多元积分练习题解答

1. 令 $I_1=\iint\limits_D xe^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $I_2=\iint\limits_D x^2e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 且 $I_3=\iint\limits_D x^3e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，这里 $D:x^2+y^2\le a^2$，则

(A) $I_1=I_2$.　　**(B)** $I_2=I_3$.　　**(C)** $I_1=I_3$.　　**(D)** $I_1\ne I_2, I_2\ne I_3, I_1\ne I_3$

解 选**(C)** .

由对称性知 $I_1=I_3=0$，而 $I_2>0$.

2. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，且 $f(x,y)=xy+\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由 x 轴、y 轴以及直线 $x+y=1$ 围成，则 $f(x,y)=$ $\underline{\quad xy+\dfrac{1}{12}\quad}$.

3. 设 $f(x,y)=\max\{x,y\}$，$D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，计算 $I=\iint\limits_D f(x,y)\left|y-x^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

解：用曲线 $y=x, y=x^2$ 将区域 D 分成三部分

$$D_1=\{(x,y)|0\le x\le y\le 1\},$$
$$D_2=\{(x,y)|x^2\le y\le x\le 1\},$$
$$D_3=\{(x,y)|0\le y\le x^2\le 1\}。$$

则

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{D_1} y\left(y-x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} x\left(y-x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_3} x\left(x^2-y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\left(y^2-yx^2\right)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^x\left(xy-x^3\right)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\left(x^3-xy\right)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{2}+x^5\right)\mathrm{d}x=\frac{11}{40}\end{aligned}$$

$f(x)$　　$f(0)=0$　　$f'(0)=1$　　$D:x^2+y^2\le t^2$

4. $I=\int_0^1 dy\int_y^1\cos(x^2)dx=$

解: $I=\int_0^1 dx\int_0^x \cos(x^2)dy=\int_0^1 x\cos(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \cos t dt=\frac{\sin 1}{2}$.

5. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由 yoz 平面内 $z=0$，$z=2$ 以及曲线 $y^2-(z-1)^2=1$ 所围成的平面区域绕 z 轴旋转而成的空间区域。

解： 由题设知，区域 Ω 是由旋转面 $x^2+y^2-(z-1)^2=1$ 与平面 $z=0$，$z=2$ 所围成。用与 z 轴垂直的平面截立体 Ω，设截面为 D_z，于是

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

显然 D_z 是圆域，圆心为 $(0,0,z)(0\le z\le 2)$，半径为 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+(z-1)^2}$。所以

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\vartheta\int_0^{\sqrt{1+(z-1)^2}} r^3\mathrm{d}r=2\pi\int_0^2\frac{1}{4}\left[1+(z-1)^2\right]^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}\int_0^2\left[1+2(z-1)^2+(z-1)^4\right]\mathrm{d}z=\frac{28\pi}{15}$$

6. 设 l 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$ 一周，则第一型曲线积分 $I=\int_l (x+y)^2\,\mathrm{d}l=$ $\underline{\quad\frac{2}{3}\pi a^3\quad}$.

解　在 l 上，$x+y=-z$，于是

$$I=\int_l (x+y)^2\,\mathrm{d}l=\int_l z^2\,\mathrm{d}l.$$

将 l 的方程中的 x, y, z 依次轮换，其方程不变，即 l 满足轮换对称条件，于是

$$I=\int_l z^2\,\mathrm{d}l=\int_l x^2\,\mathrm{d}l=\int_l y^2\,\mathrm{d}l,$$

因此　$I=\frac{1}{3}\int_l (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}l=\frac{1}{3}\int_l a^2\,\mathrm{d}l=\frac{2}{3}\pi a^3$.

7. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D:$\frac{x^2}{4}+y^2\le 1$ 上具有连续的二阶偏导数，C 为顺时针椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，则 $\oint\limits_C\left[-3y+f_x'(x,y)\right]dx+f_y'(x,y)dy=\underline{-6\pi}$。

8. **给定曲线积分 $I=\int_C (y^3-y)\,\mathrm{d}x-2x^3\mathrm{d}y$，其中 C 为光滑的简单闭曲线，取正向. 当曲线 C 的方程为 $\underline{\quad 6x^2+3y^2=1\quad}$ 时，I 的值最大.**

解　设 D 为由 C 所围成的平面区域．应用格林公式

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(-6x^2-3y^2+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

注意到当 $6x^2+3y^2>1$ 时，被积函数小于 **0**，故当 D 为 $6x^2+3y^2\le 1$ 时，此二重积分达到最大值．也就是说当 C 为椭圆 $6x^2+3y^2=1$ 的正向边界时，曲线积分 I 取得最大值．

9.　若 $\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 是某一个二元函数的全微分，则常数 $a=$______．

解　$a=$　2　．

令 $P=\dfrac{x+ay}{(x+y)^2}$，$Q=\dfrac{y}{(x+y)^2}$，　则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-2y}{(x+y)^3},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{a(x+y)-2(x+ay)}{(x+y)^3}=\frac{(a-2)x-ay}{(x+y)^3}\quad .$$

仅当 $a=2$ 时，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，这时 $\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 是某一函数的全微分．

10. 求 $\int_L\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中曲线 L 是 $\dfrac{(x-1)^2}{9}+y^2=1$ 位于上半平面，从点 $(-2,0)$ 到 $(4,0)$ 的部分。

解： $P(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，即积分与路径无关。

但因在点 $(0,0)$ 处 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 无定义，故应选积分路径：从 $(-2,0)$ 到 $(-2,1)$ 再到 $(4,1)$ 最后到 $(4,0)$ 的折线段。于是

$$\int_L\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_0^1\frac{2\mathrm{d}y}{4+y^2}+\int_{-2}^4\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}+\int_1^0\frac{-4\mathrm{d}y}{16+y^2}$$
$$=\arctan\frac{1}{2}+\arctan 4-\arctan(-2)+\arctan\frac{1}{4}=\pi。$$

11. 计算曲线积分 $I=\int_C \dfrac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中曲线 C： $y=\varphi(x)$ 是从点 $A(-1,0)$ 到点 $B(1,0)$ 的一条不经过坐标原点的光滑曲线。

解： $P(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2},\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$， $Q(x,y)=-\dfrac{x-y}{x^2+y^2},\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$。

作上半圆 C_1：$x^2+y^2=r^2$，$y>0$，逆时针方向，取 r 充分小使 C_1 位与曲线 C 的下部且二者不相交。又在 x 轴上分别取 1 到 r 与 $-r$ 到 -1 两个线段 l_1 与 l_2，于是有

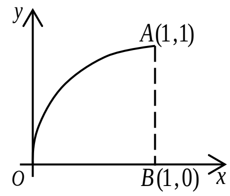
$I+\int_{C_1+l_1+l_2}\dfrac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，其中 D 是由 $C+C_1+l_1+l_2$ 所围成的区域。

从而，

$$I=-\int_{C_1+l_1+l_2}\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=-\left(\int_{C_1}+\int_{l_1}+\int_{l_2}\right)\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=-\int_0^{\pi}\frac{-r^2(\cos\vartheta+\sin\vartheta)\sin\vartheta-r^2(\cos\vartheta-\sin\vartheta)\cos\vartheta}{r^2}\mathrm{d}\vartheta-\int_1^r\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int_{-r}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_0^{\pi}\mathrm{d}t-\ln r+\ln r=\pi$$

12. 计算 $\int_L(\sin y-y)\mathrm{d}x+(x\cos y-1)\mathrm{d}y$, 其中 L 为从点 $O(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 在第一象限部分到点 $A(1,1)$ 的路径.



解　令 $P=\sin y-y,\quad Q=x\cos y-1,$　则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\cos y-(\cos y-1)=1.$$

取点 $B(1,0)$.　作有向直线段 $\overline{OB}$, 其方程为 $y=0$ (x 从 0 变到 1).

作有向直线段 $\overline{BA}$, 其方程为 $x=1$ (y 从 0 变到 1). 由曲线 L 、有向直线段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BO}$ 形成的闭曲线记为 L_0 (沿顺时针方向), L_0 所围成的区域记为 D, 则

$$\int_L(\sin y-y)\mathrm{d}x+(x\cos y-1)\mathrm{d}y$$

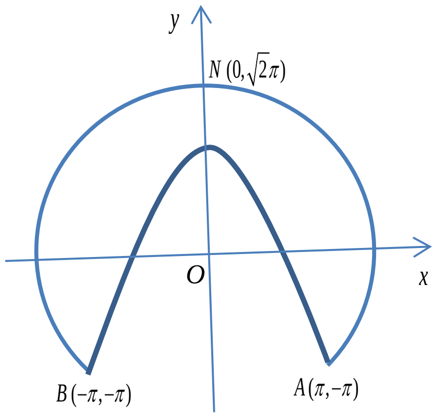
$$=\left(\oint_{L_0}-\int_{\overline{AB}}-\int_{\overline{BO}}\right)((\sin y-y)\mathrm{d}x+(x\cos y-1)\mathrm{d}y)$$

$$=-\iint_D\mathrm{d}\sigma+\int_{\overline{BA}}(\sin y-y)\mathrm{d}x+(x\cos y-1)\mathrm{d}y$$

$$+\int_{\overline{OB}}(\sin y-y)\mathrm{d}x+(x\cos y-1)\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{4}\pi+\int_0^1(\cos y-1)\,\mathrm{d}y+0 \qquad =-\frac{1}{4}\pi+\sin 1-1.$$

13. 设C是沿曲线$y=\pi\cos x$由点$A(\pi,-\pi)$到点$B(-\pi,-\pi)$的有向曲线．计算曲线积分



$$I=\int_C\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

解法 1　　$P=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$，　$Q=\dfrac{-x+y}{x^2+y^2}$.

因　$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故在不含原点的任何单连通区域内，曲线积分与路径无关.

选择经过三点$A(\pi,-\pi)$, $N(0,\sqrt{2}\pi)$, $B(-\pi,-\pi)$ 的有向圆弧

$$L:\begin{cases}x=\sqrt{2}\pi\cos t\\ y=\sqrt{2}\pi\sin t\end{cases}\qquad (\ t\text{从}-\frac{\pi}{4}\text{变到}\frac{5\pi}{4}\ )$$

作为积分路径，　于是

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\frac{1}{2\pi^2}[-\sqrt{2}\pi(\cos t+\sin t)\sqrt{2}\pi\sin t-\sqrt{2}\pi(\cos t-\sin t)\sqrt{2}\pi\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(-1)\,\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}\pi.$$

解法 2　　$P=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$，　$Q=\dfrac{-x+y}{x^2+y^2}$.

因　$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故在不含原点的任何单连通区域内，曲线积分与路径无关.

取点$C(\pi,\pi)$和点$D(-\pi,\pi)$ ，选择沿有向折线$\overline{AC}\cup\overline{CD}\cup\overline{DB}$的路径 .

在线段$\overline{AC}$上，　$x=\pi$，$y:-\pi\to\pi$；　在线段$\overline{CD}$上，　$y=\pi$，$x:\pi\to-\pi$；　在线段$\overline{DB}$上，$x=-\pi$，$y:\pi\to-\pi$．　于是

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-(\pi-y)\mathrm{d}y}{\pi^2+y^2}+\int_{\pi}^{-\pi}\frac{(x+\pi)\mathrm{d}x}{x^2+\pi^2}+\int_{\pi}^{-\pi}\frac{(\pi+y)\mathrm{d}y}{\pi^2+y^2}$$

$$=-6\pi\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\pi^2+x^2}=-\frac{3}{2}\pi.$$

14. 在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x(a>0)$ 中求一条曲线 L，使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L(1+y^3)dx+(2x+y)dy$ 的值最小.

解：设 $P=1+y^3$，$Q=2x+y$．含参数曲线 $y=a\sin x(a>0)$ 和 $y=0$ 所围成的闭区域记为 $D(a)$，从 A 到 O 的有向线段记为 l，其反向线段记为 l^-.

则由 Green 公式,

$$I(a)=\int_L(1+y^3)dx+(2x+y)dy=\int_{L+l+l^-}(1+y^3)dx+(2x+y)dy$$

$$=-\iint\limits_{D(a)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\int_{l^-}(1+y^3)dx+(2x+y)dy$$

$$=-\iint\limits_{D(a)}\left(2-3y^2\right)dxdy+\int_0^{\pi}1dx$$

$$=-\int_0^{\pi}dx\int_0^{a\sin x}(2-3y^2)dy+\pi=-\int_0^{\pi}\left(2a\sin x-a^3\sin^3 x\right)dx+\pi$$

$$=\pi-4a+\frac{4}{3}a^3.$$

$I'(a)==4(a^2-1)$，驻点为 $a=1$． 当 $a\in(0,1)$，$I'(a)<0$；当 $a>1$，$I'(a)>0$．因此在 $a=1$ 时，$I(a)$ 取得最小值.

15. 设曲面 Σ 的方程为 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，求 $\iint_{\Sigma}\frac{x+y+1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$.

解 $\iint_{\Sigma}\frac{x+y+1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S=\frac{1}{4}\iint_{\Sigma}(x+y+1)\mathrm{d}S=\frac{1}{4}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{1}{4}\times 2\pi\times 2^2=2\pi$.

16. 设曲面 $\Sigma=\{(x,y,z)\,|\,z=x^2+y^2,0\le z\le 1\}$，取上侧为正，$\Sigma_1$ 是 Σ 在 $x\ge 0$ 的部分，则曲面积分

(A) $\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$　　(B) $\iint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{\Sigma_1}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(C) $\iint_{\Sigma} y^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\iint_{\Sigma_1} y^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, (D) $\iint_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\iint_{\Sigma_1} x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

答: (B)

17. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz-ydzdx+(z+1)dxdy}{x^2+y^2}$，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$，$x-y+z=2$ 所截出部分的外侧.

解: 将 Σ 方程 $x^2+y^2=1$ 代入得

$$I=\iint\limits_{\Sigma} xdydz-ydzdx+(z+1)dxdy .$$

设曲面 $\Sigma_1:\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ z=0\}$ 取下侧，$\Sigma_2:\{(x,y,z)\,|\,z=2-x+y,\ x^2+y^2\le 1\}$

取上侧，其单位法向量为 $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$．则

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2} xdydz-ydzdx+(z+1)dxdy=I_1-I_2-I_3 .$$

$$I_1=\iiint\limits_{\Omega} dxdydz=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_0^{2-x+y}dz\right)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(2-x+y)dxdy=2\pi.$$

$$I_2=\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz-ydzdx+(z+1)dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy=-\pi .$$

$$I_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma_2}\left[x+y+(z+1)\right]dS=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left[x+y+(2-x+y+1)\right]dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(3+2y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}3dxdy=3\pi .$$

因此 $I=2\pi+\pi-3\pi=0$.

18. 计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma}|xy|z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+|x|y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Σ 为由曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1$ 所围成的封闭曲面的外侧。

解： 对右端的第一个积分使用高斯公式

$$I_1=\oiint_{\Sigma}|xy|z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}|xy|\cdot 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=8\iiint_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\overset{\text{用柱坐标}}{=\!=\!=\!=\!=}8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\vartheta\int_0^1 r^3\cos\vartheta\sin\vartheta\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 z\mathrm{d}z=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\vartheta\int_0^1 r^3\left(1-r^4\right)\cos\vartheta\sin\vartheta\mathrm{d}r=\frac{1}{4}。$$

其中 Ω 是 Σ 所围的空间区域，Ω_1 是 Ω 位于第 1 卦限的部分。

对于右端的第二个积分

$$I_2=\oiint_{\Sigma}|x|y^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma_1}|x|y^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{\Sigma_2}|x|y^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 Σ_1 是平面 $z=1$ 上 $x^2+y^2\le 1$ 的部分上侧，显然 $\iint_{\Sigma_1}|x|y^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$。$\Sigma_2$ 是 $z=x^2+y^2\left(z\le 1\right)$ 的外侧，

$$\iint_{\Sigma_2}|x|y^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma_2}|x|y^2z\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\le 1}|x|y^2\left(x^2+y^2\right)(-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

所以 $I=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$。

19. 设流速场 $\vec{v}(x,y,z)=z^2\,\vec{i}+x^2\,\vec{j}+y^2\,\vec{k}$，求流体沿空间闭曲线 Γ 的环流量 $\Phi=\oint_{\Gamma}\vec{v}\cdot d\vec{r}$，其中 Γ 是两个球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 的交线，从 z 轴的正向看去，Γ 为逆时针方向.

解 由 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$，得

$$x+y+z=\frac{3}{2}.$$

取 Σ 为平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ (上侧)被闭曲线 Γ 所围的圆的内部. 因原点到平面 Σ 的距离为 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故

闭曲线 Γ 是半径为 $r=\sqrt{1-d^2}=\frac{1}{2}$ 的圆.

Σ 的单位法向量为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 应用 Stokes 公式

$$\Phi=\oint_{\Gamma}z^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z^2 & x^2 & y^2\end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z^2 & x^2 & y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\iint_{\Sigma} 2\left(x+y+z\right)\mathrm{d}S .$$

因在Σ上 $x+y+z=\frac{3}{2}$，故

$$\Phi = \frac{\sqrt{3}}{3}\iint_{\Sigma} 2\left(x+y+z\right)\mathrm{d}S$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\iint_{\Sigma} 3\mathrm{d}S = \sqrt{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi .$$