一、选择题

1.D　　2.B　　3.A　　4.C　　5.B　　6.D

二、填空题

1. $\arctan e^x + C$　　2. $\dfrac{\pi^2}{16}$　　3. $\dfrac{3}{8}\pi$　　4. $x+y+z-3=0$

3.[解析] $S=\int_0^{2\pi}\left|y(t)x'(t)\right|dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|y(t)x'(t)\right|dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin^3 t\cdot 3\cos t\cdot(-\sin t)\right|dt$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot\cos^2 t dt=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t(1-\sin^2 t)dt=12(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t dt)$$

$$\underline{\underline{\text{点火公式}}}12(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2})=\frac{3}{8}\pi.$$

三、计算下列各题.

1.令 $t=\sqrt{4x-3}$，则 $x=\dfrac{1}{4}(t^2+3)$， $dx=\dfrac{1}{2}tdt$.

原式=$\dfrac{1}{8}\int(t^2+3)dt=\dfrac{1}{24}t^3+\dfrac{3}{8}t+C$.回代得 $I=\dfrac{1}{24}(4x-3)^{3/2}+\dfrac{3}{8}\sqrt{4x-3}+C$.

2.令 $\sqrt{x}=t$，因为 $x\in(0,\dfrac{\pi^2}{4})$，故 $t\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，且 $x=t^2,dx=2tdt$.

故原式=$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2t\cos tdt=2t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt=\pi+2\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2$.

3. $S=\int_0^1[e^y-(y+1)]dy=(e^y-\dfrac{1}{2}y^2-y)\Big|_0^1=e-\dfrac{5}{2}$.

四、分区间讨论.

当 $x<-1$ 时， $g(x)=\int_{-1}^1(t-x)e^{t^2}dt=\int_{-1}^1-xe^{t^2}dt$（由于 te^{t^2} 是奇函数）

$g'(x)=-\int_{-1}^1 e^{t^2}dt<0$，故 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，且 $g(x)_{\min}=g(-1)$，

当 $-1\le x\le 1$ 时， $g(x)=\int_{-1}^x(t-x)e^{t^2}dt+\int_x^1(x-t)e^{t^2}dt$.

$g'(x)=xe^{x^2}+xe^{x^2}=2xe^{x^2}$，令 $g'(x)=0$，则 $x=0$，显然 $g(x)$ 在 $[-1,0]$ 上单调减，$[0,1]$ 上单调增，

且 $x=0$ 是 $g(x)$ 的驻点.

当 $x>1$ 时， $g(x)=\int_{-1}^1(x-t)e^{t^2}dt=\int_{-1}^1 xe^{t^2}dt$.

$g'(x)=\int_{-1}^1 e^{t^2}dt>0$，故 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调增，且 $g(x)_{\min}=g(1)$，

综上可知，$g(x)$在$[-1,0]$上单调减，$[0,+\infty)$上单调增，故$g(x)_{\min}=g(0)=2\int_0^1 te^{t^2}dt=e^{t^2}\Big|_0^1=e-1$.

五、(1) 当$x\neq 0$时，$F'(x)=\dfrac{x^3 f(x)-2x\int_0^x tf(t)dt}{x^4}=\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{2\int_0^x tf(t)dt}{x^3}$.

当$x=0$时，$F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{f(x)}{x}$

由于$f(0)=0$，所以$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{1}{3}f'(0)$. 故$F'(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{2\int_0^x tf(t)dt}{x^3}, x\neq 0\\ \dfrac{1}{3}f'(0), x=0\end{cases}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}F'(x)=\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{2\int_0^x tf(t)dt}{x^3}]=\lim\limits_{x\to 0}[f'(0)-\dfrac{2xf(x)}{3x^2}]=\lim\limits_{x\to 0}[f'(0)-\dfrac{2}{3}f'(0)]=\dfrac{1}{3}f'(0)$.

由于$\lim\limits_{x\to 0}F'(x)=F'(0)$，故$F'(x)$在$x=0$处连续.

六、令$F(p,q)=\int_p^{pq}f(x)dx$.对p求偏导数，$\dfrac{\partial F(p,q)}{\partial p}=pqf(pq)-pf(p)$.

由于$F(p,q)$的值与p无关，故$\dfrac{\partial F(p,q)}{\partial p}=pqf(pq)-pf(p)=0$.

又由于$f(1)=1$，故$qf(q)-1=0$，故$f(q)=\dfrac{1}{q}$，即$f(x)=\dfrac{1}{x}$.

七、$I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}dx=\int_0^1\dfrac{x^n+x^{n-1}}{1+x}dx=\int_0^1 x^{n-1}dx+I_{n-1}=\dfrac{1}{n}x^n\Big|_0^1-I_{n-1}=\dfrac{1}{n}-I_{n-1}$.

由此可得$I_{n-1}=\dfrac{1}{n-1}-I_{n-2}$.

将上两式相加得$I_n-I_{n-2}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}$，故$I_{n-2}-I_{n-4}=\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n-3}$ $\cdots I_3-I_1=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}$

累加可得$I_n-I_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-+\cdots+\dfrac{1}{n}$，又由$I_1=1-\ln 2$，故$I_n+\ln 2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

当$n\to\infty$时，$I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}, 0<\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}<\int_0^1 x^n dx$（两边夹定理），且$\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}$，当$n\to\infty$时，

$\dfrac{1}{n+1}\to 0$，故$I_n\to 0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}[1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-+\cdots+\dfrac{1}{n}]=\ln 2$.