第七章 n元实二次型

§7.3 用正交变换化二次型为标准形

正交变换复习

定理：设T是欧氏空间V的一个线性变换，则下述条件等价

1） T 是正交变换；

2）T保持向量的内积不变;

3）T把标准正交基变为标准正交基;

4）T在标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

正交矩阵满足$A^TA=E$，则 $A^T=A^{-1}$.

用正交变换 $X=CY$ 化二次型X^TAX为标准形问题，等价于：

求正交矩阵C，使得

$$C^TAC=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

条件：

- A的特征根都是实数；
- A有n个实特征向量构成的标准正交向量组，使A化为对角形.

一、对称矩阵的性质

说明：本节所提到的对称矩阵，除非特别说明，均指实对称矩阵.

复习：复数 $z=a+bi$ $(a,b\in R)$, 若$b=0$, 则 z 就是一个实数.

复平面中向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模叫做复数z的模(或绝对值),

记做 $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\overline{z} = a - bi$ 称为z的共轭复数；$z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$

设复向量 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 则 $\overline{X} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_n)$

称为向量X的共轭向量.

定理1　对称矩阵的特征根**必为实数**.

证明：设复数λ为对称矩阵A的特征值，X为对应特征向量，则

$$AX=\lambda X,\ X\neq O.$$

于是 $$A\overline{X}=\overline{A}\,\overline{X}=\overline{(AX)}=\overline{\lambda X}=\overline{\lambda}\,\overline{X}.$$

因此 $$\overline{X}^T AX=\left(\overline{X}^T A^T\right)X=\left(A\overline{X}\right)^T X=\left(\overline{\lambda}\overline{X}\right)^T X=\overline{\lambda}\,\overline{X}^T X \quad (1)$$

又 $$\overline{X}^T AX=\overline{X}^T\left(AX\right)=\overline{X}^T\lambda X=\lambda\overline{X}^T X \quad (2)$$

(2)-(1)，得 $(\lambda-\overline{\lambda})\overline{X}^T X=0.$

但因为 $X \neq 0$,

所以 $\overline{X}^T X = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \neq 0, \Rightarrow (\lambda - \overline{\lambda}) = 0,$

即 $\lambda = \overline{\lambda}$, 由此可得 λ是实数.

定理1的意义

由于对称矩阵A的特征根λ_i为实数，所以齐次线性方程组

$$(\lambda_i E - A)X = 0 \qquad (※)$$

是实系数方程组，由 $|\lambda_i E - A| = 0$ 知(※)必有实的基础解系，从而对应的特征向量可以取实向量.

定理2 设λ_0是n阶对称阵A的k重特征根，则A的对应于λ_0的特征子空间V_{λ_0}的维数恰为k，即齐次线性方程组

$$(\lambda_0 E - A)X = 0$$

的基础解系恰有k个解向量.

由定理1，2可知：n阶对称矩阵A一定有n个线性无关的实特征向量，从而它必相似于实对角矩阵.

定理3 设λ_1 与λ_2 是对称矩阵A的**互异**特征根，X_1，X_2分别是A的属于它们的特征向量，则X_1，X_2**正交**.（即$X_1^T X_2=0$）

证明 $\lambda_1 X_1 = AX_1$, $\lambda_2 X_2 = AX_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$\because$ A对称, $A = A^T$,

$\therefore \lambda_1 X_1^T = (\lambda_1 X_1)^T = (AX_1)^T = X_1^T A^T = X_1^T A$,

于是

$$\lambda_1 X_1^T X_2 = X_1^T A X_2 = X_1^T(\lambda_2 X_2) = \lambda_2 X_1^T X_2,$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) X_1^T X_2 = 0.$$

$\because \lambda_1 \neq \lambda_2$,

$\therefore X_1^T X_2 = 0$. 即X_1与X_2正交.

定理4 对n阶对称矩阵A，一定存在正交矩阵C，使得

$$C^T A C = C^{-1} A C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$A$的全部特征根.

证明：设A的互不相等的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$,
它们的重数依次为 $r_1, r_2, \cdots, r_s$

$$(r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n).$$

根据定理1（对称矩阵的特征值为实数）和定理2（k重特征根对应解空间维数恰为k）可得：

A对应特征根 $\lambda_i \ (i=1,2,\cdots,s)$ 恰有r_i个线性无关的实特征向量， 把它们正交化、单位化(对于单根只单位化)，即得A的对应于λ_i的r_i个单位正交的特征向量. 于是共s个得到 r_i 个标准正交组，且向量总数恰为n.

由定理3知对应于不同特征根的特征向量正交，故这n个 单位特征向量两两正交，从而构成一个标准正交组. 以它们为列向量(按对应特征根顺序)构成正交矩阵C，则

$$C^{-1}AC = C^{T}AC = \Lambda$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \lambda_s & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r_1\text{个} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r_2\text{个} \\ \vdots \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r_s\text{个} \end{array}$$

注：该题的证明过程也是将一个对称矩阵用正交矩阵化为对角形的方法.

小 结

1. 对称矩阵的性质：（重点）

(1) 特征值为实数；

(2) 属于不同特征值的特征向量正交；

(3) 特征值的重数和与之对应的线性无关的特征向量的个数相等；

(4) 必存在正交矩阵，将其化为对角矩阵，且对角矩阵对角元素即为特征值.

2. 利用正交矩阵将对称阵化为对角阵的步骤：（重点）

(1)求特征值；(2)找特征向量；(3)将特征向量(按特征根分组)正交化；(4)最后单位化.

二、用正交矩阵将对称矩阵对角化的方法

定理5 任一个n元实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = X^T A X, \quad (A^T = A)$$

必存在正交变换 $X = CY \ (C^T = C^{-1})$ 使f化为标准形

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = Y^T \Lambda Y$$

其中 $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n)$, $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ 是对称矩阵 A 的全部特征根.

二次型$X^T AX$为正定二次型 $\Leftrightarrow$ A的特征根全大于零.

根据上述结论，利用正交变换将实二次型化为标准形的步骤为：

(1)写出实二次型 $f=X^TAX$对应的对称矩阵A；

(2)求矩阵A的全部特征根；

(3)对A的每个特征根 λ_i 求齐次线性方程组 $(\lambda_i E-A)X=0$ 的基础解系——即求其线性无关特征向量，并将它们正交化、单位化；

(4)用这些单位化后的向量作为列项量顺次构成矩阵C，则C为正交矩阵，且$C^TAC=C^{-1}AC=\Lambda$为对角形矩阵.

例1 将下面的二次型通过正交变换$X=PY$化为标准形.

$$f(x_1,x_2,x_3)=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

解：(1)写出二次型对应的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}17 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -4\\ -2 & -4 & 14\end{pmatrix}$$

(2)求其特征值

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-17 & 2 & 2\\ 2 & \lambda-14 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-14\end{vmatrix}=(\lambda-9)(\lambda-18)^2$$

从而得特征值 $\lambda_1=9,\lambda_2=\lambda_3=18.$

(3) 求特征向量并将其单位化、正交化

将 $\lambda_1 = 9$ 代入 $(\lambda E - A)X = 0$，得基础解系

$$\xi_1 = (1/2, 1, 1)^T.$$

将 $\lambda_2 = \lambda_3 = 18$ 代入 $(\lambda E - A)X = 0$，得基础解系

$$\xi_2 = (-2, 1, 0)^T,\ \xi_3 = (-2, 0, 1)^T.$$

将特征向量正交化（注：此时分为两组）

取 $\alpha_1 = \xi_1,\quad \alpha_2 = \xi_2,\quad \alpha_3 = \xi_3 - \dfrac{\langle \alpha_2, \xi_3 \rangle}{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle}\alpha_2,$

得正交向量组

$$\alpha_1 = (1/2, 1, 1)^T,\quad \alpha_2 = (-2, 1, 0)^T,\quad \alpha_3 = (-2/5, -4/5, 1)^T$$

将正交向量组单位化

令 $\eta_i = \dfrac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}, \quad (i = 1,2,3),$

得
$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{45} \\ -4/\sqrt{45} \\ 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$$

(4) **构成矩阵P**

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$$

于是所求正交变换为 $X = PY$

化二次型为标准型 $f = 9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2.$

例题：209页例1，210页例2

- 注：解题过程必须掌握，非常重要。

思考：三种化二次型为标准形的方法有何异同？

- 配方法
- 合同变换法
- 正交变换法

将一个二次型化为标准形，三种方法都可以，采用的方法取决于问题要求.

若要求找出一个正交矩阵，应使用正交变换法；若只需要找出一个可逆的线性变换，则各种方法都可使用.

正交变换法的好处是有固定的步骤，但计算量通常较大；通常情况合同变换法方法计算量较小，过程也相对简单明确；但如果二次型中变量个数较少，使用拉格朗日配方法反而比较简单.

注意：用不同方法，所得标准形可能不相同，但标准形中含有的项数必定相同，项数等于所给二次型的秩；同时正惯性指数和负惯性指数相同.

小　结

- 用正交矩阵将对称矩阵对角化 (重点)