第三章
反馈控制系统的设计

第三章 反馈控制系统的设计

- §3.1 反馈结构及其对系统特性的影响
  - 3.2 应用李雅普诺夫第二方法设计反馈系统
    - §3.3 极点配置
      - §3.4 应用状态反馈的解耦控制

3.2.1 两种常用的反馈结构

对于定常线性系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \end{cases}$$

式中，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}$分别为$n$维、$m$维和$r$维向量；$A, B, C$分别为$n\times n$，$n\times m$，$r\times n$实数矩阵。

1）状态反馈

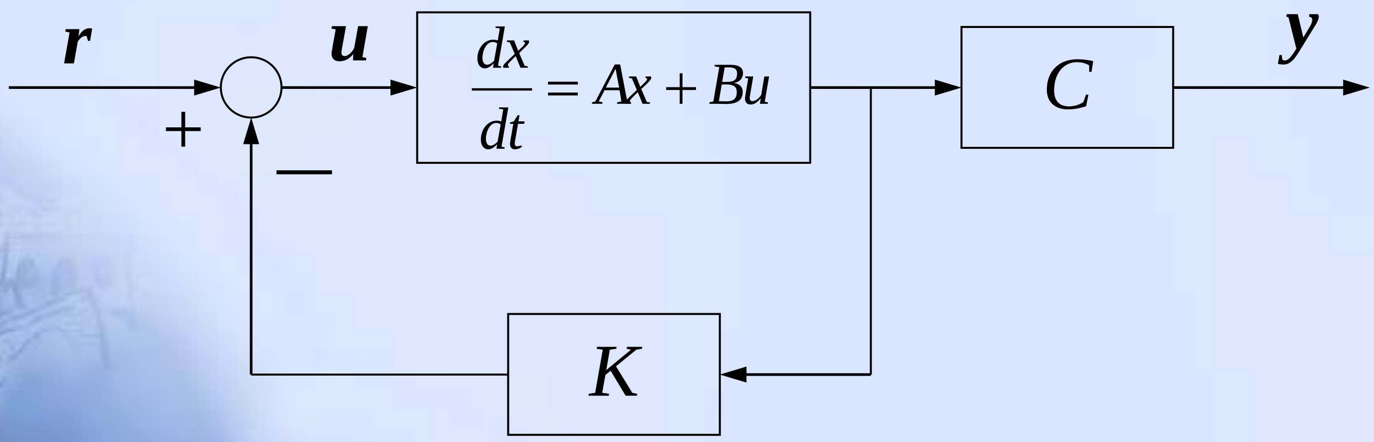
$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{r}(t) - K\boldsymbol{x}(t)$$

- 这里，K 称为反馈增益矩阵。

- 系统的状态反馈动态方程为：

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - BK)\mathbf{x} + B\mathbf{r} \qquad \mathbf{y} = C\mathbf{x}$$

- 状态反馈系统结构框图为：



- 其闭环传递函数阵为：

$$G_K(s) = C(sI - A + BK)^{-1}B$$

2）输出反馈

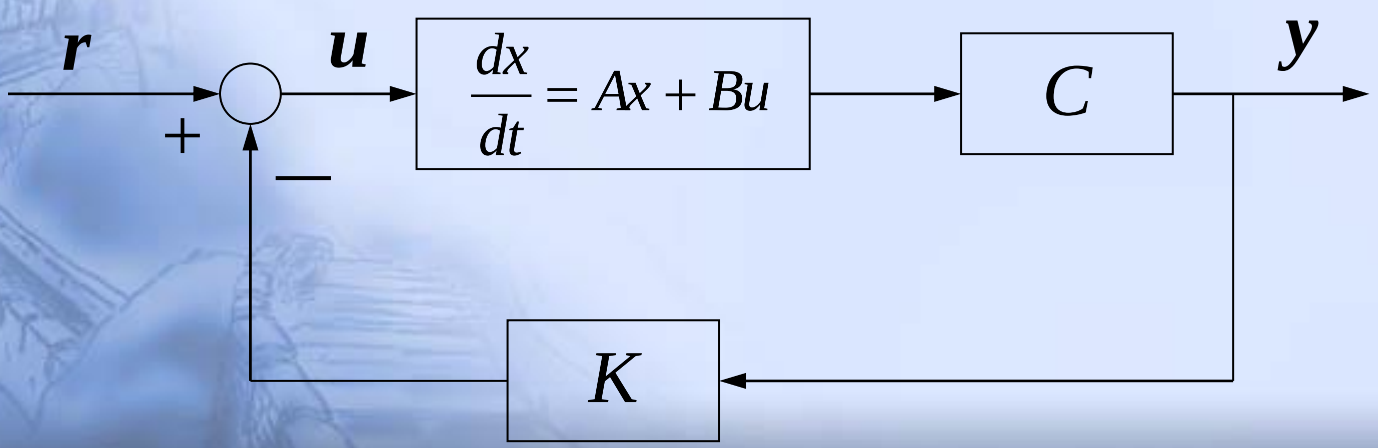
$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{r}(t) - K\boldsymbol{y}(t)$$

◆ 应用输出反馈得到的闭环系统的状态方程为：

$$\frac{dx}{dt} = (A - BKC)x + Br \qquad \mathbf{y} = C\mathbf{x}$$

◆ 其闭环传递函数阵为：

$$G_K(s) = C(sI - A + BKC)^{-1}B$$



▪ 3.2.2 反馈结构对系统性能的影响

1) 对系统的能控性和能观测性的影响

定理3. 1 状态反馈不改变系统的能控性，即(A, B)能控等价于$(A-BK, B)$能控。

证 应用关系式

$$[\lambda I-(A-BK)\vdots B]=[\lambda I-A\vdots B]\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ K & I_m \end{bmatrix}$$

对任意矩阵K, 矩阵$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ K & I_m \end{bmatrix}$总是满秩。

因此： $$rank[\lambda I-(A-BK)\vdots B]=rank[\lambda I-A\vdots B]$$

对所有λ成立，因此(A,B)能控等价于$(A-BK,B)$能控。 ∎

定理3.2 输出反馈不改变系统的能控性和能观测性。

证：由关系式

$$\left[\lambda I - A + BKC \;\vdots\; B\right] = \left[\lambda I - A \;\vdots\; B\right]\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ KC & I_m \end{bmatrix}$$

得 $rank[\lambda I-(A-BKC)\vdots B]=rank[\lambda I-A\vdots B]$

由 $$\begin{bmatrix} \lambda I - A + BKC \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & BK \\ 0 & I_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}$$

得 $$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \lambda I - A + BKC \\ C \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}$$

因此输出反馈不改变系统的能控性和能观测性。

- 状态反馈会改变系统的能观测性

例3.1：考虑系统

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}x$$

该系统是能控标准型, 该系统也是能观测的。

对该系统应用状态反馈： $u=r-\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}x$

检验状态反馈对系统的能控、观测性的影响。

解：因为 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r} - [k_1 \quad k_2]\boldsymbol{x}$,

得到闭环系统

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3-k_1 & -4-k_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x.$$

对这个闭环系统,能控性矩阵U和能观测性矩阵V分别为：

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4-k_2 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3+k_1 & 5+k_2 \end{bmatrix}.$$

- 显然对任意k_1、k_2，闭环系统都是完全能控的。
- 当$k_1+k_2 \neq -8$时,V的秩为2，闭环系统完全能观测。这表明状态反馈将影响系统的能观测性。

2) 对系统的稳定性的影响

- 状态反馈和输出反馈都能影响系统的稳定性。
- **镇定**：加入反馈，使得通过反馈构成的闭环系统成为稳定系统，称之为**镇定**。

  为方便讨论，以下仅考虑状态反馈镇定问题。

- 对于线性定常系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$

  如果可以找到： $\boldsymbol{u}=-K\boldsymbol{x}+r$

  其中r为参考输入，使得通过反馈构成的系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A - BK)\boldsymbol{x} + Br$$

是渐近稳定的，即$(A-BK)$的特征值均具有负实部，则称系统实现了状态反馈镇定。

◆ **定理3.3** 当且仅当线性定常系统的不能控部分渐近稳定时，系统是状态反馈可镇定的。

证：当(A,B)不完全能控时，可对系统进行结构分解，

存在非奇异阵T，使

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, T^{-1}B=\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

并且对任意$K=[K_1 \quad K_2]$，则

$$\det(sI-A+BK)=\det\begin{bmatrix} sI-A_1+B_1K_1 & -A_{12}+B_1K_2 \\ 0 & sI-A_2 \end{bmatrix}$$

$$=\det(sI-A_1+B_1K_1)\det(sI-A_2)$$

- 状态反馈不影响不能控极点。
- 由于(A_1, B_1)为能控系统，故必存在K_1使$(A_1-B_1K_1)$的特征值均具有负实部。 **后面以构造方法证明**
- 只要不能控部分A_2的特征值均具有负实部，则可使

  $(A-BK)$的特征值也都具有负实部。

$$\Downarrow$$

- 系统由状态反馈可镇定的充分必要条件是不能控部分渐近稳定。

3.2 应用李雅普诺夫第二方法设计反馈系统

- 考虑定常线性系统

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

要求设计一个**反馈控制**

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r} - K\boldsymbol{x}$$

使闭环系统**稳定**。

- 在考虑稳定性时可设参考输入 $\boldsymbol{r}=\mathbf{0}$,并略去负号。考虑**反馈控制**

$$\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x}$$

- 这时闭环系统为

$$\frac{dx}{dt}=(A+BK)x$$

它渐近稳定的**充分必要条件**是：对任一 Q 李雅普诺夫方程有**唯一正定解**。设 $Q=P=I$, 则李雅普诺夫方程化为

$$(A+BK)^T+(A+BK)=-I$$

由此解出 K ，即为所求的反馈增益矩阵。

例3.2： 考虑系统

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}u$$

求反馈 $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$ 使闭环系统稳定。

解 取$P = Q = I$,李雅普诺夫方程化为

$$\begin{bmatrix}k_{11}+k_{21} & 1+k_{12}+k_{22}\\ 2-2k_{11}+k_{21} & 2-2k_{12}+k_{22}\end{bmatrix}^T+\begin{bmatrix}k_{11}+k_{21} & 1+k_{12}+k_{22}\\ 2-2k_{11}+k_{21} & 2-2k_{12}+k_{22}\end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

由此得到

$$\begin{cases} 2k_{11}+2k_{21}=-1 \\ 3-2k_{11}+k_{12}+k_{21}+k_{22}=0 \\ 4-4k_{12}+2k_{22}=-1 \end{cases}$$

令k_{11}=1得到解：$k_{21}=-\frac{3}{2}, k_{12}=1, k_{22}=-\frac{1}{2}$，

所求的反馈增益矩阵为

$$K=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- **可验证**,当用它作为**反馈增益矩阵**时,得到的闭环系统的**极点**($A+BK$的特征值)**实部**为−0.5,闭环系统**渐近稳定**。
- 如果选取不同的P、Q可解得不同的**反馈增益矩阵**，而得到的闭环系统的**极点**也不同。

- 如果为了保证闭环系统的**响应速度**,要求设计一个反馈$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$,使闭环极点的实部小于$-\sigma$ (σ为正数),可应用相应**定理**。
- **例3.3**：对**例3.2**给出的系统设计反馈$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$,使闭环极点的实部小于−3。

取$P=I,Q=I,\sigma=3$对闭环系统由定理3.7可化为：

$$(A+BK)^T+(A+BK)+6I=-I$$

则有

$$\begin{bmatrix} k_{11}+k_{21} & 1+k_{12}+k_{22} \\ 2-2k_{11}+k_{21} & 2-2k_{12}+k_{22} \end{bmatrix}^T+\begin{bmatrix} k_{11}+k_{21} & 1+k_{12}+k_{22} \\ 2-2k_{11}+k_{21} & 2-2k_{12}+k_{22} \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此可得关于$k_{11},k_{12},k_{21},k_{22}$的代数方程组:

$$\begin{cases} 2k_{11} + 2k_{21} = -7 \\ -2k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22} = -3 \\ -4k_{12} + 2k_{22} = -11 \end{cases}$$

令k_{11}=1，解得 $k_{12} = 3, k_{21} = -\frac{9}{2}, k_{22} = \frac{1}{2}$, 于是

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

可验证闭环系统极点的实部为−3.5。

3.2.2应用李雅普诺夫第二方法设计最优控制系统

- **控制系统**的性能可以用综合型指标来表示，经过校正达到最小性能指标的系统就称为**最优控制系统**。
- 控制系统的**综合性能指标**可以表示为：

$$J=\int_0^{t_f} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})dt$$

- 若假定预期状态向量为$\boldsymbol{x}_d=\boldsymbol{0}$,而系统的平衡状态为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_d=\boldsymbol{0}$,则任何偏离平衡点的状态变量就是**系统的偏差**。
- 我们的**目的**就是使系统的偏差最小。

- 我们采用二次型性能指标：

$$J=\int_0^{\infty}\mathbf{x}^T Q\mathbf{x}\,dt$$

研究用状态反馈方法来设计最优控制系统。

- 利用李雅普诺夫第二方法解该问题

假设

$$\mathbf{x}^T Q\mathbf{x}=-\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T P\mathbf{x})$$

P是一个正定的实对称矩阵，则得

$$\mathbf{x}^T Q\mathbf{x}=-\dot{\mathbf{x}}^T P\mathbf{x}-\mathbf{x}^T P\dot{\mathbf{x}}=-\mathbf{x}^T A^T P\mathbf{x}-\mathbf{x}^T PA\mathbf{x}$$

$$=-\mathbf{x}^T(A^T P+PA)\mathbf{x}$$

如果A是稳定矩阵，则对给定的Q，必存在一个P使得

$$A^T P + PA = -Q$$

因此可由**该方程**确定P的各元素。

性能指标 J 如下式计算

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T Q\mathbf{x}\mathrm{d}t = -\mathbf{x}^T P\mathbf{x}\Big|_0^\infty = -\mathbf{x}^T(\infty)P\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}^T(0)P\mathbf{x}(0)$$

又因为A特征值**均有负实部**，可得$\mathbf{x}(\infty) \to 0$，所以

$$J = \mathbf{x}^T(0)P\mathbf{x}(0)$$

即 J 可由$\mathbf{x}(0)$和P求得，而P由**上面Lyapunov方程**已求出。

- **例3.4:**

系统微分方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

求$\boldsymbol{u}(t)=K\boldsymbol{x}(t)$的$K$使性能指标

$$J=\int_0^{\infty}\mathbf{x}^T\mathbf{x}dt$$ 最小。

解：设 $\boldsymbol{u}(t)=K\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

经状态反馈后系统状态方程为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+BK\boldsymbol{x}=(A+BK)\boldsymbol{x}=H\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\k_1 & k_2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

用状态负反馈，我们取$k_1=-1$,则问题变为确定k_2的适当取值，使系统的**性能指标**达到极小值。

有

$$H^TP+PH=-I$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

整理得

$$-p_{12}-p_{12}=-1$$

$$p_{11}+k_2p_{12}-p_{22}=0$$

$$p_{12}+k_2p_{22}+p_{12}+k_2p_{22}=-1$$

则解得

$$p_{12}=\frac{1}{2},\quad p_{22}=-\frac{1}{k_2},\quad p_{11}=\frac{k_2^2+2}{-2k_2}$$

再假定$\boldsymbol{x}^T(0)$=[1　1],于是系统的性能指标为:

$$J=\boldsymbol{x}^T(0)P\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=(p_{11}+p_{12})+(p_{12}+p_{22})=p_{11}+2p_{12}+p_{22}$$

$$=\frac{k_2^2+2}{-2k_2}+1-\frac{1}{k_2}=\frac{k_2^2-2k_2+4}{-2k_2}$$

为使 J 达到极小值，对k_2求导， 可得

$$\frac{\partial J}{\partial k_2}=\frac{-2k_2(2k_2-2)+2(k_2^2-2k_2+4)}{(2k_2)^2}=0$$

解得$k_2= -2$。

代入可求得 J 的最小值为：

$$J_{\min}=3$$

- 为保证 P为正定矩阵所以舍去$k_2=2$这个解。

则 $$K=[-1\quad -2]。$$

§3.3 极点配置

- 3.3.1 状态反馈的极点配置条件
- 3.3.2 SISO系统的极点配置算法
- 3.3.3 多输入能控系统极点配置
- 3.3.4 极点配置算法的改进
- 3.3.5 极点位置的确定
- 3.3.6 其它极点配置方法简介

3.3.1 状态反馈的极点配置条件

- 极点配置问题：设计一个反馈控制，使闭环系统有事先给定的极点的问题。

- 由于极点的位置决定着系统的重要性质，能任意配置极点意味着通过反馈任意改变系统的某些重要性质（稳定性、动态响应速度）。

设定常线性系统已经过变换化为能控结构形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_C \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{NC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_C \\ \boldsymbol{x}_{NC} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_C \\ \boldsymbol{x}_{NC} \end{bmatrix}$$

(A_1,B_1)能控，显然该系统的极点集合为$\sigma(A_1)\cup\sigma(A_2)$。

经反馈

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r} - K\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r} + \begin{bmatrix} K_C & K_{NC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_C \\ \boldsymbol{x}_{NC} \end{bmatrix}$$

（这里记$-K=[K_C\ \ K_{NC}]$）

得到闭环系统：

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_C \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{NC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_C & A_{12} + B_1K_{NC} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_C \\ \boldsymbol{x}_{NC} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{r}$$

它的极点为：$\sigma(A_1 + B_1K_C) \cup \sigma(A_2)$。

由此可见，$\sigma(A_2)$经状态反馈不能改变。

定理3.4 系统(A,B)通过状态反馈能任意配置极点的充分必要条件是(A,B)完全能控。

- 系统不是完全能控的 ⟹ 不能通过反馈任意配置极点
- 系统完全能控 ⟹ 能通过反馈任意配置极点（构造方法）

3.3.2 *SISO*系统的极点配置算法

- 给定$(A, \boldsymbol{b})$能控，求
  反馈增益向量$\boldsymbol{k}$，使闭环系统状态矩阵 $(A+\boldsymbol{bk})$ 的极点为$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$。对能控标准型：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$A+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}[k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\-a_0+k_1 & -a_1+k_2 & -a_2+k_3 & \cdots & -a_{n-1}+k_n\end{bmatrix}$$

- 计算由 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 所决定的希望特征多项式

$$(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0$$

$$\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}a_0-\alpha_0 & a_1-\alpha_1 & \cdots & a_{n-1}-\alpha_{n-1}\end{bmatrix}$$

•对于能控系统（A，B）

$\mathbf{x} = T\mathbf{x}'$

$\dot{\mathbf{x}}' = T^{-1}AT\mathbf{x}' + T^{-1}b\mathbf{u}$

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma_o(A,b) \arrow[r, "T"] & \hat{\Sigma}_o(\hat{A},\hat{b}) \arrow[d, "k"] \\
\Sigma_{k'}(A+bk',b) & \hat{\Sigma}_k(\hat{A}+\hat{b}k,\hat{b}) \arrow[l, "T^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

$\mathbf{u} = kx' + v$

$k' = kT^{-1}$

$x' = T^{-1}x$

3.3.2 *SISO*系统的极点配置算法

- 给定(A , $\boldsymbol{b}$)能控，对一组期望的闭环特征值 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$,要确定 $(1\times n)$ 维的反馈增益向量$\boldsymbol{k}$, 使闭环系统状态矩阵 $(A+\boldsymbol{bk})$ 的特征值为$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ 。
  - 第一步　计算A的特征多项式，即

$$\det[sI-A] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

  - 第二步　计算由$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$所决定的希望特征多项式

$$(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

并计算　$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} a_0-\alpha_0 & a_1-\alpha_1 & \cdots & a_{n-1}-\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$

◆ 第三步　计算U及$\boldsymbol{q}$,并得

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{q}A \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}A^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{x}'$$

其中　$\boldsymbol{q}=[0 \ \cdots \ 0 \ 1]\,U^{-1}$

$$U=[\boldsymbol{b} \quad A\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad A^{n-1}\boldsymbol{b}]$$

◆ 第四步　返回原坐标系，得$\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}T^{-1}$

$\boldsymbol{k}'$即为反馈增益向量。

例3.5 已给系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

求状态反馈使闭环极点为−1, −2+3*j*, −2−3*j* 。

解 首先计算系统的特征多项式

$$|sI - A| = s^3 - 3s^2 - 2s + 6$$

第二步计算要求的特征多项式

$$(s+1)(s+2-3j)(s+2+3j) = s^3 + 5s^2 + 17s + 13$$

得到

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} a_0 - \alpha_0 & a_1 - \alpha_1 & a_2 - \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -19 & -8 \end{bmatrix}$$

为返回原坐标系，计算

$$U=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{q}=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}U^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}\\ \boldsymbol{q}A\\ \boldsymbol{q}A^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&3\\1&2&9\end{bmatrix}$$

则$\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}T^{-1}=[-8\ \ -35\ \ -136]$，即

$$u=\boldsymbol{k}T^{-1}\boldsymbol{x}+r=\begin{bmatrix}-8&-35&-136\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+r$$

- Matlab函数place用来计算单输入系统的状态反馈
- 调用形式 k=place(A,b,p)，p写成行向量p=[-1 -2+3j -2-3j]

单输入系统极点配置的阿克曼公式（Ackermann公式）

1、计算由$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$所决定的希望特征多项式

$$\det[sI-(A+BK)] = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = \phi(s)$$

2、用A替换s，得到：

$$\phi(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots \alpha_2 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0 I$$

3、利用Ackermann公式计算增益矩阵$\boldsymbol{k}$的表达式为：

$$\mathbf{k} = \mathbf{q}\phi(A)$$

其中，$\boldsymbol{q} = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]\, U^{-1}$。

- 无需计算A的特征多项式，但需计算A的n次方。
- 适用于阶数较高的系统，并方便用于计算机运算，不适用于多输入系统。

3.3.3 多输入能控系统极点配置

Pole-placement Design of Multi Input System

- 考虑多输入能控系统

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + (b_1, b_2, \cdots, b_m)\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

- 求一个状态反馈S使系统化为对单输入变量是能控的，
- 再应用单输入系统配置极点的方法。

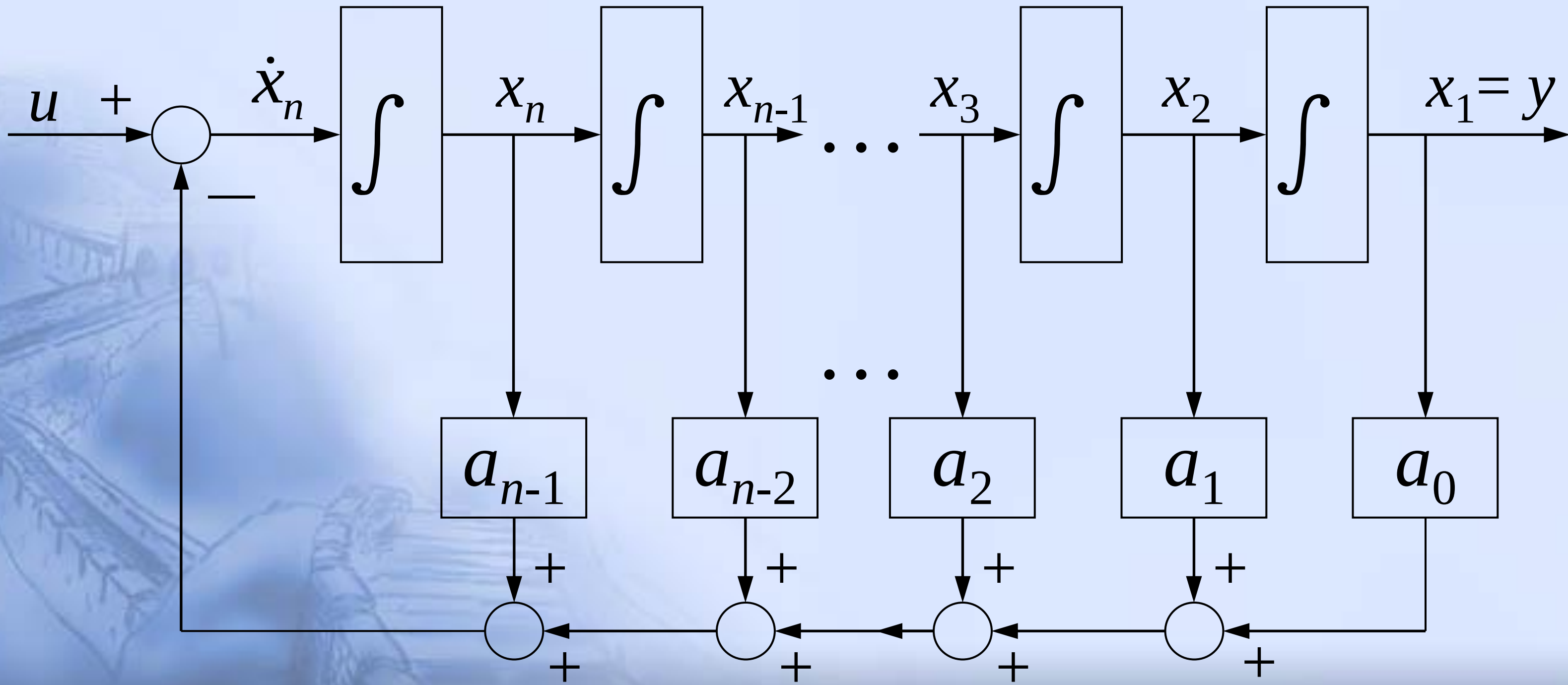
- 但一般形式$\sum_O(A,B)$,寻找完成上述目标的S是困难的，为此考虑$\sum_o$的能控规范型$\hat{\Sigma}_o(\hat{A},\hat{B})$，设变换矩阵为$Q$。

- 返回原坐标系 $\hat{K}=SQ^{-1}$ $\dot{\boldsymbol{x}}=(A+B\hat{K})\boldsymbol{x}+Bv$对单输入变量$v_1$是完全能控的。

$$
\begin{tikzcd}
 & \Sigma_o(A,B) \arrow[r, "Q"] & \hat{\Sigma}_o(\hat{A},\hat{B}) \arrow[d, "S"] \\
K=\hat{K}+\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{k}}\\ 0\end{bmatrix} & \Sigma_{\hat{K}}(A+B\hat{K},B) \arrow[l, "\text{即为所求}"'] & \hat{\Sigma}_S(\hat{A}+\hat{B}S,\hat{B}) \arrow[l, "Q^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

单输入能控标准型：

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & & \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$



- 化系统 $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$为第一能控规范型

设 $B = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m]$，由于$(A, B)$能控，因此

$$U = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \text{ 秩为} n\text{。}$$

将U的列向量按如下方式重新排列：

$$\{b_1 \quad Ab_1 \cdots A^{n-1}b_1; b_2 \quad Ab_2 \cdots A^{n-1}b_2; \cdots; b_m \quad Ab_m \cdots A^{n-1}b_m\}$$

从这$n \times m$列中自左至右选取线性无关组，得到矩阵：

$$Q = [b_1 \quad Ab_1 \cdots A^{\mu_1 - 1}b_1; b_2 \quad Ab_2 \cdots A^{\mu_2 - 1}b_2; \cdots; b_h \quad Ab_h \cdots A^{\mu_h - 1}b_h], \quad (3.3.1)$$

则在变换$\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{x}'$下,可将原系统化为第一能控规范型

$$A_{c1}=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1h} \\ & \ddots & \vdots \\ & & A_{hh} \end{bmatrix};\qquad B_{c1}=\left[\begin{array}{ccc|c} B_1 & & & \\ & \ddots & & * \\ & & B_h & \end{array}\right]$$

其中

$$\underset{\mu_i\times\mu_i}{A_{ii}}=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & * \\ \hline & & & * \\ & I_{\mu_i-1} & & * \\ & & & * \end{array}\right];\qquad \underset{\mu_i\times\mu_j}{A_{ij}}=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{array}\right];\qquad B_i=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

最后一列

最后一列非0

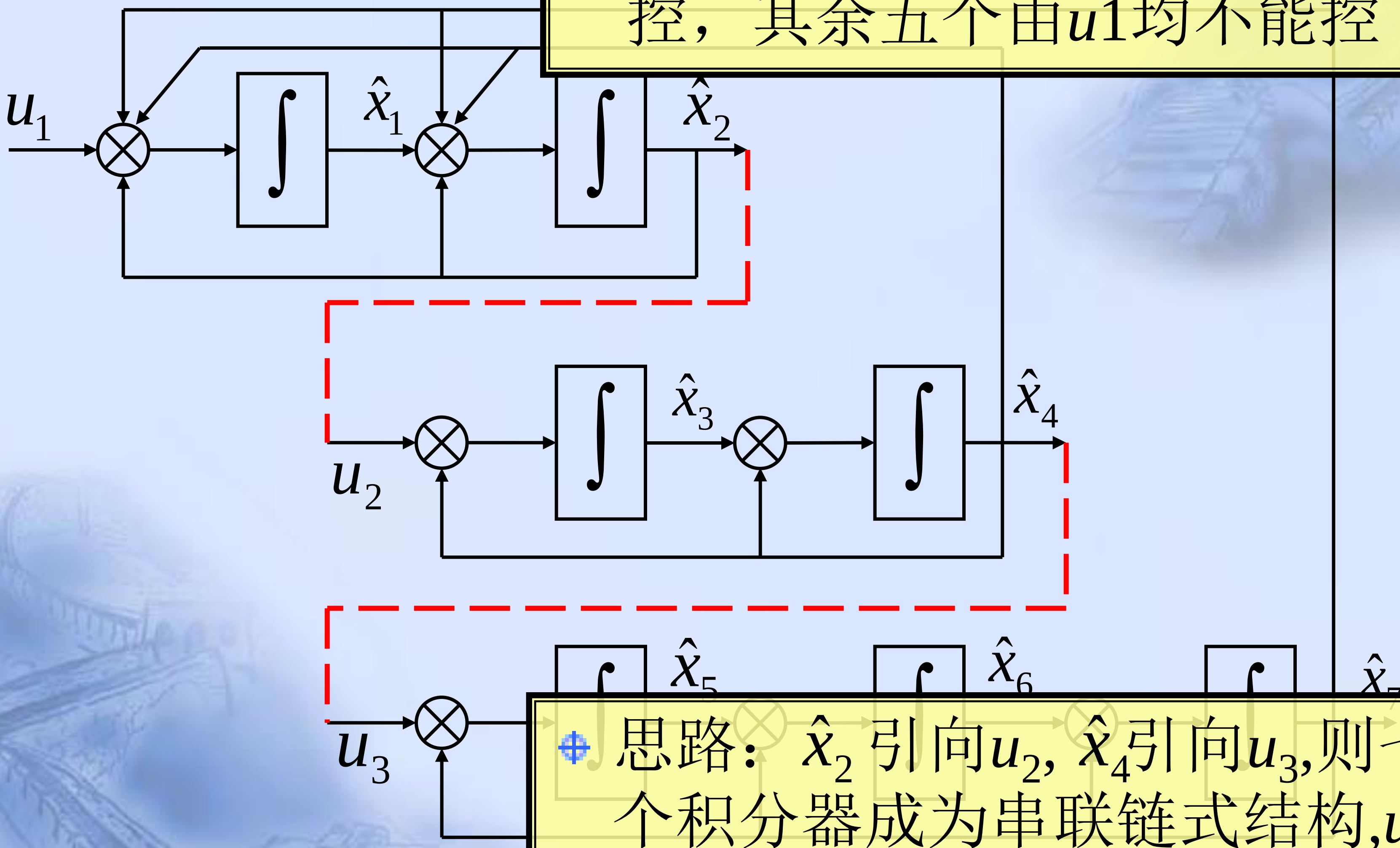
- 对第一能控规范型，求状态反馈S

例：

$$\hat{A} = A_{c1} = \left[\begin{array}{cc|cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \boxed{0} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]; \hat{B} = B_{c1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $\mu_1 = \mu_2 = 2, \mu_3 = 3$

框图



- 说明：由第一个输入变量$\hat{x}_1, \hat{x}_2$能控，其余五个由$u1$均不能控

- 思路：$\hat{x}_2$引向u_2, $\hat{x}_4$引向u_3,则七个积分器成为串联链式结构,u_1位于链的首部，于是u_1可以控制全部七个状态。

- 闭环系统为$\hat{\Sigma}_S(\hat{A}+\hat{B}S,\hat{B})$,从图中可以看出,只需将$\hat{A}$中两个小方框中的元素“0”,改为“1”,这样就得出$\hat{B}S$为

$$\hat{B}S=\left[\begin{array}{cc|cc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

考虑到第一能控标准型中 $\hat{B}$ 的形式，可知状态反馈矩阵。

$$S=\left[\begin{array}{cc:cc:ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc:cc:ccc} 0 & e_2 & 0 & e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- 注：S中“1”出现的位置，其行号对应状态反馈加到输入端的输入分量的序号(即输入2, 3)，其列号对应状态反馈引出点(即状态2, 4)。

- **引理 3.1** 设$\boldsymbol{b}_1\neq 0$，在反馈 $u=\hat{K}x+v=SQ^{-1}x+v$作用下，闭环系统

$$\frac{dx}{dt}=(A+B\hat{K})x+b_1v_1$$

能控，其中$\boldsymbol{v}_1$是$\boldsymbol{v}$的第一个分量。

证明 由 $\hat{K}$ 的定义有 $\hat{K}Q=S$，即

$$\hat{K}\left[b_1 Ab_1 \cdots A^{\mu_1-1}b_1; b_2 Ab_2 \cdots A^{\mu_2-1}b_2; \cdots; b_m Ab_m \cdots A^{\mu_m-1}b_m\right]$$
$$=\left[0\cdots 0\ \ e_2; 0\cdots 0\ \ e_3; 0\cdots 0\, e_m; 0\cdots 0\right]$$

由此得到下面一系列的等式：

$$\hat{K}b_1=0, \hat{K}Ab_1=0, \cdots, \hat{K}A^{\mu_1-2}b_1=0, \hat{K}A^{\mu_1-1}b_1=e_2;$$
$$\hat{K}b_2=0, \hat{K}Ab_2=0, \cdots, \hat{K}A^{\mu_2-2}b_2=0, \hat{K}A^{\mu_2-1}b_2=e_3;$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$\hat{K}b_{m-1}=0, \hat{K}Ab_{m-1}=0, \cdots, \hat{K}A^{\mu_{m-1}-2}b_{m-1}=0, \hat{K}A^{\mu_{m-1}-1}b_{m-1}=e_m;$$
$$\hat{K}b_m=0, \hat{K}Ab_m=0, \cdots, \hat{K}A^{\mu_m-2}b_m=0, \hat{K}A^{\mu_m-1}b_m=0.$$

记 $\overline{A}=A+B\hat{K}$，我们逐次计算 $(\overline{A}, b_1)$ 的能控性矩阵的列：

$$\bar{A}b_1=(A+B\hat{K})b_1=Ab_1+B\hat{K}b_1=Ab_1,\qquad \hat{K}b_1=0$$

$$\bar{A}^2b_1=\bar{A}(Ab_1)=(A+B\hat{K})Ab_1=A^2b_1,\qquad \hat{K}Ab_1=0$$

$$\vdots$$

$$\hat{K}A^{\mu_1-2}b_1=0$$

$$\bar{A}^{\mu_1-1}b_1=\bar{A}(A^{\mu_1-2}b_1)=(A+B\hat{K})A^{\mu_1-2}b_1=A^{\mu_1-1}b_1,$$

$$e_2$$

$$\bar{A}^{\mu_1}b_1=\bar{A}(A^{\mu_1-1}b_1)=(A+B\hat{K})A^{\mu_1-1}b_1=A^{\mu_1}b_1+B\hat{K}A^{\mu_1-1}b_1.$$

由Q的构造方法 $A^{\mu_1}b_1$是Q中$\boldsymbol{b}_2$左边的列的线性组合,用$\tilde{\boldsymbol{b}}_2$表示，于是有

$$B\hat{K}\boldsymbol{b}_2=0$$

$$\bar{A}^{\mu_1}b_1=\tilde{b}_2+Be_2=\tilde{b}_2+b_2,$$

$$\bar{A}^{\mu_1+1}b_1=(A+B\hat{K})(\tilde{b}_2+b_2)=Ab_2+B\hat{K}\tilde{b}_2+A\tilde{b}_2+B\hat{K}b_2.$$

$B\hat{K}\tilde{\boldsymbol{b}}_2$ 和 $A\tilde{\boldsymbol{b}}_2$是$Q$中$A\boldsymbol{b}_2$左边的列的线性组合，用$\widetilde{A\boldsymbol{b}}_2$表示，于是

$$\bar{A}^{\mu_1+1}\boldsymbol{b}_1 = A\boldsymbol{b}_2 + \widetilde{A\boldsymbol{b}}_2$$

类似可以得到

$$\bar{A}^{\mu_1+\mu_2}\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_3 + \tilde{\boldsymbol{b}}_3$$

$$\vdots$$

$$\bar{A}^{n-1}\boldsymbol{b}_1 = A^{\mu_m-1}\boldsymbol{b}_m + \widetilde{A^{\mu_m-1}\boldsymbol{b}_m}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rank}[\boldsymbol{b}_1 \quad \bar{A}\boldsymbol{b}_1 \quad \cdots \quad \bar{A}^{n-1}\boldsymbol{b}_1] \\
&= \operatorname{rank}[\boldsymbol{b}_1 \quad A\boldsymbol{b}_1 \quad \cdots \quad A^{\mu_1-1}\boldsymbol{b}_1; \\
&\qquad \boldsymbol{b}_2+\tilde{\boldsymbol{b}}_2 \quad A\boldsymbol{b}_2+\widetilde{A\boldsymbol{b}}_2 \quad \cdots \quad A^{\mu_2-1}\boldsymbol{b}_2+\widetilde{A^{\mu_2-1}\boldsymbol{b}_2}; \\
&\qquad \cdots; \quad \boldsymbol{b}_m+\tilde{\boldsymbol{b}}_m \quad \cdots \quad A^{\mu_m-1}\boldsymbol{b}_m+\widetilde{A^{\mu_m-1}\boldsymbol{b}_m}] \\
&= \operatorname{rank} Q = n
\end{aligned}$$

所以$(\bar{A}, b_1)$能控。□

由*引理3.1*，我们可以先求$\hat{K}$将系统化为单输入能控的，再按单输入能控系统配置极点的方法配置极点。

设$\tilde{\boldsymbol{k}}$是所求反馈增益矩阵，它使单输入系统$\left(\bar{A},b_1\right)$有要求的极点，即$\bar{A}+\boldsymbol{b}_1\tilde{\boldsymbol{k}}$有事先给定的极点$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$。那么可以证明

$$\hat{K}+\bar{K}=\hat{K}+\begin{bmatrix}\tilde{k}\\0\end{bmatrix}$$

将系统(A,B)的极点也配置到$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$。事实上

$$A+B\left(\hat{K}+\bar{K}\right)=A+B\hat{K}+b_1\tilde{k}=\bar{A}+b_1\tilde{k}$$

一定有极点$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$。因此$\hat{K}+\bar{K}$即所求反馈增益矩阵。

- 总结：
  - 将系统状态方程化为第一能控规范型 $\hat{\Sigma}_o(\hat{A},\hat{B})$，变换矩阵为Q。
  - 对第一能控规范型，求状态反馈S，使系统对单输入变量完全能控 $\Longrightarrow \hat{\Sigma}_S(\hat{A}+\hat{B}S,\hat{B})$
  - 返回原系统,使系统对单输入变量v_1完全能控，$\hat{K}=SQ^{-1}$
    $\Sigma_{\hat{K}}(A+B\hat{K},B)$
  - 对单输入变量v_1能控系统$\Sigma_{\hat{K}}(A+B\hat{K},b_1)$求状态反馈，使闭还系统有要求的极点 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$。
  - 所求的状态反馈增益矩阵为 $K=\hat{K}+\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{k}}\\0\end{bmatrix}$

$\mathbf{x} = Q\mathbf{x}'$

$\dot{\mathbf{x}}' = Q^{-1}AQ\mathbf{x}' + Q^{-1}B\mathbf{u}$

$$\Sigma_o(A, B) \xrightarrow{\quad Q \quad} \hat{\Sigma}_o(\hat{A}, \hat{B})$$

$$\hat{\Sigma}_o(\hat{A}, \hat{B}) \xrightarrow{\quad S \quad} \hat{\Sigma}_S(\hat{A} + \hat{B}S, \hat{B})$$

$\mathbf{u} = Sx' + \mathbf{v}$

$$K = \hat{K} + \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{k}} \\ 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{\text{即为所求}} \Sigma_{\hat{K}}(A + B\hat{K}, B) \xleftarrow{\quad Q^{-1} \quad} \hat{\Sigma}_S(\hat{A} + \hat{B}S, \hat{B})$$

$\hat{K} = SQ^{-1}$

$x' = Q^{-1}x$

$\dot{\mathbf{x}} = (A + B\hat{K})\mathbf{x} + b_1 v_1$

$v_1 = \tilde{k}x + r$

- **多输入能控系统极点配置的计算步骤：**

第一步 构造矩阵Q和S，并计算$\hat{K}=SQ^{-1}$。

第二步 计算$\bar{A}=A+B\hat{K}$和它的特征多项式

$$|sI-\bar{A}|=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0.$$

第三步 对给定的n个极点$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，计算多项式

$$(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1s+\alpha_0$$

并计算 $k=\begin{bmatrix}a_0-\alpha_0 & a_1-\alpha_1 & \cdots & a_{n-1}-\alpha_{n-1}\end{bmatrix}$

第四步 计算$\tilde{k}=kT^{-1}$，其中

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}\\ \boldsymbol{q}\bar{A}\\ \vdots\\ \boldsymbol{q}\bar{A}^{n-1}\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{q}$是$(\bar{A},b_1)$的能控性矩阵U的逆矩阵的最后一行。

第五步 计算

$$K = \hat{K} + \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ 0 \end{bmatrix}$$

K即所求的反馈增益矩阵。

例3.6 已给系统

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u,$$

求反馈增益矩阵K，使得到的闭环系统的极点为$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -2$。

解 第一步 构造矩阵

$$Q=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\1&2&0&0\\0&1&0&2\\0&1&0&0\end{bmatrix}, S=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

计算反馈矩阵

$$\hat{K}=SQ^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&-2\\0&0&0&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

第二步 计算

$$\overline{A} = A + B\hat{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

和特征多项式

$$\left| sI - \overline{A} \right| = s^4 - 3s^3 + 2s^2$$

第三步 要求的多项式为

$$(s+1)(s+1)(s+2)(s+2) = s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 12s + 4$$

于是

$$k = \begin{bmatrix} -4 & -12 & -11 & -9 \end{bmatrix}$$

第四步 计算

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & \bar{A}b_1 & \cdots & \bar{A}^{n-1}b_1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} q \\ q\bar{A} \\ q\bar{A}^2 \\ q\bar{A}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

及

$$\tilde{k} = kT^{-1} = \begin{bmatrix} -16 & 7 & -2 & -18 \end{bmatrix}$$

第五步 计算

$$k = \hat{k} + \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & 7 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -16 & 7 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

极点配置算法的改进

引理3.2 系统$(\bar{A},\mathbf{b}_1)$的能控性矩阵U的逆矩阵的最后一行等于的矩阵Q的逆矩阵的最后一行。

即 $(0 \ \cdots \ 0 \ 1)U^{-1} = (0 \ \ldots \ 0 \ 1)Q^{-1}$

引理的证明方法是证明U和Q的行列式相等并且相应的第 i 行第 n 列的代数余子式也相等 。

极点配置的简化算法

第1步 构造矩阵Q和S，计算 $\hat{K}=SQ^{-1}$

并记Q^{-1}的最后一行为q。

第2步 设要求配置的n个极点为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_h,$

$a_1\pm b_1 i, a_2\pm b_2 i,\cdots,a_l\pm b_l i,$ 并且$h+2l=n$，计算

$$\tilde{\boldsymbol{k}}=-q(\bar{A}-\lambda_1 I)\cdots(\bar{A}-\lambda_h I)[\bar{A}^2$$

$$-2a_1\bar{A}+(a_1^2+b_1^2)I]\cdots[\bar{A}^2-2a_l\bar{A}+(a_l^2+b_l^2)I]$$

$$=-q\cdot\hat{f}_c(\bar{A})$$

其中 $\hat{f}_c(\cdot)$为要求的特征多项式。

第3步 计算 $K=\hat{K}+\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{k}}\\0\end{bmatrix}$

K 即所求的反馈增益矩阵。

该简化算法显然比前面的算法减少了很多**运算量**：

- 求能控性矩阵的逆
- 求 $\bar{A}$ 的特征多项式

第一步 构造矩阵Q和S，并计算 $\hat{K} = SQ^{-1}$。

第二步 计算 $\bar{A} = A + B\hat{K}$ 和它的特征多项式

$$|sI - \bar{A}| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 .$$

第三步 对给定的 n 个极点 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，计算多项式

$$(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

并计算 $\bar{k} = [\alpha_0 - a_0 \quad \alpha_1 - a_1 \quad \cdots \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1}]$

第三步 设要求配置的极点为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_h, a_1 \pm b_1 i, a_2 \pm b_2 i, \cdots, a_l \pm b_l i$,

并且 $h+2l=n$，计算

$$\tilde{k} = q(\bar{A} - \lambda_1 I)\cdots(\bar{A} - \lambda_h I)[\bar{A}^2 - 2a_1\bar{A} + (a_1^2 + b_1^2)I]\cdots[\bar{A}^2 - 2a_l\bar{A} + (a_l^2 + b_l^2)I]$$

第四步 计算 $k = \bar{k}T^{-1}$，其中

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} q \\ q\bar{A} \\ \vdots \\ q\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

改进算法与原算法的比较

简化前：五　　步

q 是 $(\bar{A}, b_1)$ 的能控性矩

简化后：三　　步

第五步 计算

$$K = \hat{K} + \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}$$

K即所求的反馈增益矩阵。

例3.7 仍考虑例3.6中的极点配置问题，其计算步骤可简化为：

第1步： 同例3.6的第1步，得到：

$$\hat{K}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad \text{并得到}\quad \mathbf{q}=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

第2步： 计算

$$\tilde{\boldsymbol{k}}=-\left[0\quad 0\quad \tfrac{1}{2}\quad -\tfrac{1}{2}\right](\bar{A}+I)(\bar{A}+I)(\bar{A}+2I)(\bar{A}+2I)$$

$$=[-16\quad 7\quad -2\quad -18]$$

第3步： 计算

$$K=\hat{K}+\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{k}}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16&7&-2&-18\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

- 单输入系统的极点配置问题的解是唯一的
- 多输入系统的极点配置问题的解是不唯一的
  - 刚才介绍的方法给出了问题的一个解
  - 它还可以有其它解 (如，直接求)

- 离散时间系统的极点配置问题
  - **定理 3.5** 离散时间定常性线性系统(A, B)通过状态反馈能任意配置极点的充分必要条件(A, B)是完全能达。
  - 离散时间定常线性系统(A, B)能镇定 $\Longleftrightarrow \sigma(A_2)$ 的模都小于1。
  - 配置极点方法与连续时间相同。

3.3.4 极点位置的确定

Determine the poles' locations

- **SISO极点位置的确定问题**

- **方法：**

  - 高阶系统的性能主要由主极点对决定，远极点对系统仅有极微小的影响。
  - 先根据期望的闭环系统的性能指标决定一对主极点的位置。
  - 将其它极点配置在距这对主极点甚左的位置上。

- 对$SISO$具有主极点λ_1,λ_2的二阶传递函数为

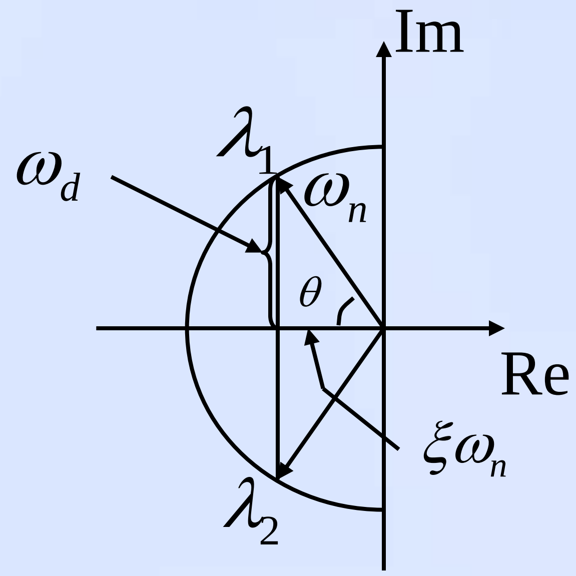
$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

式中ω_n是无阻尼自振频率，ξ为阻尼比。

λ_1,λ_2与ξ,ω_n有如下关系：

$$|\lambda_1|=|\lambda_2|=\omega_n \qquad \theta=\cos^{-1}\xi$$

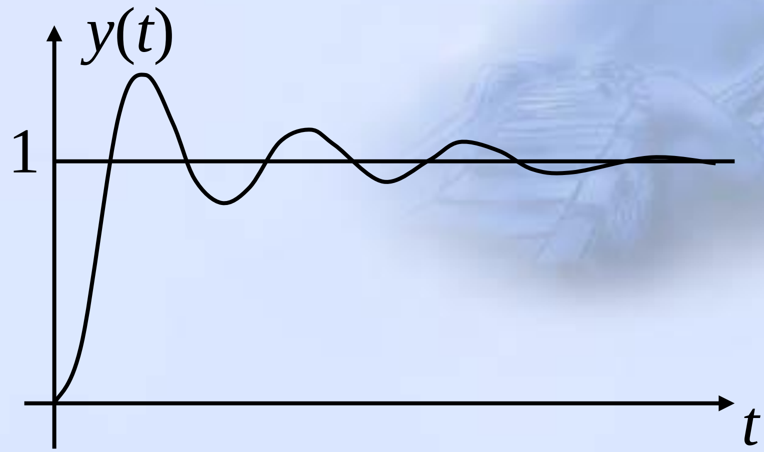
$$\lambda_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$



极点λ_1,λ_2在复平面上的位置

二阶系统的极点$\lambda_{1,2}$与ω_n,ξ相互唯一确定。

$u(t)\equiv 1$



二阶系统的单位阶跃响应

系统的超调量为

$$\sigma = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

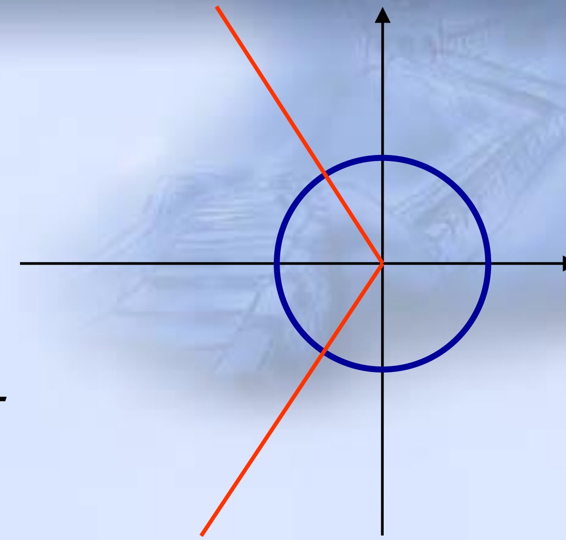
系统的调整时间(输出与稳态值之差的绝对值小于等于稳态值的Δ%所需的时间)

$$t_s = 4/\xi\omega_n \,(\Delta = 2)$$

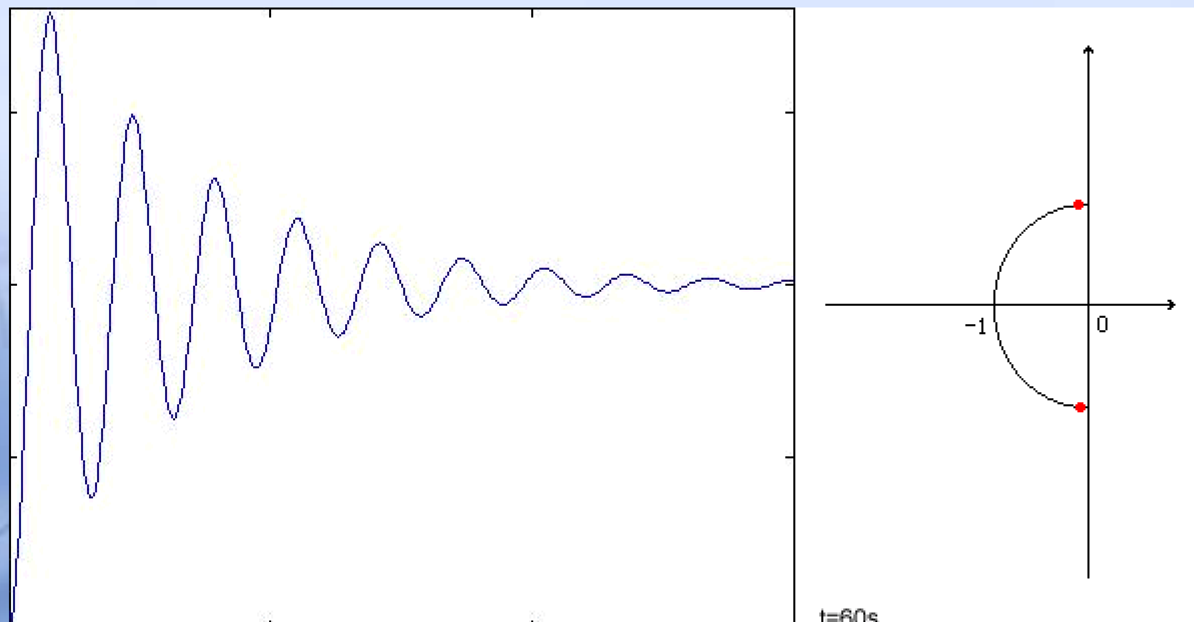
$$t_s = 3/\xi\omega_n \,(\Delta = 5)$$

$0<\xi<0.9$时，可根据上二式由σ, t_s，决定λ_1, λ_2。

- 当主极点沿红色直线向远离原点方向运动时，σ不变而t_s减小 (ξ不变,ω_n增大)。
- 当主极点沿蓝色曲线向 x 轴运动时，σ与t_s减小 (ξ增大,ω_n不变)。



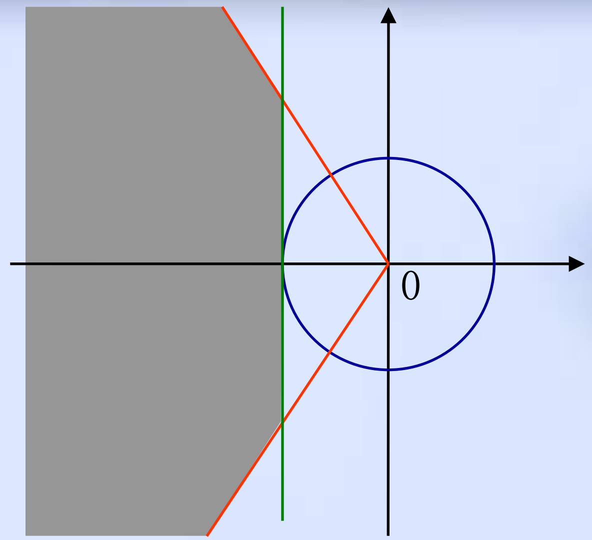
演示：



主极点沿红色直线运动
主极点沿蓝色曲线运动

- 极点位置

Pole locations



例3.8 已知系统：

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

其传递函数阵：

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\frac{1}{s^2+s+1}$$

得到

$$\xi=\frac{1}{2} \qquad \omega_n=1$$

首先，我们主要关心动态性能的两个指标：

- 调节时间 $t_s=\dfrac{4}{\xi\omega_n}$
- 超调量 $\sigma=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$

$$-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{t_s=8,\quad \sigma=0.16}$$

Open-loop poles

$$-\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

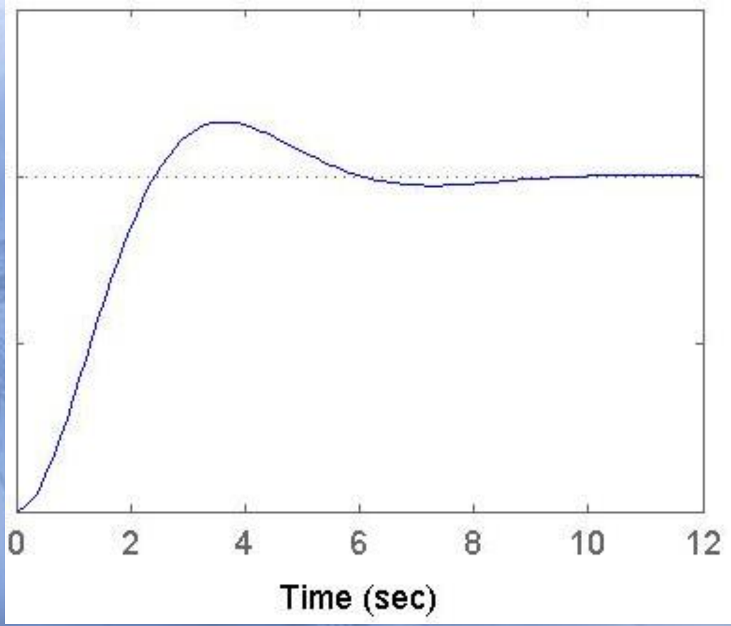
- Place the closed-loop eigenvalues at

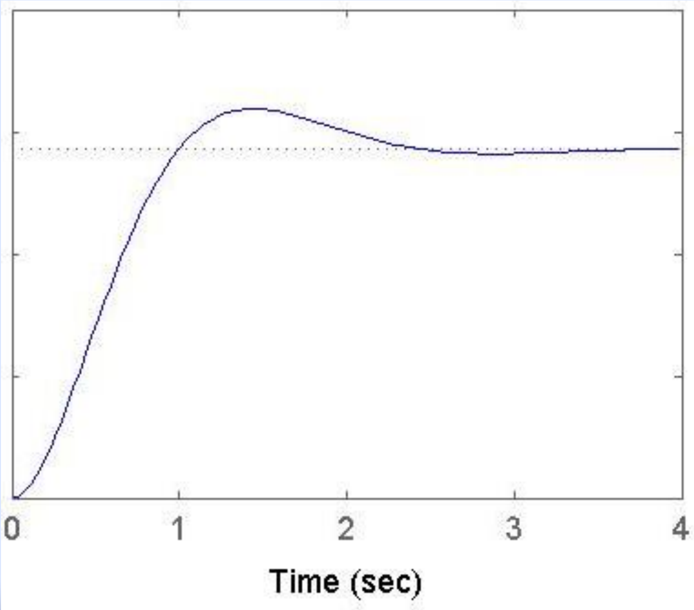
$$-2 \pm j2$$

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

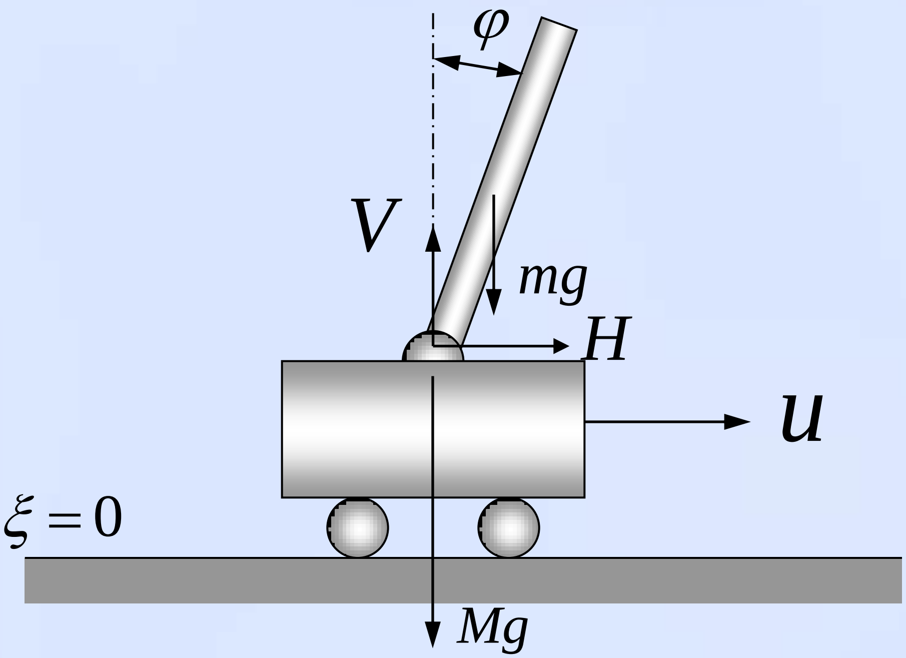
$$\boxed{t_s = 8, \quad \sigma = 0.16} \Longrightarrow t_s \le 2, \quad \sigma \le 0.05$$





倒立摆的极点配置

Pole assignment for an inverted pendulum



令 $\chi_1=\varphi,\chi_2=\dfrac{d\varphi}{dt},\chi_3=\xi,\chi_4=\dfrac{d\xi}{dt}$，得到倒摆的状态方程：

$$\begin{bmatrix}\dfrac{d\chi_1}{dt}\\ \dfrac{d\chi_2}{dt}\\ \dfrac{d\chi_3}{dt}\\ \dfrac{d\chi_4}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ mgL(M+m)/\Delta & 0 & 0 & 0\\ 0 & & & 1\\ -m^2gL^2/\Delta & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\\ \chi_3\\ \chi_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -mL/\Delta\\ 0\\ (I+mL^2)/\Delta\end{bmatrix}u,$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}x$$

其中

$$I=\frac{mL^2}{3},\Delta=I(M+m)+MmL^2$$

假定摆杆/小车系统的参数：

- 摆杆的质量 m=0.07 kg
- 长度 $2L$=0.4 m
- 小车的质量 M=1.32 kg
- 重力加速度 g=10 m/s^2

$$\begin{bmatrix} \frac{d\chi_1}{dt} \\ \frac{d\chi_2}{dt} \\ \frac{d\chi_3}{dt} \\ \frac{d\chi_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -38.1825 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.3847 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2.8037 \\ 0 \\ 0.7477 \end{bmatrix} u,$$

- 验证稳定性 (Verify Stability)

  该系统的特征根 0，0，6.18，-6.18

- 验证能控性 (Verify Controllability)

  rank(U)=4 完全能控

符号	指定特征值	[illegible]
①×	$\lambda_{1,2}=-1\pm 2j$ $\lambda_{3,4}=-2\pm j$	$k_1=2$ [illegible] $k_3=$ [illegible]
②•	$\lambda_{1,2}=-4\pm 3j$ $\lambda_{3,4}=-5\pm j$	$k_1=66.65$[illegible]$,k_2=10.8650$ $k_3=23.6565,k_4=16.6687$
③⊖	$\lambda_{1,2}=-7.4527\pm 9.666j$ $\lambda_{3,4}=-3.1538\pm 1.8334j$	$k_1=124.1694,k_2=18.3899$ $k_3=70.7099,k_4=40.5897$

闭环极点与开环极点离得越远，反馈增益矩阵的元素越大，从而使控制的成本增加

- 系统极点配置的Matlab程序：(以倒立摆为例)

先输入系统的参数，并判断系统的能控性

```
clear;
clc;
clear;
clc;
A=[0 1 0 0 ; 38.1825 0 0 0 ;0 0 0 1 ;-0.3847 0 0 0 ];
B=[0; -2.8037; 0; 0.7477];
C=[1 0 0 0;0 0 1 0];
D=[0;0];
[m,n]=size(A);
U1=ctrb(A,B)
r=rank(U1);
fprintf('\n');
```

```
if(r==m)
   disp('(A,B)能控');
else
   disp('(A,B)不完全能控');
end
fprintf('\n');
```

第一步 构造矩阵Q和S，并计算$\hat{K} = SQ^{-1}$

```
u(m)=0;
u=u+1;
x=1;
temp=eye(m);
Q=zeros(m);
for step1=1:m
    Q(:,step1)=temp*B(:,x);
    if rank(Q)~=step1
        u(x)=u(x)-1;
        x=x+1;
        Q(:,step1)=B(:,x);
        temp=A;
    else
        u(x)=u(x)+1;
        temp=temp*A;
    end
end
```

```
y=0;z=2;
S=zeros(size(B'));
t=eye(size(B'));
for step2=1:m
    y=y+u(step2);
    if(y<m)
        S(:,y)=t(:,z);
        z=z+1;
    end
end
K1=S*inv(Q)
```

第二步　第三步　计算 $\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}a_0-\alpha_0 & a_1-\alpha_1 & \cdots & a_{n-1}-\alpha_{n-1}\end{bmatrix}$

```
j=[-1; -1;-2;-2];
J=diag(j); A1=A+B*K1;
Poly_A1=poly(A1);
Poly_J=poly(J);
for step1=1:m
    k(:,step1)=Poly_A1(m+2-step1)-Poly_J(m+2-step1);
end
```

第四步 计算 $\tilde{\boldsymbol{k}}=kT^{-1}$

```
%计算q
temp=eye(m);
temp1(m)=1;
for step1=1:m
    temp2(:,step1)=temp*B(:,1);
    temp=temp*A1;
end
temp1
inv(temp2)
q=temp1*inv(temp2)
```

```
%计算t1
temp=eye(m);
for step1=1:m
    t1(:,step1)=(q*temp)';
    temp=temp*A1;
end
t1=t1'
%得到t1
```

第五步 计算反馈增益矩阵

$$K = \hat{K} + \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{k}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
%计算k1,K
k1=k*t1;
temp3=zeros(size(B));
temp3(:,1)=(k1)';
K=K1+temp3'
%得到K
```

几点注解

- 对MIMO，采用一对主极点的方法估算系统的动态特性一般是不适宜的。
- 宜采用估算和试探的办法给出系统的极点位置，然后在进行模拟和修正，直到有满意动态响应为止。

3.3.6 其它配置极点方法简介

- 1. 解李雅普诺夫方程配置极点
- 2. 应用能控性的PBH判据配置极点
- 3. 装置有噪声时的极点配置问题

1. 解李雅普诺夫方程配置极点

- 注：配置的极点位置不能包含A的特征值；
- 计算步骤：

第 1 步　选择矩阵$F_{n\times n}$使有要求的极点；

第 2 步　选取任意$m\times n$矩阵$\overline{K}$ 使 $(\overline{K},F)$ 能观测；

第 3 步　求李雅普诺夫方程 $AP-PF=B\overline{K}$ 的唯一解P；

第 4 步　如果P是奇异矩阵，返回第 2 步选取不同$\overline{K}$,进行第 3 步

如果P是非奇异矩阵，计算反馈增益矩阵$K=\overline{K}P^{-1}$。

- 说明：当F和A没有共同的特征值时：

▪对单输入系统，（A， B）能控，$(\bar{K},F)$能观测

$$\Updownarrow$$

李雅普诺夫方程 $AP-PF=B\bar{K}$有唯一非奇异解.

▪对多输入系统，（A， B）能控，$(\bar{K},F)$能观测

$$\Uparrow$$

李雅普诺夫方程 $AP-PF=B\bar{K}$ 有唯一非奇异解.

- 因此第 4 步需要检验P的奇异性.

- F的选择有无限多种，可考虑选择能观测伴随矩阵

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

要求的特征多项式的系数

对这样的F可选择 $\bar{k}=[0,\dots,0,1]$

2. 应用能控性的PBH判据配置极点

- 设(A, B)能控，求反馈增益矩阵K使得闭环极点为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

设 φ_i 是闭环系统矩阵的相应于特征值 λ_i 的特征向量，即

$$[\lambda_i I-(A-BK)]\varphi_i=0$$

即 $$\left[\lambda_i I-A \;\vdots\; B\right]\begin{bmatrix}\varphi_i \\ K\varphi_i\end{bmatrix}=0$$

令 $\xi_i=\begin{bmatrix}\varphi_i \\ K\varphi_i\end{bmatrix}$

$$\left[\lambda_i I-A \;\vdots\; B\right]\xi_i=0$$

- 由于（A,B）能控，按PBH判据，矩阵 $[\lambda_i I - A \ \vdots \ B]_{n\times(n+m)}$ 满秩。
- 因此上方程组一定存在m个线性无关解，由这m个无关解构成 $(m+n)\times m$ 矩阵 $U(\lambda_i)$

闭环特征向量

$$U(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_m\\ f_1 & f_2 & \cdots & f_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi(\lambda_i)\\ F(\lambda_i)\end{bmatrix}$$

$K\varphi_m$

$$K_{m\times n}\left[\varphi(\lambda_1)\quad \varphi(\lambda_2)\quad \cdots \quad \varphi(\lambda_n)\right]_{n\times(n\times m)}$$
$$=\left[F(\lambda_1)\quad F(\lambda_2)\quad \cdots \quad F(\lambda_n)\right]_{m\times(n\times m)}$$

- 在每个 $\varphi(\lambda_i)$ 块中选一个列构成n个线性无关列，记为G;上式子右端相应的列构成矩阵 $\overline{G}$
- 所求反馈增益矩阵为 $K=\overline{G}G^{-1}$

3. 装置有噪声时的极点配置问题

- 前面讲极点配置时只适用于没有干扰或噪声 的系统。

- 现在讨论装置有噪声时的极点配置问题，设系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} + \boldsymbol{Fw}(t)$$

式中 $\boldsymbol{w}(t)$ 是系统的干扰或噪声，考虑设计反馈

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{Kx}(t) + \boldsymbol{K}_w \boldsymbol{w}(t)$$

得到闭环系统 $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{F} + \mathbf{BK}_w)w(t)$

- 式中的矩阵 $\boldsymbol{K}$ 用极点配置的方法求得，然后再确定 $\boldsymbol{K}_w$ 使干扰 $w(t)$ 对闭环系统的影响最小。

$\boldsymbol{K}_w$的确定

- 思路：为消除干扰或噪声 $\boldsymbol{w}(t)$ 对闭环系统的影响，最好的情况是求出 $\boldsymbol{K}_w$，使 $(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_w)=0$

- 问题描述：设w是 q 维向量，矩阵方程

$$(F+BK_w)=0, \qquad F_{n\times q}, K_{w(m\times q)}$$

有nq个方程，而 $\boldsymbol{K}_w$有mq个未知数。

- 问题的解：当$m=n$, 并且矩阵B可逆时存在唯一的$\boldsymbol{K}_w$使 $(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_w)=0$，这时 $\boldsymbol{K}_w=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{F}$

  - 注：除此情况外，其它情况就不一定能求得 $\boldsymbol{K}_w$ 使$(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_w)=0$，如: $\boxed{m<n}$

[例3-8]-考虑如下的系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{w}(t)$$

式中 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1.7 & 50 & 260 \\ 0.22 & -1.4 & -32 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -272 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix}, \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.1 \\ -0.0035 & 0.004 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

该例m=1, q=2，因此 $\mathbf{K}_w = [k_{w1}, k_{w2}]$ ，于是

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_w = \begin{bmatrix} 0.02 - 272k_{w1} & 0.1 - 272k_{w2} \\ -0.0035 & 0.004 \\ 14k_{w1} & 14k_{w2} \end{bmatrix}$$

显然不能选择k_{w1}, k_{w2} 使得 $(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_w) = 0$。

这时可以考虑选择k_{w1},k_{w2}使得$(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{BK}_w)$的一些大的元素为0

可以选择k_{w1},k_{w2}使得：

$$0.02-272k_{w1}=0 \qquad 0.1-272k_{w2}=0$$

解得

$$k_{w1}=\frac{0.02}{272},k_{w2}=\frac{0.1}{272}$$

这时

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{BK}_w=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0035 & 0.004 \\ 0.00103 & 0.00515 \end{bmatrix}$$

这样选择的$\boldsymbol{K}_w$使得噪声对闭环系统的影响比较小。

3.4 应用状态反馈的解耦控制

3.4.1 应用状态反馈的解耦控制

3.4.2 能用状态反馈实现解耦的充要条件

3.4.1应用状态反馈的解耦控制

- 应用状态反馈使闭环系统实现解耦的问题：即通过状态反馈使闭环系统的每个输入仅影响一个输出 。

- 通过状态反馈实现解耦，也就是将一个多输入多输出系统化为多个单输入单输出系统，从而使控制系统大大简化。

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases}$$

通过状态反馈实现解耦的问题是：应用状态反馈

$$\boldsymbol{u} = K_1\boldsymbol{x} + K_2\boldsymbol{v} \qquad (3.4.1)$$

使得闭环系统的传递函数阵

$$\overline{G}(s) = C(sI - A - BK_1)^{-1}BK_2 \qquad (3.4.2)$$

为非奇异对角阵。即

$$\overline{G}(s) = diag\,\{g_{11}(s), g_{22}(s), \cdots, g_{mm}(s)\}$$

问题：（1）存在K_1, K_2使得 $\overline{G}(s)$ 为非奇异对角阵的充分必要条件；

（2）求矩阵K_1, K_2的方法。

3.4.2 能用状态反馈实现解耦的充分必要条件

- 为给出存在 K_1, K_2，使得 $\bar{G}(s)$ 为非奇异对角阵，即系统能通过状态反馈解耦的充分必要条件，

先引入记号 σ_i

$$\sigma_i = \begin{cases} \min\{j \mid \mathbf{c}_i A^{j-1} B \neq 0\} \\ n-1 \quad \mathbf{c}_i A^{j-1} B = 0, \text{对任何 } j \end{cases} \tag{3.4.3}$$

式中 $\boldsymbol{c}_i$ 是 C 的第 i 行。

定理3-6 m输入m输出定常线性系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases}$$

存在反馈控制 $\boldsymbol{u} = K_1\boldsymbol{x} + K_2\boldsymbol{v}$

使闭环系统解耦的充分必要条件是

矩阵 $$E = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 A^{\sigma_1 - 1} B \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_m A^{\sigma_m - 1} B \end{bmatrix} \tag{3.4.4}$$

为非奇异矩阵。

并且实现状态反馈解耦的**增益矩阵**可由下式计算

$$K_1 = -E^{-1}L \qquad K_2 = E^{-1} \tag{3.4.5}$$

式中

$$L = \begin{bmatrix} c_1 A^{\sigma_1} \\ c_2 A^{\sigma_2} \\ \vdots \\ c_m A^{\sigma_m} \end{bmatrix} \tag{3.4.6}$$

得到的**闭环系统的传递函数阵**为

$$\overline{G}(s) = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{s^{\sigma_1}}, \frac{1}{s^{\sigma_2}}, \cdots, \frac{1}{s^{\sigma_m}}\right\}$$

【例3-9】对于定常线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

传递函数阵

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} \dfrac{s^2 + 3s + 1}{s(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}_1 B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_1 = 1$$

$$\boldsymbol{c}_2 B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \sigma_2 = 1$$

故 $E = \begin{bmatrix} c_1 B \\ c_2 B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

因E非奇异，该系统能用状态变量反馈(3.4.4)解耦

$$L=\begin{bmatrix} c_1A \\ c_2A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

于是

$$K_1=-E^{-1}L=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$K_2=E^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所求的反馈是

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}$$

在它的作用下得到闭环系统

$$\dot{x}=\left\{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\-1&-2&-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&2&3\end{bmatrix}\right\}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

即

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\qquad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

其传递函数为

$$\overline{G}(s)=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s&0&1\\0&s&-1\\0&0&s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s}&0\\0&\frac{1}{s}\end{bmatrix}$$

因此：原系统已经状态反馈解耦。

【例3-10】对于定常线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

先按式(3.4.6)确定 $:\sigma_i$

$$c_1 A^0 B = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = [1 \quad 4] \neq 0$$

$$c_2 A^0 B = [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = [0 \quad 0] = 0$$

$$c_2 A \ B = [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = [2 \quad 8] \neq 0$$

所以$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$，于是 $E = \begin{bmatrix} c_1 B \\ c_2 A\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

为奇异矩阵，该系统不能用状态变量反馈(3.4.4)解耦。