第二章 矩阵代数

第三节 逆矩阵与矩阵的初等变换

上页 下页 返回

§ 2.3.1 逆矩阵

一、（概念的）引入

在数的运算中，当数 $a \neq 0$ 时，有

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$$

其中 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 为 a 的倒数，（或称 a 的逆）；

在矩阵的运算中，**单位阵 E 相当于数的乘法运算中的1**，那么，对于矩阵 A，如果存在一个矩阵 A^{-1}，使得

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

则矩阵 A^{-1} 也可类似称为 A 的可逆矩阵或逆阵.

二、逆矩阵的概念和性质

定义1 对于n阶矩阵A，如果有一个n阶矩阵B，使得

$$AB = BA = E,$$

则说矩阵A是可逆的，并把矩阵B称为A的逆矩阵.

A的逆矩阵记作 A^{-1}.

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$

$$\because AB = BA = E,$$

$\therefore B$是A的逆矩阵.

上页 下页 返回

?

n阶矩阵在逆矩阵存在时，其逆矩阵**唯一吗**？

具备**什么条件**时，是可逆阵？

可逆时**如何求**其逆矩阵？

先来看：

若n阶矩阵A可逆，设B和C都是A的逆矩阵，则有

$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E,$$

可得 $B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C.$

所以 A的逆矩阵是唯一的. 即 $B=C=A^{-1}$.

定理1 若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是**唯一**的.

由于 $A^{-1}A = AA^{-1} = E$，可知A^{-1}可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

解决了第一个问题.

上页 下页 返回

例1 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求A的逆矩阵.

利用待定系数法

解: 设 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是A的逆矩阵,

则 $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + c = 1, \\ 2b + d = 0, \\ -a = 0, \\ -b = 1, \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = -1, \\ c = 1, \\ d = 2. \end{cases}$$

又因为

$$\overset{AB}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} = \overset{BA}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

新问题：对于高阶方阵待定系数法求取逆矩阵显然是不可行的.

上页 下页 返回

对一个方阵，引入伴随矩阵的概念

定义2 行列式 $|A|$ 各元的代数余子式 A_{ij} 所构成如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的**伴随矩阵**.

注意：A^* 中**元素排列顺序**.

例2 求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

解: $A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,$

同理可得 $A_{13}=2,\ A_{21}=6,\ A_{22}=-6,\ A_{23}=2,$

$A_{31}=-4,\ A_{32}=5,\ A_{33}=-2,$

得 $$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}.$$

定理2 矩阵A可逆的充要条件是 $|A|\neq 0$，且当A可逆时

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*},$$

其中A^{*}为矩阵A的伴随矩阵.

证明：

必要性

若A 可逆，即有 A^{-1}使得 $A A^{-1}=E$.

故$|A|\cdot|A^{-1}|=|E|=1,$ 所以$|A|\neq 0.$

充分性

当 $|A| \neq 0$ 时,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = |A|$$

$$a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \cdots + a_{nn}A_{nn} = |A|$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & & & O \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ O & & & |A| \end{pmatrix},$$

类似可得 $A^*A=|A|E.$

因此，$AA^*=A^*A=|A|E \Rightarrow A\dfrac{A^*}{|A|}=\dfrac{A^*}{|A|}A=E,$

按逆矩阵的定义得 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}.$ 证毕.

解决了第二、三个问题.

补：奇异矩阵与非奇异矩阵的定义

当$|A|=0$时，A称为**奇异矩阵**，当$|A|\neq0$时称为**非奇异矩阵**.

由此得：A是可逆矩阵$\Leftrightarrow A$为非奇异矩阵.

另外，也称$|A|=0$的方阵为**退化矩阵（降秩矩阵）**，$|A|\neq0$的方阵为**非退化矩阵（满秩矩阵）**.

上页 下页 返回

例3 方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 可逆吗？若可逆求其逆矩阵.

解: $\because\ |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0,\ \therefore\ A^{-1}$存在.

前面已经得到: $A^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}.$

故

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3/2&-3&5/2\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

伴随矩阵法求逆矩阵

推论 设A、B为n阶矩阵，若$AB=E$（或$BA=E$）成立，则$B=A^{-1}$.

证明: $|A|\cdot|B|=|E|=1$, 故$|A|\neq 0$,

因而A^{-1}存在, 于是

$$B=EB=\left(A^{-1}A\right)B=A^{-1}(AB)$$

$$=A^{-1}E=A^{-1}$$

证毕

逆矩阵的运算性质

(1) 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(2) 若A可逆,数$\lambda\neq 0$,则λA可逆,且 $(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.

(3)若A，B为同阶方阵且都可逆，则AB也可逆，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

定理3

证明：$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}$

$$=AEA^{-1}=AA^{-1}=E,$$

$$\therefore (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

推广 $(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$

其中 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 皆为n阶可逆矩阵.

(4) 当$|A|\neq 0$时，定义 $A^{-k}=(A^{-1})^k$. (k为正整数)

注意，对于方阵A有，$A^0=E$.

当$|A|\neq 0$, λ,μ为整数时，有

$$A^{\lambda}A^{\mu}=A^{\lambda+\mu},\qquad \left(A^{\lambda}\right)^{\mu}=A^{\lambda\mu}.$$

(5) 若A可逆，则有$\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}$.

证明：　$\because AA^{-1}=E$

$\therefore |A|\left|A^{-1}\right|=1$

因此 $\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}$.

另外，对于**任意方阵（无论是否可逆）**，有

$$AA^{*}=A^{*}A=|A|E.$$

定理4 设A是n阶可逆矩阵，那么对任意$B=B_{n\times m}$ (或$B=B_{m\times n}$)，矩阵方程

$$AX=B\quad（或XA=B）$$

有**唯一解** $X=A^{-1}B$ (或$X=BA^{-1}$).

证：由于A可逆，用其逆矩阵A^{-1}左乘方程$AX=B$得 $A^{-1}AX=A^{-1}B$. 得到$X=A^{-1}B$为方程的解.

再证解的唯一性：若方程还有另一解$C=C_{n\times m}$，即$AC=B$，则

$$C=EC=(A^{-1}A)C=A^{-1}(AC)=A^{-1}B=X$$

故$X=A^{-1}B$为唯一解。

特殊情况：当B为列向量时，得到Cramer规则（克拉默、克莱姆）.

定理5（克莱姆规则）n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

的系数行列式 $D=|A|=|a_{ij}|\neq 0$ 时，存在唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的**常数列代替**后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$j = 1, 2, \cdots, n$$

显然：
$$D_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}$$

其中 A_{ij} $(i=1,2,\ldots,n)$ 是 a_{ij} 在 D 中的代数余子式.

上页 下页 返回

证：方程组表为矩阵形式 $AX=b$，由于$|A|\neq 0$，知A为可逆矩阵，由上面定理知(1)有唯一解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X = A^{-1}b = \frac{1}{|A|}A^*b = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn} \end{pmatrix}$$

比较等式两边得

$$x_j = \frac{1}{|A|}(b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}) = \frac{1}{|A|}D_j = \frac{D_j}{D}. \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

注意:

(1) 用克莱姆法则解方程组的两个条件

(a) 方程个数等于未知量个数;

(b) 系数行列式不等于零.

(2) 克莱姆规则建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系.

综合例题

例1 设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$. 证明:A, $A+2E$ 都可逆, 并求它们的逆阵.

证明: （注意：A是已知矩阵，所求矩阵要用A表示）

$$由A^2-A-2E=0,$$

A^{-1}

$$得A(A-E)=2E \Rightarrow A\frac{A-E}{2}=E$$

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E).$$

又由$A^2-A-2E=0$

$$\Rightarrow (A+2E)(A-3E)+4E=0$$

$$\Rightarrow (A+2E)\left[-\frac{1}{4}(A-3E)\right]=E$$

$(A+2E)^{-1}$

故$A+2E$可逆.

且$(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3E)=\frac{3E-A}{4}.$

说明:

(1) 不能由(A－2E)(A+E)=O得到　A+2E=O 或 A+E=O.

(2)另外A^2=A+2E也可以得到A+2E的逆阵.

例2　解矩阵方程　(1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

(2) $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

方程两端同时左乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$,

得 $\overbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}}^{E} X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -28 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

上页 下页 返回

$$(2)\ X\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\2 & 0 & 4\\0 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

方程两端同时右乘矩阵 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$，

得 $$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\2 & 0 & 4\\0 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 9 & -5 \\ -2 & -8 & 6 \\ -4 & -14 & 9 \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

方程两端同时左乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$,

两端再同时右乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$,

得 $$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -75 & 30 \\ 9 & 52 & -21 \\ 21 & 120 & -47 \end{pmatrix}.$$

例3 若可逆矩阵A与矩阵B可交换，试证A^{-1}与B也可交换.

证明：已知条件 $AB = BA$，$AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

故 $A^{-1}B = A^{-1}BE = A^{-1}BAA^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1}$

$= A^{-1}(AB)A^{-1} = (A^{-1}A)BA^{-1}$

$= EBA^{-1} = BA^{-1}$

即 $A^{-1}B = BA^{-1}$，

由此知A^{-1}与B也可交换.

例4 设 A 是可逆矩阵，试证

(1) A^* 可逆，且 $(A^*)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A$;

(2) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

证：(1) 由 A 可逆知 $|A| \neq 0$，又有 $AA^* = |A|E$

得到 $\dfrac{1}{|A|}AA^* = E$. 即 $(\dfrac{1}{|A|}A)A^* = E$,

所以 A^* 可逆，且 $(A^*)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A.$

(2) 由伴随矩阵的定义，可知

$$A^*A = |A|E, \quad (A^{-1})(A^{-1})^* = |A^{-1}|E$$

故 $A^*A(A^{-1})(A^{-1})^* = |A|E|A^{-1}|E$

于是 $A^*(A^{-1})^* = E$, 因此 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

例5 设三阶矩阵 A, B 满足

$$A^{-1}BA = 6A + BA, \text{且} A = \begin{pmatrix} 1/2 & & O \\ & 1/4 & \\ O & & 1/7 \end{pmatrix} \text{求} B.$$

解: $A^{-1}BA - BA = 6A$

$$\Rightarrow \left(A^{-1} - E\right)BA = 6A \Rightarrow \left(A^{-1} - E\right)B = 6E$$

$$\Rightarrow B = 6\left(A^{-1} - E\right)^{-1}.$$

上页 下页 返回

$$B = 6\left(A^{-1} - E\right)^{-1}$$

$$= 6\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$= 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

小结

1. 逆矩阵的概念及运算性质.

2. 逆矩阵 A^{-1} 存在 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$.

3. 逆矩阵的计算方法

(1)待定系数法;

(2)伴随矩阵法 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$;

(3)初等变换法(下一节介绍).

4. *Cramer*法则的结论.

练习题

1. 设$A^k = O$，k是某一个自然数（这时称A为**幂零矩阵**，使$A^k = O$成立的最小正整数k称为A的**幂零指数**），试证：$E-A$可逆，且

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

2. 证明：若A，B为同阶可逆矩阵，则

$$(AB)^* = B^* A^*.$$

练习题解答

1. 设$A^k = O$，k是某一个自然数（这时称A为**幂零矩阵**，使$A^k = O$成立的最小正整数k称为A的**幂零指数**），试证：$E-A$可逆，且

$$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

证明：

$$(E-A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})$$
$$= (E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) - (A + A^2 + \cdots + A^{k-1} + A^k)$$
$$= E - A^k$$
$$= E$$

故 $E-A$可逆，且 $(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$

2. 证明：若*A*，*B*为同阶可逆矩阵，则

$$(AB)^* = B^* A^*.$$

证： 因为*A*，*B*为同阶可逆矩阵，故

$$|AB| = |A||B| \neq 0$$

即*AB*可逆. 从而

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}(AB)^*$$

故：

$$\begin{aligned}(AB)^* &= |AB|(AB)^{-1} \\ &= |A||B|B^{-1}A^{-1} \\ &= (|B|B^{-1})(|A|A^{-1}) \\ &= B^* A^*\end{aligned}$$