以下讨论三角函数和双曲函数的类似关系.

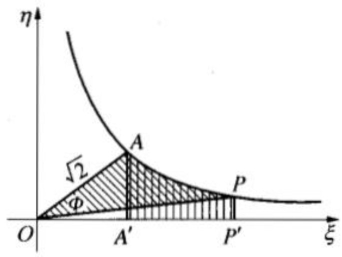
（1）从以渐近线为坐标轴的双曲线出发

$$\xi\cdot\eta=1$$

考虑介于固定坐标 $AA'(\xi=1)$ 和变动坐标 PP' 之间条带状区域的面积。设其面积为 ϕ，则 $\phi=\ln\xi$，则 P 的坐标可以用 ϕ 表示为

$$\xi=e^{\phi},\eta=e^{-\phi}$$

并且 $S_{OPA}=S_{AA'PP'}=\phi$ （注意到 $S_{OAA'}=S_{OPP'}$ ）



（2）引入坐标变换

$$\xi=x-y,\eta=x+y$$

则在新坐标系下

$$x^2-y^2=1$$

可以看到，该变换将原双曲线旋转了 45° ，并将其伸缩为原来的 $1/\sqrt{2}$.

此时 ϕ 为双曲扇形 OPA 面积的二倍.

用双曲函数表示 P 点坐标

$$x=\cosh\phi,y=\sinh\phi$$

并且利用坐标变换前后的关系，有

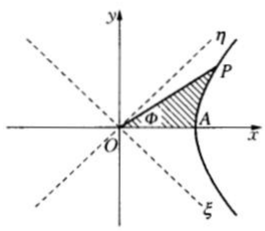
$$\cosh\phi=\frac{e^{\phi}+e^{-\phi}}{2},\sinh\phi=\frac{e^{\phi}-e^{-\phi}}{2}$$

类比三角函数，有双曲函数恒等式

$$\cosh^2\phi-\sinh^2\phi=1$$

根据代数计算的方法可以得到（用此式可以验证（5）中的结论）.

$$\phi=ar\sinh y=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$$



（3）考虑利用双曲函数计算双曲扇形OPA面积的方法.

由上可知，ϕ为双曲扇形OPA 面积的二倍，即

$$\phi = 2S_{OPA} = ar\sinh y$$

由此定义，可以导出$\phi = ar\sinh y$的积分表达式.

对三角形POP'的面积，可以分为两部分：双曲扇形OPA，以及双曲线与PP'所夹面积.

将三者面积关系可以表示为

$$\int_0^y \sqrt{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}y\sqrt{1+y^2} - \frac{1}{2}\phi$$

经过分部积分处理可以得到

$$\phi = ar\sinh y = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$$

（4）对于三角函数，类似的，引入坐标变换（i 为虚数单位）

$$\xi = x - iy, \eta = x + iy$$

则在新坐标系下

$$x^2 + y^2 = 1$$

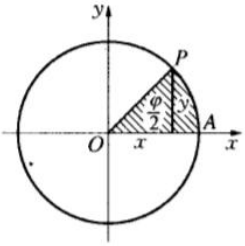
此时ϕ为扇形OPA 面积的二倍，也就是，ϕ可以表示OP与x轴间的夹角.

用三角函数表示P点坐标

$$x = \cos\phi, y = \sin\phi$$

并且利用坐标变换前后的关系，有

$$\cos\phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}, \sin\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2}$$



（5）考虑利用三角函数计算扇形 OPA 面积的方法.

由上可知，ϕ 为扇形 OPA 面积的二倍，即

$$\phi = 2S_{OPA} = \arcsin y$$

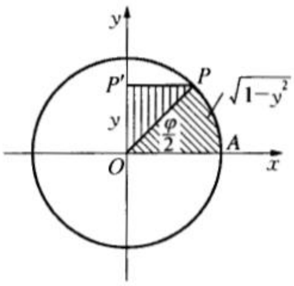
由此定义，可以导出 $\phi = \arcsin y$ 的积分表达式.

对 PP' 与 OA 所夹的圆面积，可以分成两部分：三角形 POP' 与扇形 OPA 的面积.将三者面积关系可以表示为

$$\int_0^y \sqrt{1-y^2}\,dy = \frac{1}{2} y\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\phi$$

可以得到

$$\phi = \arcsin y = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$



（6）从上述讨论可以看到，当从实数域进入复数域，正弦-反正弦就自然变成指数-对数关系，

$$e^{\phi} = \cosh\phi + \sinh\phi$$
$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

也就有微分方程

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$
$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(\cosh x) = \cosh x, \frac{d^2}{dx^2}(\sinh x) = \sinh x$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(\cos x) = -\cos x, \frac{d^2}{dx^2}(\sin x) = -\sin x$$

（7）微分方程与欧拉公式的一个物理解释

现在换一个角度，不再利用面积进行解释。可以看到，满足一定的微分方程也是三角函数和双曲函数的内在特征.

若函数 $y = f(x)$ 满足微分方程

$$\begin{cases}\ddot{y}-y=0\\ y(0)=1,\dot{y}(0)=0\end{cases}$$

其特征方程为$\lambda^2-1=0$，特征根为$\lambda=\pm1$

可以解得$y=\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

对于三角函数，因为其微分方程有两个虚数根，所以要从复数域进行考虑.将复数考虑为一个带箭头的向量，平面上的运动自然可以由复数和向量表示.复数可以分解为实部与虚部$z=u+iv$，或分解为模长与幅角$z=r\angle\theta$.

设平面上一个质点的位置为$\vec{z}(t), z(t)=x(t)+iy(t)$，满足微分方程

$$\begin{cases}\ddot{z}+z=0\\ z(0)=1,\dot{z}(0)=i\end{cases}$$

根据运动学，质点做匀速圆周运动，因为加速度方向始终与位置方向在一条直线上而方向相反，那么加速度完全等于向心加速度，而切向加速度为 0（具体参考大学物理）.初始时刻位置在x轴上$(1,0)$处，初始速度方向垂直x轴向上.

则在t时刻内转过角度$\varphi=\omega t=t$，

$$\begin{cases}x=\cos\varphi=\cos t\\ y=\sin\varphi=\sin t\end{cases}$$

另一方面，该微分方程的特征方程$\lambda^2+1=0$，即$\lambda=\pm i$.

则微分方程的通解为$z=C_1e^{it}+C_2e^{-it}$，根据初值得到

$$z=e^{it}$$

这就表明

$$e^{it}=\cos t+i\sin t$$

即$z=e^{it}$表示质点以角速度为 1 做匀速圆周运动.

将$z(t)$的实部、虚部分开，即

$$\begin{cases}\ddot{x}(t)+x(t)=0\\ x(0)=1,\dot{x}(0)=0\end{cases}\begin{cases}\ddot{y}(t)+y(t)=0\\ y(0)=0,\dot{y}(0)=1\end{cases}$$

微分方程的解正是$x(t)=\sin t$和$y(t)=\cos t$.这说明满足上述微分方程也是三角函数的内在特征.