**最小时间控制，最速控制**）

- 一般来说，求非线性系统和任意目标集的时间最优控制的解析解十分困难，这里仅考虑**线性定常系统**且**目标集为状态空间原点**，即末端状态固定时的时间最优控制问题。

（1）最小时间控制问题　6-1

设线性定常系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

是完全能控的，$x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, A, B$为适当的常阵。

求满足下列不等式约束的容许控制：

$$\left| u_j(t) \right| \leq 1; \qquad j = 1, 2, \cdots, m$$

使系统从已知初态 $x(0)=x_0$ 转移到 $x(t_f)=0$，并使性能指标

$$J = \int_0^{t_f} dt$$

极小，其中t_f自由。

只有系统正常时,上述问题才能应用最大值原理求得最优解。

（2）正常情况与奇异情况

构造哈密顿函数

$$H(x,u,\lambda)=1+\lambda^T Ax+\lambda^T Bu$$

根据最大值条件 $H^* = \min\limits_{u\in U} H$

设 $B=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix}$ $\quad g_j(t)=\lambda^T(t)b_j$

其中 $b_j \in R^n, j=1,2,\cdots,m$ 则有：

$$u_j^*(t)=-\operatorname{sgn}\{g_j(t)\}=\begin{cases} +1, g_j(t)<0 \\ -1, g_j(t)>0 \\ \text{不定}, g_j(t)=0 \end{cases}$$

- 若 $g_j(t) \neq 0, \forall t \in [0, t_f]$,则可用最大值原理确定 $u_j^*(t)$ 这种情况称为正常(平凡)情况，相应的系统称为正常系统。

- 若 $g_j(t) = 0, \forall t \in [t_1, t_2] \subset [0, t_f]$, 则因 $u_j^*(t)$ 不定，无法应用最大值原理确定，只能取满足约束条件 $|u_j(t)| \leq 1$ 的任意值。这种情况称为奇异(非平凡)情况，相应的系统称为奇异系统。

（3）奇异性的充分必要条件

- 定理：对于问题 $\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(0) = x_0$

  设矩阵 $G_j = [b_j \quad Ab_j \quad \cdots \quad A^{n-1}b_j]$ ； $j = 1,2,\cdots,m$

  其中$\boldsymbol{b}_j \in R^n$为矩阵B的列向量。

  当且仅当m个G_j矩阵中至少有一个G_j是奇异矩阵时，最小时间控制问题6-1是奇异的。

- **定理**：最小时间控制问题6-1 是正常的当且仅当

$$\mathrm{rank}G_j = n; \quad \forall j = 1,2,\cdots,m$$

其中，$\boldsymbol{b}_j \in R^n$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix}$，$G_j$为$n \times n$矩阵，且

$$G_j = [b_j \quad Ab_j \quad \cdots \quad A^{n-1}b_j]; \quad j = 1,2,\cdots,m$$

- 即要求每个$(A,\boldsymbol{b}_j)$都是能控对，也就是说系统对每个控制分量u_j都是完全能控的。

- 系统正常，系统能控的关系
  - 系统能控是系统正常的前提条件
  - 单输入系统 j=1, 系统正常，系统能控等价

（4）Bang-Bang控制原理

- 对于定常线性系统，若**系统正常**，则可应用最大值原理求解时间最优控制问题，其最优控制在**容许控制域**内，从一个边界值来回切换到另一个边界值，形成**Bang-Bang控制特色**。
- 其结果可归纳为如下定理。

- 定理：对于最小时间控制问题6-1

  若系统 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$ 正常，则最优解的**必要条件**为

  - 正则方程

$$\dot{x}(t)=\frac{\partial H}{\partial \lambda}=Ax(t)+Bu(t)$$

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}=-A^T\lambda(t)$$

其中哈密顿函数

$$H(x,u,\lambda)=1+\lambda^T(t)[Ax(t)+Bu(t)]$$

  - 边界条件

$$x(0)=x_0, \qquad x(t_f)=0$$

▶极小值条件

$$u_j^*(t) = -\mathrm{sgn}(b_j^T \lambda) = \begin{cases} +1, & b_j^T \lambda < 0 \\ -1, & b_j^T \lambda > 0 \end{cases} \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

其中，$\boldsymbol{b}_j \in R^n$，$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix}$

▶在最优轨线末端

$$H^*(t_f^*) = 0$$

§ 6.5 应用举例

- **1.火箭控制问题**

火箭控制问题的数学模型是

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_3 & x_1(0)=0 & x_1(t_f)\text{自由} \\ \dot{x}_2 = x_4 & x_2(0)=0 & x_2(t_f)=\bar{y} \\ \dot{x}_3 = \dfrac{c\beta}{m}\cos\phi & x_3(0)=0 & x_3(t_f)=\bar{v} \\ \dot{x}_4 = \dfrac{c\beta}{m}\sin\phi - g & x_4(0)=0 & x_4(t_f)=0\end{cases}$$

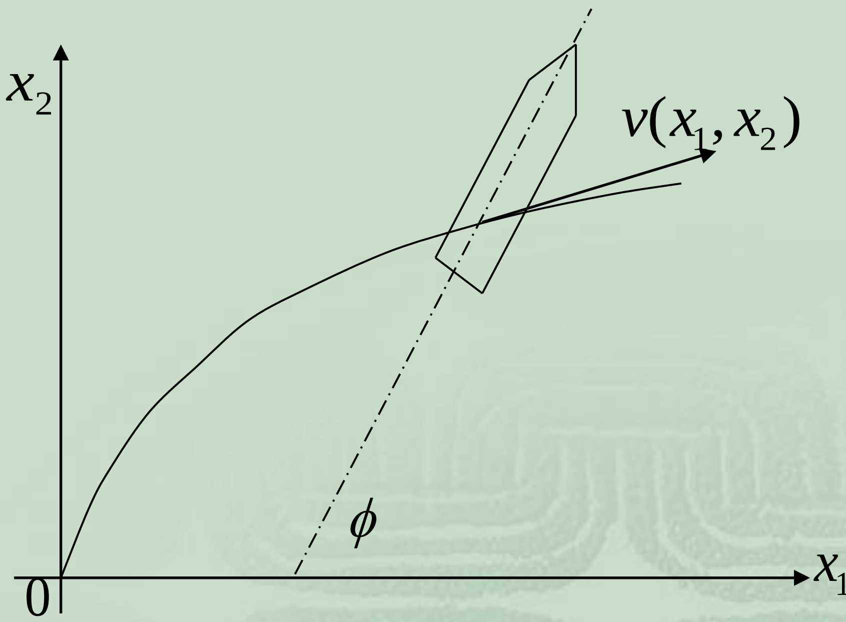


图6-4火箭发示意图

x_1, x_2 ——火箭质心的横坐标和纵坐标

x_3, x_4 ——速度 v 的水平分量和垂直分量

ϕ ——是火箭的动态姿态角(火箭轴线与水平线之间的夹角)

β 是燃烧速度　　c 是相对排气速度　　m 是火箭的质量

火箭控制问题

火箭控制的最省燃料问题是：

在约束条件 $0 \le \beta \le \bar{\beta}$ 之下，求控制 β, ϕ 使火箭由初始位置达到要求的高度 $\bar{y}$，所用燃料最少，即使

$$J(\beta, \varphi) = \int_0^{t_f} \beta dt \quad \text{最小。}$$

哈密顿函数为

$$H = \beta + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 + \lambda_3 \frac{c\beta}{m} \cos\varphi + \lambda_4 \left(\frac{c\beta}{m} \sin\varphi - g\right)$$

由最大值原理，及 H 关于 β 的线性关系

$$\beta = \begin{cases} \bar{\beta} & \text{当} 0 \le t < t_1 \text{时} \\ 0 & \text{当} t_1 \le t \le t_f \text{时} \end{cases}$$

又由于 ϕ 无约束，有 $\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = -\lambda_3 \dfrac{c\beta}{m} \sin\varphi + \lambda_4 \dfrac{c\beta}{m} \cos\varphi = 0$

从而解得 $\tan\phi = \dfrac{\lambda_4}{\lambda_3}$

火箭控制问题

下面解正则方程，首先写出协状态方程：

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = 0 \\ \dot{\lambda}_3 = -\lambda_1 \\ \dot{\lambda}_4 = -\lambda_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{ll} \lambda_1 = A & \lambda_2 = B \\ \lambda_3 = -At + \bar{C} & \lambda_4 = -Bt + D \end{array}$$

（通解）

由于 $x_1(t_f)$ 自由，得到边界条件 $\lambda_1(t_f) = 0,$ $\longrightarrow$ $A = 0, \lambda_3 = \bar{C}.$

代入 $\tan\varphi$ 中得到 $\tan\varphi = \dfrac{-Bt + D}{\bar{C}} = a - bt$ $\quad a = \dfrac{D}{\bar{C}}, b = \dfrac{B}{\bar{C}}$

由以上推导得到 $\beta = \begin{cases} \bar{\beta} & \text{当} 0 \le t < t_1 \text{时} \\ 0 & \text{当} t_1 \le t \le t_f \text{时} \end{cases}$ $\quad \tan\varphi = a - bt$

2. 水库的最优管理问题

水库的最优管理问题是：

求最优注入流速 $u(t)$ 使得在100天内注入水库的水量为 K 并且到第100天时水位最高。

$x(t)$ ——水库的水位

$u(t)$ ——注入水库的水的流速 $0 \le u(t) \le M$ （水的最大流速）

水库的渗透系数为0.1

水库的状态方程是 $\dot{x} = -0.1x(t) + u(t)$

化为最优控制问题：

求最优注入流速 $u(t)$ 使得它满足 $0 \le u(t) \le M$ 和 $\int_0^{100} u(t)\mathrm{d}t = K$

并使 $J = -x(100)$ 最小。

水库的最优管理问题

定义一个新变量 $y(t)=\int_0^t u(t)dt \quad \dot{y}=u(t)$

积分形式的约束就化为：$y(0)=0 \quad y(100)=K$

对于方程组：
$$\dot{x}=-0.1x+u(t)$$
$$\dot{y}=u(t)$$

哈密顿函数为

$$H=\lambda_1(-0.1x+u)+\lambda_2 u=-0.1\lambda_1 x+(\lambda_1+\lambda_2)u$$

由最大值原理 $u^*=\begin{cases}0 & \text{当}\lambda_1+\lambda_2>0\text{时}\\ M & \text{当}\lambda_1+\lambda_2<0\text{时}\end{cases}$

协状态方程

$$\dot{\lambda}_1=0.1\lambda_1 \qquad \lambda_1(100)=-1 \qquad \lambda_1(t)=-e^{-10+0.1t}$$
$$\dot{\lambda}_2=0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_2(t)=\text{常数}$$

水库的最优管理问题

$\lambda_1'(t) < 0$

$\lambda_1(t)$）是单减函数

$\Rightarrow$ $\lambda_1 + \lambda_2$ 如果有符号的变化必是由大于0到小于0。

最优控制为 $u^* = \begin{cases} 0 & t \in [0, \tau] \\ M & t \in [\tau, 100] \end{cases}$

水流入的速度为M，由注入水库的水量为K的约束，流入的时间应为 K/M

$$100 - \tau = K / M \qquad \tau = 100 - K / M$$

最优控制

$$u^* = \begin{cases} 0 & t \in [0, 100 - \frac{K}{M}] \\ M & t \in [100 - \frac{K}{M}, 100] \end{cases}$$