

## 第二章 线性时不变系统

在第一章中讨论了若干个系统的性质，其中有两个性质尤为重要，一个是线性性，一个是时不变性，这是信号与系统分析中最基本的两个性质。一是许多实际系统都可以用线性时不变(LTI)系统来描述(或近似)，二是这样的系统能够进行详细的分析。

线性时不变(LTI)系统的重要性质就是具有线性叠加性，利用这个性质就可以将系统的输入分解为若干个基本函数的叠加，然后利用叠加性分析出系统的输出。

## § 1 用冲激函数表示信号

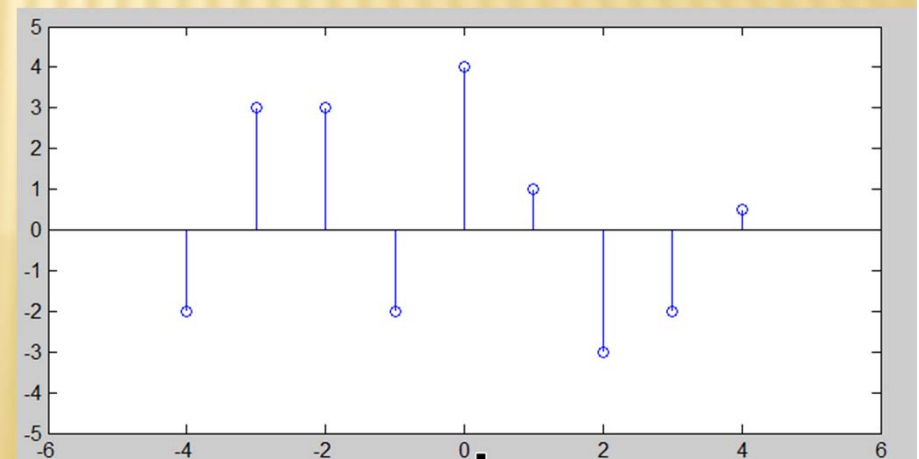
连续时间单位冲激信号和离散时间单位脉冲序列是一个基本信号，用它它可以构成范围极为广泛的其他信号。

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{连续时间单位冲激函数}$$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad \text{离散时间单位冲激序列}$$

利用离散时间单位冲激序列，构造一个给定的序列。

$x(n)$



对于  $n = -1$ ,  $x(-1) = -2$ , 则有:

$$x(-1)\delta(n+1) = \begin{cases} x(-1) = -2 & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

同理:

$$x(0)\delta(n) = \begin{cases} x(0) & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

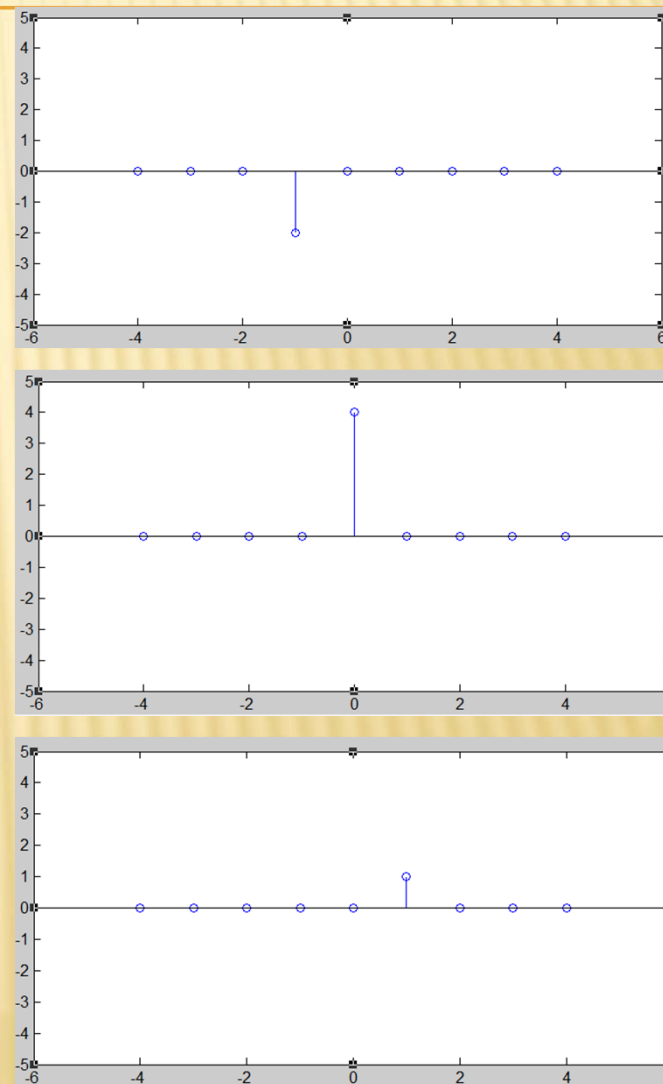
$$x(1)\delta(n-1) = \begin{cases} x(1) & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

$$\cdots + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + \cdots$$

$$x(n) = \sum_{k=-4}^{+4} x(k)\delta(n-k)$$

一般表示:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

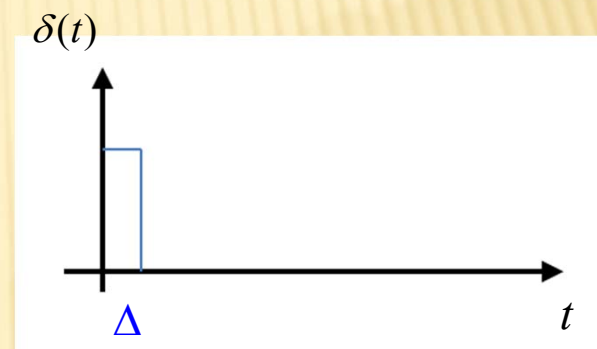




对于连续时间信号:

定义宽度为 $\Delta$ 的连续时间方波信号:

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} 1/\Delta & 0 < t < \Delta \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$



信号的近似:

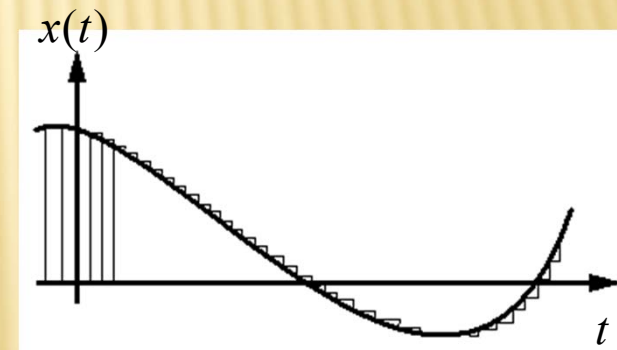
$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k \cdot \Delta) \cdot \delta_{\Delta}(t - k \cdot \Delta) \cdot \Delta$$

极限运算:

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{x}(t)$$

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k \cdot \Delta) \cdot \delta_{\Delta}(t - k \cdot \Delta) \cdot \Delta$$

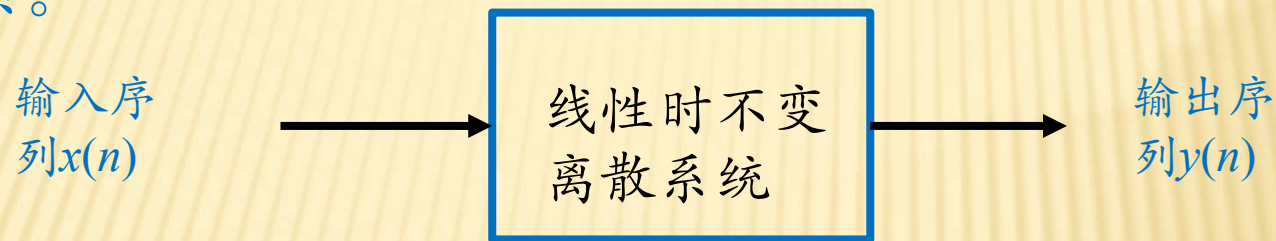
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$$



$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$$

## § 2 离散时间LTI系统：卷积和

利用线性时不变系统的叠加性推导线性离散系统的输入输出关系。



单位冲激响应序列 $h(n)$ :

当系统的输入序列 $x(n)$ 为单位冲激序列时，系统的输出被称为单位冲激响应序列 $h(n)$ 。

系统输入:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

第 $l$ 项输入:

$$x(l) = x(n)\delta(n-l) = x(l)\delta(n-l)$$

系统对这个分量的响应输出为：

$$y(l) = x(l)h(n-l)$$

利用线性叠加原理，系统的总输入：

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

相应的系统的总输出：

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

即，一个离散时间LTI系统的输入、输出与单位冲激响应序列之间成线性卷积关系。



## 线性卷积的定义：

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot x(n-k)$$

## 线性卷积的性质：

1、交换律：

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

2、结合律：子系统串联

$$x(n) * (h_1(n) * h_2(n)) = (x(n) * h_1(n)) * h_2(n)$$

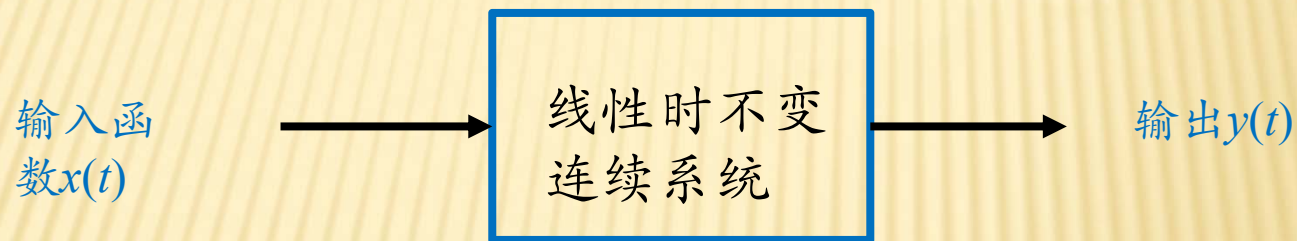
3、分配律：子系统并联

$$x(n) * (h_1(n) + h_2(n)) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$

注意：以上所讨论的性质只适用于LTI系统，不适合非线性系统，时变系统。

## § 2 连续时间LTI系统：卷积积分

根据上一节的结论，可以推出连续时间LTI系统输入、输出与单位冲激响应函数之间的关系：



有宽度的 $\delta_{\Delta}(t)$

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} 1/\Delta & 0 < t < \Delta \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k \cdot \Delta) \cdot \delta_{\Delta}(t - k \cdot \Delta) \cdot \Delta$$



相应 $\delta_{\Delta}(t)$ 作为输入，系统的响应信号：

$$h_{\Delta}(t)$$

对某一项输入信号：

$$\hat{x}(l) = x(l\Delta) \cdot \delta_{\Delta}(t - l\Delta) \cdot \Delta$$

系统的响应信号：

$$\hat{y}(l\Delta) = x(l\Delta) \cdot h_{\Delta}(t - l\Delta) \cdot \Delta$$

针对所有输入的响应信号：

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k \cdot \Delta) \cdot h_{\Delta}(t - k \cdot \Delta) \cdot \Delta$$

实际的响应信号：

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k \cdot \Delta) \cdot h_{\Delta}(t - k \cdot \Delta) \cdot \Delta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

即，一个连续时间LTI系统的输入、输出与单位冲激响应序列之间成卷积积分的关系。

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

卷积的性质：

- 1、交换律： $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
- 2、结合律： $x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$
- 3、分配律： $x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$

## § 4 线性时不变 (LTI) 系统的性质

上两节内容的重要结论:

离散时间 (LTI) 系统:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot x(n-k)$$

连续时间 (LTI) 系统:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) d\tau$$

即LTI系统的特性完全可以由其单位冲激响应 $\{h(n), h(t)\}$ 表示。

LTI系统的基本性质:



## 一、记忆与非记忆LTI系统：

前面给出的定义：如果对自变量的每一个值，系统的输出只决定于该时刻的输入，则该系统就成为无记忆系统。

对于离散的LTI系统，只有当 $n \neq 0$ 时， $h(n)=0$ 才能满足这一性质，此时系统的单位冲激响应为：

$$h(n) = K \cdot \delta(n)$$

$$y(n) = K \cdot x(n)$$

比例环节

反之，如果系统不满足此条件，即当 $n \neq 0$ 时， $h(n)$ 有不等于0的项（ $h(1) \neq 0$ ， $h(n) = K_1 \cdot \delta(n) + K_2 \delta(n-1)$ ），则系统就会有记忆。

对于连续的LTI系统，只有当 $t \neq 0$ 时， $h(t)=0$ ，系统才是无记忆系统，系统的单位冲激响应为：

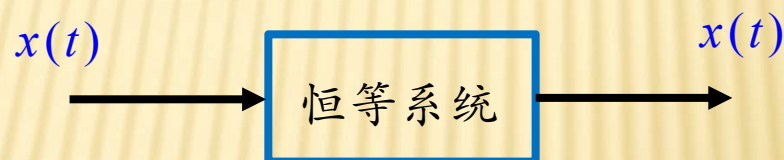
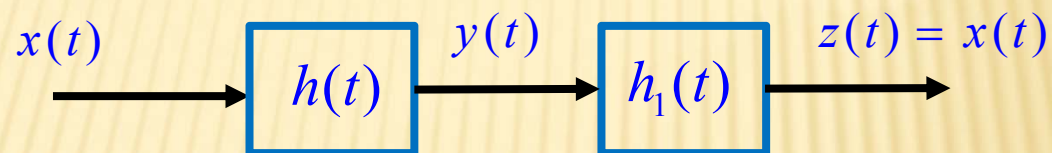
$$h(t) = K \cdot \delta(t)$$

$$y(t) = K \cdot x(t)$$

比例环节

## 二、LTI系统的可逆性：

设一连续时间LTI系统，其单位冲激响应为 $h(t)$ ，其逆系统的单位冲激响应为 $h_1(t)$ 。

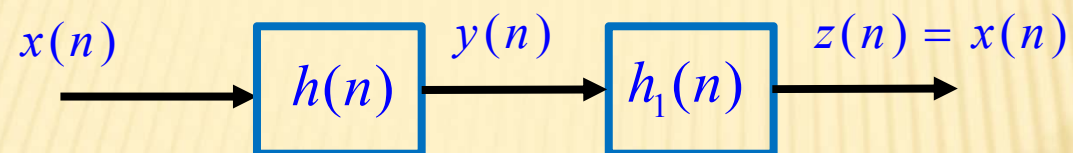


$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$z(t) = y(t) * h_1(t) = x(t) * h(t) * h_1(t) = x(t)$$

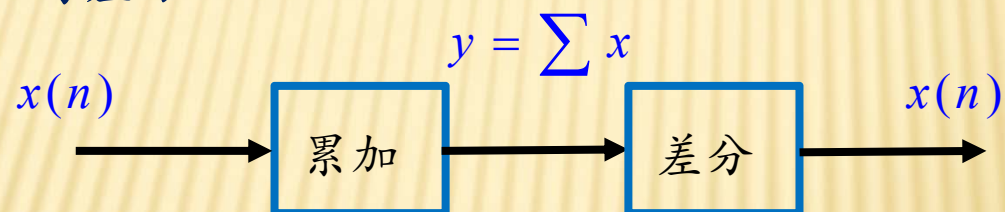
$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

对于离散时间LTI系统:



$$h(n) * h_1(n) = \delta(n)$$

实例: 累加与差分



$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)u(n-k)$$

$$h(n) = u(n)$$

$$x(n) = y(n) - y(n-1) = \sum_{k=0}^1 x(k)\delta(n-k)$$

$$h_1(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$$

$$\begin{aligned} h(n) * h_1(n) &= u(n) * [\delta(n) - \delta(n-1)] \\ &= u(n) * \delta(n) - u(n) * \delta(n-1) \\ &= u(n) - u(n-1) = \delta(n) \end{aligned}$$



### 三、LTI系统的因果性：

因果性系统定义：系统在任何时刻的输出只决定于现在时刻的输入和过去的输入，而不决定于将来的输入，则该系统为因果系统，又称为不可预测的系统。

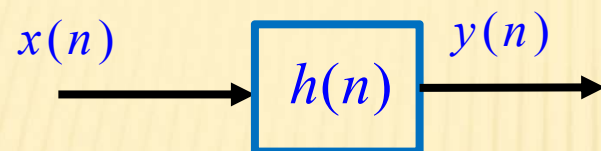
结合LTI系统的卷积和（卷积积分）计算，对于离散时间LTI系统的输出 $y(n)$ 与 $k>n$ 时的 $x(n)$ 无关，即当：

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$
$$n < 0, \quad h(n) = 0$$

### 四、LTI系统的稳定性：

一个稳定的系统在任何时刻，系统的输入是有界的，则系统的输出也是有界的。

对于一个稳定的LTI系统，其单位冲激响应函数应该满足什么条件？



$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

要求系统的输出 $y(n]$ 有界，则单位冲击响应 $h(n]$ 应满足以下条件：

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < +\infty$$

绝对可加

同理：对于连续时间LTI系统：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

绝对可积

## 五、LTI系统的单位阶跃响应：

阶跃函数：

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

系统的输入为阶跃函数：

$$x(n) = u(n)$$

$$y(n) = s(n) = u(n) * h(n)$$

即系统的输出是单位阶跃函数与单位冲激响应的卷积和，则可以推导出系统的输出即为单位冲激函数的累加和。

$$s(n) = u(n) * h(n)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^n u(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^n h(k)u(n-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^n h(n)$$



反向运算：

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^n h(k)$$

$$h(n) = s(n) - s(n-1) \quad \text{单位冲激响应的另一种求解。}$$

连续时间LTI系统：

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t)$$

推广：如果系统的单位冲激响应是一个阶跃函数，则该系统就是一个累加器或积分器。

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * u(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)u(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^n x(k) \end{aligned}$$

## § 5 用微分和差分方程描述系统

一类重要的连续时间系统是其输入、输出关系用线性常系数微分方程描述的系统，线性常系数微分方程可以描述范围广泛的系统和现象。

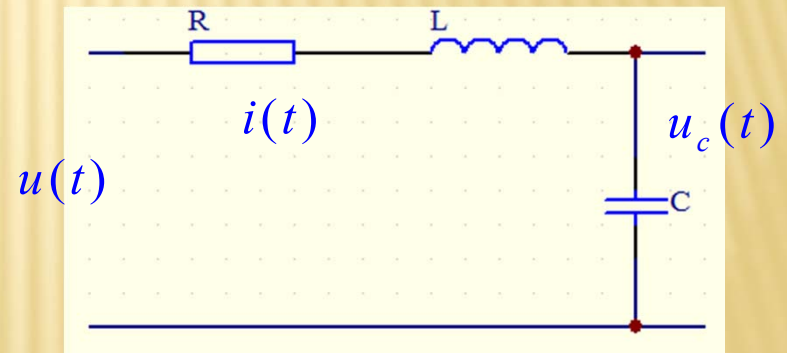
实例：RLC电路可以用一个二阶的微分方程描述：

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$u_R(t) = Ri(t)$$

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$



$$u(t) = LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

离散时间系统的输入、输出用一个常系数差分方程表示。

## 一、线性常系数微分方程


$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad y(t) = f(x(t))$$

设：  $x(t) = K[\cos \omega_0 t] \cdot u(t)$

则有：  $x(t) = \mathcal{R}_e\{Ke^{j\omega_0 t}\}$

齐次方程：  $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$

方程的解：  $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$



齐次解                      特解

设方程的特解为：  $y_p(t) = \mathcal{R}_e\{Ye^{j\omega_0 t}\}$

代入原方程



$$\mathcal{R}\{j\omega_0 Y e^{j\omega_0 t} + 2Y e^{j\omega_0 t}\} = \mathcal{R}\{K e^{j\omega_0 t}\}$$

$$j\omega_0 Y + 2Y = K$$

$$Y = \frac{K}{j\omega_0 + 2} = \frac{K}{\sqrt{\omega_0^2 + 4}} e^{j\theta} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_0}{2}\right)$$

方程的特解：

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \mathcal{R}\{Y e^{j\omega_0 t}\} = \mathcal{R}\left\{\frac{K}{\sqrt{\omega_0^2 + 4}} e^{j\theta} e^{j\omega_0 t}\right\} \\ &= \frac{K}{\sqrt{\omega_0^2 + 4}} \cos(\omega_0 t + \theta) \end{aligned}$$

设方程的齐次解（通解）为：

$$y_h(t) = A e^{st} \quad \text{代入齐次方程}$$

$$Ase^{st} + 2Ae^{st} = 0$$

$$As + 2A = 0 \quad s = -2$$

原方程的全解为：

$$y(t) = Ae^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{\omega_0^2 + 4}} \cos(\omega_0 t + \theta) \quad t > 0$$

方程的边界（初始）条件：

$$y(0) = y_0$$

则有：

$$A = y_0 - \frac{K}{\sqrt{\omega_0^2 + 4}} \cos \theta$$

$$y(t) = y_0 e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{\omega_0^2 + 4}} (\cos(\omega_0 t + \theta) - e^{-2t} \cos \theta) \quad t > 0$$

系统的线性特性讨论：

线性系统的另一个重要性质：0输入产生0输出。

$$x(t) = K[\cos \omega_0 t] \cdot u(t)$$

$$y(t) = y_0 e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{\omega_0^2 + 4}} (\cos(\omega_0 t + \theta) - e^{-2t} \cos \theta) \quad t > 0$$

令 $K=0$ ，则系统的输入为0：  $y(t) = y_0$

因此初始条件 $y_0$ 如不为0，系统就是非线性的。

设初始条件为0， $x_1(t)$ ， $x_2(t)$ 分别为系统的两个输入：

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$



$$\frac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1(t)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} + 2y_2(t) = x_2(t) \quad y_1(0) = y_2(0) = 0$$

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

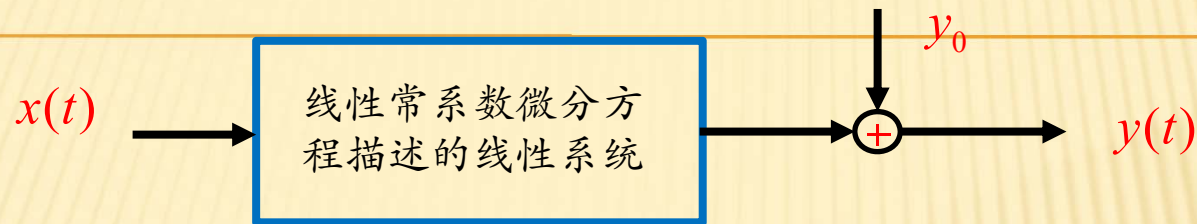
$$\begin{cases} a \frac{dy_1(t)}{dt} + a2y_1(t) = ax_1(t) \\ b \frac{dy_2(t)}{dt} + b2y_2(t) = bx_2(t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{d(ay_1(t) + by_2(t))}{dt} + 2(ay_1(t) + by_2(t)) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

从而有：

$$\frac{dy_3(t)}{dt} + 2y_3(t) = x_3(t) \quad y_3(0) = ay_1(0) + by_2(0) = 0$$

符合线性叠加性。



系统的因果关系（推导思路）：

定义： $x(t)|_{t \leq t_0} = 0$  则要求系统的输出： $y(t)|_{t \leq t_0} = 0$

即系统在没有输入以前是“松弛的”，没有任何初始条件。

系统的时不变性（推导思路）：

定义系统的输入： $x_1(t)|_{t \leq t_0} = 0$

则有系统的对应输出： $y_1(t)|_{t \leq t_0} = 0$

设系统的另一输入： $x_2(t) = x_1(t - T)$   $x_2(t)|_{t \leq t_0} = x_1(t)|_{t \leq t_0 + T} = 0$

系统的对应输出:  $y_2(t)|_{t \leq t_0} = y_1(t)|_{t \leq t_0+T} = 0$

总结:  $N$ 阶线性常系数微分方程通式

$$a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ b_M \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_{M-1} \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad \sum_{k=0}^N a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^M b_k x^{(k)}(t)$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad y(0) = y_0$$

齐次解

特解

初始条件  $y^{(k)}(t_0) = 0, x^{(k)}(t_0) = 0, k = 0, 1, 2 \cdots N$ , 系统是线性的; 某一个初始条件不为 0, 系统是增量线性的。



## 二、线性常系数差分方程

### $N$ 阶线性常系数差分方程通式

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

相应的齐次差分方程：

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0$$

差分方程的解：

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

齐次解

特解

初始条件：

$$y(n_0), y(n_0 - 1), y(n_0 - 2), \dots, y(n_0 - N + 1), \\ x(n_0), x(n_0 - 1), x(n_0 - 2), \dots, x(n_0 - M + 1)$$

同理可以证明：当所有初始条件为 0，系统是线性的；有一个初始条件不为 0，系统就是增量线性的。

方程的当前输出（解）：

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a'_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b'_k x(n-k) \quad \text{递归方程:}$$

输出历史值

输入现在值+历史值

$N=0$ ，非递归方程：

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b'_k x(n-k)$$

实例分析1:  $y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k), \quad x(n) = \delta(n)$

$$h(n) = \begin{cases} b_k & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

系统对单位冲激的响应是一个有限持续的脉冲序列，即所谓的有限冲击响应系统(FIR)。

实例分析2:  $y(n) - \frac{1}{2} y(n-1) = x(n), \quad y(-1) = a, \quad x(n) = \delta(n)$

则有:  $y(n) = x(n) + \frac{1}{2} y(n-1)$

$$h(n) = \delta(n) + \frac{1}{2} h(n-1)$$



$$h(0) = \delta(0) + \frac{1}{2}h(-1) = \delta(0) + \frac{1}{2}a$$

所以：

$$\begin{aligned} h(1) &= \delta(1) + \frac{1}{2}h(0) = \delta(1) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}a\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(n) &= \delta(n) + \frac{1}{2}h(n-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2}a\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}a \quad 0 \leq n < +\infty \end{aligned}$$

系统对单位冲激的响应是一个无限持续的长脉冲序列，即所谓的无限冲击响应系统(IIR)。

为保证系统的线性性和因果性，要求：

$$\text{当： } n \leq n_0, \quad x(n)=0, \quad \text{则： } n \leq n_0, \quad y(n)=0$$

结论：只要系统是递归的，只要系数 $a_k$ 不全为0，系统就会有一个无限持续的单位冲激响应。

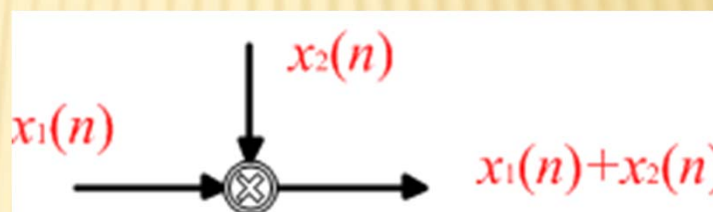
## § 6 LTI系统的方框图表示

### 一、由差分方程描述的系统表示

一个线性常系数差分方程可以看作是一种算法，可以在数字计算机上或专用（硬件）设备上实现；而用结构图表示这个计算过程，也是一种重要的算法实现途径。

基本计算的图形表示：

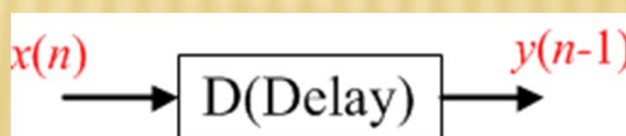
1、相加运算：



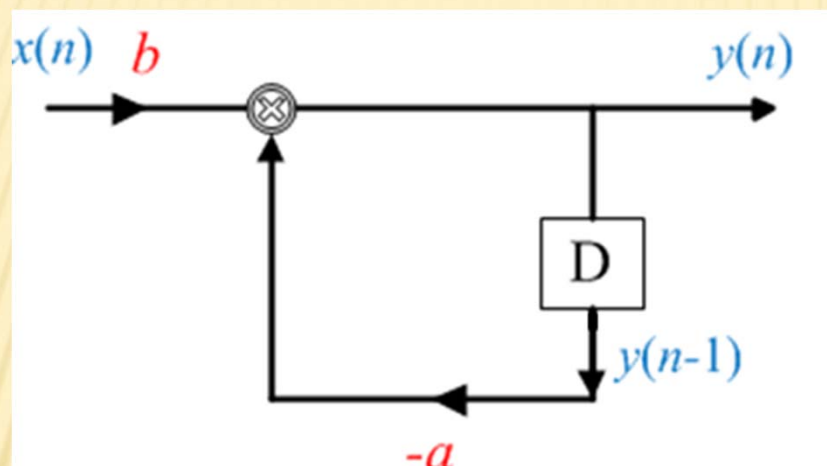
2、乘系数运算：



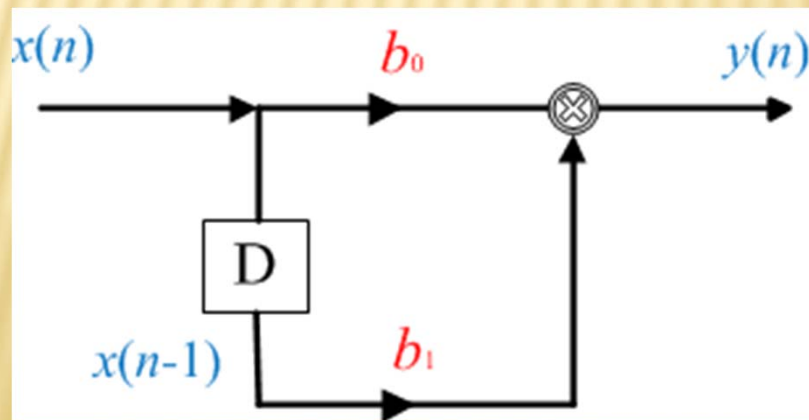
3、延迟运算：



实例1:  $y(n] + ay(n - 1) = bx(n]$

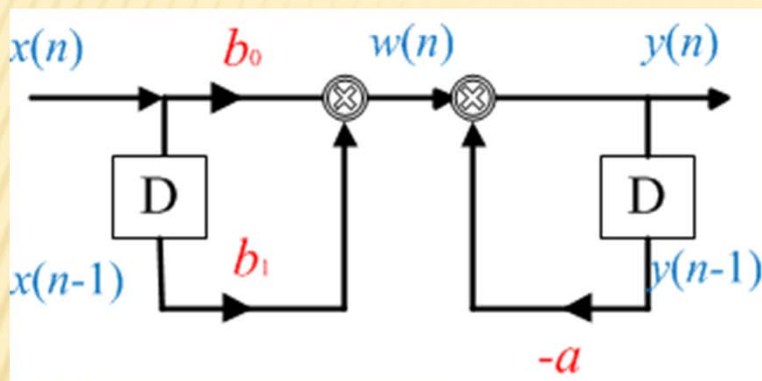


实例2:  $y(n] = b_0x(n] + b_1x(n - 1]$



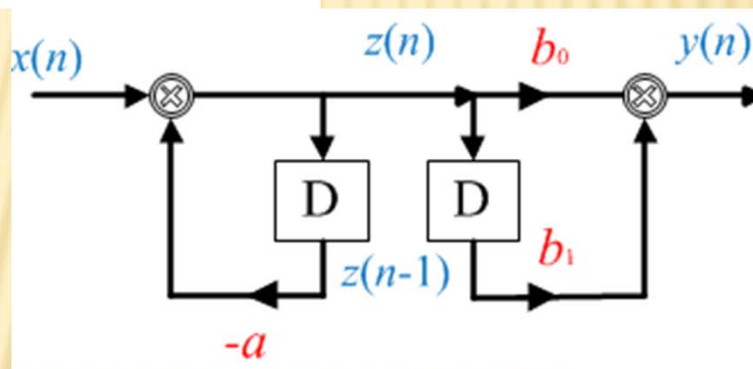


实例3:  $y(n] + ay[n - 1] = b_0x[n] + b_1x[n - 1]$



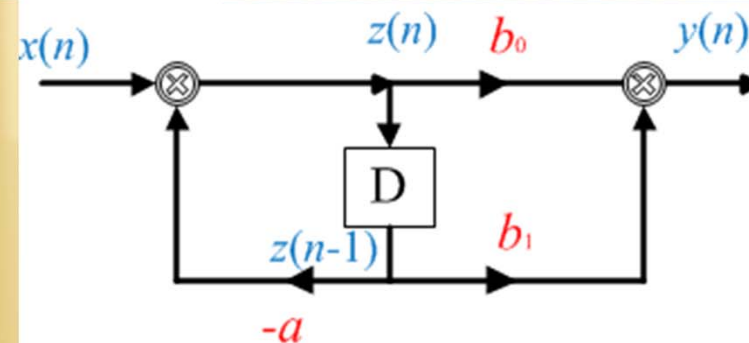
$$w[n] = b_0x[n] + b_1x[n - 1]$$

$$y[n] = -ay[n - 1] + w[n]$$

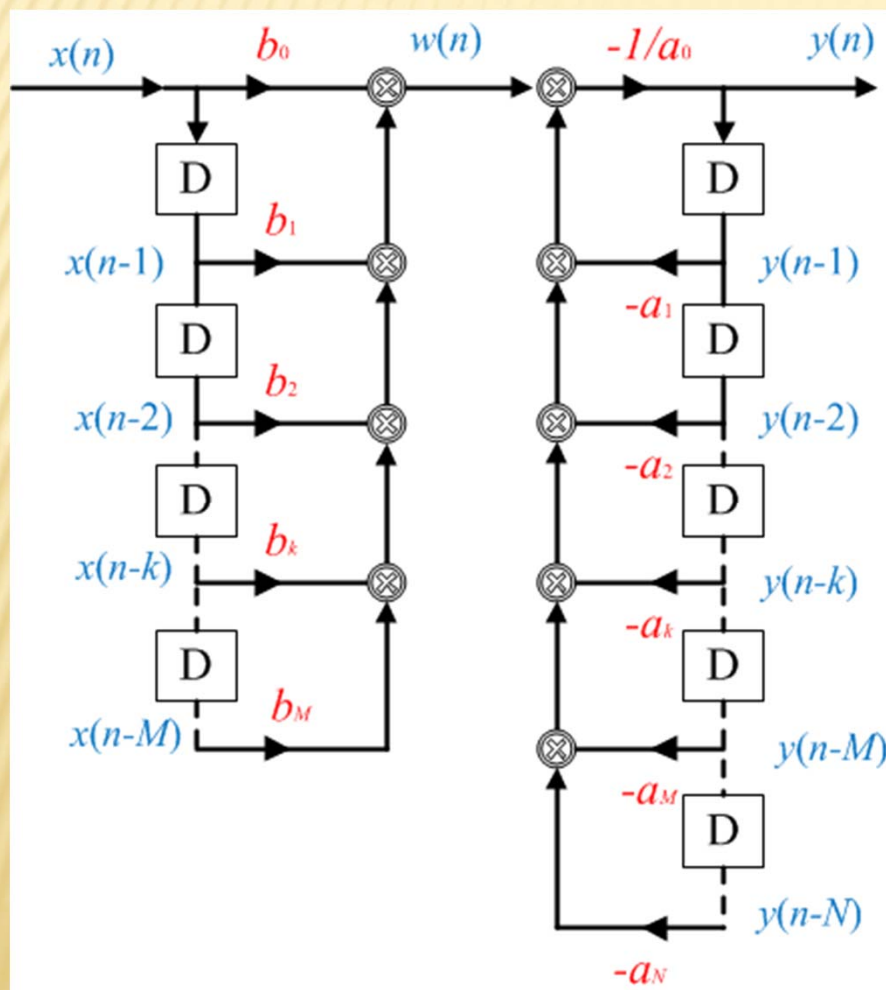


$$z[n] = -az[n - 1] + x[n]$$

$$y[n] = b_0z[n] + b_1z[n - 1]$$



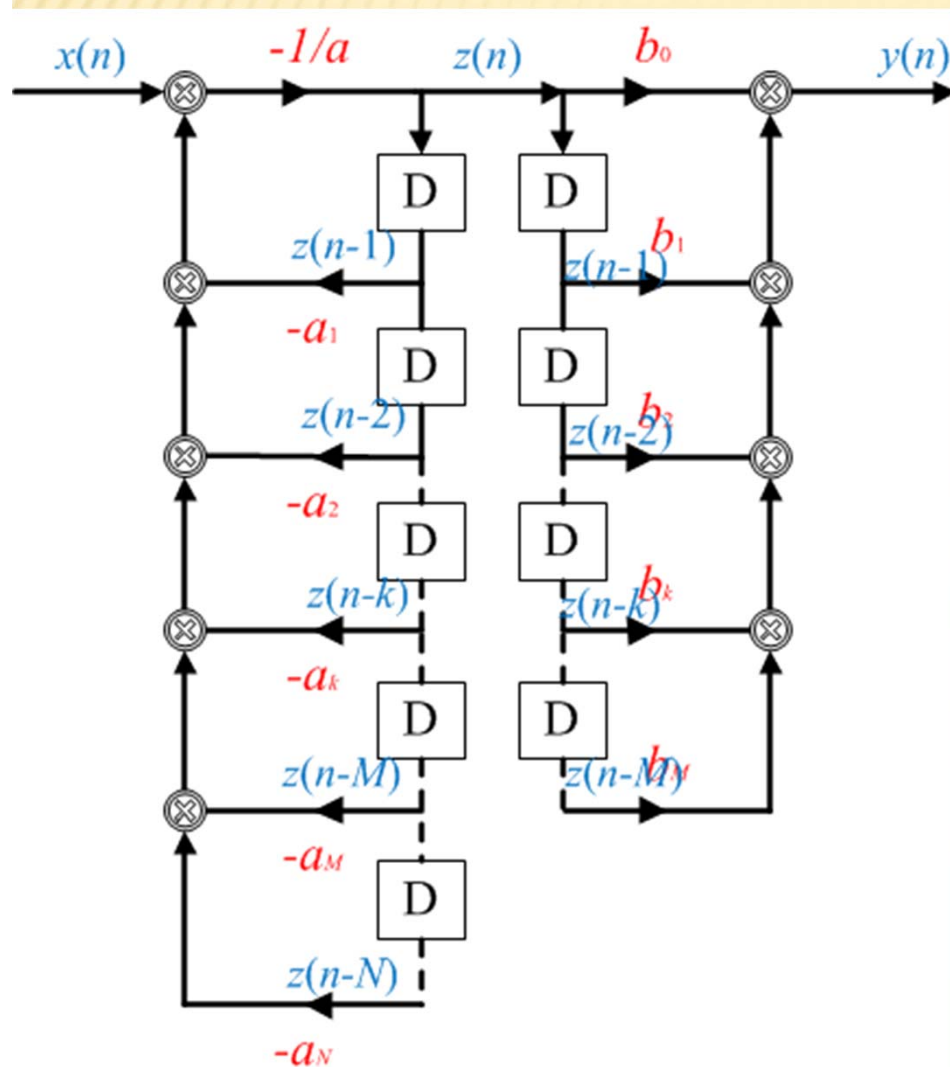
结果推广: 
$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right\}$$



$$w(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left\{ - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + w(n) \right\}$$

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right\}$$



$$z(n) = \frac{1}{a_0} \left\{ - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + x(n) \right\}$$

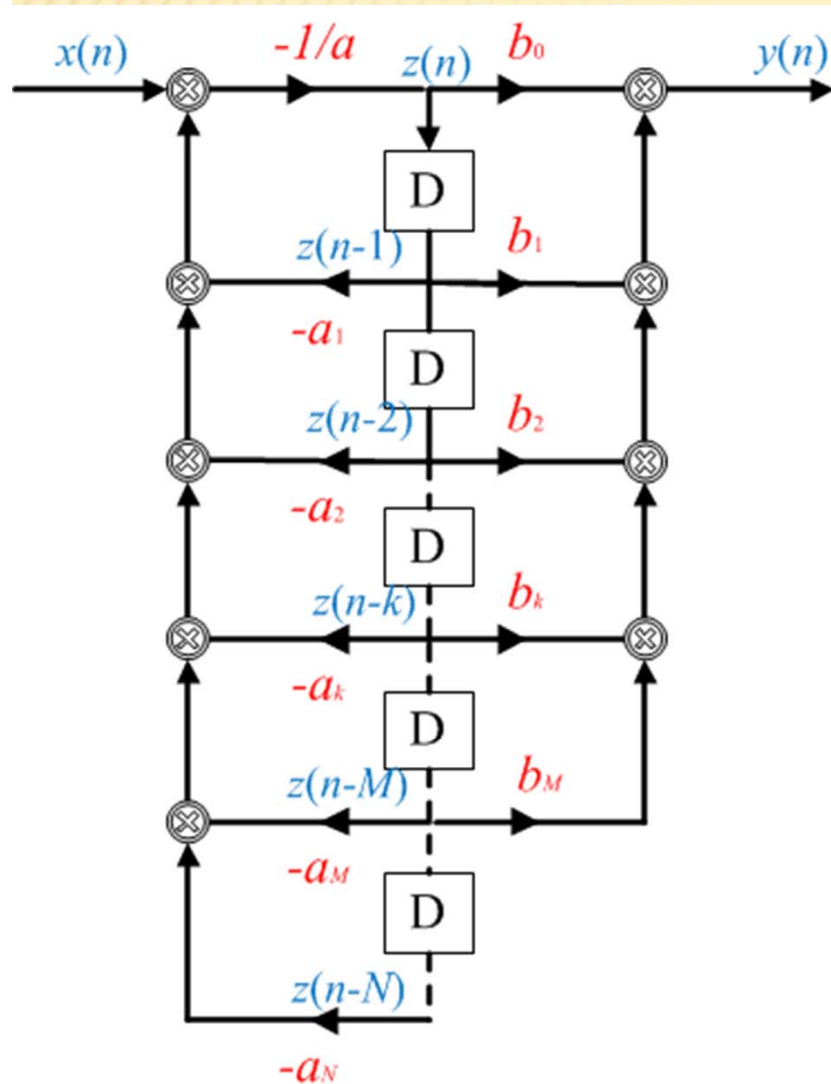
$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k z(n-k)$$



$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right\}$$

$$z(n) = \frac{1}{a_0} \left\{ - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + x(n) \right\}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k z(n-k)$$



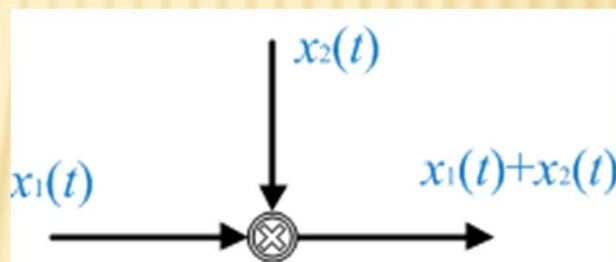
## 二、由微分方程描述的系统表示

在分析由线性常系数微分方程描述的连续时间系统时，可以完全按照分析离散时间系统相同的方法进行。下面是一个线性常系数微分方程的通式，是对某连续时间系统的描述。

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} - \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\}$$

基本计算的表示：

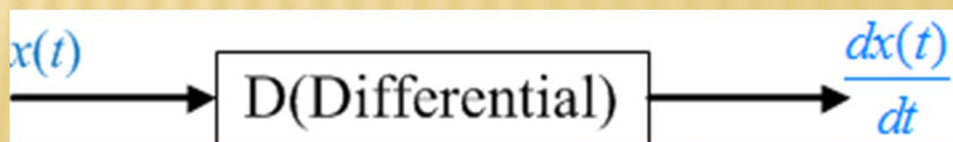
1、相加运算：



2、乘系数运算：



3、微分运算：



但是在实际操作中，微分运算很难实现，而积分运算则很容易用运算放大器实现。因此，要将微分方程变换为积分方程。做如下定义：

$$y_{(0)}(t) = y(t)$$

$$y_{(1)}(t) = \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t y(\tau) u(t - \tau) d\tau = y_{(0)}(t) * u(t)$$

$$y_{(2)}(t) = y_{(1)}(t) * u(t)$$

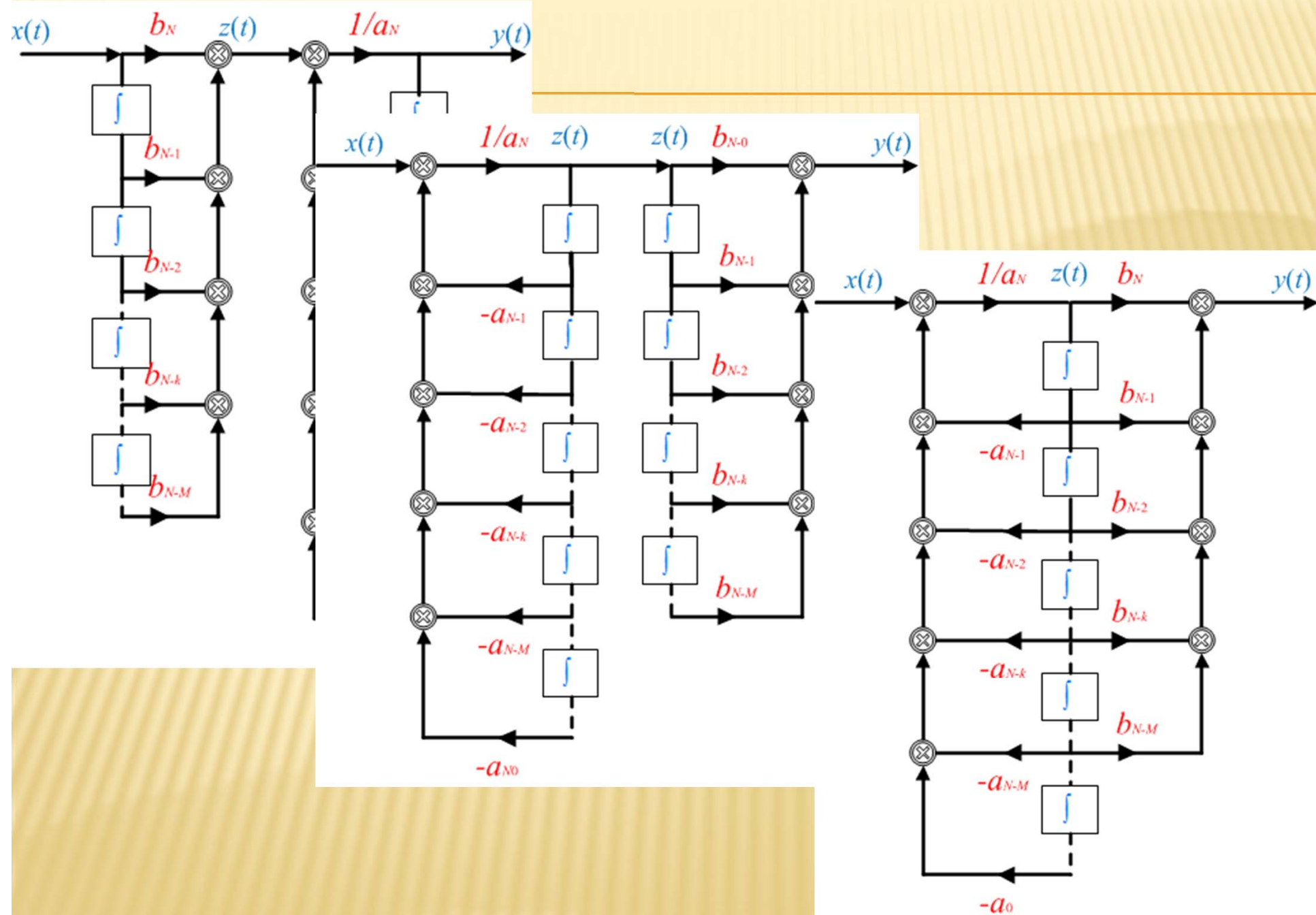
$$y_{(k)}(t) = y_{(k-1)}(t) * u(t)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^N a_k y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^M b_k x_{(N-k)}(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x_{(N-k)}(t) - \sum_{k=0}^N a_k y_{(N-k)}(t) \right\}$$







## § 7 奇异函数

### 一、单位冲激函数的讨论

恒等系统：单位冲激函数与任何函数做卷积，其结果还等于该函数。

$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

如果令：

$$x(t) = \delta(t)$$

则有：

$$\delta(t) = \delta(t) * \delta(t)$$

推广：

$$\delta(t) = \delta(t) * \delta(t) * \cdots \delta(t) * \delta(t)$$

## 二、单位冲激函数的微分的表示与讨论

设一微分环节：
$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

如果令：
$$x(t) = \delta(t)$$

则该系统的单位冲激响应为：

$$h(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} \quad \text{定义:} \quad u_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} \quad \text{单位冲激偶}$$

则有：
$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = x(t) * u_1(t)$$

推广：
$$\frac{d^k \delta(t)}{dt^k} = u_k(t) = \underbrace{u_1(t) * u_1(t) * \dots * u_1(t)}_k$$

$$y(t) = \frac{d^k x(t)}{dt^k} = x(t) * u_k(t)$$



## 二、单位冲激函数的微分的表示与讨论

设一积分环节：
$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

如果令：
$$x(t) = \delta(t)$$

则该系统的单位冲激响应为：

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

即：

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t)$$

如定义：

$$u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

则推广：

$$u_{-2}(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t_1} \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t u(t_1) dt_1 = u(t) * u(t)$$

$$u_{-k}(t) = \underbrace{u(t) * u(t) * \cdots * u(t)}_k = \int_{-\infty}^t u_{-(k-1)}(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \cdots \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u_{-k}(t)$$

$$u_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} u(t)$$

归纳：

$$\delta(t) = u_0(t)$$

$$u_k(t) * u_r(t) = u_{k+r}(t)$$

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = u_1(t)$$

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} = x(t) * u_k(t)$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) = u_{-1}(t)$$

$$\int \cdots \int x(t) dt = x(t) * u_{-k}(t)$$

---

第二章结束