第三章　连续时间信号与系统的傅里叶变换

南开大学 计算机与控制工程学院

机器人与信息自动化研究所

张建勋

Email: Zhangjx@nankai.edu.cn

Tel: 022-23505706-805

第三章连续时间信号与系统的傅里叶变换

在本章中将要对信号与LTI系统建立另一种表示方法，讨论的出发点仍然是将信号表示成一组加权积分（累加）。与上一章的内容不同，在这里利用复指数函数作为基本信号，这样所得到的表示就是傅里叶变换（级数）。这种表示方法可以用来组成范围相当广泛而且有用的一类信号。

我们首先对傅立叶分析方法的有效性和信号与系统的频域表示法进行说明，之后再将所得结果应用到一些实际问题中。

§1 连续时间LTI系统对复指数信号的响应

在上一章中，我们将单位冲激信号看作是一个基本信号，用它构成范围极为广泛的其他信号。在此我们采用同样的思路，定义另一组基本信号，复指数信号。

首先讨论作为基本信号，应该具有的重要性质：

1、由这些基本信号能够构成相当广泛的一类有用信号。

2、LTI系统对每一个基本信号的响应应该十分简单，以使得系统对任意输入信号的响应有一个很方便的表示式。

针对连续的LTI系统，我们引入一种新的基本信号：复指数信号。

$$e^{st}, \quad s=\sigma+j\omega$$

对于连续的LTI系统，如输入为上面的复指数函数，则其输出也应该为复指数函数，只是幅值有所变化。

$$x(t)=e^{st} \longrightarrow \boxed{\text{连续LTI系统}} \longrightarrow y(t)=H(s)e^{st}$$

$H(s)$是s的函数，也是一个复变函数。

定义： 如果一个信号的系统响应，是一个常数（可以是复数）乘以该信号本身，则称该信号是一个特征函数（信号），该常数就称为特征值。

说明： 设一连续时间LTI系统，其单位冲激响应为$h(t)$，则对任意输入$x(t)$，其输出$y(t)$满足以下关系。

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

当 $x(t)=e^{st}$

$$y(t)=h(t)*e^{st}=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$$

$$=e^{st}\cdot\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau=H(s)$$

则有： $y(t)=H(s)e^{st}$ 相对于自变量t，，$H(s)$是一个常数

$s=\sigma+j\omega$，所以$H(s)$是一个复数。

对于一个给定的s，e^{st} 就是一个特征函数，$H(s)$是与之相对应的特征值。

推广，设： $x(t)=a_1e^{s_1t}+a_2e^{s_2t}+a_3e^{s_3t}$

则输出： $y(t)=a_1H(s_1)e^{s_1t}+a_2H(s_1)e^{s_2t}+a_3H(s_1)e^{s_3t}$

$$H(s_i)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s_i\tau}d\tau$$

$$x(t)=\sum_k a_ke^{s_kt} \longrightarrow y(t)=\sum_k a_kH(s_k)e^{s_kt}$$

如果$H(s_i)$已知，某一输入信号$x(t)$可以用$\{e^{s_it}\}$线性组合，就可以得到系统对应的输出。

§2 周期信号的表示：连续时间傅里叶级数

一、成谐波关系的复指数的线性组合

定义一个周期信号： $x(t)=x(t+T)$ T 为周期，且不唯一。

其中最小的非0整数T_0称为基波周期。

$2\pi/T_0=\omega_0$ 称为基波角频率。

两个基本的周期信号：

1、正弦函数 $x(t)=\cos\omega_0 t,\qquad \omega_0=\dfrac{2\pi}{T_0}$

2、复指数函数 $x(t)=e^{j\omega_0 t}=\cos\omega_0 t+j\sin\omega_0 t,\qquad \omega_0=\dfrac{2\pi}{T_0}$

定义函数集： $\Phi_k(t)=\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\},\qquad k=-\infty\cdots-1,0,1,\cdots\infty$

成谐波关系的复指数函数的线性组合：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

上式的基周期应为T_0，一项特殊项：$x_0(t)=a_0$ 为常数，即直流项。

如果式中的$\{a_k\}$能够唯一确定，则下式成立。

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

这就是周期信号的傅里叶级数的表达式。

特例：如果$x(t)$是实数，傅里叶级数的表达式为：

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t - \theta_k)$$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} [b_k \cos(k\omega_0 t) - c_k \sin(k\omega_0 t)]$$

其中： $a_k = b_k + jc_k$

证明：如果$x(t)$是实数，且傅里叶级数的表达式为：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \text{而且} \qquad x(t)=x^*(t)$$

则有：

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k^* e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{k=-k'}=\sum_{k'=-\infty}^{+\infty}a_{-k'}^* e^{jk'\omega_0 t}$$

$$a_k=a_{-k}^* \qquad \text{如令：} \quad \begin{cases} a_k=b_k+jc_k \\ a_{-k}=b_k-jc_k \end{cases} \qquad b_k,\ c_k\in R$$

$$x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{+\infty}\{(b_k+jc_k)[\cos(k\omega_0 t)+j\sin(k\omega_0 t)]+(b_k-jc_k)[\cos(k\omega_0 t)-j\sin(k\omega_0 t)]\}$$

$$x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{+\infty}[(b_k\cos k\omega_0 t-c_k\sin k\omega_0 t)+(b_k\cos k\omega_0 t-c_k\sin k\omega_0 t)]$$

$$+j\sum_{k=1}^{+\infty}[(b_k\sin k\omega_0 t+c_k\cos k\omega_0 t)-(b_k\sin k\omega_0 t+c_k\cos k\omega_0 t)]$$

$$=a_0+2\sum_{k=1}^{+\infty}(b_k\cos k\omega_0 t-c_k\sin k\omega_0 t)$$

一个连续时间LTI系统，如果其输入是基周期为T_0的周期信号，则其输出也是基周期为T_0的周期信号。

证明：

输入：$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

则输出：$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k H(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

其中：

$$H(k\omega_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{-jk\omega_0\tau}\,d\tau,\qquad s=jk\omega_0$$

所以$x(t)$ 与$y(t)$同周期。

实例：

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4},$$

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2},$$

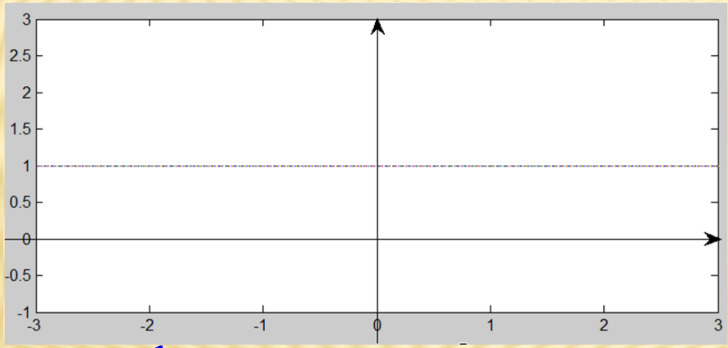
$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t}$$

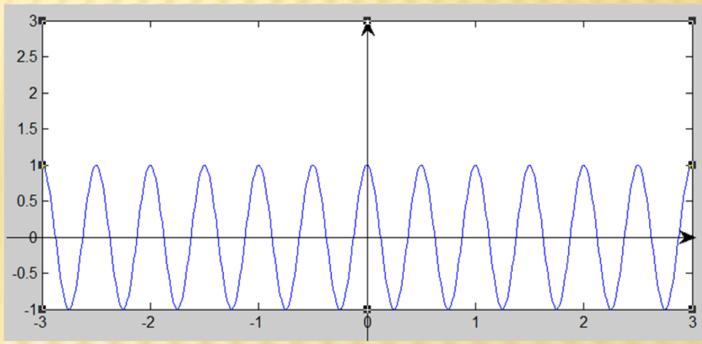
$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t})$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t$$

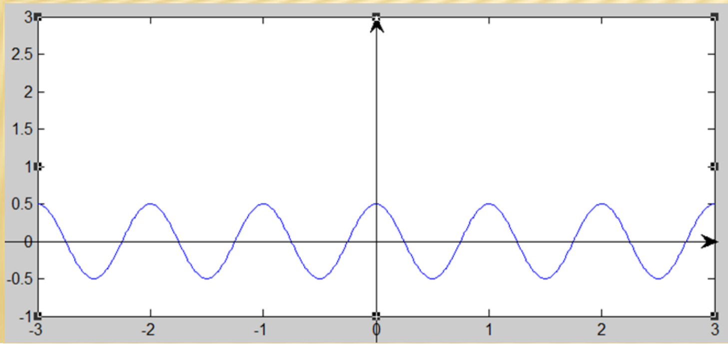
$x_0(t) = 1$



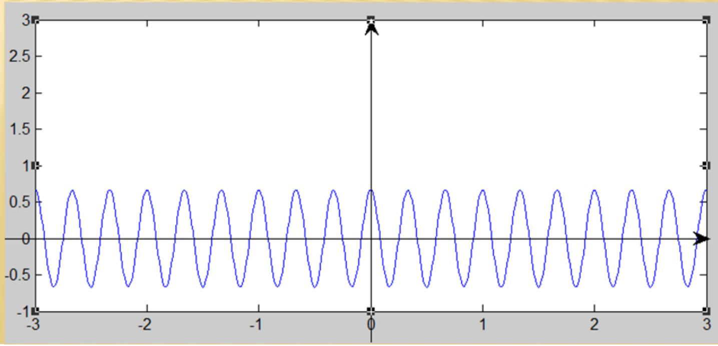
$x_2(t) = \cos 4\pi t$



$x_1(t) = \frac{1}{2}\cos 2\pi t$



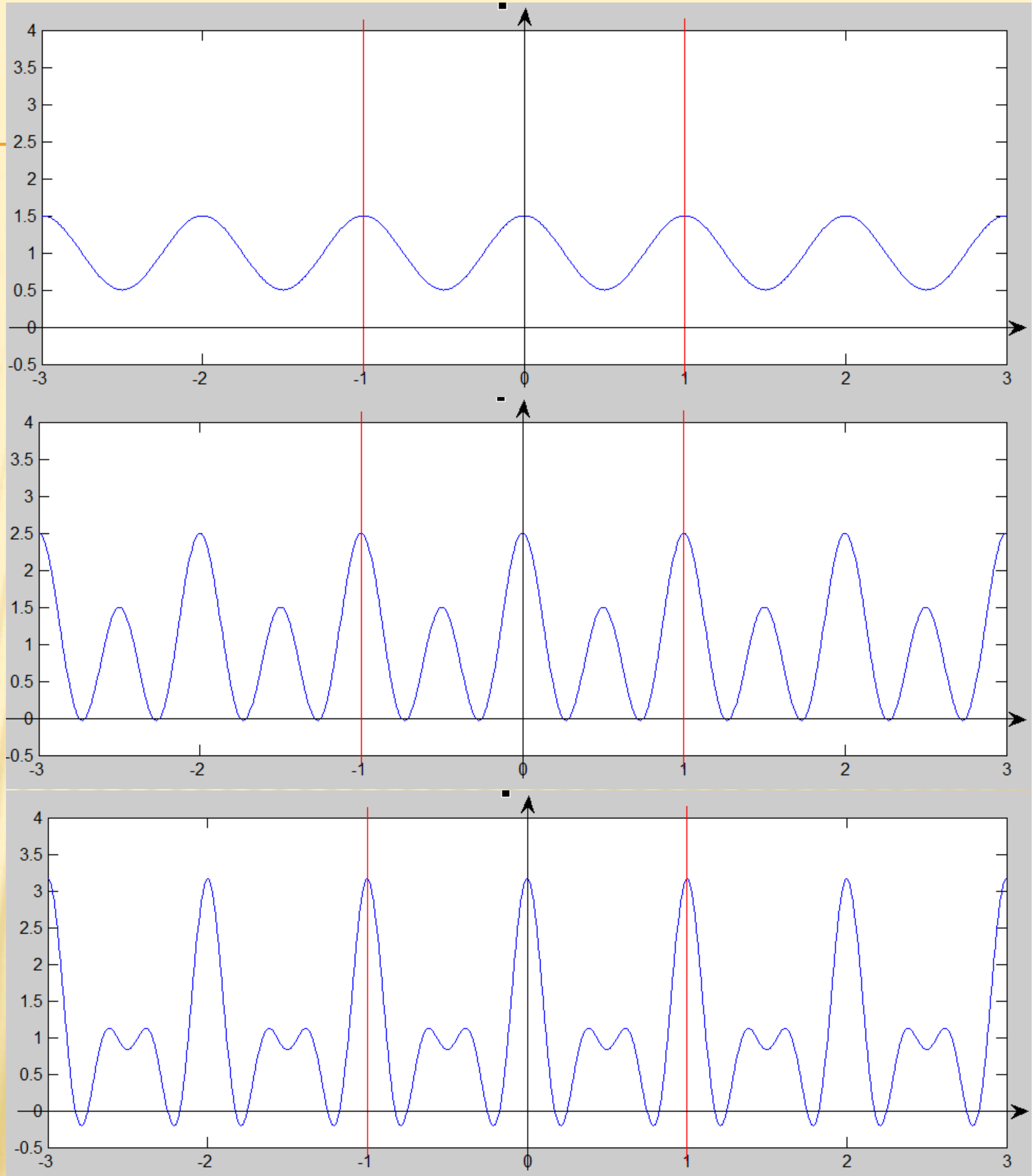
$x_3(t) = \frac{2}{3}\cos 6\pi t$



$$1+\frac{1}{2}\cos 2\pi t$$

$$1+\frac{1}{2}\cos 2\pi t+\cos 4\pi t$$

$$1+\frac{1}{2}\cos 2\pi t+\cos 4\pi t+\frac{2}{3}\cos 6\pi t$$



二、傅里叶级数系数的确定

设一周期信号信号$x(t)$可以表示为以下傅里叶级数的形式:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

如果能够唯一确定$\{a_k\}$，则上式成立。如何求取该系数集?

求解过程:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\int_{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\int_{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \boxed{\int_{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t}dt} \Rightarrow \int_{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t}dt=\begin{cases} T_0 & k=n \\ 0 & k\neq n \end{cases}$$

$$a_n=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

傅里叶级数变换公式对:

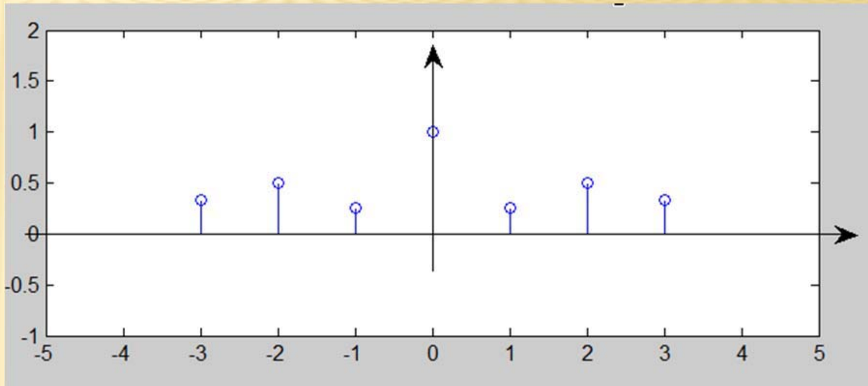
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad\qquad a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

实例1: $x(t)=\sin\omega_0 t$

$$x(t)=\sin\omega_0 t \qquad\qquad a_{-1}=-\frac{1}{2j},\quad a_1=\frac{1}{2j}$$

$$=\frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t})$$

$$=-\frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}+\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t}=\frac{j}{2}e^{-j\omega_0 t}-\frac{j}{2}e^{j\omega_0 t}$$



实例2:

$$x(t)=1+\frac{1}{2}\cos 2\pi t+\cos 4\pi t+\frac{2}{3}\cos 6\pi t$$

$$=1+\frac{1}{4}(e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t})+\frac{1}{2}(e^{j4\pi t}+e^{-j4\pi t})+\frac{1}{3}(e^{j6\pi t}+e^{-j6\pi t})$$

$$=\frac{1}{3}e^{-j6\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j4\pi t}+\frac{1}{4}e^{-j2\pi t}+1+\frac{1}{4}e^{j2\pi t}+\frac{1}{2}e^{j4\pi t}\frac{1}{3}e^{j6\pi t}$$

$$a_0=1,$$

$$a_1=a_{-1}=\frac{1}{4},$$

$$a_2=a_{-2}=\frac{1}{2},$$

$$a_3=a_{-3}=\frac{1}{3}$$

实例3:

$$x(t) = 1 + \sin\omega_0 t + 2\cos\omega_0 t + \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$$

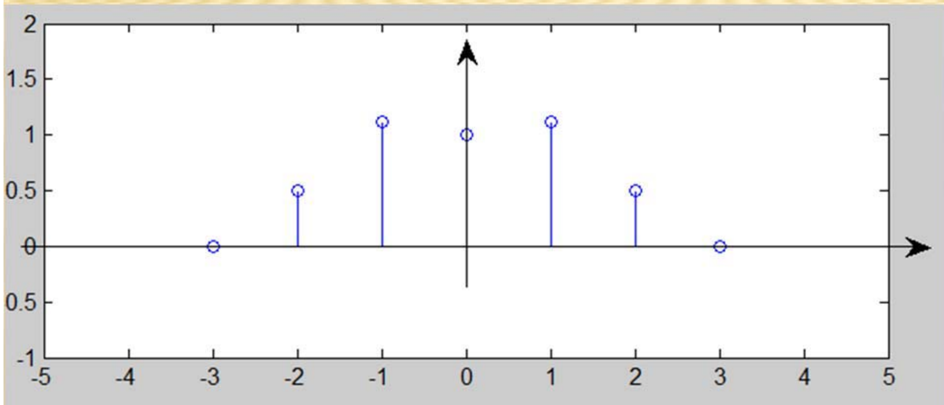
$$= 1 + \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) + (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) + \frac{1}{2}(e^{j(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})} + e^{-j(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})})$$

$$= \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j2\omega_0 t} + (1 - \frac{1}{2j})e^{-j\omega_0 t} + 1 + (1 + \frac{1}{2j})e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j2\omega_0 t}$$

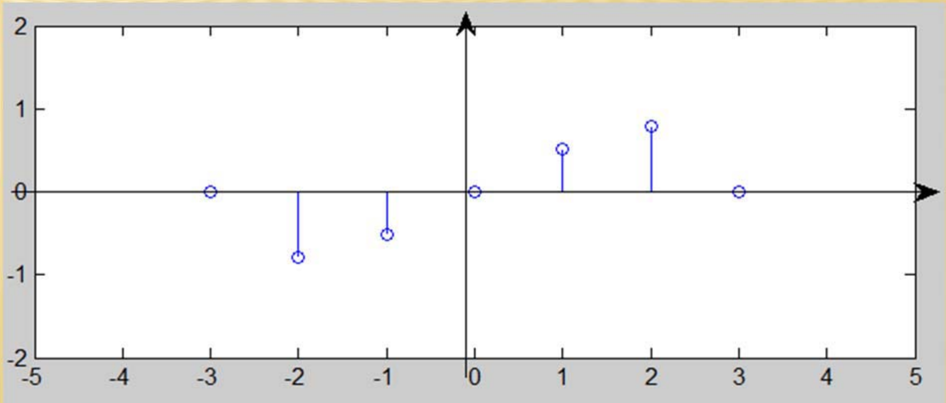
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - j)e^{-j2\omega_0 t} + (1 + j\frac{1}{2})e^{-j\omega_0 t} + 1 + (1 - j\frac{1}{2})e^{j\omega_0 t} + \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + j)e^{j2\omega_0 t}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j2\omega_0 t} + \frac{\sqrt{5}}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{-j\omega_0 t} + e^{-j0} + \frac{\sqrt{5}}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j2\omega_0 t}$$

$|a_k|$

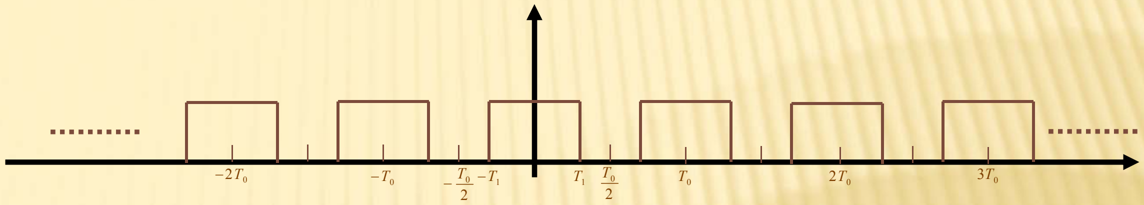


$\mathrm{Arg}[a_k]$



实例4:

$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_1\\ 0 & T_1<|t|<\dfrac{T_0}{2}\end{cases}$$



求傅里叶级数的系数:

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$a_0=\frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1}dt=\frac{2T_1}{T_0}$$

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1}e^{-jk\omega_0 t}dt=-\frac{1}{jk\omega_0 T_0}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1}$$

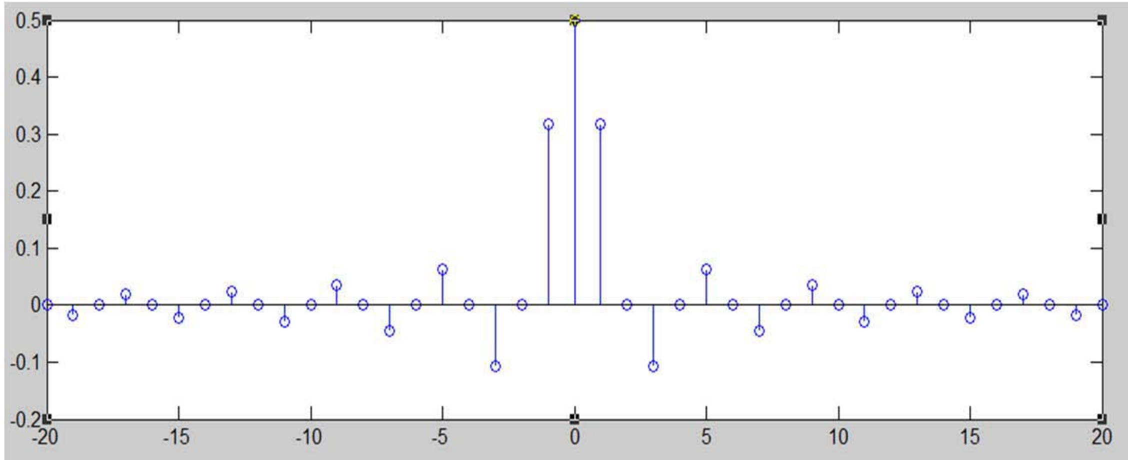
$$=\frac{2}{k\omega_0 T_0}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1}-e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right]$$

$$=\frac{2}{k\omega_0 T_0}\sin k\omega_0 T_1=\frac{\sin k\omega_0 T_1}{\pi k},\qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

$$a_k=\begin{cases}\dfrac{2T_1}{T_0} & k=0\\ \dfrac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} & k\neq 0\end{cases}$$

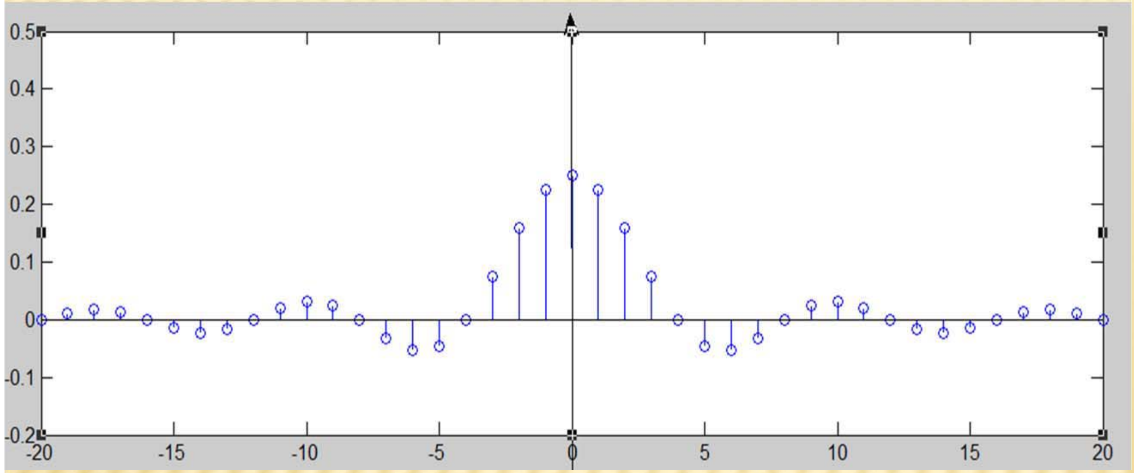
当: $T_0=4T_1,\qquad \omega_0 T_1=\dfrac{\pi}{2}$

$$a_k=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & k=0\\ \dfrac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} & k\neq 0\end{cases}$$



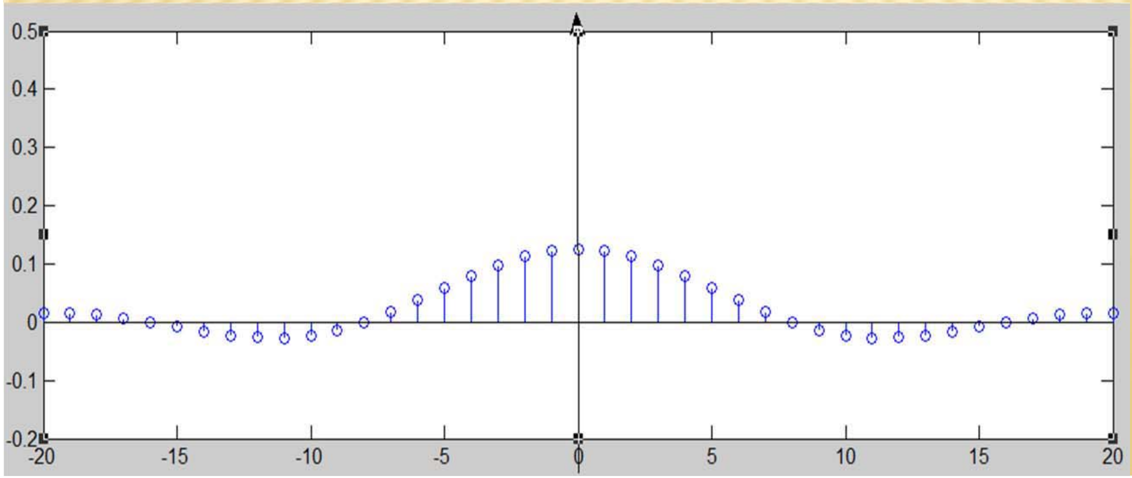
$$T_0 = 4T_1, \qquad \omega_0 T_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & k = 0 \\ \dfrac{\sin(k\dfrac{\pi}{2})}{k\pi} & k \neq 0 \end{cases}$$



$$T_0 = 8T_1, \qquad \omega_0 T_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & k = 0 \\ \dfrac{\sin(k\dfrac{\pi}{4})}{k\pi} & k \neq 0 \end{cases}$$



$$T_0 = 16T_1, \qquad \omega_0 T_1 = \frac{\pi}{8}$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & k = 0 \\ \dfrac{\sin(k\dfrac{\pi}{8})}{k\pi} & k \neq 0 \end{cases}$$

§2 周期信号傅里叶级数的近似与级数收敛

一、傅里叶级数的近似

问题的提出：

一个周期信号$x(t)$，可以表示为傅里叶级数的形式：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

但是级数的求和范围是{-∞，+∞}，这显然在实际中不可操作。在实际应用中往往采用以下的计算公式：

$$x_N(t)=\sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t}, \qquad x(t)\approx x_N(t)$$

由此产生的误差（函数）为：

$$e_N(t)=x(t)-x_N(t)=x(t)-\sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

定义总误差量为：

$$E_N=\int_{T_0}|e_N(t)|^2dt=\int_{T_0}e_N(t)e_N^*(t)dt$$ 误差的能量

可以证明，能够使上述误差量达到最小的参数集$\{a_k\}$满足以下条件：

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

即傅里叶级数是对函数$x(t)$的最佳逼近，逼近的误差随着N的增大而减小；当N达到无穷大时，逼近的误差就趋近于0。

意义：一个周期函数，由谐波函数集$\{e^{jk\omega_0 t}\}$做线性组合时，最小误差就是傅里叶级数的截项。

二、傅里叶级数的收敛条件

1、在一个整周期内绝对平方可积

$$\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty$$ 一个整周期内的能量有限

如果： $$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \lim_{N\to\infty} x_N(t) = x(t)$$

则有： $$\lim_{N\to\infty} E_N = \lim_{N\to\infty} \int_{T_0} |e_N(t)|^2 dt = \lim_{N\to\infty} \int_{T_0} \left| x(t) - \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t} \right|^2 dt$$

$$\lim_{N\to\infty} \int_{T_0} |x(t) - x_N(t)|^2 dt = 0$$

意义：$x(t)$与$x_N(t)$在一个整周期内没有能量的差别，但还不能说明$x(t)$与$x_N(t)$处处相等（实例：周期方波的傅里叶级数）。

2、狄里赫利条件

1）周期信号$x(t)$在任何周期内都是绝对可积分的。

$$\int_{T_0} |x(t)|dt < \infty, \qquad \text{Example: } x(t)=\frac{1}{t}$$

2）周期信号$x(t)$在任何周期内，其最大值与最小值的数量有限。即在任一周期内$x(t)$的起伏次数是有限。

反例：

$$x(t)=\sin(\frac{2\pi}{t}), \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\int_0^1 |x(t)|dt < 1$$

满足第一个条件，但是该函数在区间内有无数个极大值和极小值。

3）周期信号$x(t)$在任何周期内，只有有限个不连续点，而且在这些不连续点上，函数值必须是有限的。

反例：

$$x(t)=\begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \le t < \frac{1}{2}+\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{2}+\frac{1}{4} \le t < \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8}, & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \le t < \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} \end{cases}$$

$$x(t)=\begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ (\frac{1}{2})^n, & \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2})^k \le t < \sum_{k=1}^{n+1}(\frac{1}{2})^k \end{cases}$$

通过以上例子可知：不满足狄里赫利条件的都是一些特殊函数。我们所见到的大部分信号都能满足条件，特别是后两个条件。

大部分周期函数都可以表示成傅里叶级数的形式。

三、吉伯斯现象

例子：方波信号的傅里叶级数，吉伯斯现象。

$$x(t)=\begin{cases}1, & -\dfrac{T}{4}\le t<\dfrac{T}{4}\\[2mm] 0, & -\dfrac{T}{2}\le t<-\dfrac{T}{4},\ \dfrac{T}{4}\le t<\dfrac{T}{2}\end{cases}$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad a_k=\frac{1}{T}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}e^{-jk\omega_0 t}dt,\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

现令：

$$T=1,\qquad a_k=\frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi},\qquad x(t)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{+N}\frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi}e^{j2k\pi t}$$

$$x_0(t)=\frac{1}{2}$$

$$x_1(t)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\pi}e^{-j2\pi t}+\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\pi}e^{j2\pi t}=\frac{2}{\pi}\cos(2\pi t)$$

$$x_{(N)}(t)=\frac{2\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi}\cos(2k\pi t)$$

$$N=2M+1$$

$$x_2(t)=0$$

$$x_0(t) = \frac{1}{2}$$

$$x_1(t) = \frac{2}{\pi}\cos(2\pi t)$$

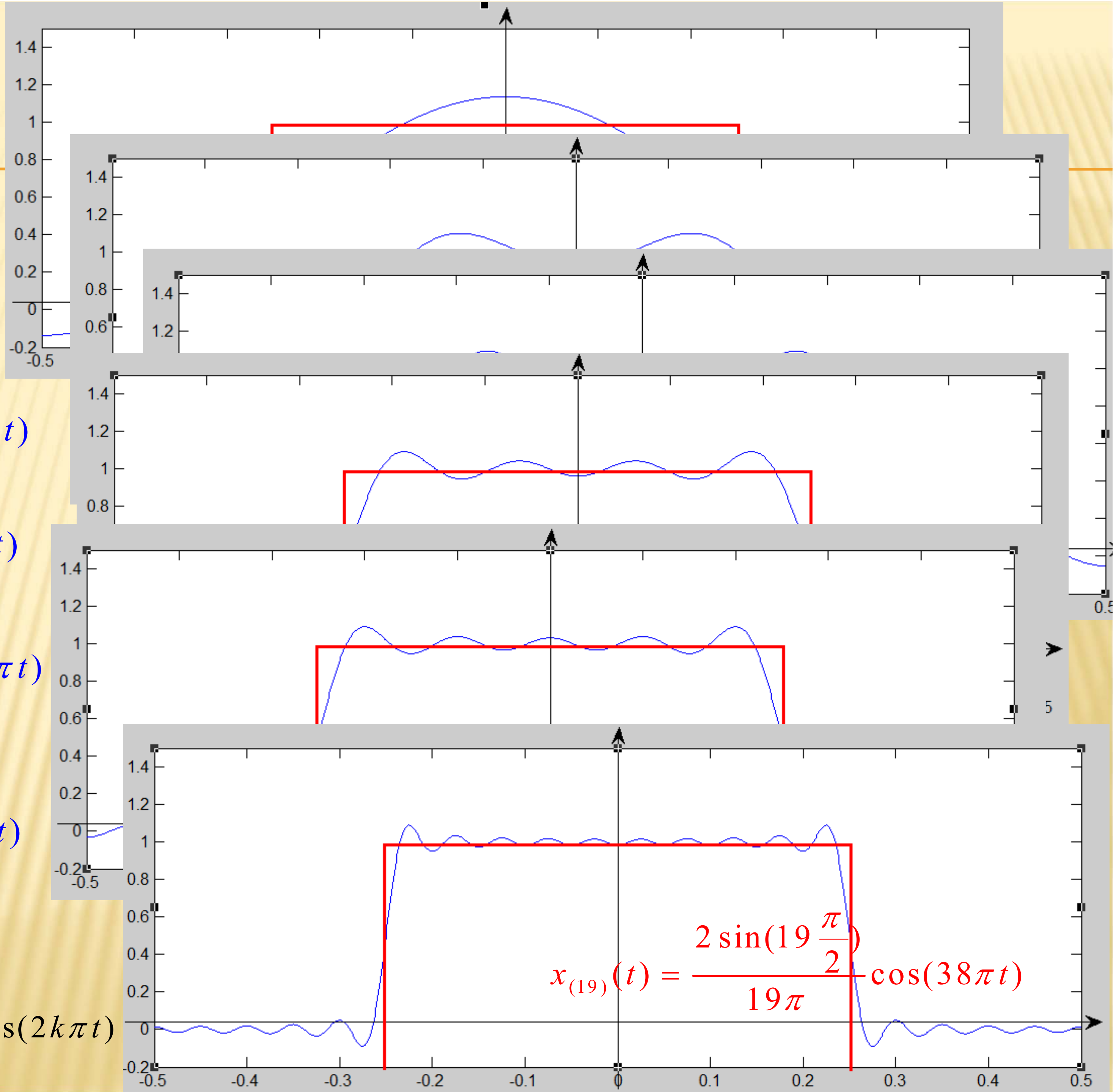
$$x_3(t) = -\frac{2}{3\pi}\cos(6\pi t)$$

$$x_5(t) = \frac{2}{5\pi}\cos(10\pi t)$$

$$x_7(t) = -\frac{2}{7\pi}\cos(14\pi t)$$

$$x_9(t) = \frac{2}{9\pi}\cos(18\pi t)$$

$$x_{(N)}(t) = \frac{2\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi}\cos(2k\pi t)$$

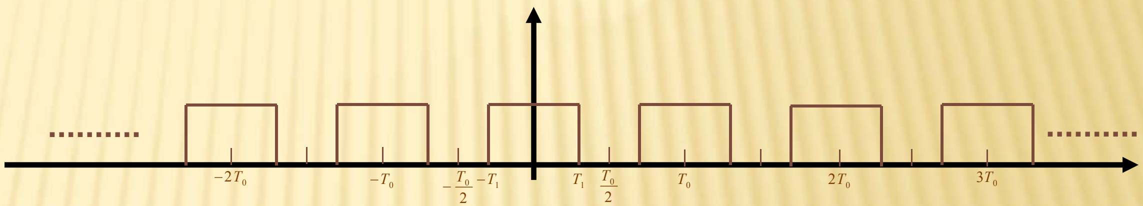


§3 非周期信号的表示：连续时间傅里叶变换

一、非周期信号的傅里叶变换

周期信号$x(t)$可以表示为傅里叶级数的线性组合，非周期信号是否可以？

对方波信号的讨论：



$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_1\\ 0 & T_1<|t|<\dfrac{T_0}{2}\end{cases}$$

定义：

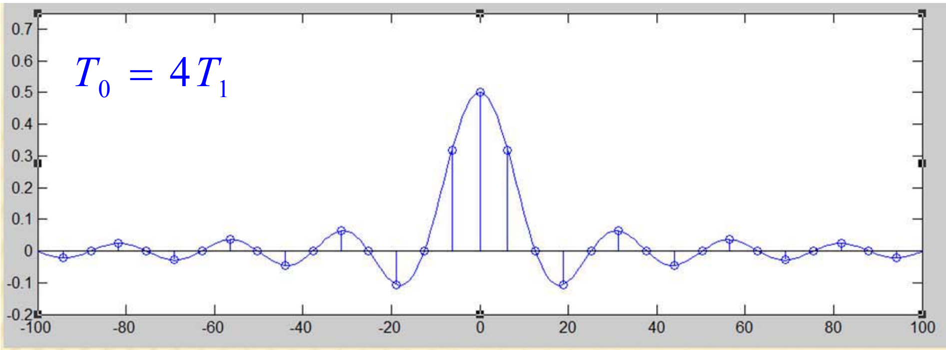
$$a_k=\frac{\sin k\omega_0 T_1}{2\pi}=\frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_0},\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

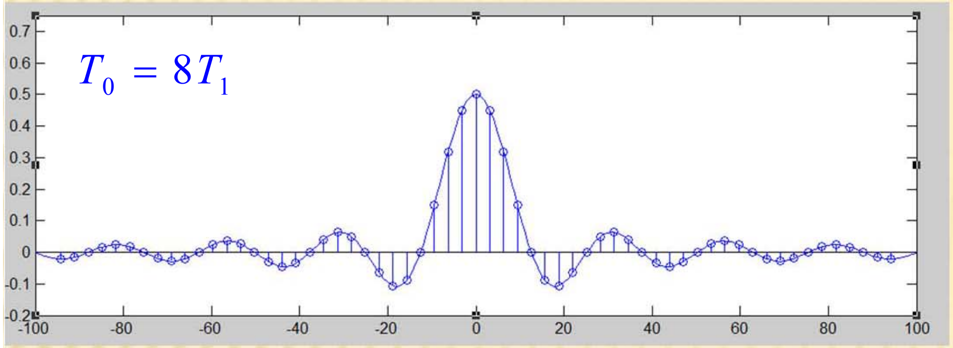
$$T_0 a_k=\frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0},\qquad k\omega_0=\omega$$

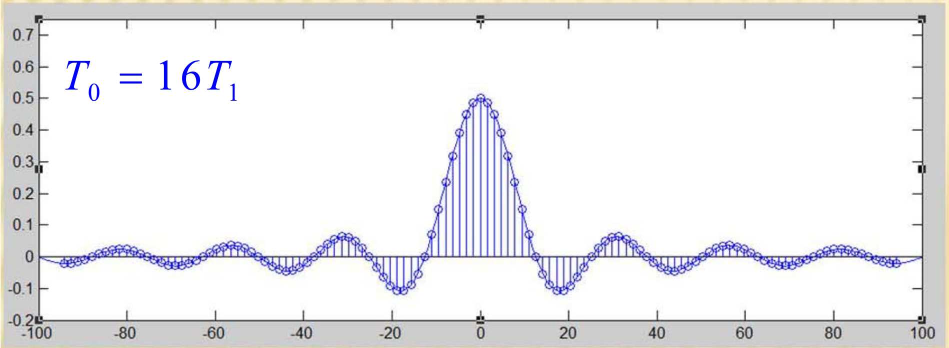
则有：

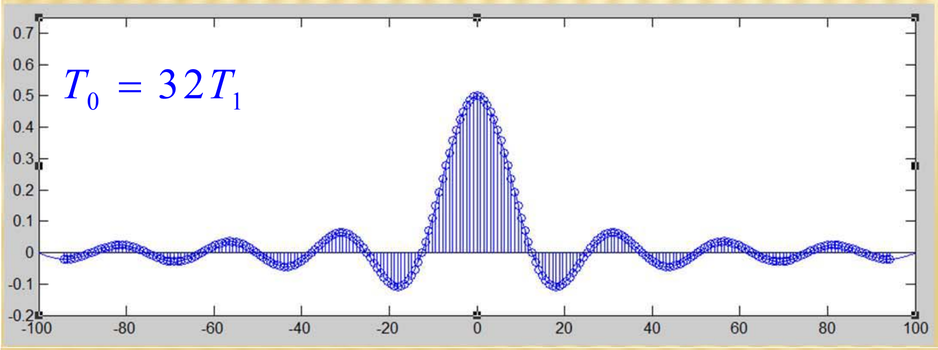
$$T_0 a_k=\frac{2\sin \omega T_1}{\omega}$$

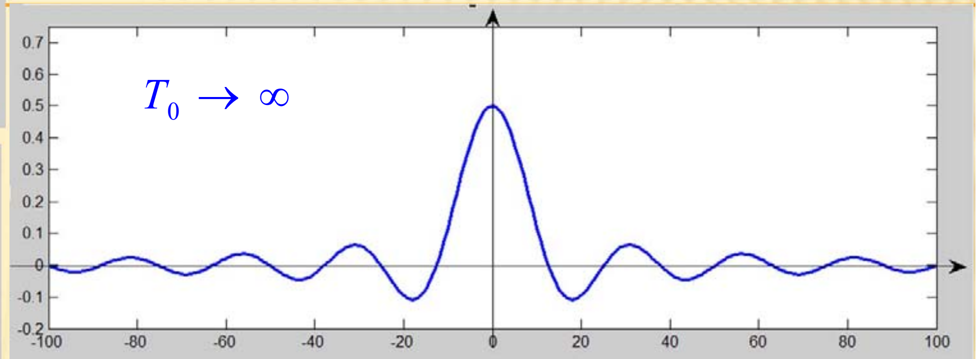
T_1保持不变，随着T_0的增加，脉冲序列则越来越密。











当$T_0\to\infty$时，周期函数就变成了有限时间内的非周期函数了。其“傅里叶级数”就趋近于无限密，变为一个连续函数。

设信号$x(t)$为一有限时间非周期函数：

$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|\le T_1\\ 0 & \text{other}\end{cases}$$

对$x(t)$做周期延拓，得到一个周期函数，周期为T:

$$\tilde{x}(t)=\begin{cases}1 & |t|\le T_1\\ 0 & T_1<|t|<\dfrac{T}{2}\end{cases}$$

周期函数的傅里叶级数为：

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

定义：

$$Ta_k=X(k\omega_0)=\int_T \tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

当： $T\to\infty$ $\quad \omega_0=\dfrac{2\pi}{T}\to d\omega$ $\quad k\omega_0=\omega$ $\quad \tilde{x}(t)\to x(t)$ $\quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\to\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

非周期信号的傅里叶变换

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$X(\omega)$称为$x(t)$的频谱

二、傅里叶变换的收敛性

1、如果$x(t)$是在定义域内平方可积，则$x(t)$与$X(\omega)$之间没有能量的差别。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt<\infty \quad\Rightarrow\quad \int_{-\infty}^{+\infty}|e(t)|^2\,dt=0$$

$$e(t)=x(t)-\lim_{T\to\infty}\tilde{x}(t), \qquad \tilde{x}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{+T}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

2、狄里赫利条件

1）$x(t)$在定义域内绝对可积 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt<\infty$

2）在任何有限的区间内，$x(t)$只有有限个极大值和极小值。

3）在任何有限的区间内，$x(t)$只有有限个不连续点，且每个不连续点都必须是有限值。

例1：$x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$

当$\alpha<0$时，不满足可积条件，只有当$\alpha>0$时：

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha t}u(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{0}^{+\infty}e^{-(\alpha+j\omega)t}dt=\frac{1}{\alpha+j\omega}e^{-(\alpha+j\omega)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

$$|X(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} \qquad \mathrm{Arg}[X(\omega)]=-\tan^{-1}\frac{\omega}{\alpha}$$

例2：

$$x(t)=e^{-\alpha|t|},\qquad \alpha>0$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t|}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha t}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{\alpha-j\omega}+\frac{1}{\alpha+j\omega}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

例3：

$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|\le T_1\\ 0 & \text{other}\end{cases}$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-T_1}^{+T_1}e^{-j\omega t}dt=\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$$

$$\hat{x}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{+\Omega}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{+\Omega}\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}e^{j\omega t}d\omega \qquad \hat{x}(t)\Big|_{t=\pm T_1}=\frac{1}{2}$$

$$x(t)=\lim_{\Omega\to\infty}\hat{x}(t)=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{+\Omega}\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}e^{j\omega t}d\omega$$

例4:

$$X(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\le\Omega\\ 0 & |\omega|>\Omega\end{cases}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{+\Omega}e^{j\omega t}d\omega=\frac{\sin\Omega t}{\pi t}$$

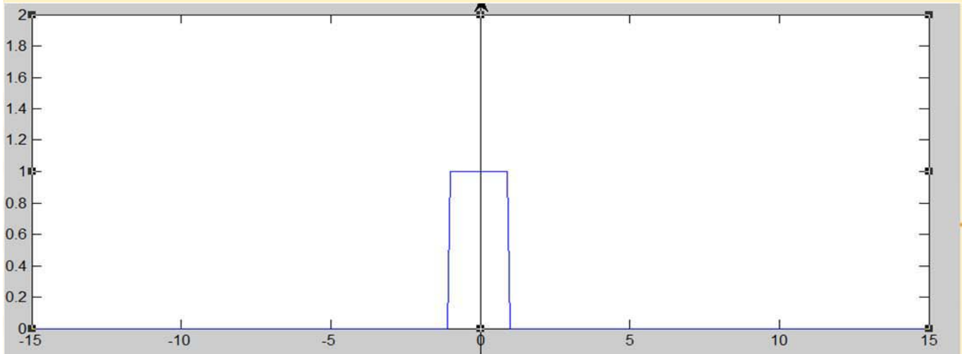
定义一个新的特殊函数，sinc函数:

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\mathrm{sinc}(x)$$

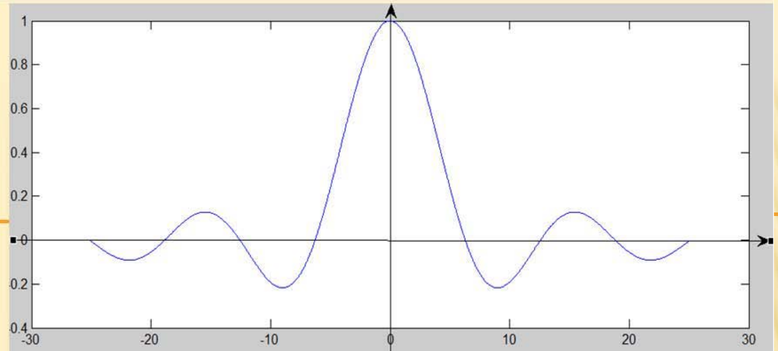
形式比较:

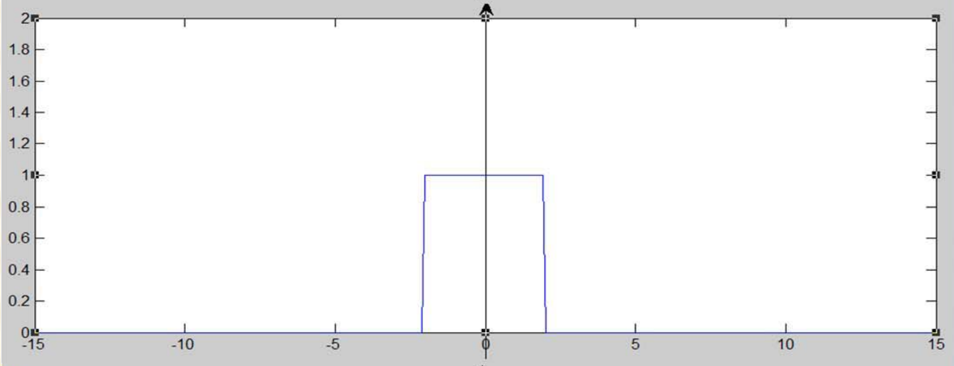
$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|\le T\\ 0 & |t|>T\end{cases} \qquad X(\omega)=\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$$

$$x(t)=\frac{\sin\Omega t}{\pi t} \qquad X(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\le\Omega\\ 0 & |\omega|>\Omega\end{cases}$$

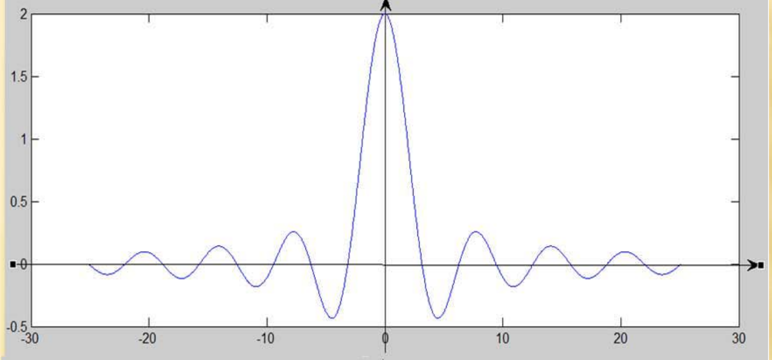


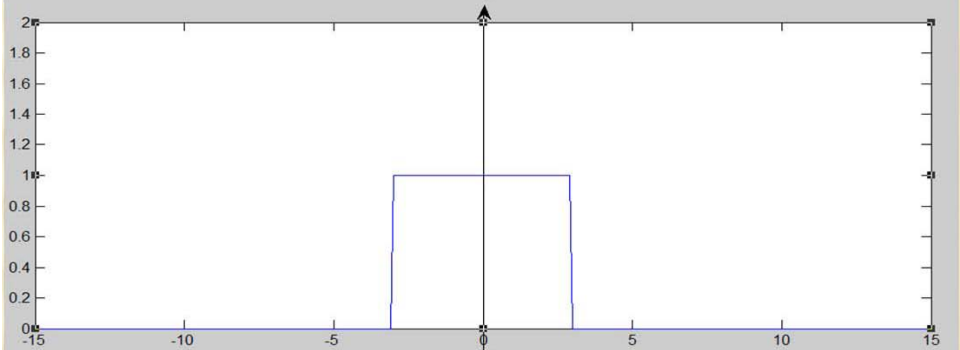
$T = 1$



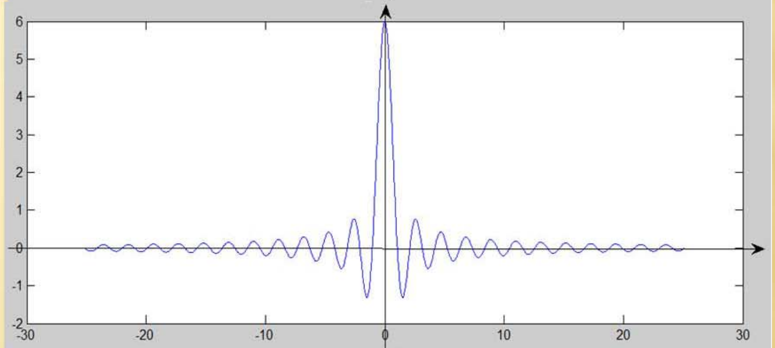


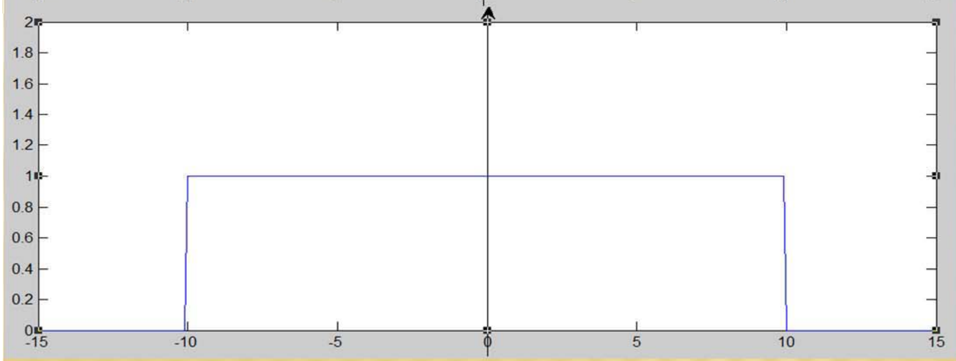
$T = 2$



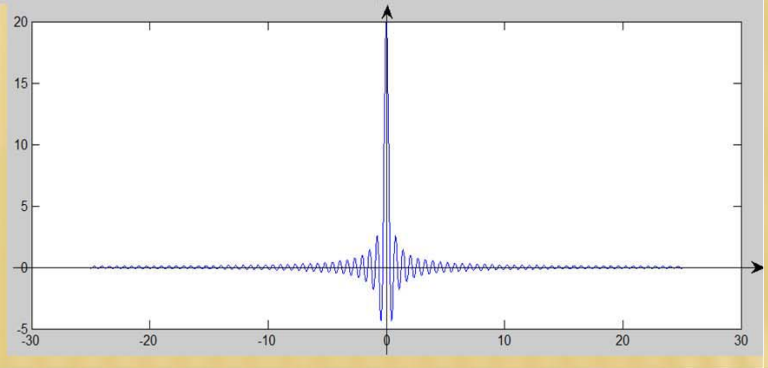


$T = 3$





$T = 10$



§ 5 周期信号与连续傅里叶变换

一、周期信号傅里叶级数与非周期信号傅里叶变换的关系

设一周期信号和一个非周期信号的关系如下：

$$x(t)=\begin{cases}\tilde{x}(t) & -\dfrac{T_0}{2}\le t\le\dfrac{T_0}{2}\\ 0 & |t|>\dfrac{T_0}{2}\end{cases}$$

周期信号的傅里叶级数为：

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}\tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$X(\omega)$

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt}$$

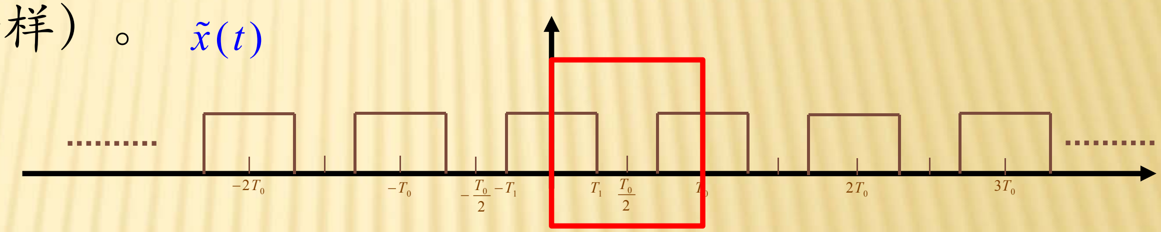
$$a_k=\frac{1}{T_0}X(k\omega_0)$$

$X(\omega)$：非周期信号的傅里叶变换，是一个连续函数。

$$Ta_k = X(k\omega_0),\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$ ：周期信号的傅里叶级数，是一个离散信号。

结论： 周期信号的傅里叶级数，就是与之对应的非周期函数的傅里叶变换的离散化（或抽样）。

实例分析:



$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & -T_1 \le t \le T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le T_1,\ T_0 - T_1 \le t \le T_0 \\ 0 & \text{Other} \end{cases}$$

$$X_1(\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

$$X_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X_2(\omega) = \int_0^{T_1} e^{-j\omega t} dt + \int_{T_0 - T_1}^{T_0} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega}[1 - e^{-j\omega T_1}] + \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega T_0}[e^{-j\omega T_1} - 1]$$

$$X_2(\omega)=\frac{2}{\omega}\sin(\frac{\omega T_1}{2})(e^{-j\frac{\omega T_1}{2}}+e^{-j\omega T_0}e^{j\frac{\omega T_1}{2}})$$

$$X_1(\omega)=\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

令： $\omega=k\omega_0$

$$X_2(k\omega_0)=\frac{2}{k\omega_0}\sin(\frac{k\omega_0 T_1}{2})(e^{-j\frac{k\omega_0 T_1}{2}}+e^{-jk\omega_0 T_0}e^{j\frac{k\omega_0 T_1}{2}})$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0},\qquad \omega_0 T_0=2\pi,\qquad e^{-jk\omega_0 T_0}=e^{-jk2\pi}=1$$

$$X_2(k\omega_0)=\frac{2}{k\omega_0}\sin(\frac{k\omega_0 T_1}{2})(e^{-j\frac{k\omega_0 T_1}{2}}+e^{j\frac{k\omega_0 T_1}{2}})$$

$$=\frac{2}{k\omega_0}\sin(\frac{k\omega_0 T_1}{2})\cdot 2\cdot\cos(\frac{k\omega_0 T_1}{2})=\frac{2}{k\omega_0}\sin(k\omega_0 T_1)=X_1(k\omega_0)$$

$$X_2(k\omega_0)=\frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0}=X_1(k\omega_0)$$ 抽样点相等

二、周期信号的傅里叶变换

设某一信号的傅里叶变换为:

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

其变换为:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

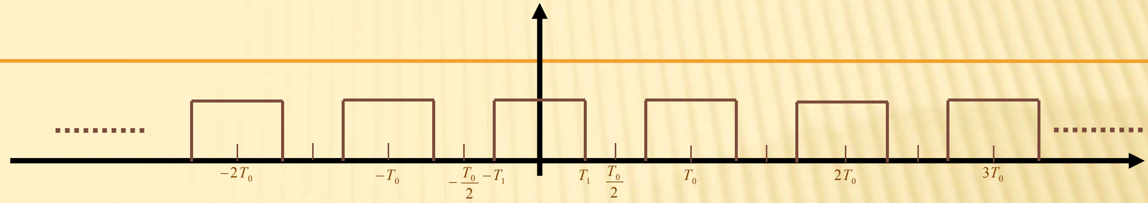
推广:

$$X(\omega) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta(\omega - k\omega_0)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

结论: 周期信号的傅里叶变换,就是强度与该信号的傅里叶级数的系数相对应的一串冲激函数。

实例1：方波信号



$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \delta(\omega - k\omega_0)$$

实例2：单位抽样序列

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

§6 连续时间傅里叶变换的性质

连续时间傅里叶变换公式:

$$\begin{cases} X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\ x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \end{cases}$$

$$x(t) \underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\rightleftharpoons}} X(\omega)$$

傅里叶变换对

一、线性特性:

如果:

$$x_1(t) \underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\rightleftharpoons}} X_1(\omega)$$

$$x_2(t) \underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\rightleftharpoons}} X_2(\omega)$$

则有: $$ax_1(t) + bx_2(t) \underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\rightleftharpoons}} aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$$

二、对称性:

如果$x(t)$是一个实函数，则有:

$$X(-\omega) = X^*(\omega)$$

而且有:
$$\mathrm{Re}[X(\omega)] = \mathrm{Re}[X(-\omega)]$$

$$\mathrm{Im}[X(\omega)] = -\mathrm{Im}[X(-\omega)]$$

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)|$$

$$\mathrm{Arg}[X(\omega)] = -\mathrm{Arg}[X(-\omega)]$$

三、时移性:

如果:
$$x(t) \underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\rightleftharpoons}} X(\omega)$$

则有:
$$x(t-t_0) \underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\rightleftharpoons}} e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

四、微积分性质:

如果:
$$x(t) \underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\rightleftharpoons}} X(\omega)$$

则有:
$$\frac{dx(t)}{dt} \underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\rightleftharpoons}} j\omega X(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

五、时间和频率的尺度变换:

如果: $x(t) \underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\rightleftharpoons}} X(\omega)$ 则有: $x(at) \underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{|a|} X(\frac{\omega}{a})$

六、对偶性:

正变换: $$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

逆变换: $$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

通式: $$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) e^{juv} dv$$

计算过程完全一样,只是存在一个常系数,和指数上的一个正负关系。

七、帕斯维尔(Povseval)定理,能量守恒:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

傅里叶变换是一个能量守恒的变换，对信号完成变换后，信号中的任何信息没有丢失。

$|X(\omega)|^2$表示信号$x(t)$的能量依变量ω的分布，故称为能量谱。

对于周期信号$\tilde{x}(t)$，其能量是无限的，因此不存在能量谱。但是可以用下式表示其功率谱。

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0}|\tilde{x}(t)|^2\,dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2$$

即用一个周期内的能量和的平均值表示其功率依变量$k\omega_0$的分布。

§7 卷积性质

一、傅里叶变换的重要应用之一：卷积定理。

设一LTI系统的输入、输出、和单位冲激响应分别为：

$$x(t) \qquad y(t) \qquad h(t)$$

各变量满足以下关系式：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

对上式两边分别求傅里叶变换：

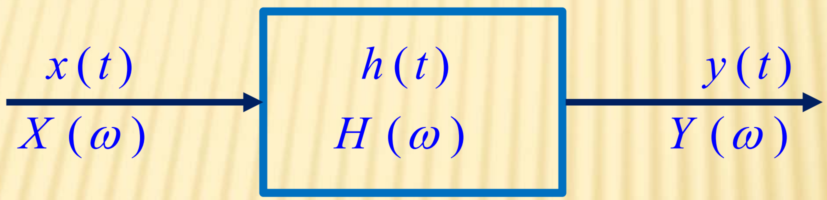
$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau e^{-j\omega t}dt$$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)}dt \cdot e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)}dt\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)}d(t-\tau)}_{H(\omega)}\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}_{X(\omega)}$$

因此有： $Y(\omega)=H(\omega)\cdot X(\omega)$



$H(\omega)$是 $h(t)$ 的傅里叶变换，因此能够完全表征系统的性质，因此称为系统的频率特性。

当系统稳定时： $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|d\tau<\infty$ 存在

当系统不稳定时，该条件不满足， $H(\omega)$ 不存在。

例题1:

$$h(t)=\delta(t-t_0) \quad \rightarrow \quad H(\omega)=e^{-j\omega t_0}$$

$$Y(\omega)=e^{-j\omega t_0}X(\omega)$$

$$y(t)=x(t-t_0)$$

例题2:

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt} \qquad Y(\omega)=j\omega X(\omega)$$

$$H(\omega)=j\omega$$

例题3:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau \qquad Y(\omega)=[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)]X(\omega)$$

$$H(\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

例题3:

$$h(t) = e^{-at}u(t) \qquad a > 0$$

$$x(t) = e^{-bt}u(t) \qquad b > 0$$

分别作傅里叶变换:

$$\begin{cases} H(\omega) = \dfrac{1}{a + j\omega} \\ X(\omega) = \dfrac{1}{b + j\omega} \end{cases} \qquad Y(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)(b + j\omega)}$$

$$Y(\omega) = \frac{A}{a + j\omega} + \frac{B}{b + j\omega}$$

$$= \frac{1}{b - a}\left[\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{b + j\omega}\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{b - a}[e^{-at}u(t) - e^{-bt}u(t)]$$

如果 $a = b$，可利用积分性质得到:

$$y(t) = te^{-at}u(t)$$

二、周期信号的卷积

做为LTI系统的单位冲激响应，$h(t)$是不可能为周期，否则系统就不稳定，不满足绝对可积性。但是两个周期信号（函数）可以完全做卷积运算，只是卷积运算的范围是一个**完整的公共周期**。

$$\tilde{y}(t) = \int_{T_0} \tilde{x}_1(\tau)\tilde{x}_2(t-\tau)d\tau$$

$\tilde{y}(t)$ 也是周期信号，周期为T_0

如果$\tilde{x}_1(t)$的周期为T_1，$\tilde{x}_2(t)$的周期为T_2，则T_0就是T_1和T_2的最小公倍数。

§8 调制性质（略）

§9 傅里叶变换与傅里叶级数的性质及基本傅里叶变换对列表（略）

§10 连续时间傅里叶变换的极坐标表示

一、频率特性分解

设一个连续时间函数$x(t)$，其傅里叶变换为$X(\omega)$。

$$x(t) \underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\rightleftharpoons}} X(\omega)$$

一般情况下，$x(t)$ 和$X(\omega)$ 均认为是复数：

$$X(\omega) = \underbrace{\left|X(\omega)\right|}_{\text{幅值}} \cdot \underbrace{e^{j\varphi(\omega)}}_{\text{相位}}$$

实例分析：

设一实的周期信号，以及对应的傅里叶级数如下：

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t}$$

对应某一个频率成分$k\omega_0$：　$\tilde{x}_k(t) = a_k e^{-jk\omega_0 t} + a_k^* e^{jk\omega_0 t}$

因为$\tilde{x}(t)$是实函数，因此下式成立：

$$a_k = |a_k| e^{-j\varphi(k\omega_0)}, \quad a_k^* = |a_k| e^{j\varphi(k\omega_0)}$$

$$\tilde{x}_k(t) = |a_k| e^{-j\varphi(k\omega_0)} e^{-jk\omega_0 t} + |a_k| e^{j\varphi(k\omega_0)} e^{jk\omega_0 t} = |a_k| (e^{-j(\varphi(k\omega_0)+k\omega_0 t)} + e^{j(\varphi(k\omega_0)+k\omega_0 t)})$$

$$= 2|a_k| \cos(k\omega_0 t + \varphi(k\omega_0))$$

初始相位

函数的谐波成分相同，幅值相同，但初始相位不同，导致函数相差明显。

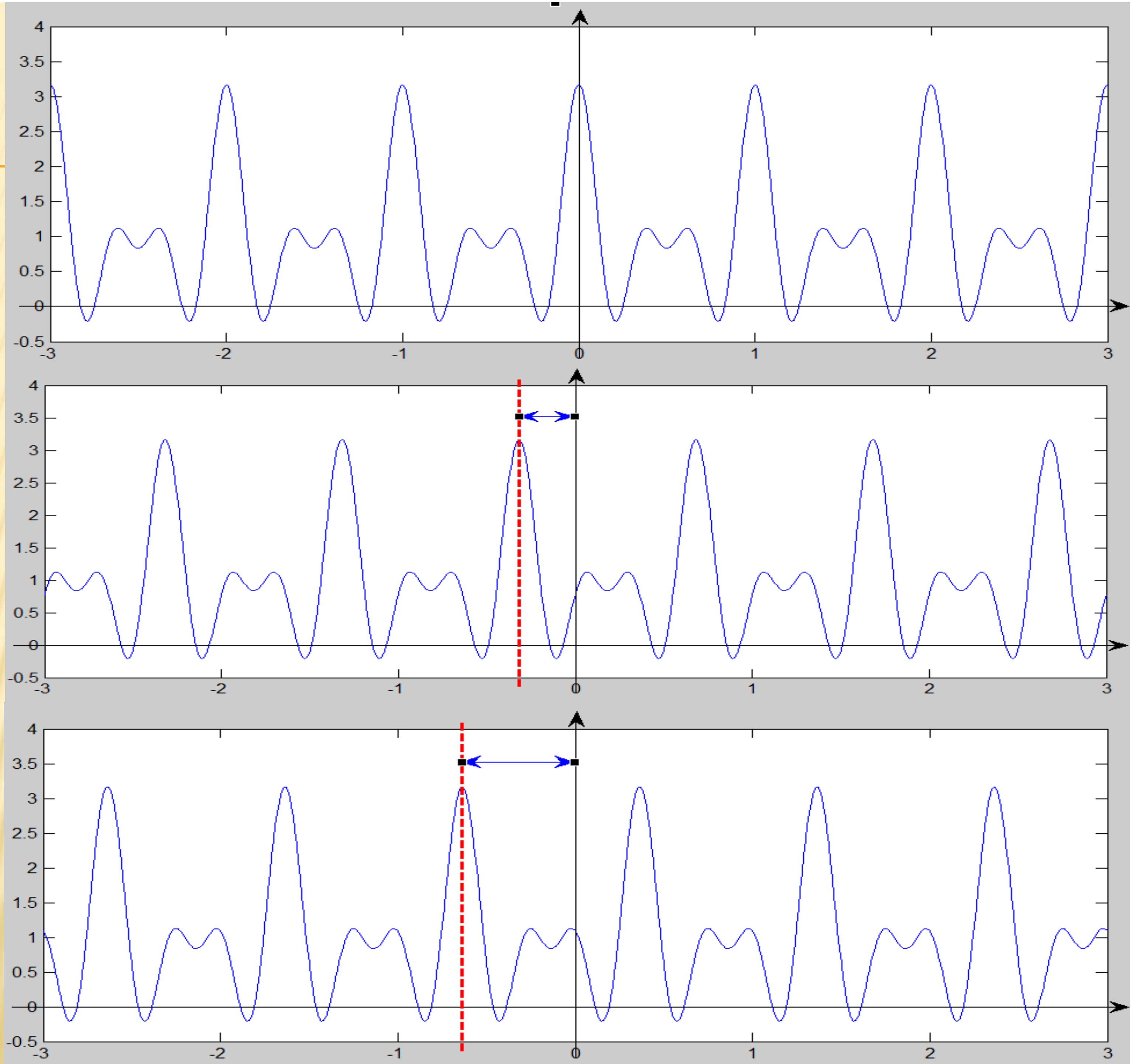
$$\tilde{x}(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t + \varphi_1) + \cos(4\pi t + \varphi_2) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t + \varphi_3)$$

	φ_1	φ_2	φ_3
1	0	0	0
2	2	4	6
3	4	8	12
4	6	-2.7	0.39
5	1.2	4.1	-7.02

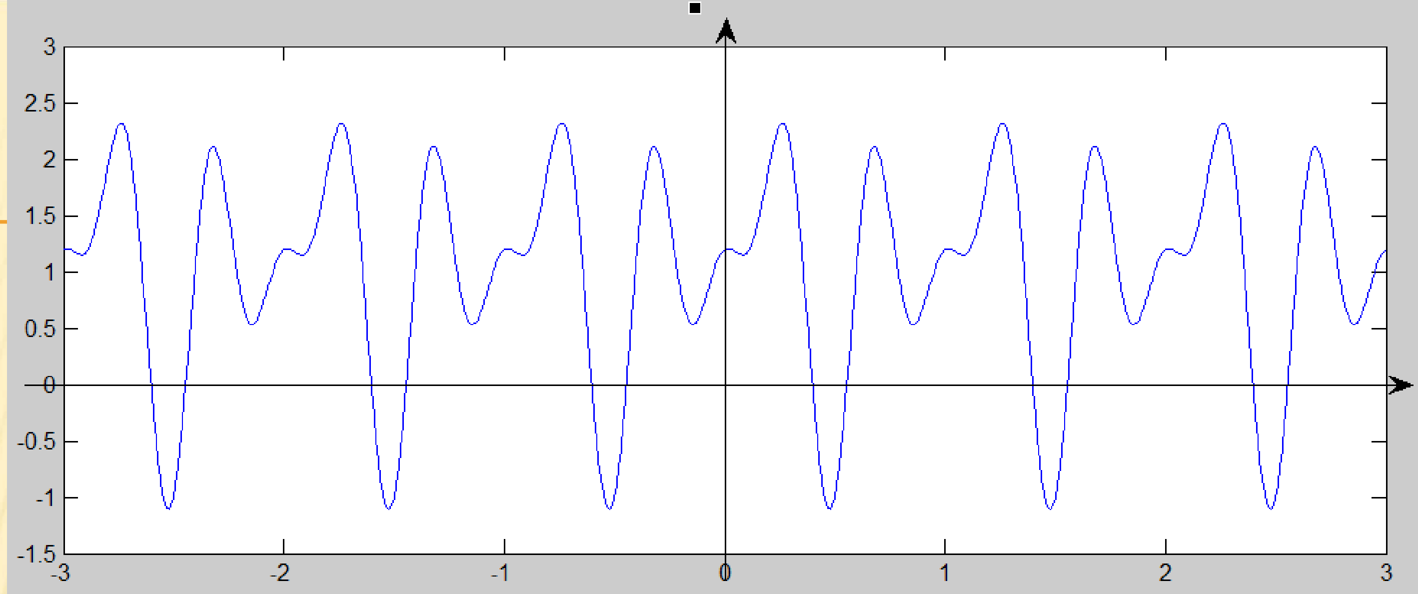
$\varphi_1 = 0$
$\varphi_2 = 0$
$\varphi_3 = 0$

$\varphi_1 = 2$
$\varphi_2 = 4$
$\varphi_3 = 6$

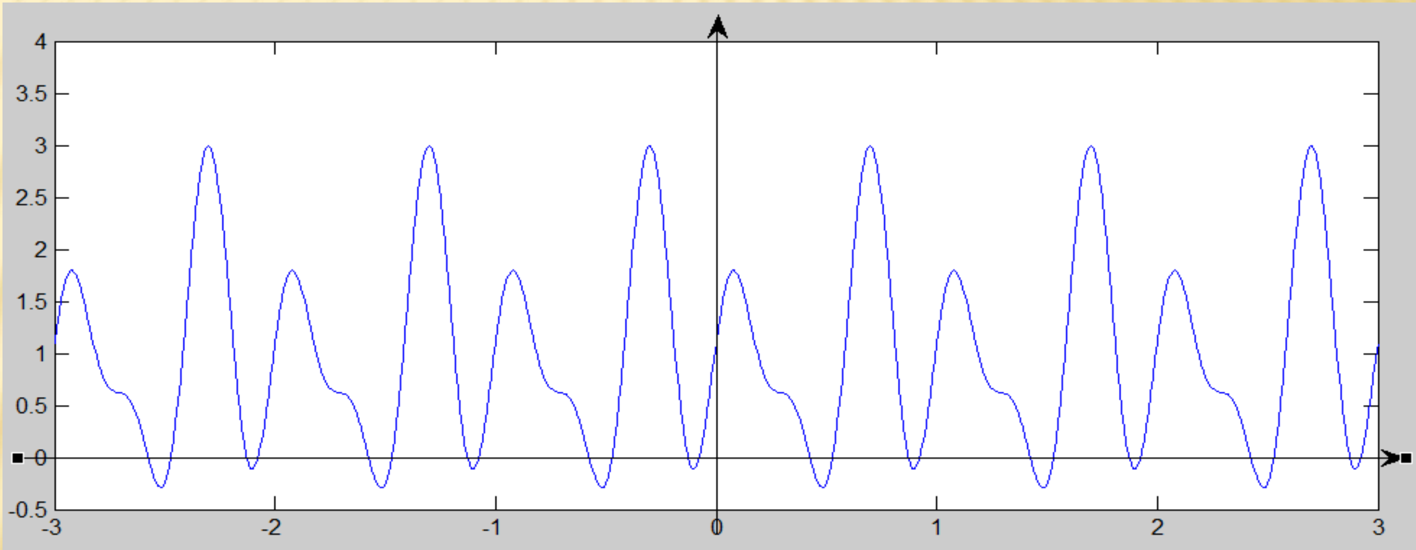
$\varphi_1 = 4$
$\varphi_2 = 8$
$\varphi_3 = 12$



$$\varphi_1 = 6$$
$$\varphi_2 = -2.7$$
$$\varphi_3 = 0.39$$



$$\varphi_1 = 1.2$$
$$\varphi_2 = 4.1$$
$$\varphi_3 = -7.02$$



图像的质量受相位的影响更加严重，这就是所谓的相位失真。

$$\tilde{x}(t)=2\sum_{k=0}^{+\infty}\underline{|a_k|}\cos(k\omega_0 t+\underline{\varphi(k\omega_0)})$$

幅值变化　　　　相位变化

二、伯德图

设一LTI系统的输入、输出、和单位冲激响应分别为： $x(t), y(t), h(t)$

对应的傅里叶变换为： $Y(\omega)=H(\omega)\cdot X(\omega)=X(\omega)\cdot H(\omega)$

两边取绝对值和相位： $|Y(\omega)|e^{j\mathrm{Arg}[Y(\omega)]}=|X(\omega)|e^{j\mathrm{Arg}[X(\omega)]}\cdot|H(\omega)|e^{j\mathrm{Arg}[H(\omega)]}$

$$\begin{cases}|Y(\omega)|=|X(\omega)|\cdot|H(\omega)| \\ \mathrm{Arg}[Y(\omega)]=\mathrm{Arg}[X(\omega)]+\mathrm{Arg}[H(\omega)]\end{cases}$$

对幅值取对数（乘20，单位：分贝）：

$$20\lg|Y(\omega)| = 20\lg|X(\omega)| + 20\lg|H(\omega)|$$

对自变量ω以对数的坐标取值，绘制的图像称为伯德图。

§11 用线性常微分方程表征的系统的频率特性

一、由线性常微分方程计算系统的频率响应与单位冲激响应

常微分方程的通式:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad \sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} a_k x^{(k)}(t)$$

傅利叶变换:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \qquad H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

对上述的常微分方程两边求傅里叶变换:

$$x(t) \underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\rightleftharpoons}} X(\omega) \qquad \frac{dx(t)}{dt} \underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\rightleftharpoons}} j\omega X(\omega)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(\omega) \qquad \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) = \boxed{\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}}$$

系统的单位冲激响应：

$$h(t)=\mathscr{F}^{-1}[H(\omega)]=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N}a_k(j\omega)^k}\right]$$

例1： $\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=x(t) \qquad a>0$

$$H(\omega)=\frac{1}{j\omega+a} \qquad h(t)=e^{-at}u(t)$$

例2： $\frac{dy^2(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$

$$H(\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+4j\omega+3}=\frac{j\omega+2}{(j\omega+3)(j\omega+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{j\omega+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{j\omega+3}$$

$$h(t)=\frac{1}{2}e^{-t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

例2续，如果：$x(t)=e^{-t}u(t)$ ，求 $y(t)=?$

$$X(\omega)=\frac{1}{j\omega+1} \qquad Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$$

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=\frac{j\omega+1}{(j\omega)^2+4j\omega+3}\cdot\frac{1}{j\omega+1}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{j\omega+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(j\omega+1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{j\omega+3}$$

$$x(t)=[\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{1}{4}e^{-3t}]u(t)$$

二、系统的级联与并联

级联：

系统的频率特性：$H(\omega)=\dfrac{\sum_{k=0}^{M}b_k(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N}a_k(j\omega)^k}$ 分子分母同时做因式分解。

$$H(\omega)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N}a_k(j\omega)^k}=\frac{b_M\prod_{k=1}^{M}(\lambda_k+j\omega)}{a_N\prod_{k=1}^{N}(\gamma_k+j\omega)}$$

λ_k,γ_k 均可以为复数。

因为：

$$(\lambda_k+j\omega)(\lambda_k^*+j\omega)=|\lambda_k|^2+2\,\mathrm{Re}[\lambda_k]j\omega+(j\omega)^2$$

实数　　实数

因此，为了保证每个因式为实数，上式中的部分因式的阶次可以为2，即：

$$H(\omega)=\frac{b_M\prod_{k=1}^{P}((j\omega)^2+\beta_{1k}j\omega+\beta_{2k})\prod_{k=1}^{M-2P}(j\omega+\lambda_k)}{a_N\prod_{k=1}^{Q}((j\omega)^2+\alpha_{1k}j\omega+\alpha_{2k})\prod_{k=1}^{N-2Q}(j\omega+\gamma_k)}$$

$$H(\omega)=H_1(\omega)\cdot H_2(\omega)\cdots\cdots H_P(\omega)$$

$H_i(\omega)$ 子系统级联（串联）组成原系统

$$H_i(\omega)=\frac{(j\omega)^2+\beta_{1i}j\omega+\beta_{2i}}{(j\omega)^2+\alpha_{1i}j\omega+\alpha_{2i}}$$

$\alpha_{1i},\alpha_{2i},\beta_{1i},\beta_{2i}$ 均为实数。

所对应的子系统的微分方程:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\alpha_{1i}\frac{dy(t)}{dt}+\alpha_{2i}y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\beta_{1i}\frac{dx(t)}{dt}+\beta_{2i}x(t)$$

并联:

$$H(\omega)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N}a_k(j\omega)^k}$$ 对该真分式做部分分式计算

$$H(\omega)=\frac{b_M}{a_N}+\sum_{k=1}^{Q}\frac{\beta_{1k}j\omega+\beta_{2k}}{(j\omega)^2+\alpha_{1k}j\omega+\alpha_{2k}}+\sum_{k=1}^{N-2Q}\frac{A_k}{j\omega+\gamma_k}$$

$$H(\omega)=\frac{b_M}{a_N}+\sum_{k=1}^{N/2}\frac{\beta_{1k}j\omega+\beta_{2k}}{(j\omega)^2+\alpha_{1k}j\omega+\alpha_{2k}}$$ 子系统并联组成原系统

$$H_i(\omega)=\frac{\beta_{1i}j\omega+\beta_{2i}}{(j\omega)^2+\alpha_{1i}j\omega+\alpha_{2i}}$$ $\alpha_{1i},\alpha_{2i},\beta_{1i},\beta_{2i}$ 均为实数。

§12 一阶系统与二阶系统

一、一阶系统

微分方程： $$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

频率响应： $$H(\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$$

系统的单位冲激响应： $$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$

单位阶跃响应： $$s(t) = h(t) * u(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) u(t)$$

实例：RC电路 $$RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u(t)$$ $\tau = RC$ 充电时间常数

特征频率分析： $$H(\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1} = \frac{\frac{1}{\tau}}{j\omega + \frac{1}{\tau}} = \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c}$$ 特征频率

幅频特性:

$$|H(\omega)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\omega}{\omega_c})^2 + 1}}$$

$$20\log|H(\omega)| = 20\log\frac{1}{\sqrt{(\frac{\omega}{\omega_c})^2 + 1}} = -20\log\sqrt{(\frac{\omega}{\omega_c})^2 + 1}$$

相频特性:

$$\mathrm{Arg}[H(\omega)] = -\tan^{-1}(\frac{\omega}{\omega_c})$$

系统总是稳定的。最大相位为$-\frac{\pi}{2}$，τ越小，系统的响应越快。

二、二阶系统

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = x(t)$$

或者:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{k}{m}y(t) = \frac{1}{m}x(t)$$

定义一组新参数:

$$\omega_c=\sqrt{\frac{k}{m}},\qquad \xi=\frac{b}{2\sqrt{km}}$$

系统的频率响应特性:

$$H(\omega)==\frac{\omega_c^2}{(j\omega)^2+2\xi\omega_c(j\omega)+\omega_c^2}$$

当特征方程有两个不同的实根时:

$$H(\omega)=\frac{\omega_c^2}{(j\omega-c_1)(j\omega-c_2)}$$

$$\begin{cases} c_1=-\xi\omega_c+\omega_c\sqrt{\xi^2-1} \\ c_2=-\xi\omega_c-\omega_c\sqrt{\xi^2-1} \end{cases}\qquad H(\omega)=\frac{M}{j\omega-c_1}-\frac{M}{j\omega-c_2},\quad M=\frac{\omega_c}{2\sqrt{\xi^2-1}}$$

系统的单位冲激响应：

$$h(t) = M(e^{c_1 t} + e^{c_2 t})u(t)$$

当有两个相同的实根时：

$$\xi = 1, \qquad c_1 = c_2 = -\omega_c, \qquad H(\omega) = \frac{\omega_c^2}{(j\omega + \omega_c)^2}$$

$$h(t) = \omega_c^2 t \cdot e^{-\omega_c t} u(t)$$

当系统不存在实根时：

$$\xi < 1, \qquad H(\omega) = \frac{\omega_c^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_c(j\omega) + \omega_c^2}$$

$$\begin{cases} c_1 = -\xi\omega_c + j\omega_c\sqrt{1-\xi^2} \\ c_2 = -\xi\omega_c - j\omega_c\sqrt{1-\xi^2} \end{cases} \qquad H(\omega) = \frac{M}{j\omega - c_1} - \frac{M}{j\omega - c_2}, \quad M = \frac{\omega_c}{j2\sqrt{1-\xi^2}}$$

系统的单位冲激响应：

$$h(t) = M(e^{c_1 t} - e^{c_2 t})u(t) = \frac{\omega_c}{j2\sqrt{1-\xi^2}}(e^{-(\xi\omega_c - j\omega_c\sqrt{1-\xi^2})t} - e^{-(\xi\omega_c + j\omega_c\sqrt{1-\xi^2})t})u(t)$$

$$= \frac{\omega_c e^{-\xi\omega_c t}}{j2\sqrt{1-\xi^2}}(e^{j\omega_c\sqrt{1-\xi^2}t} - e^{-j\omega_c\sqrt{1-\xi^2}t})u(t)$$

$$= \frac{\omega_c e^{-\xi\omega_c t}}{\sqrt{1-\xi^2}}[\sin(\omega_c\sqrt{1-\xi^2}t)]u(t)$$

轮廓线 振荡线

$$h(t) = \frac{\omega_c \boxed{e^{-\xi\omega_c t}}}{\sqrt{1-\xi^2}}\boxed{[\sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_c t)]}u(t)$$

单位阶跃响应：

$$s(t) = h(t) * u(t) = (1 + M(\frac{e^{c_1 t}}{c_1} - \frac{e^{c_2 t}}{c_2}))u(t)$$

轮廓线 振荡线

$$s(t) = (1 - \frac{\boxed{e^{-\xi\omega_c t}}}{\sqrt{1-\xi^2}}\boxed{\sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_c t + \varphi)})u(t) \qquad \varphi = \cos^{-1}\xi$$

频率特性：

$$H(\omega)=\frac{1}{(j\frac{\omega}{\omega_c})^2+2\xi(j\frac{\omega}{\omega_c})+1}$$

幅频特性：

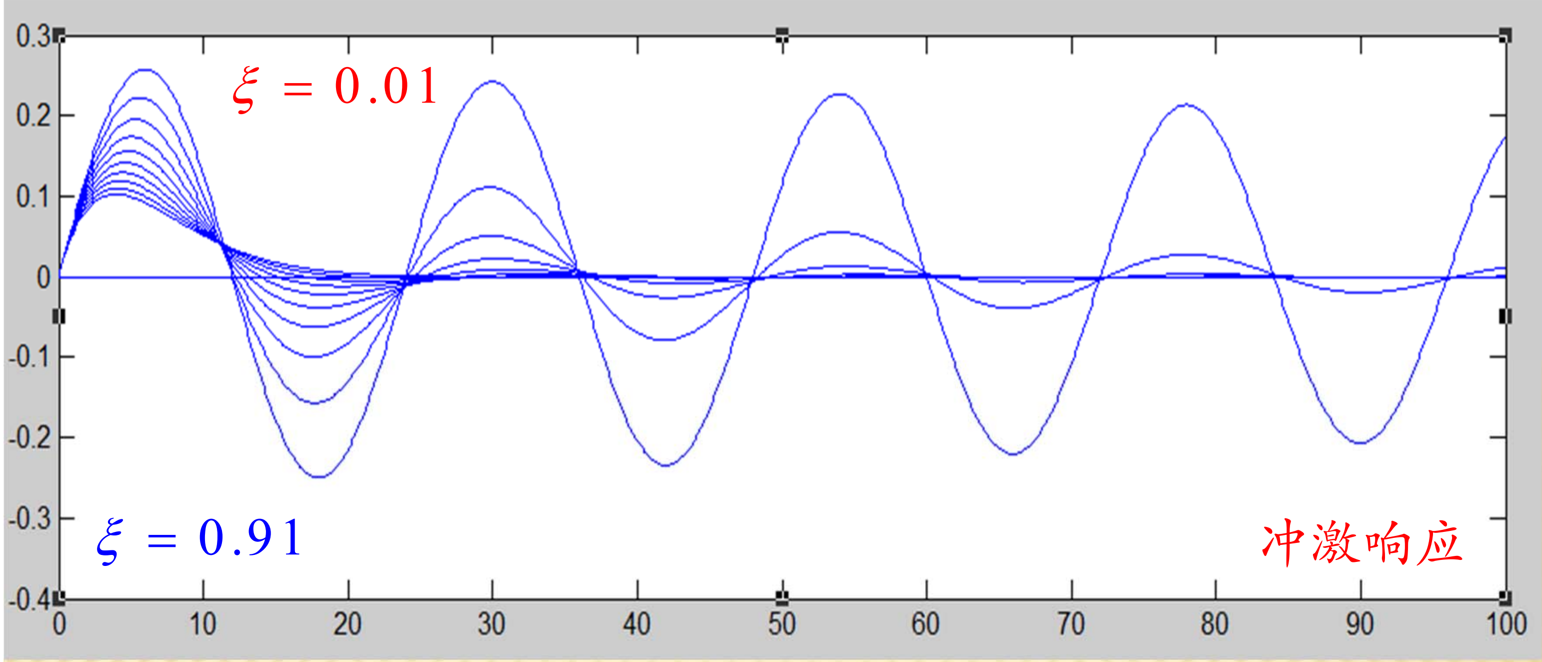
$$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{[1-(\frac{\omega}{\omega_c})^2]^2+4(\xi\frac{\omega}{\omega_c})^2}}$$

$$20\log H(\omega)=-20\log\sqrt{[1-(\frac{\omega}{\omega_c})^2]^2+4(\xi\frac{\omega}{\omega_c})^2}$$

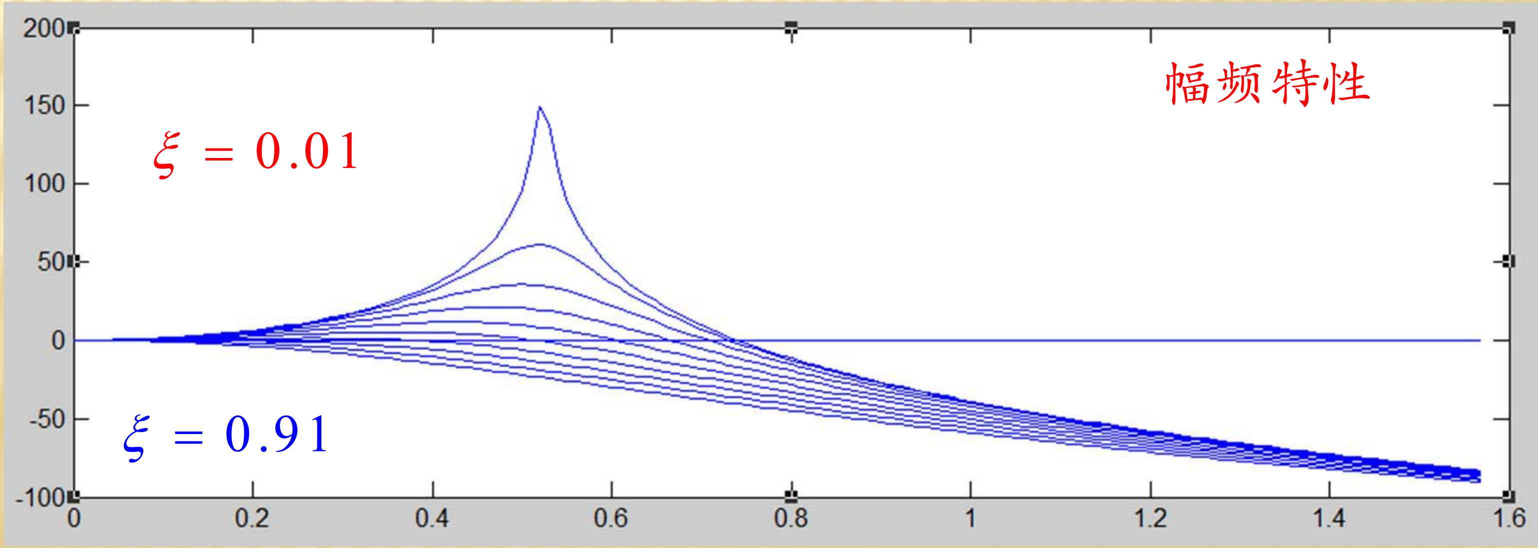
相频特性：

$$\mathrm{Arg}\left[H(\omega)\right]=-\tan^{-1}\left[\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_c}}{1-(\frac{\omega}{\omega_c})^2}\right]$$

在阻尼系数较小时，系统在特征频率点上引起共振；最大相位为-π。



ξ = 0.01
ξ = 0.91
冲激响应



幅频特性
ξ = 0.01
ξ = 0.91

第三章结束