第二章 矩阵代数

第五节 分块矩阵

§ 2.5.3 (补)分块矩阵应用

一、分块矩阵的初等变换和分块初等矩阵

1. 分块矩阵的初等变换

与一般矩阵一样，分块矩阵也可以定义初等变换.

(1) 交换两块行(列)，表示为$R_i \leftrightarrow R_j$ $(C_i \leftrightarrow C_j)$.

(2) 用一个可逆矩阵P左乘(右乘)某一(第i)块行(列) 表示为PR_i (C_iP).

(3) 某(第j)块行(列)左乘(右乘)矩阵P加到另一(第i)块行(列)上，表示为R_i+PR_j (C_i+C_jP).

注意 矩阵P的行数和列数要使矩阵运算可行.

例如

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{pmatrix} = B_1$$

$$A \xrightarrow[C_1 \leftrightarrow C_3]{} \begin{pmatrix} A_{13} & A_{12} & A_{11} & A_{14} \\ A_{23} & A_{22} & A_{21} & A_{24} \\ A_{33} & A_{32} & A_{31} & A_{34} \end{pmatrix} = B_2$$

$$A \xrightarrow{PR_2} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ PA_{21} & PA_{22} & PA_{23} & PA_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \end{pmatrix} = B_3$$

$$A \xrightarrow[C_3 Q]{} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}Q & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23}Q & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}Q & A_{34} \end{pmatrix} = B_4$$

$$A \xrightarrow{R_3 + PR_2}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} + PA_{21} & A_{32} + PA_{22} & A_{33} + PA_{23} & A_{34} + PA_{24} \end{pmatrix} = B_5$$

P的行数等于第三行子块的行数，列数为第二行子块的行数

$$A \xrightarrow[C_2 + C_4 Q]{} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} + A_{14}Q & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} + A_{24}Q & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} + A_{34}Q & A_{33} & A_{34} \end{pmatrix} = B_6$$

Q的列数等于第二列子块的列数，行数为第四列子块的列数

2. 分块初等矩阵

分块单位矩阵

$$E=\begin{pmatrix} E_1 & \cdots & O & \cdots & O & \cdots & O \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & \cdots & E_i & \cdots & O & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & \cdots & O & \cdots & E_j & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ O & \cdots & O & \cdots & O & \cdots & E_t \end{pmatrix}$$

进行一次分块矩阵初等变换得到的分块矩阵称为**分块初等矩阵.**

以下我们用常用的二行二列分块初等矩阵来定义这些分块初等矩阵.

单位矩阵 $\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_m \end{pmatrix}$ 与其相应的三种分块初等矩阵为

(1) $\begin{pmatrix} O & E_m \\ E_n & O \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_m \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & P \end{pmatrix}$

其中P为$n \times n$或$m \times m$矩阵，并且$|P| \neq 0$.

(3) $\begin{pmatrix} E_n & Q \\ O & E_m \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} E_n & O \\ Q & E_m \end{pmatrix}$，其中$Q$为$n \times m$或$m \times n$矩阵.

定理 对一个分块矩阵作一次分块矩阵的初等行（列）变换，相当于在矩阵的左（右）边乘上一个相应的分块初等矩阵，反之亦然.

例如

$$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & E_m \\ E_n & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP & B \\ CP & D \end{pmatrix}$$

假设计算可行

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ C+PA & D+PB \end{pmatrix} \quad (※)$$

在(※)中，适当选择P，可使$C+PA=O$.

例如A可逆时，选$P=-CA^{-1}$，则$C+PA=O$.

于是(※)的右端成为 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$

这种形状的矩阵在求行列式、逆矩阵和解决其它问题时是比较方便的.

二、分块矩阵的应用举例

例1. $T=\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}$，$A$，$D$可逆，求 T^{-1}.

解1：

$$\begin{pmatrix} A & O & E & O \\ C & D & O & E \end{pmatrix} \xrightarrow{A^{-1}R_1} \begin{pmatrix} E & O & A^{-1} & O \\ C & D & O & E \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2-CR_1} \begin{pmatrix} E & O & A^{-1} & O \\ O & D & -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \xrightarrow{D^{-1}R_2} \begin{pmatrix} E & O & A^{-1} & O \\ O & E & -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\therefore T^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

利用分块矩阵求逆矩阵与普通矩阵类似，注意做行变换时，在某一行所乘的矩阵一定要左乘. 如果所作的是列变换，在某列上所乘的矩阵一定是右乘.

例1. $T=\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}$，$A$，$D$可逆，求 T^{-1}.

解2：　A^{-1}和D^{-1}存在.

由 $\begin{pmatrix} E_m & O \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}$

两端求逆 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} E_m & O \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}$

$$\therefore T^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & O \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

利用分块初等矩阵将矩阵化简成准对角矩阵，再两边求逆矩阵. 左乘或右乘一系列的分块初等矩阵. 即可得到所求的逆矩阵.

例2. 求分块矩阵A的逆矩阵 $A=\begin{pmatrix} & B \\ D & \end{pmatrix}$

其中$B=B_m$，$D=D_n$都是可逆矩阵.

解1：$\because \begin{pmatrix} & B \\ D & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & E_m \\ E_n & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & \\ & B \end{pmatrix}$

$$\therefore\ A^{-1}=\begin{pmatrix} & B \\ D & \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} D & \\ & B \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} & E_m \\ E_n & \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} D^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & E_n \\ E_m & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} & D^{-1} \\ B^{-1} & \end{pmatrix}$$

解2:

$$\begin{pmatrix} & E_n \\ E_m & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & B \\ D & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D & \\ & B \end{pmatrix}$$

两端求逆 $$\begin{pmatrix} & B \\ D & \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} & E_n \\ E_m & \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} D & \\ & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} D^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} & B \\ D & \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} D^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & E_n \\ E_m & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & D^{-1} \\ B^{-1} & \end{pmatrix}$$

解3：初等变换法

$$\begin{pmatrix} & B & E_m & \\ D & & & E_n \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} D & & & E_n \\ & B & E_m & \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} E_n & & & D^{-1} \\ & E_m & B^{-1} & \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} & D^{-1} \\ B^{-1} & \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

例3. $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$ 求A^{-1}.

解：设 $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ 则 $B^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{B}{2}$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}B&B\\B&-B\end{pmatrix}$$

$$(A,E)$$

$$=\begin{pmatrix}B&B&E_2&O\\B&-B&O&E_2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1}\begin{pmatrix}B&B&E_2&O\\O&-2B&-E_2&E_2\end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

$$\begin{pmatrix} B & B & E_2 & O \\ O & -2B & -E_2 & E_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} B & O & \frac{1}{2}E_2 & \frac{1}{2}E_2 \\ O & -2B & -E_2 & E_2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}B^{-1}R_2]{B^{-1}R_1} \begin{pmatrix} E_2 & O & \frac{1}{2}B^{-1} & \frac{1}{2}B^{-1} \\ O & E_2 & \frac{1}{2}B^{-1} & -\frac{1}{2}B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}B^{-1} & \frac{1}{2}B^{-1} \\ \frac{1}{2}B^{-1} & -\frac{1}{2}B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}B & \frac{1}{4}B \\ \frac{1}{4}B & -\frac{1}{4}B \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} B & B \\ B & -B \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

例4. 证明 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A-B||A+B|$ 其中A，B是n阶方阵.

证明：

$$\begin{pmatrix} E & O \\ E & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ -E & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{pmatrix}$$

两端求行列式

$$\begin{vmatrix} E & O \\ E & E \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E & O \\ -E & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{vmatrix} = |A-B||A+B|$$

例5. 证明 $\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = |E_n - AB| = |E_m - BA|$

证明: $\begin{pmatrix} E_m & \\ -A & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & B \\ & E_n - AB \end{pmatrix}$

两边求行列式得

$$\begin{vmatrix} E_m & \\ -A & E_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_m & B \\ & E_n - AB \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_m & B \\ & E_n - AB \end{vmatrix} = |E_m||E_n - AB| = |E_n - AB|$$

另外 $\begin{pmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & \\ -A & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m - BA & B \\ & E_n \end{pmatrix}$

于是

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E_m & \\ -A & E_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E_m - BA & B \\ & E_n \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E_m - BA & B \\ & E_n \end{vmatrix}=\left|E_m - BA\right|$$

利用分块矩阵求行列式的过程，应首先

利用初等分块矩阵将原矩阵化成

$$\begin{pmatrix} *_1 & \\ *_3 & *_2 \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} *_1 & *_3 \\ & *_2 \end{pmatrix}$$

形矩阵，再两端取行列式.

另外，若A, B可逆，则易证明下面结论成立.

$$\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & B^{-1} \\ A^{-1} & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$$