

拉格朗日法.

一. 杆件动能

角动量 (?) 动量 (?)

↑

$$k_i = \frac{1}{2} m_i \dot{V}_{ci}^T \dot{V}_{ci} + \frac{1}{2} \dot{w}_i^T I_i \dot{w}_i$$

注意: V 是质心的速度

w_i 是杆件 i 对应关节 i 的角速度

机械臂总动能 $k = \sum_{i=1}^n k_i = k(w, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta}$ (?) 简式?

因为 V 是 θ 和 $\dot{\theta}$ 的函数

二. 杆件势能 (重力势能)

$$u_i = -m_i \cdot g^T \cdot p_{ci} + \underline{u_{ref}}$$

重力原点的修正. (只有平移的势能)

对后续计算无影响 (???)

机械臂总势能: $u = \sum_{i=1}^n u_i$

$u = u(\theta)$: 只与角度有关

三. 拉格朗日.

$$L(\theta, \dot{\theta}) = k - u = k(\theta, \dot{\theta}) - u(\theta)$$

动能 - 势能

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau$$

$$\text{代入 } L(\theta, \dot{\theta}) = k - p$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial k}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} = \tau$$

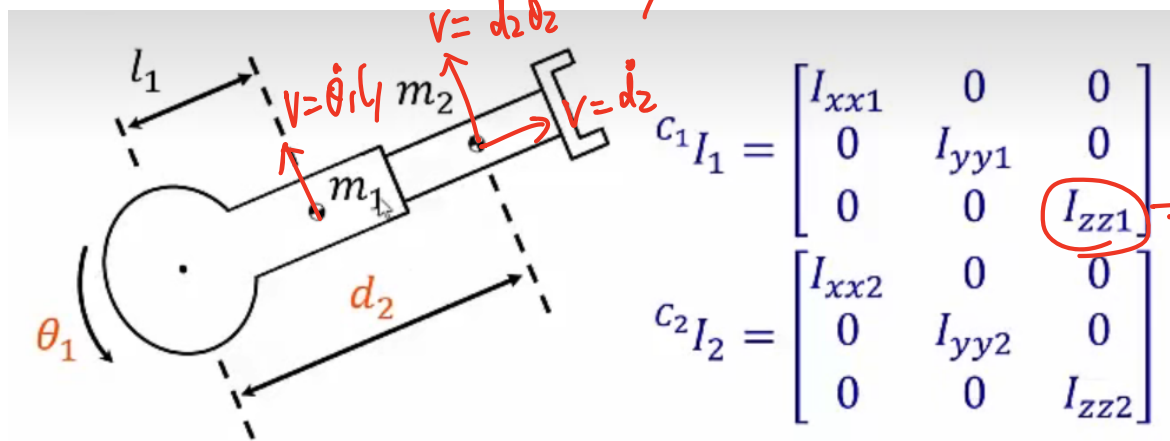
能量对速度微分是动量.

能量对位置微分是力

动量对时间微分是力

(非标准解法)

例题! RP 机械臂 \rightarrow 速度都是对地的(?)



合轴到 Z 轴的转动惯量(?)

(-) 动能:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\theta}_1 l_1)^2 + \frac{1}{2} I_{zz1} \dot{\theta}_1^2$$

$$K_2 = \left(\frac{1}{2} m_2 (d_2 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_2^2 \right) + \frac{1}{2} I_{zz2} \dot{\theta}_1^2$$

相当于质心 (动能无方向, 可以求出各动能相加)

对于复杂手臂, 求 V_{C2} 可以先用正运动学求出 T_{C1} , 再对位置向量 P_{C1} 微分

$$\therefore K(\theta, \dot{\theta}) = K_1 + K_2$$

(2) 势能:

$$U_1 = m_1 g l_1 \sin \theta_1 + m_1 g l_1$$

$$U_2 = m_2 g d_2 \sin \theta_1 + m_2 g d_2 \max$$

常数项会消失

$$U(\theta) = U_1 + U_2 = (m_1 l_1 + m_2 d_2) \cdot g \cdot \sin \theta_1 + \underline{m_1 g l_1 + m_2 g d_2 \max}$$

$$(3) \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = \begin{bmatrix} (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) \dot{\theta}_1 \\ m_2 \dot{d}_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 \dot{d}_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos \theta_1 \\ m_2 g \sin \theta_1 \end{bmatrix}$$

注意 θ_1, d_2 为变量

对 t 求导则 \dot{d}_2

$$L = \frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial k}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

总结：解题流程

1. 求动能 k_i : \rightarrow 求 ${}^i \dot{w}_i$
 \rightarrow 求 ${}^0 p_{ci} = {}^0 i T \cdot {}^i p_{ci} \rightarrow$ 求 ${}^0 \dot{v}_{ci} = \frac{d}{dt} {}^0 p_{ci}$

代入 $k_i = \frac{1}{2} m_i {}^0 v_{ci}^T \cdot {}^0 v_{ci} + \frac{1}{2} {}^i w_i^T \cdot {}^i J \cdot {}^i w_i$

2. 求势能 : $u_i =$