多元微分应用习题解答

1\. 螺旋线$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \\ z=\theta \end{cases}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ 上与平面$x+y+z=0$平行的切线有几条？

螺旋线上任意一点的切线的方向向量为 $\vec{\tau}=(-\sin\theta,\cos\theta,1)$. **已知平面的法向量** $\vec{n}=(1,1,1)$. **由** $\vec{\tau}\perp\vec{n}$**，有**

$$-\sin\theta+\cos\theta+1=0,$$

解得 $\theta_1=\dfrac{\pi}{2}$ **与** $\theta_2=\pi$. **因此与平面** $x+y+z=0$ **平行的切线有 2 条，其切向量分别为**

$$\vec{\tau}_1=(-1,0,1),\ \vec{\tau}_2=(0,-1,1).$$

当$\theta_1=\dfrac{\pi}{2}$ **时，对应于曲线上的点**$P_1(0,1,\dfrac{\pi}{2})$**，曲线在此点的切线方程为** $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-\frac{\pi}{2}}{1}$.

当$\theta_2=\pi$**时，对应于曲线上的点**$P_2(-1,0,\pi)$**，曲线在此点的切线方程为** $\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-\pi}{1}$.

2\. 设l是曲面$z=y^2+x^3y$上的一条曲线在点$(2,1,9)$的切线。若l在xOy面上的投影平行于直线$y=x$，求此切线l的方程。

解法 1 设切线的方向向量为$\vec{v}$. **因曲面上任意一条曲线在点**$(2,1,9)$**处的切线都在曲面在点**$(2,1,9)$ **的切平面上，而曲面** $z=y^2+x^3y$ **在点**$(2,1,9)$ **的法向量**

$$\vec{n}=(z_x,z_y,-1)|_{(2,1)}=(3x^2y,2y+x^3,-1)|_{(2,1)}=(12,10,-1),$$

故$\vec{v}\perp\vec{n}$.

又l **平行于平面** $y=x$**，而平面** $y=x$ **的法向量为**$\vec{n}_1=(1,-1,0)$**，故又有**$\vec{v}\perp\vec{n}_1$. **因此可取**

$$\vec{v}=\vec{n}\times\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 12 & 10 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=(-1,\ -1,\ -22)=-(1,1,22),$$

则所求切线的参数方程为 $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=9+22t \end{cases}$.

解法 2 曲面 $z=y^2+x^3y$ 在点 $(2,1,9)$ 的法向量

$$\vec{n}=(z_x,z_y,-1)|_{(2,1)}=(3x^2y,2y+x^3,-1)|_{(2,1)}=(12,10,-1)$$

故曲面 $z=y^2+x^3y$ 在点 $(2,1,9)$ 的切平面方程为 $12(x-2)+10(y-1)-(z-9)=0$，或

$$12x+10y-z-25=0.$$

又设 l 在 xOy 面上的投影直线的方程为

$$y=x+C.$$

代入点 $(2,1)$，得 $C=-1$．于是，l 在 xOy 面上的投影直线的方程为 $y=x-1$．

故 l 的方程为 $\begin{cases}12x+10y-z-25=0\\ x-y-1=0\end{cases}$.

3. 求椭球面$x^2+2y^2+z^2=1$平行于平面$x-y+2z=0$的切平面方程.

$x-y+2z+\sqrt{\dfrac{11}{2}}=0$ 和 $x-y+2z-\sqrt{\dfrac{11}{2}}=0$.

4. 已知曲面$4x^2+y^2-z^2=1$上的点P处的切平面π平行于平面$2x-y+z=1$, 求切平面π的方程.

解 设 $F(x,y,z)=4x^2+y^2-z^2-1$，则曲面在点 (x,y,z) 处的法向量为

$$\vec{n}=(8x,2y,-2z)=2(4x,y,-z).$$

由题设，$\vec{n}$ 与平面 $2x-y+z=1$ 的法向量 $(2,-1,1)$ 平行，可设

$$\frac{4x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{-z}{1}=t,$$

得 $x=\dfrac{1}{2}t,\ y=-t,\ z=-t$．代入曲面的方程

$$4\left(\frac{t}{2}\right)^2+(-t)^2-(-t)^2=1,\ \text{解得}\ t=\pm1.$$

当 $t=1$ 时，得曲线上的一点 $P_1(\frac{1}{2},-1,-1)$，故所求切平面的方程为

$$2(x-\frac{1}{2})-(y+1)+(z+1)=0,\quad \text{即}\ 2x-y+z=1.$$

当 $t=-1$ 时，得曲线上的一点 $P_2(-\frac{1}{2},1,1)$，故所求切平面的方程为

$$2(x+\frac{1}{2})-(y-1)+(z-1)=0,\quad \text{即}\ 2x-y+z=-1.$$

5. 若函数$f(x,y)=ax^2+bxy-y^2$有一个唯一的极大值$f(0,0)$，则常数a,b应满足

(A) $a>-\dfrac{b^2}{4}$ (B) $a<\dfrac{b^2}{4}$ (C) $a<-\dfrac{b^2}{4}$ (D) 上述结论都不正确

6. 若可微函数$z=f(x,y)$的全微分为$\mathrm{d}z=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，则 (C)

(A) $f(0,0)$为极大值 (B) $f(0,0)$为极小值 (C) $f(0,0)$不是极值 (D) 不能判断f在$(0,0)$处是否有极值

解 $f_x(x,y)=2ax+by,\quad f_y(x,y)=bx-2y$. $f_{xx}(x,y)=2a,\quad f_{xy}(x,y)=b,\quad f_{yy}(x,y)=-2$.

于是 $-4a-b^2>0 \quad\Rightarrow\quad a<-\dfrac{b^2}{4}$.

7. 求函数$z=x^2+y^2$在区域D: $x^2+y^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y\le 5$ 上的最大值与最小值。

解 先求函数$z=x^2+y^2$在区域D内的驻点，令$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x=0,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y=0$，解得驻点$(0,0)$，显然在区域$D$ 内，由于$z=x^2+y^2\ge 0$，所以$z\big|_{x=0,y=0}=0$为函数的最小值。

再求函数$z=x^2+y^2$在区域D的边界上的驻点。

法1. 令$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\left(x^2+y^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y-5\right)$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+\lambda(2x-2\sqrt{2})=0 \qquad (1)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y+\lambda(2y-2\sqrt{2})=0 \qquad (2)$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y-5 \qquad (3)$$

由(1), (2)得$x=y$，代入(3)得到$x=y=\frac{5}{2}\sqrt{2}$, 或 $x=y=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

计算$z\big|_{x=y=-\frac{\sqrt{2}}{2}}=1,\ z\big|_{x=y=\frac{5\sqrt{2}}{2}}=25$，所以后者为函数$z=x^2+y^2$ 在区域D的边界上的最大值，同时也是在区域D上的最大值。

法2. 由于区域D为$(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\le 3^2$，所以其边界曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}+3\cos t, \\ y=\sqrt{2}+3\sin t, \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$$

求函数在边界曲线上的驻点可化为求$z=\left(\sqrt{2}+3\cos t\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\sin t\right)^2$的驻点。

$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=6\sqrt{2}(-\sin t+\cos t)$，令$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=0$，得驻点$t=\dfrac{\pi}{4},t=\dfrac{5\pi}{4}$. 计算

$$z\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=25,\quad z\big|_{t=\frac{5\pi}{4}}=1,\quad z\big|_{t=0}=13+6\sqrt{2},\quad z\big|_{t=2\pi}=13+6\sqrt{2},$$

于是可知，当$t=\frac{\pi}{4}$，即$x=y=\frac{5}{2}\sqrt{2}$时，函数$z=x^2+y^2$在区域D的边界上取得最大值，同时也是在区域D上的最大值。

8. （15经管）设曲面S: $(x-y)^2-z^2=1$.

(1) 求曲面S在点$M(1,0,0)$处的切平面π的方程.

(2) 证明：原点到曲面S上的点的距离的最小值等于原点到平面π的距离.

（1）解 记$F(x,y,z)=(x-y)^2-z^2-1$，则曲面S在点$M(1,0,0)$处的法向量为

$$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)|_{(1,0,0)}=(2(x-y),-2(x-y),-2z)|_{(1,0,0)}=(2,-2,0).$$

所以，曲面S在点$M(1,0,0)$处的切平面π的方程为

$2(x-1)-2y=0$，即 $x-y-1=0$.

（2）证 原点到曲面S上的点(x,y,z)的距离为 $d(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$．记

$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda((x-y)^2-z^2-1),$$

令
$$\begin{cases} L_x=2x+2\lambda(x-y)=0 & (1)\\ L_y=2y-2\lambda(x-y)=0 & (2)\\ L_z=2z-2\lambda z=0 & (3)\\ (x-y)^2-z^2-1=0 & (4)\end{cases}$$

由(1)式和(2)式知，$x=-y$，代回(1)式或(2)式得 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 或 $x=y=0$．由(3)式得 $\lambda=1$ 或 $z=0$.

若$\lambda=-\frac{1}{2}$，则$z=0$，再由(4)式得

$$4x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}.$$

若$\lambda=1$，则$x=y=0$，这时(4)式无实数解.

由以上讨论，得到此条件极值有两个驻点：$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$，$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$.

此实际问题有最小值存在，因此原点到曲面S上的点的距离的最小值为

$$d_{\min}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

又原点到平面π的距离为

$$\left.\frac{|x-y-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right|_{(0,0,0)}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$