第六章 抽　样

在一定条件下，一个连续时间信号完全可以用这个信号在等时间间隔上的瞬时值（样本值）表示，并且可以用这些样本值将该信号恢复出来。

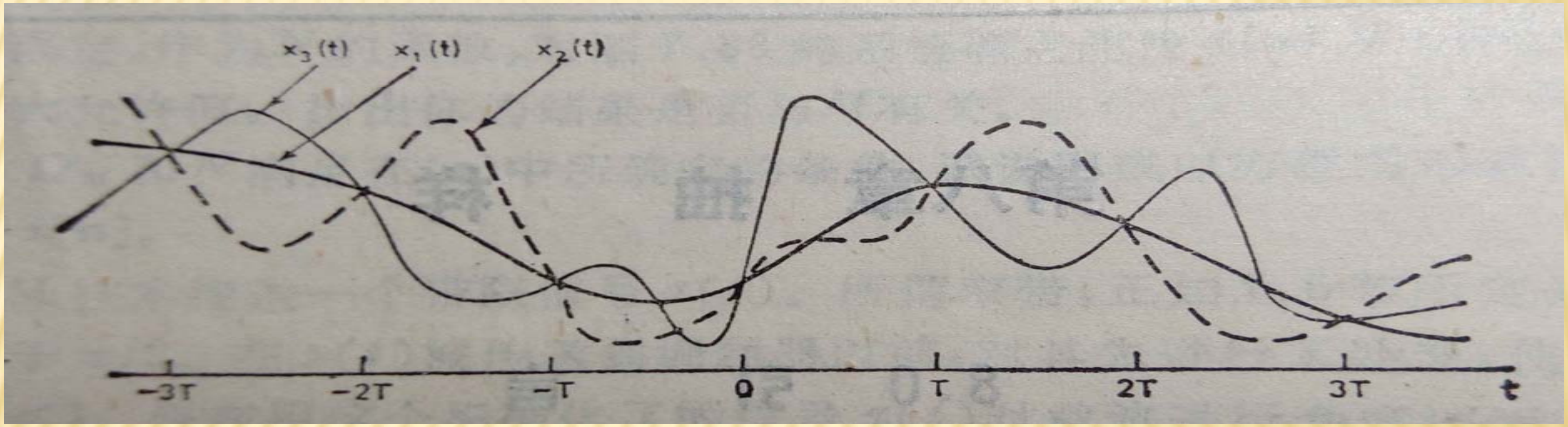
以上结论来自一个非常重要的定理：香农抽样定理。

抽样定理在连续时间信号和离散时间信号之间起到了桥梁的作用。

利用这个定理，我们可以将一个连续时间信号毫无损失的转变为离散时间信号，然后利用计算工具对数字化的信号进行处理，最后又将处理过的离散信号再转化为等效的连续信号。

§1 利用信号的样本表示连续信号——抽样定理

在一般情况下，利用一组等间距的样本值来唯一地表示一个连续信号，如果没有其他条件限制，其结果是不确定的。



3个信号：$x_1(t)$，$x_2(t)$，$x_3(t)$

从上图可以看出，如果以T做为时间间隔进行抽样，可以看到在所有的抽样点上都相等，即：

$$x_1(nT) = x_2(nT) = x_3(nT)$$

显然，以上的抽样点组不能准确的表示三个连续信号。

直观感觉：信号 $x_2(t)$，$x_3(t)$ 变化比较快，而相对的抽样点较少，时间间隔太大，即**采样速度（频率）**不够。

如何确定采样频率?

一、冲击串抽样函数

定义冲击串函数：$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$

$p(t)$ 抽样函数，T抽样周期。

$f_s=\dfrac{1}{T}$ 抽样频率。 $\omega_s=2\pi f_s$ 抽样角频率，又称为基波角频率。

设 $x(t)$ 为一连续函数，经 $p(t)$ 抽样后的离散函数为：

$$x_p(t)=x(t)\cdot p(t)=x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-nT)$$

由傅里叶变换的性质得:

$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega)$$

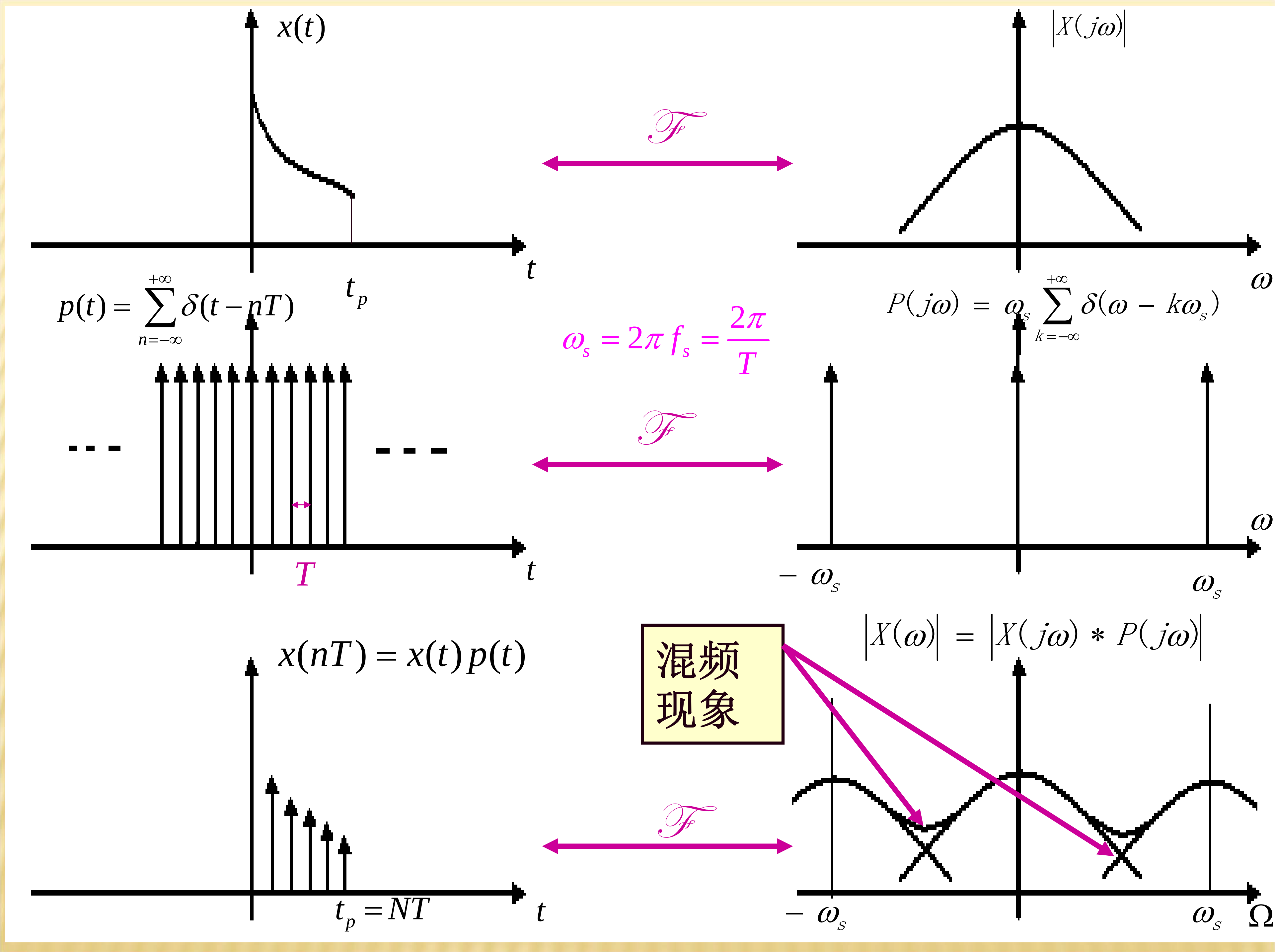
其中:

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

则有:

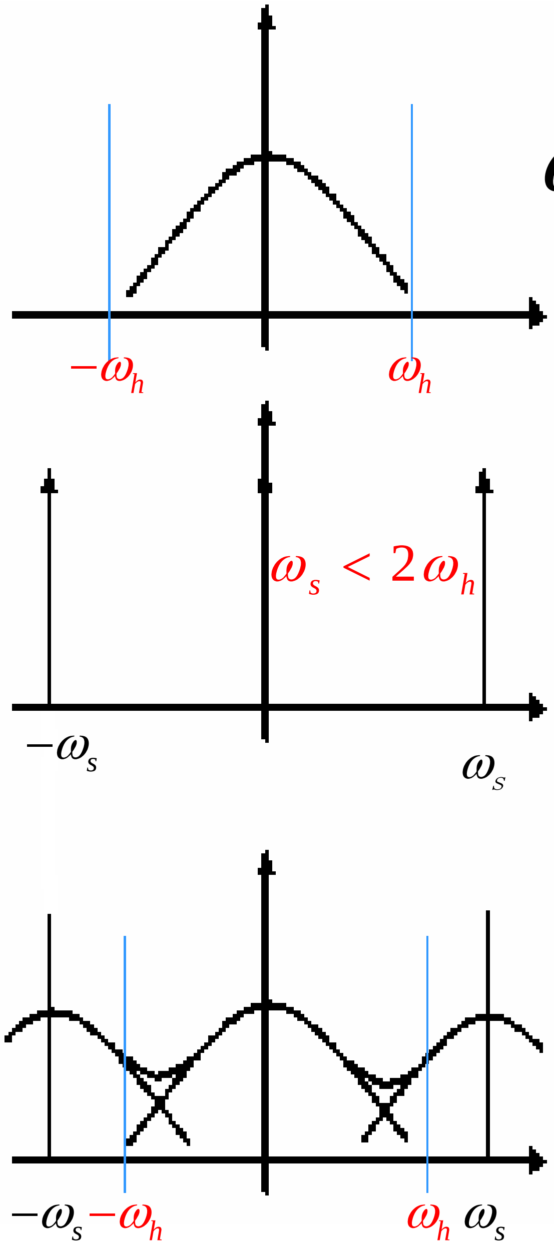
$$\begin{aligned} X_p(\omega) &= \frac{1}{T} X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega) * \delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \end{aligned}$$

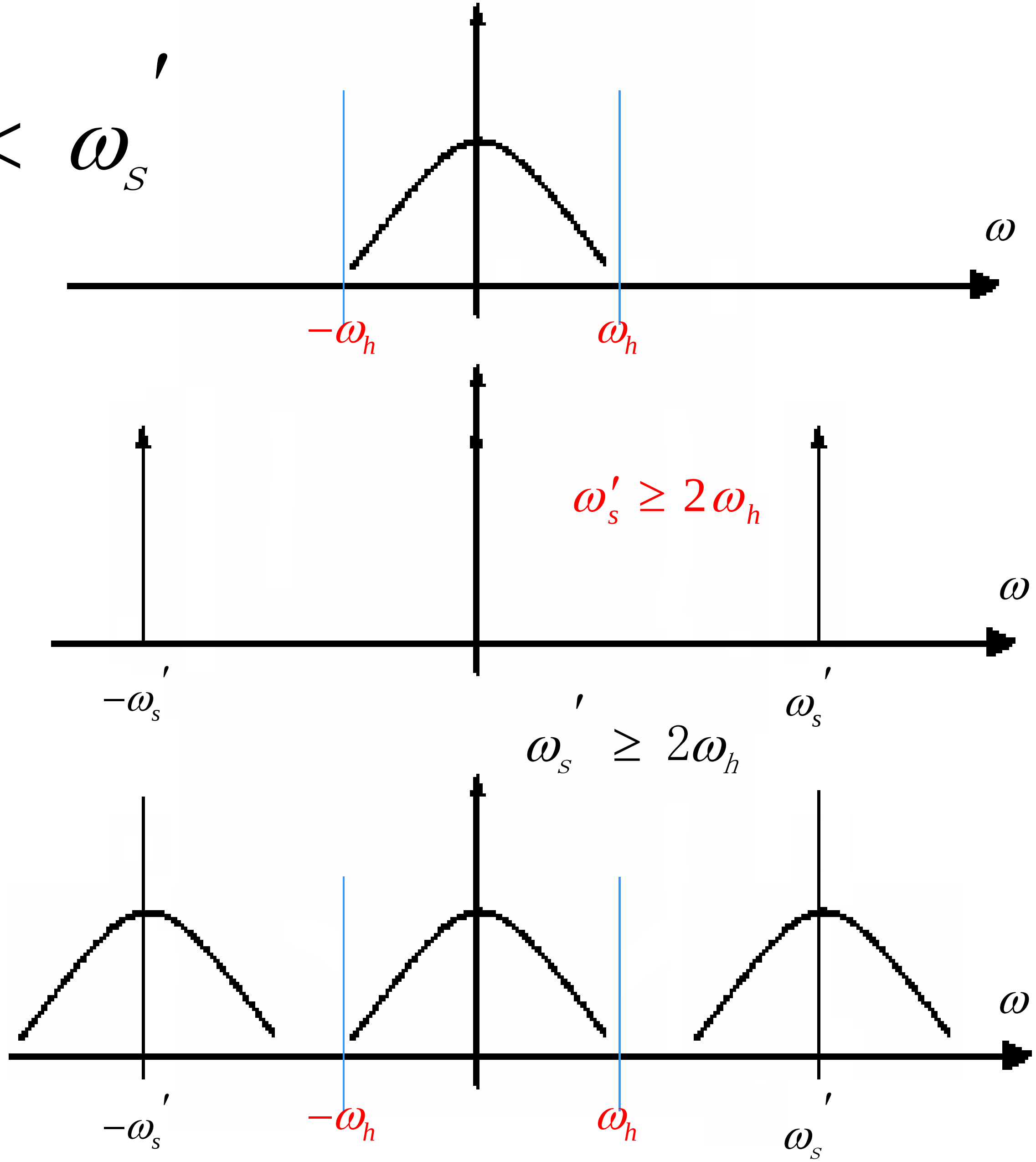
假设 $x(t)$ 是有限带宽的，ω_h 是 $x(t)$ 中包含的最高频率分量。



$x(t)$
$|X(j\omega)|$
$\mathscr{F}$
t
ω
t_p
$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$
$\omega_s=2\pi f_s=\frac{2\pi}{T}$
$P(j\omega)=\omega_s\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_s)$
$\mathscr{F}$
ω
T
t
$-\omega_s$
ω_s
$x(nT)=x(t)p(t)$
混频现象
$|X(\omega)|=|X(j\omega)*P(j\omega)|$
$\mathscr{F}$
$t_p=NT$
t
$-\omega_s$
ω_s
Ω

$$\omega_s < \omega_s'$$





从中可以看出，如果$\omega_s \geq 2\omega_h$，频谱就不会发生混叠现象，也就是信号没有发生失真（变形）。

只要用一个低通滤波器，就可以将$x(t)$从$x_p(t)$中恢复出来。

抽样定理：

设$x(t)$是某一带限信号，在$|\omega| > \omega_M$时，$X(\omega) = 0$。如果$\omega_s \geq 2\omega_M$，其中 $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$，则$x(t)$就能够唯一地由其样本$x(nT)$所确定。

已知一组样本值，将样本值做为一个冲击串的脉冲强度，通过一个理想的低通滤波器，滤波器的增益为T，截止频率为：

$$\omega_c, \quad \omega_h < \omega_c < \omega_s - \omega_h$$

得到的滤波结果即为$x(t)$，抽样（角）频率ω_s称为奈奎斯特频率。

$$\omega_s \geq 2\omega_h \qquad f_s \geq 2f_h$$

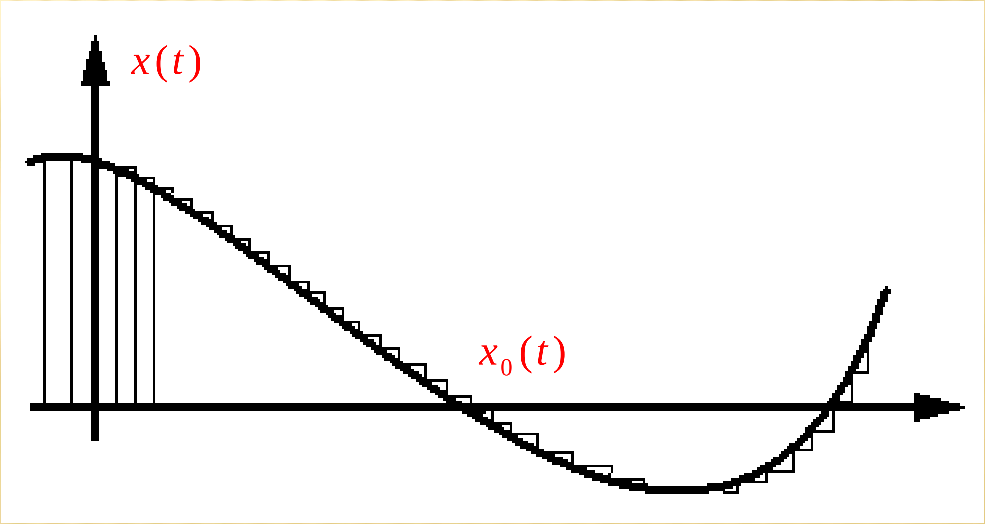
二、用零阶保持器抽样

抽样定理中定义的抽样函数如下：

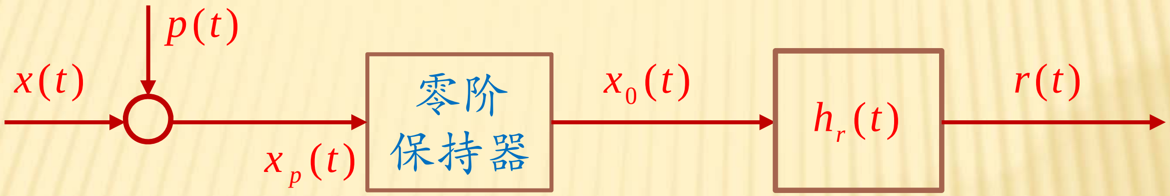
$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

其中 $\delta(t)$ 是一个理想的函数，在实际系统中很难得到。因此，为方便使用，在实际操作时采用零阶保持器来代替 $\delta(t)$ 函数。

零阶保持器是将一个连续变化的信号变为“台阶”形式变化的。两种采样的去别：



将$x_0(t)$通过一个低通滤波器，仍然可以恢复$x(t)$。但该滤波器不能是恒定的增益。设如下结构：



重建$x(t)$，就要求：

$$r(t) = x(t)$$

零阶保持器与$h_r(t)$的综合做用，就相当于一个理想的低通滤波器$H(\omega)$。

零阶保持器的频率特性：

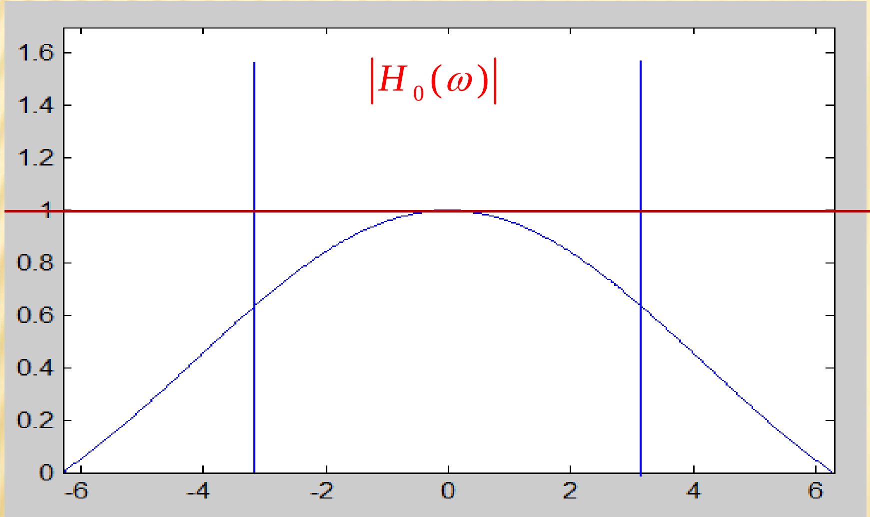
$$H_0(\omega) = e^{-j\frac{T}{2}\omega}\left(\frac{2\sin(\frac{T}{2}\omega)}{\omega}\right)$$

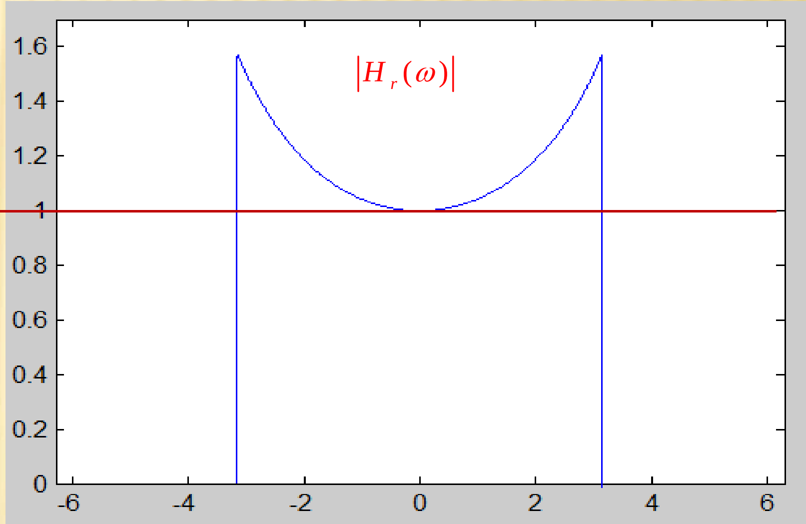
$$H_0(\omega)\cdot H_r(\omega) = H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \dfrac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

则有:

$$H_r(\omega)=\frac{e^{j\frac{T}{2}\omega}}{\frac{2\sin(\frac{T}{2}\omega)}{\omega}}H(\omega)$$

根据以上条件得出 $H_0(\omega)$, $H_r(\omega)$ 的频谱如下:





但是在实际应用中，零阶保持器的输出就认为是对 $x_p(t)$ 的一个比较好的近似，满足一般工程上的要求，不再需要加上后续的 $H_r(\omega)$ 环节了。当然，这时恢复出来的 $x'(t)$ 与原始的 $x(t)$ 有一定的误差。

§2 利用内插值从样本值重建信号

内插是一个常用的由样本值重建某一个函数的过程，重建结果即可以是近似的，也可以是完全准确的。

0阶保持器是一种简单的内插计算。

1阶保持器是另一重内插计算，线性内插。即用直线将相邻的两点连接起来。

以此类推，还可以有更加复杂的内插形式，相邻的若干个样本点通过高阶多项式曲线光滑的连接。

上节讨论的内容:

一个带限信号，如果抽样足够多，信号就能够完全恢复。从另一个角度讲，通过一个低通滤波器，在样本点之间的真正内插就可以实现。

在时域中这个低通滤波器的滤波过程，就是实现了内插计算的过程。

设某低通滤波器的输出为:

$$x_r(t) = x_p(t) * h(t)$$

$x_p(t)$ ：采样值，$h(t)$：低通滤波器的单位冲激响应

$$x_r(t) = x_p(t) * h(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{x(nT)}_{\text{样本值}}\underbrace{h(t-nT)}_{\text{加权函数}}$$

对于一个理想的低通滤波器：

$$h(t)=T\frac{\omega_c}{\pi}\sin(\frac{\omega_c t}{\pi})$$

所以：

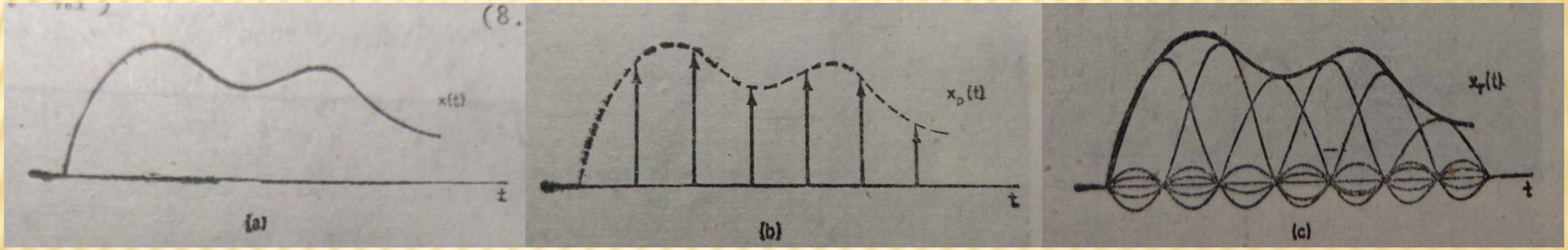
$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)T\frac{\omega_c}{\pi}\sin(\frac{\omega_c(t-nT)}{\pi})$$

由抽样定理可得，当 $\omega_s \geq 2\omega_c$ 时，系统就不会产生叠加效应。

理想的低通滤波实现很困难，实际应用中则采用略有误差，但实现方便的低通滤波器，即内插函数简单的低通滤波器，其中0阶保持器就是一个很广泛的选择。

设0阶保持器的单位冲激响应为 $h_0(t)$ ，其输出为 $x_0(t)$。则 $x_0(t)$ 是 $x(t)$ 的近似，$h_0(t)$ 是对一个能实现真正内插的理想低通滤波器的近似。

实例，利用Sinc函数的理想带限内插：

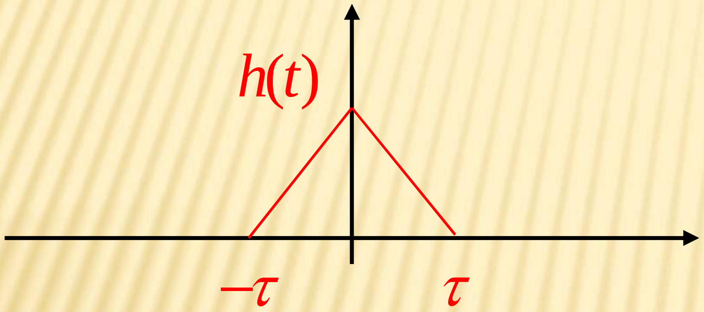


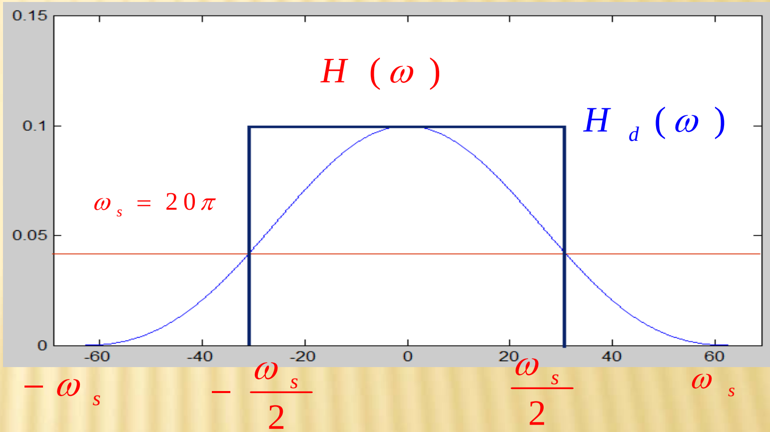
另一种常用的内插近似是线性内插，其特点是信号的重建数值是连续的，但一阶导数还不连续，所以又称为一阶保持。相应的单位冲激响应为：

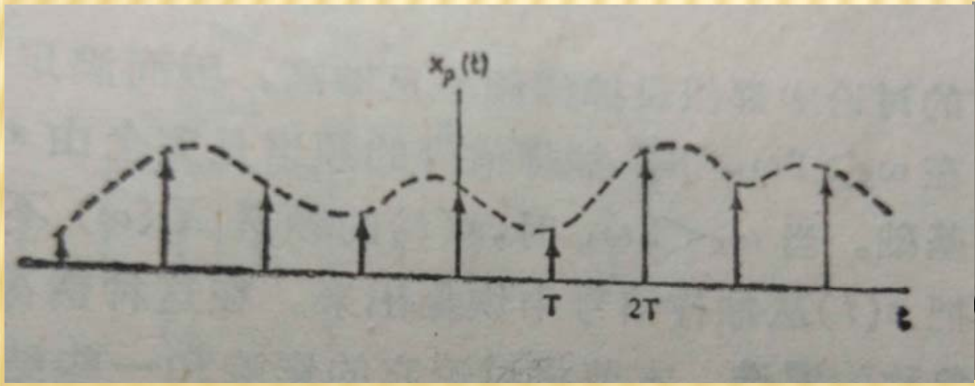
$$h(t)=\begin{cases} -\dfrac{t}{\tau}+1 & 0\le t\le \tau \\ \dfrac{t}{\tau}+1 & -\tau\le t<0 \end{cases}$$

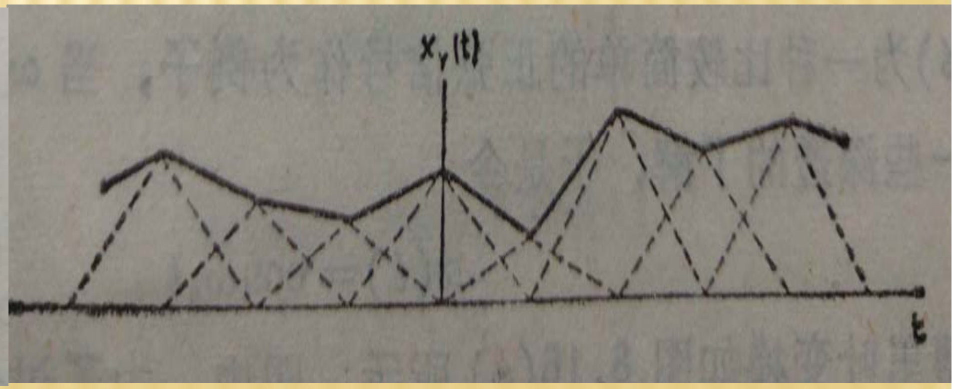
频率特性：

$$H_r(\omega)=\frac{1}{T}\left[\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}\right]$$









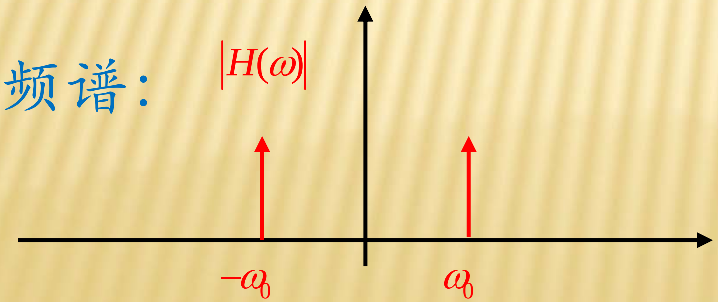
§3 欠抽样的效果，混叠效应

抽样定理要求$\omega_s \geq 2\omega_h$ ，抽样信号的频谱与原信号的频谱完全相同，即：$X_p(\omega) = X(\omega)$

当 $\omega_s < 2\omega_h$ 时，$X_p(\omega) \neq X(\omega)$ ，即产生了混叠现象。由此重建的信号与原信号相比，具有很大的变形。但是在采样点处是相等的，即：$x_p(nT) = x(nT)$

实例： $x(t) = \cos(\omega_0 t)$

频谱：



设采样角频率：$\omega_s = 20\pi$

采样频率：$f_s = \dfrac{20\pi}{2\pi} = 10\,\text{Hz}$

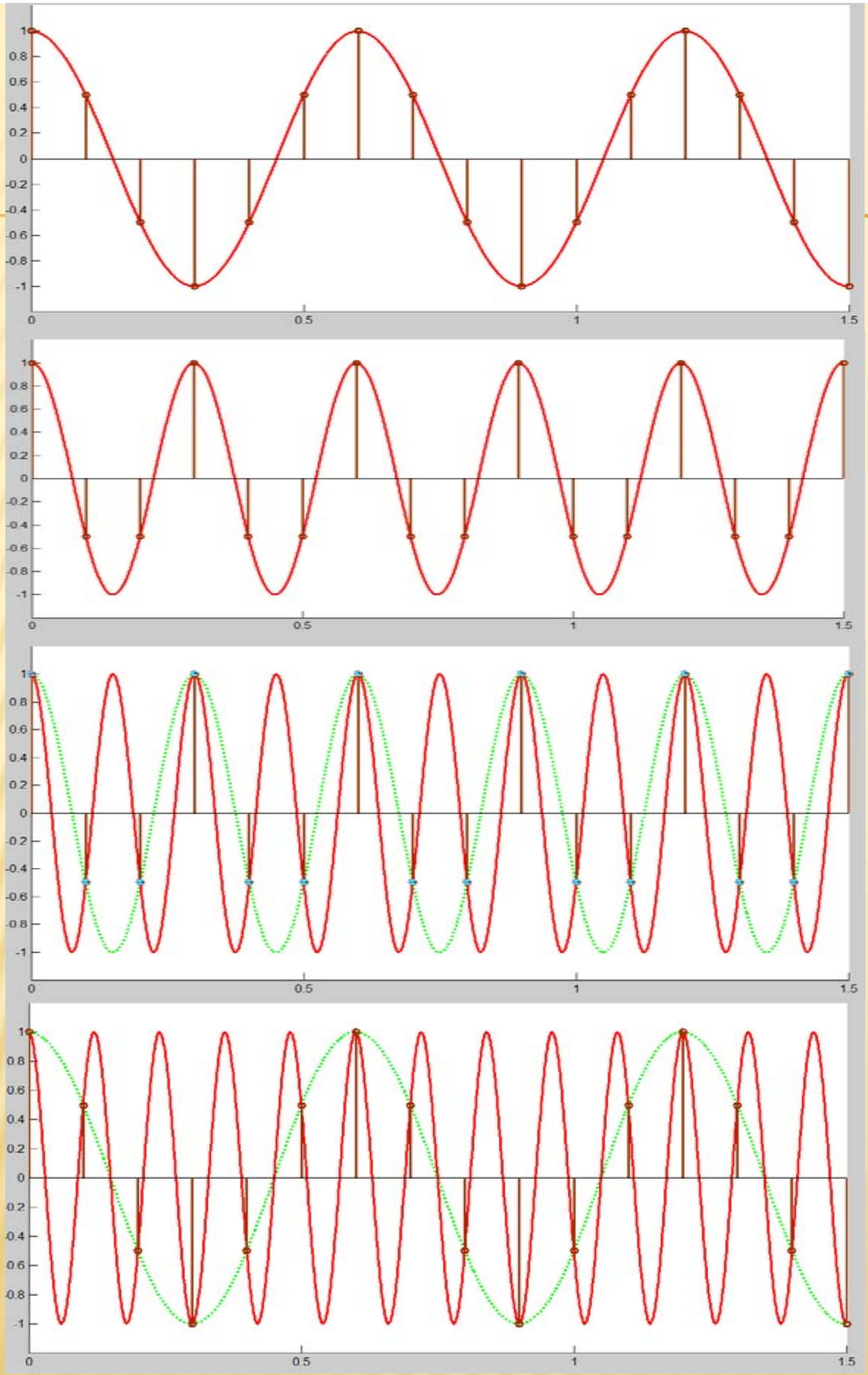
采样周期：$T = \dfrac{1}{f_s} = 0.1\text{s}$

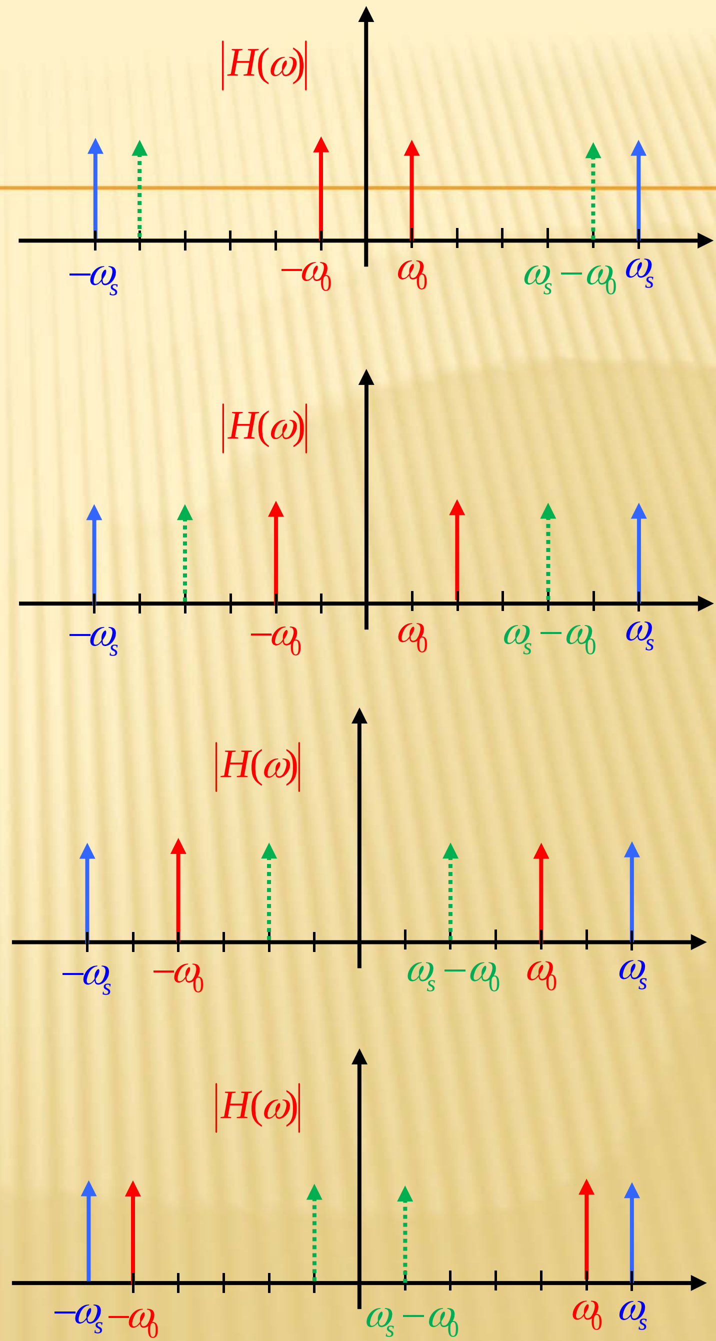
$$\omega_0 = \frac{\omega_s}{6}$$

$$\omega_0 = \frac{2\omega_s}{6}$$

$$\omega_0 = \frac{4\omega_s}{6}$$

$$\omega_0 = \frac{5\omega_s}{6}$$





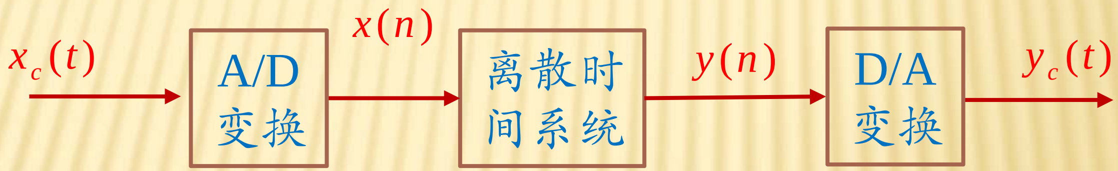
前两种情况满足$\omega_s \geq 2\omega_h$的条件，原始信号可以被恢复。

后两种情况不满足条件，产生了混叠现象。元有的频率ω_0被抽样合成为一个较低的频率$\omega_s - \omega_0$所代替，高频转折为低频。但是两个信号的所有采样点都相同。

抽样的效果就是频闪效应所基于的原理。

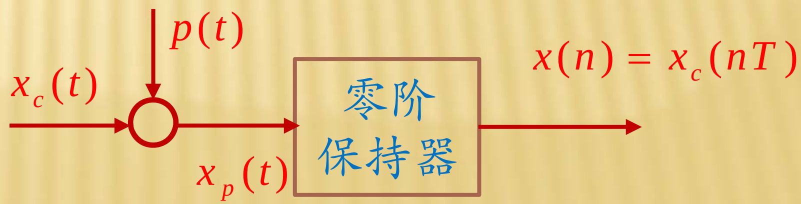
§4 连续时间信号的离散时间处理

在许多应用中，面临的第一项工作就是将连续信号转变为离散信号，然后利用数字设备（计算机等）进行数据处理（计算），然后再转化为连续信号。



依据以上讨论结果：
$$\begin{cases} x_c(nT) = x(n) \\ y_c(nT) = y(n) \end{cases}$$

其中A/D环节代表一个抽样过程：



对应的频率特性：

$$x_p(t) = x(t)\cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

$$X_p(\omega) = X_c(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\omega - k\omega_s)$$

$$X_p(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega nT}$$

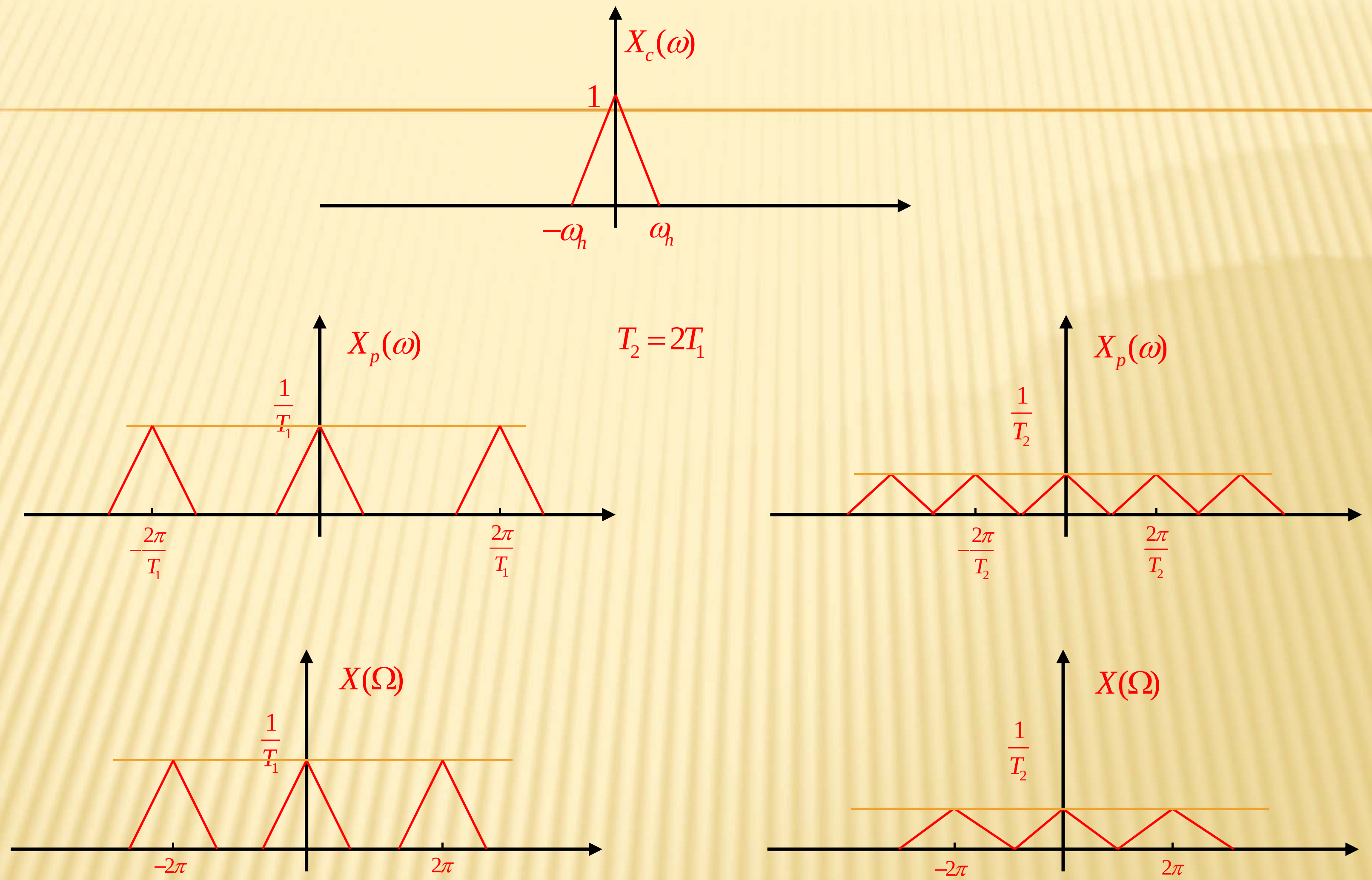
又因为： $x_p(t) = x_c(nT) = x(n)$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega n}$$

$$\Omega = \omega T$$

$$X(\Omega) = X_p(\frac{\Omega}{T})$$

实例，两种不同抽样率的输出序列：



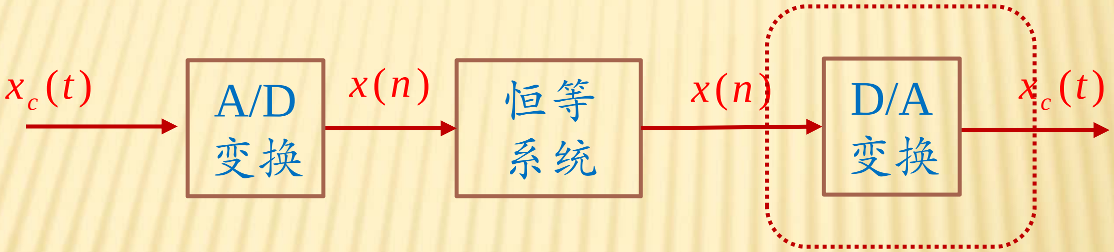
从以上过程可以看出：$X(\Omega)$是$X_p(\omega)$的重复，但是有一个尺度的变化（由T引起），而且$X(\Omega)$是一个周期函数，周期为2π。

连续化过程（D/A变换）：

为简化问题，不考虑中间的数据处理过程，设下式成立:

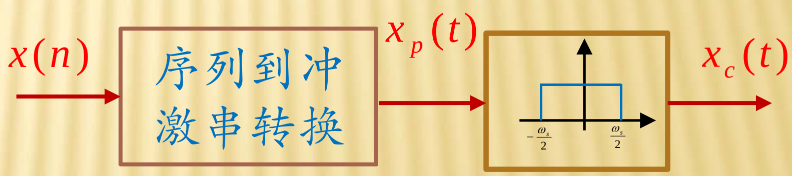
$x(n) = y(n)$　系统满足香农抽样定理，则有:

$x_c(t) = y_c(t)$　一个恒等系统



$$Y_c(\omega) = X_c(\omega)\cdot H(\omega T) = X_c(\omega)\cdot H(\Omega)$$

$H(\omega)$ ：恒等系统的频率响应。



$$Y_p(\omega) = X_p(\omega)\cdot H_p(\omega)$$

$$Y_c(\omega) = X_c(\omega)\cdot H_c(\omega)$$

$$H_c(\omega) = \begin{cases} H(\omega T), & |\omega| \le \dfrac{\omega_s}{2} \\ 0. & |\omega| > \dfrac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

§5 频域抽样

香农抽样定理是对有限带宽的连续时间信号在时域中的抽样，但是连续时间信号在时域和频域间存在着对偶关系。因此与时域抽样定理相对应，在频域中存在着相应的对偶定理，借此一个时限信号可以从其频域样本中重建。

一、频域中抽样函数（抽样序列）

$$P(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$$

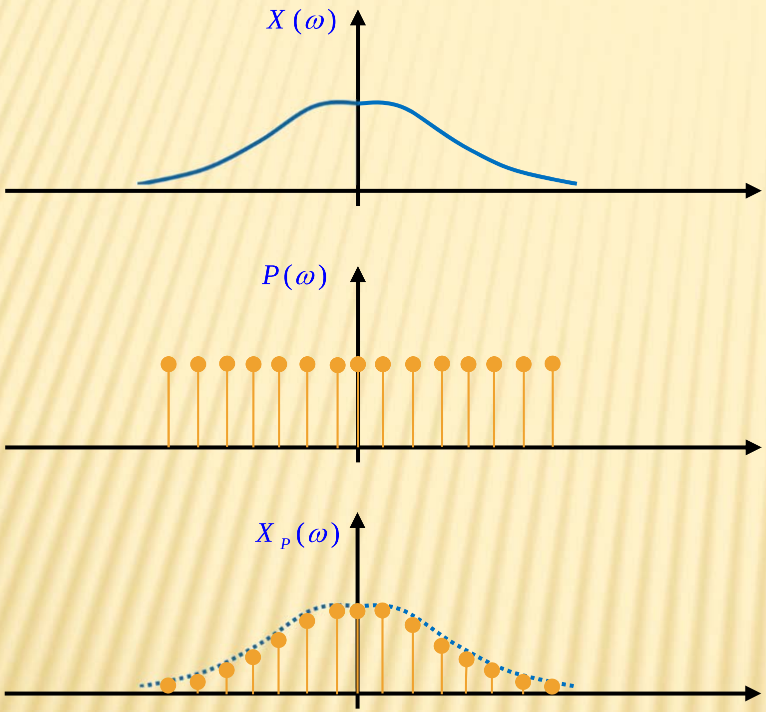
设某一时域信号的频率特性为： $X(\omega)$

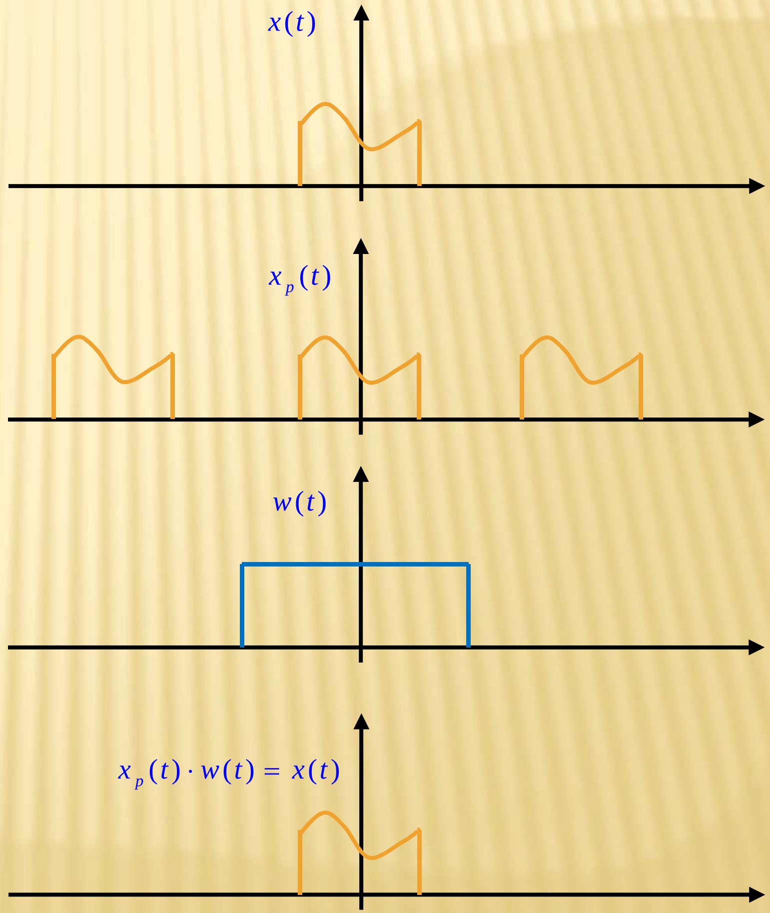
对该特性在频域中的抽样为： $X_p(\omega)=X(\omega)P(\omega)$

在时域中则有： $x_p(t)=x(t)*p(t)$ $\qquad p(t)=\dfrac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-\dfrac{2\pi}{\omega_0}k)$

则有: $x_p(t) = \dfrac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - \dfrac{2\pi}{\omega_0}k)$ $X_P(\omega) = \dfrac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$

对偶公式：时域中的周期性。





同样可以得到如下结论:

因为:

$$x(t) = x_p(t)w(t)$$

则有:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_p(\omega) * W(\omega)$$

其中:

$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)\delta(\omega - k\omega_0)$$

$$W(\omega) = 2\pi \sin c(\frac{\omega}{\omega_0})$$

则有:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) \sin c(\frac{\omega - k\omega_0}{\omega_0})$$

$$x_r(t) = T \frac{\omega_c}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \sin(\frac{\omega_c(t - nT)}{\pi})$$

对偶公式：频域中采样点的内插计算。

§6 离散时间信号抽样（略）

§7 离散时间抽取与内插（略）

第六章结束