

# 第四章 线性空间

## 第二节 $n$ 维线性空间

## §4.2.1 $n$ 维线性空间的定义

我们知道：

对于几何空间中的向量，线性无关的向量**最多**是3个，而任意4个向量是线性相关的。

$n$ 维数组构成的向量空间，**至多**有 $n$ 个线性无关的向量，任意 $n+1$ 个向量线性相关。

**?** 在一个线性空间中，究竟最多能找到多少个线性无关的向量呢？

**定义** 如果线性空间 $V$ 中存在由 $n$ 个向量构成的极大线性无关组，则 $V$ 称为 $n$ 维线性空间。记为  $\dim(V)=n$ 。

$V$ 的极大线性无关子组称为 $V$ 的**基底**。

## 特殊情况

**零空间**（无基底）的维数**规定为零**。

若 $V$ 中可以找到**任意**个线性无关的向量，则 $V$ 称为是**无穷维**（**无限维**）的。

例如：

(1)  $n$ 元齐次线性方程组的解空间是 $n-r$  ( $r$ 是系数矩阵的秩)维的。

当 $r < n$ 时，每个基础解系都是解空间的一个基底。

(2)  $M_{m \times n}(R)$  是  $mn$  维线性空间.

$E_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ) (表示第  $i$  行、第  $j$  列处的元为 1, 其余元全为零的矩阵), 构成其一个基底.

因为: 它们线性无关且  $M_{m \times n}(R)$  中任一元

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \cdots + a_{1n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{m1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{mn} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ &= a_{11} E_{11} + \cdots + a_{1n} E_{1n} + \cdots + a_{m1} E_{m1} + \cdots + a_{mn} E_{mn} \end{aligned}$$

(3) 所有 $n$ 阶实对称矩阵关于矩阵的线性运算构成的线性空间维数为  $n(n+1)/2$ .

$E_{ij}(i,j=1,2,\dots,n)$ 定义同上, 该线性空间中任意一个元

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{nn} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
 &+ a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{1n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{n-1,n} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= a_{11}E_{11} + \cdots + a_{nn}E_{nn} \\
 &+ a_{12}(E_{12} + E_{12}^T) + \cdots + a_{1n}(E_{1n} + E_{1n}^T) + \cdots + a_{n-1,n}(E_{n-1,n} + E_{n-1,n}^T)
 \end{aligned}$$

而且  $E_{ii} (i=1,2,\dots,n), (E_{ij} + E_{ij}^T) (i,j=1,2,\dots,n, i < j)$  线性无关.



(4)**一元多项式环**：由一切实系数多项式关于通常的线性运算所构成的线性空间  $P[x]$ .

对于任意大的 $n$ ， $n+1$ 个向量  $1, x, x^2, \dots, x^n$  线性无关，故 $P[x]$ 中可以找到有任意个线性无关向量的子组，从而 $P[x]$ 是**无穷维**的.

**有序基底**的定义： 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 的基底，若将它们排成一个有序组，则称该有序组为一个有序基底. 记为 $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ . 以后称为**基底**或**基**.

**基底与向量的关系：**

**定理1** 设  $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$  是 $n$ 维线性空间 $V$ 的一个基底, 则 $V$ 中的任何向量均可由基底线性表出, 且表出形式唯一.

对于  $\forall \alpha \in V$ , 必有唯一一组数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 使得

$$\alpha = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \dots + a_n \alpha_n$$

因此,  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  与  $\alpha$  一一对应, 我们称  $n$  元有序数组  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  为向量  $\alpha$  在基  $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$  下的坐标.

## 坐标的计算

**定理2** 设在基底  $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$  下,  $n$  维线性空间  $V$  中的向量  $\alpha, \beta$  的坐标分别为

$$X = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad Y = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

则向量  $\alpha + \beta$  与  $\lambda \alpha$  ( $\lambda$  是数) 的坐标分别为

$$X + Y = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$\lambda X = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$$

证 依坐标定义有

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$$
$$\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n$$

于是

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1)\alpha_1 + (a_2 + b_2)\alpha_2 + \cdots + (a_n + b_n)\alpha_n$$
$$\lambda\alpha = (\lambda a_1)\alpha_1 + (\lambda a_2)\alpha_2 + \cdots + (\lambda a_n)\alpha_n$$

由此知定理成立.

## 定理1, 2的意义

根据定理1和2, 有了坐标的概念之后, **抽象的** $n$ 维线性空间的向量及向量的线性运算, 通过坐标及坐标的相应运算表示出来, 转换为研究我们**熟悉的** $n$ 元有序数组(向量)及其运算.



**例1** 设向量  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 的坐标为  $Z_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$   
 $i=1, 2, \dots, m$ , 则易知等式

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_m \alpha_m = 0 \quad (x_i \text{是数})$$

成立的充要条件是向量等式

$$x_1 Z_1 + x_2 Z_2 + \dots + x_m Z_m = 0$$

成立, 又可转化为线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m = 0 \end{cases}$$

解的问题.

例2 求 $R^3$ 中向量 $\alpha=(1,2,1)$ 在基底 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 下的坐标.

其中,  $\alpha_1=(1,1,1)$ ,  $\alpha_2=(1,1,-1)$ ,  $\alpha_3=(1,-1,-1)$ .

解: (待定系数法) 设 $\alpha$ 的坐标为 $(x_1, x_2, x_3)$ , 则有

$$\begin{aligned}(1, 2, 1) &= \alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 \\ &= x_1(1, 1, 1) + x_2(1, 1, -1) + x_3(1, -1, -1)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

解之得  $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -\frac{1}{2}$ , 于是 $\alpha$ 在基底

$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$  下的坐标为  $\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ .

**例3** 在 $n$ 维线性空间 $V$ 中,  $n$ 个向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 构成基底  $\Leftrightarrow$  用它们在同一个基底下的坐标作为行(列)向量的 $n$ 阶行列式不等于零.

**证** 在 $V$ 中取定一个基底, 设向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 在该基底下的坐标为

$$X_1 = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n})$$

$$X_2 = (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n})$$

...

$$X_n = (b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nn})$$

则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 构成基底

$\Leftrightarrow \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关,

即 $n$ 维向量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 线性无关.

$\Leftrightarrow$ 以 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为行(列)的行列式不等于零.

**例4** 在 $P_3[x]$ 中, 取向量组

$$f_1=1+2x+x^3, f_2=1+x+x^2, f_3=1+x^2, f_4=1+3x+x^3.$$

问向量组  $f_1, f_2, f_3, f_4$  是否线性相关?

**解:** 在 $P_3[x]$ 中, 先取定一个基为 $[1, x, x^2, x^3]$ , 于是得到

$f_1, f_2, f_3, f_4$  在该基底下的坐标依次为

$$(1, 2, 0, 1), (1, 2, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 1)$$

以它们为列构成的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 而 } |A| \stackrel{r_1 - r_3 - r_4}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

故:  $r_A < 4$ , 因此向量组 $f_1, f_2, f_3, f_4$  线性相关.



例5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  ( $m \leq n$ ) 是 $n$ 维线性空间 $V$ 中的 $m$ 个线性无关的向量, 则必可在 $V$ 中找到 $n - m$ 个向量 $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n$ 使得向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 成为 $V$ 的一个基底.

证: 对差数 $n - m$ 用数学归纳法.

当 $n - m = 0$ 时, 它们已是 $V$ 的一个基底, 定理显然成立.

假设当 $n - m = k$ 时定理成立, 现证明当 $n - m = k + 1$ 时, 定理也成立.

由于 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 还不是 $V$ 的基底, 故 $V$ 必有向量不能被它们线性表出 (否则 $A$ 构成一个基底, 矛盾), 任取其中一个并记为 $\alpha_{m+1}$ , 于是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 仍是线性无关组 (否则 $\alpha_{m+1}$ 可经线性无关向量组 $A$ 线性



表出, 矛盾). 此时差数  $n - (m+1) = k+1-1 = k$ . 由归纳法假设知在  $V$  中必可选出  $n - m$  个向量  $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n$  使得向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  成为  $V$  的一个基底.

类似方法可以证明下面命题:

$n$  维向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  ( $s > 0$ )  
的任意一个线性无关子组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}$  ( $1 \leq m \leq s$ )  
均可扩充成其一个极大线性无关子组.

## §4.2.2 基底变换与坐标变换

例1 在 $n$ 维线性空间 $P_{n-1}[x]$ 中, 求多项式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

在基底  $[1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}]$  和基底  $[1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}]$  下的坐标 ( $a$ 为常数) .

解:  $f(x)$ 在基底  $[1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}]$  下坐标为  $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$   
由泰勒公式, 把  $f(x)$ 在 $x=a$ 处展开得

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}$$

$$f^{(n)} = 0, f^{(n+1)} = 0, \cdots$$

因此, 在基底  $[1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}]$  下的坐标为

$$\left( f(a), f'(a), \frac{1}{2!} f''(a), \cdots, \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \right)$$

同一个向量在不同基下的坐标一般是**不同**的。

**?**：随着基底的变化，向量的坐标是怎样变化？

为表达方便，先看一种**形式的记法**：

借助于矩阵乘法规则，把表示向量、基底和坐标的关系式表记为：

$$\begin{aligned}\alpha &= a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\ &= [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] X\end{aligned}$$

其中  $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  是向量  $\alpha$  在基底  $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$

下的坐标列向量。

注意：这里 $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ 不是矩阵，上式也并非真正的矩阵乘法，这仅仅是一种约定记法，在形式上利用了矩阵乘法规则，在运算规律上符合矩阵的运算规则。

## 过渡矩阵的定义

设 $n$ 维线性空间 $V$ 中两组不同的基底  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]$  和  $[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]$ .

设每个 $\eta_i$ 在基底  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]$  下的坐标为  $X_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$

利用前面的记法，有 
$$\begin{cases} \eta_1 = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n] X_1 \\ \eta_2 = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n] X_2 \\ \vdots \\ \eta_n = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n] X_n \end{cases}$$

再利用前面的记法写成矩阵形式

$$\begin{aligned} [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n] &= [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n] (X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ &= [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n] M \end{aligned}$$

其中,  $M = (X_1, X_2, \cdots, X_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

称为由基底  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]$  到基底  $[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]$  的**过渡矩阵**

(或**演化矩阵**). 显然, 由于  $M$  的第  $j$  列是  $\eta_j$  在基底

$[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]$  下的坐标, 由于  $[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]$  **线性无关** 知

线性无关知  $M$  为**满秩**矩阵.



# 过渡矩阵的应用

设 $V$ 中向量 $\alpha$ 在基底  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]$  和  $[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]$  下的坐标分别为

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{即 } \alpha = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n] X$$

$$\alpha = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n] Y$$

设由基底  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]$  到基底  $[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]$  的过渡矩阵为 $M$ , 利用矩阵形式写法得

$$\begin{aligned}\alpha &= [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n] X = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n] Y \\ &= ([\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n] M) Y = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n] (M Y)\end{aligned}$$

由于 $\alpha$ 在基底  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]$  下的坐标是唯一的，因此有

$$X = M Y$$

也即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

因为 $M$ 可逆，又有  $Y = M^{-1} X$

于是，我们在已知过渡矩阵 $M$ 以及 $X$ 或 $Y$ 之一时，可求出另外一个。

**定理** 设 $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]$ 和 $[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 的两个基底，向量在上式二基底下的坐标分别为 $X$ 和 $Y$ ，则当**基底变换**为

$$[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n] M$$

时，**坐标变换公式**为

$$X = M Y \text{ 或 } Y = M^{-1} X$$

**例2** 在 $R^n$ 中， $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $\varepsilon_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$  是一个基底， $\varepsilon'_1 = (1, 1, 1, \dots, 1)$ ,  $\varepsilon'_2 = (0, 1, 1, \dots, 1)$ , ...,  $\varepsilon'_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$  是另外一个基底.

已知向量 $\alpha$ 在基底  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]$  下的坐标为  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . 求 $\alpha$ 在基底  $[\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n]$  下的坐标.

解：设 $\alpha$ 在基底  $[\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n]$

下的坐标为  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,

由于  $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$

$$\varepsilon'_2 = \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon'_n = \varepsilon_n$$

因而，从基底  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]$   
到  $[\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n]$  的过渡矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 - a_1 \\ a_3 - a_2 \\ \vdots \\ a_n - a_{n-1} \end{pmatrix}$$

此即 $\alpha$ 在基底  
 $[\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n]$   
下的坐标.

**例3** 在 $R^3$ 中取两组基

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= (1, 2, 1)^T, \varepsilon_2 = (2, 3, 3)^T, \varepsilon_3 = (3, 7, 1)^T \\ \eta_1 &= (3, 1, 4)^T, \eta_2 = (5, 2, 1)^T, \eta_3 = (1, 1, -6)^T\end{aligned}$$

- (1) 求由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 的过渡矩阵 $M$ ;
- (2) 设向量 $\alpha$ 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 的坐标为 $(1, -1, 0)^T$ , 求 $\alpha$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的坐标 $(x_1, x_2, x_3)^T$ ;
- (3) 已知向量 $\beta$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的坐标为 $(1, -1, 0)^T$ , 求 $\beta$ 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 下的坐标 $(y_1, y_2, y_3)^T$ ;

解: (1) 法1 **直接看出法**, 当 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 为单位向量时, 可以类似上面例子之间看出来.

**法2 待定系数法**



设  $\eta_1 = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + k_3\varepsilon_3$  , 可得 
$$\begin{cases} 3 = k_1 + 2k_2 + 3k_3 \\ 1 = 2k_1 + 3k_2 + 7k_3 \\ 4 = k_1 + 3k_2 + k_3 \end{cases}$$

解之得  $k_1 = -27, k_2 = 9, k_3 = 4$

故  $\eta_1 = -27\varepsilon_1 + 9\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3$

类似可得  $\eta_2 = -71\varepsilon_1 + 20\varepsilon_2 + 12\varepsilon_3$

$$\eta_3 = -41\varepsilon_1 + 9\varepsilon_2 + 8\varepsilon_3$$

所以  $[\eta_1, \eta_2, \eta_3] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3] \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$

故基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  到基  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  的过渡矩阵 
$$M = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

法3 中介法 在 $R^3$ 中, 取一组基底为

$$e_1 = (1, 0, 0)^T, \quad e_2 = (0, 1, 0)^T, \quad e_3 = (0, 0, 1)^T$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (1, 2, 1)^T, \quad \varepsilon_2 = (2, 3, 3)^T, \quad \varepsilon_3 = (3, 7, 1)^T \\ \eta_1 &= (3, 1, 4)^T, \quad \eta_2 = (5, 2, 1)^T, \quad \eta_3 = (1, 1, -6)^T \end{aligned}$$

则

$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3] = [e_1, e_2, e_3] \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = [e_1, e_2, e_3] A$$

$$[\eta_1, \eta_2, \eta_3] = [e_1, e_2, e_3] \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} = [e_1, e_2, e_3] B$$

$$\text{所以 } [e_1, e_2, e_3] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3] A^{-1}$$

$$\begin{aligned} [\eta_1, \eta_2, \eta_3] &= [e_1, e_2, e_3] B = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3] A^{-1} B \\ &= [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3] (A^{-1} B) \end{aligned}$$

于是过渡矩阵为

$$M = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ -11 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

# 小 结

- 线性空间的定义，维数确定
- 知道一些特殊的线性空间，如零空间， $R^{m \times n}$ ，等
- 知道一些概念：基、坐标、过渡矩阵
- 会计算坐标、过渡矩阵（重点），用坐标研究 $n$ 维线性空间的一些问题
- 基底变换与坐标变换公式（重点）