

IMD0033 - Probabilidade

Aula 17 - Regras de probabilidade e variáveis aleatórias

Ivanovitch Silva
Novembro, 2017



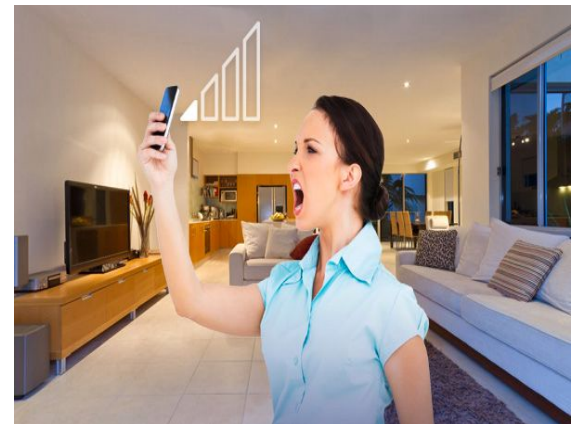
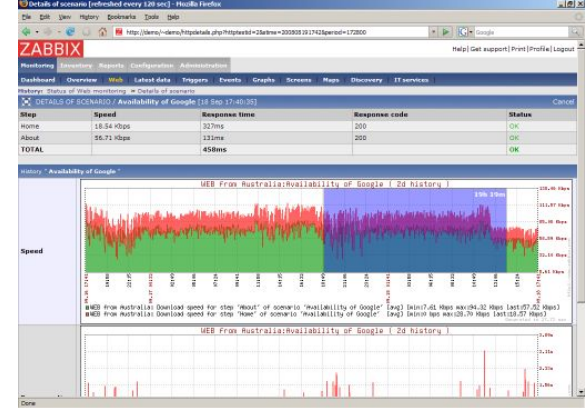
Agenda

- Motivação
- Principais definições
- Regras da probabilidade
- Variáveis aleatórias
 - PMF, PDF e CDF
- Referências

Introdução

- Comportamento dinâmico dos sistemas são representados por **variáveis estocásticas**
 - Taxa de perda de pacotes
 - Atraso
 - Confiabilidade do sistema
 - Taxa de falhas dos equipamentos

Modelagem estocástica (variáveis aleatórias e funções de distribuições)



Principais definições

Experimento aleatório (random experiment)

É um experimento que pode ser repetido diversas vezes considerando as mesmas condições iniciais.



Shaker



Envelhecimento



Choque Térmico



Salt-Spray Corrosão Acelerada

Principais definições

Amostra (single outcome)

É o resultado de um experimento aleatório específico (também chamado de evento)



Choque Térmico

Após um choque térmico de um $\Delta = 80^\circ$ o componente sofreu um defeito?

Principais definições

Espaço amostral (sample space)

É o conjunto de todas as amostras de um experimento aleatório específico



Choque Térmico

$\Delta = 80^\circ$ - Houve defeito?
(sim,não)

Exemplo

Assuma uma variável aleatória P (quantidade de pacotes que chegam no gateway a cada minuto)

Espaço amostral

$$S = \overset{A}{\underset{B}{\{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (0,2), (1,2), (2,2), (3,2)\}}}$$

Dispositivo A
 $T_x = 3 \text{ pkt/min}$

Dispositivo B
 $T_x = 2 \text{ pkt/min}$



Representação - Espaço amostral

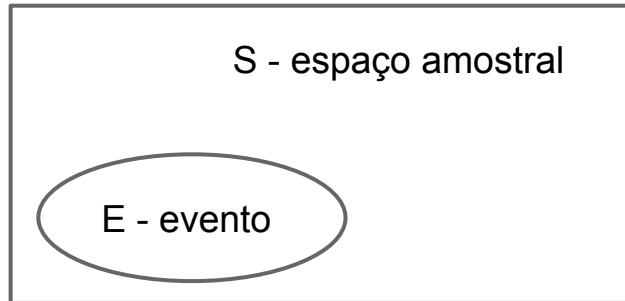
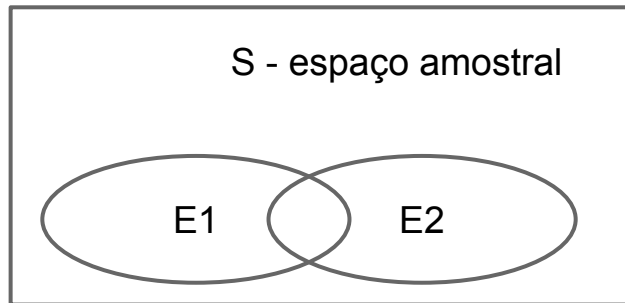
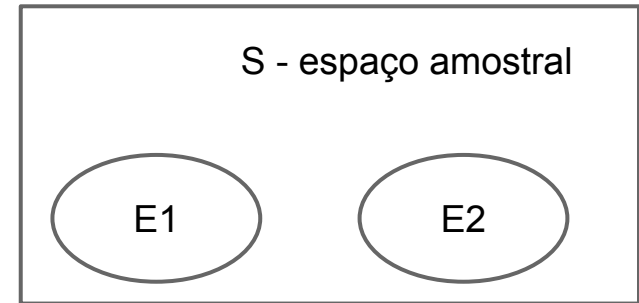


Diagrama de Venn



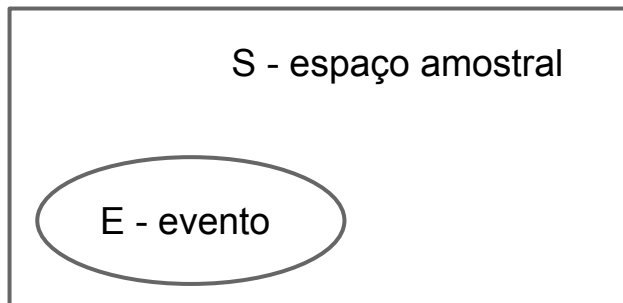
E1 - dispositivo A envia pelo menos 2 pacotes e o dispositivo B envia pelo menos 1 pacote
E2 - a soma de pacotes enviados é menor que 2



E1 e E2 são mutuamente exclusivos ou disjuntos

E1 - dispositivo A envia mais pacotes que o dispositivo B
E2 - dispositivo B envia pelo menos 1 pacote

Definição de probabilidade



- Assuma **S** ser o espaço amostral de um experimento aleatório.
- Para cada evento **E** do espaço amostral, nós assumimos que um número **Pr(E)** é definido e satisfaz:

1. $0 \leq \text{Pr}(E) \leq 1$
2. $\text{Pr}(S) = 1$
3. Para qualquer sequência de eventos E_1, E_2, \dots que são mutuamente exclusivos

$$\text{Pr} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{Pr}(E_i)$$

Regras básicas

Complemento (probability of complementary events)

$$\Pr(E^*) = 1 - \Pr(E)$$

Regra da soma (addition rule of probability)

$$\Pr(E_1 \cup E_2) = \Pr(E_1) + \Pr(E_2) - \Pr(E_1 \cap E_2)$$

se E_1 e E_2 são mutuamente exclusivos:

$$\Pr(E_1 \cup E_2) = \Pr(E_1) + \Pr(E_2)$$

Regras básicas

Probabilidade condicional (conditional probability)

Estamos interessados em encontrar a probabilidade do evento E_2 dado que o evento E_1 ocorreu.

$$\Pr(E_2 | E_1) = \frac{\Pr(E_1 \cap E_2)}{\Pr(E_1)}$$

Note que o espaço amostral não é mais S e sim E_1 . Dado que E_1 ocorreu, estamos interessado na proporção relativa de E_2

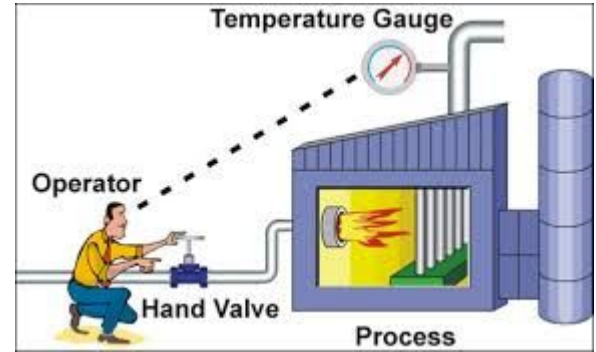
Regras básicas

Probabilidade Condicional

Dado que está chovendo, qual a probabilidade de um pacote de dados ser perdido?

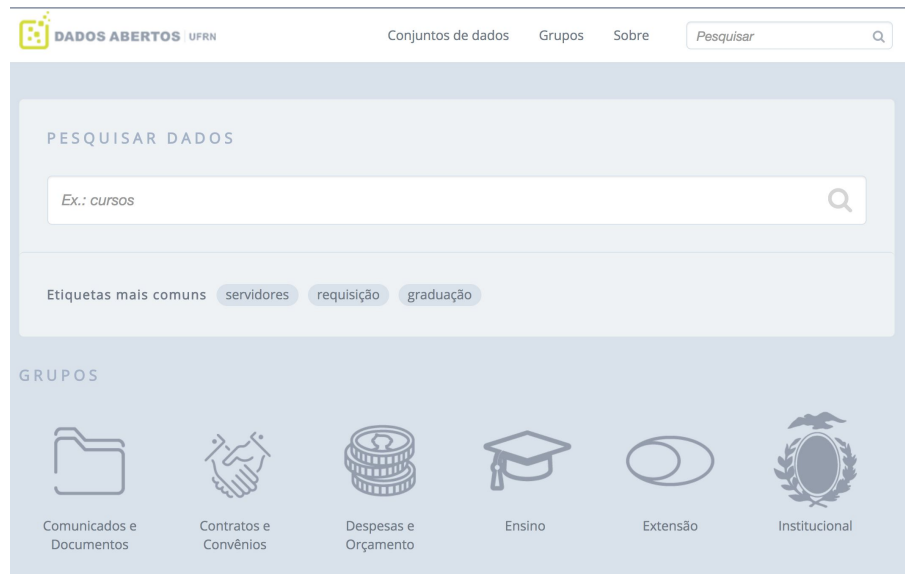


Dado que o operador colocou o controle em modo manual, qual a probabilidade de falha do sistema?



Regras básicas

Probabilidade Condicional



Dado que um aluno tirou uma nota maior que 5 (cinco) na primeira unidade de IMD0033, qual a probabilidade dele passar no componente curricular?

Regras básicas

Regra do produto (product rule of probability)

Apenas uma derivação da regra condicional

$$\Pr(E_2 | E_1) = \frac{\Pr(E_1 \cap E_2)}{\Pr(E_1)}$$



$$\Pr(E_1 \cap E_2) = \Pr(E_2 | E_1) \cdot \Pr(E_1) = \Pr(E_1 | E_2) \cdot \Pr(E_2)$$

Regras básicas

Eventos independentes (independent events)

Dois eventos E_1 e E_2 são ditos independentes se a ocorrência de um não contribui para a ocorrência do outro.

$$\Pr(E_2 | E_1) = \Pr(E_2) \quad \text{ou} \quad \Pr(E_1 | E_2) = \Pr(E_1)$$



$$\Pr(E_1 \cap E_2) = \Pr(E_2 | E_1) \cdot \Pr(E_1) \quad \text{Regra do produto}$$



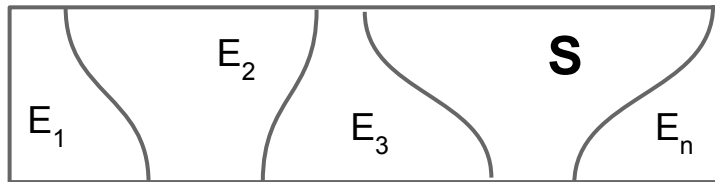
$$\Pr(E_1 \cap E_2) = \Pr(E_2) \cdot \Pr(E_1)$$

Regras básicas

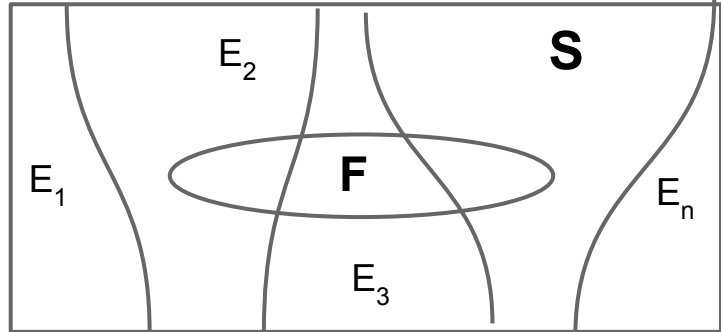
Partição do espaço amostral (partition of the sample space)

Uma coleção de eventos E_1, E_2, \dots, E_n em um espaço amostral S é dito ser uma **partição** de S se E_1, E_2, \dots, E_n são mutuamente exclusivos e

$$S = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \dots \cup E_n$$



Regras básicas

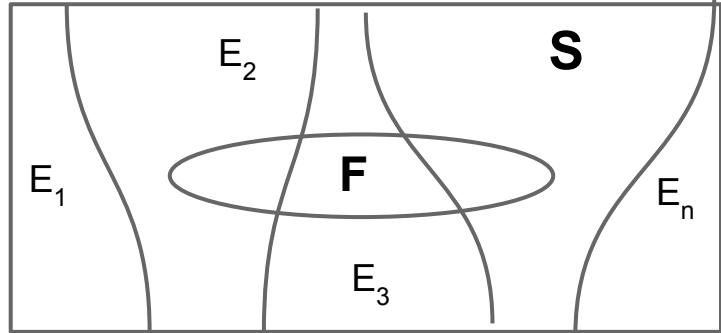


Lei da Probabilidade Total (law of total probability)

Seja F um evento do espaço amostral S , e E_1, E_2, \dots, E_n uma partição de S , podemos calcular a probabilidade de F da seguinte forma:

$$\Pr(F) = \sum_{i=1}^n \Pr(F \cap E_i) = \sum_{i=1}^n \Pr(F | E_i) \cdot \Pr(E_i)$$

Regras básicas



Fórmula de Bayes (Bayes formula)

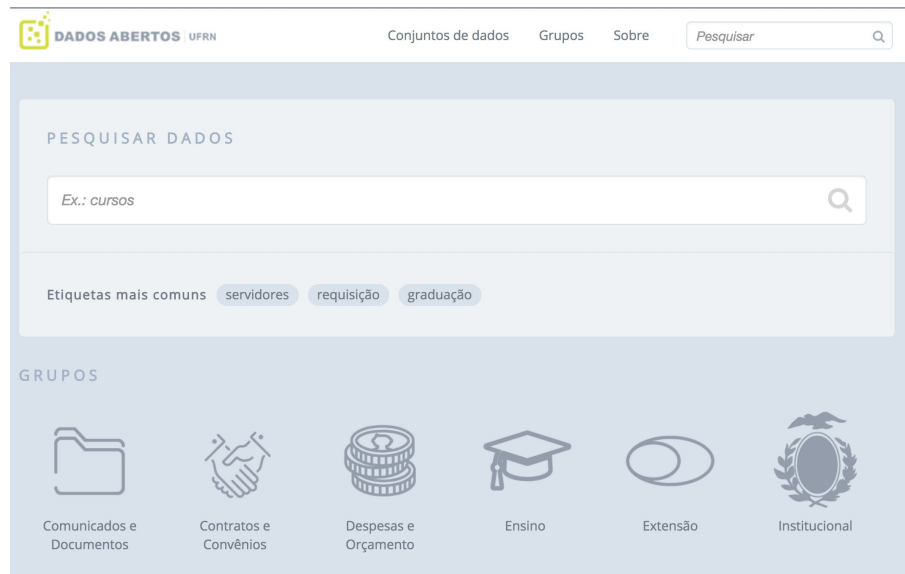
A lei da probabilidade total nos diz que:

$$\Pr(F) = \sum_{i=0}^n \Pr(F \cap E_i) = \sum_{i=0}^n \Pr(F | E_i) \cdot \Pr(E_i)$$

$$\Pr(E_j | F) = \frac{\Pr(F \cap E_j)}{\Pr(F)} = \frac{\Pr(F \cap E_j)}{\sum_{i=0}^n \Pr(F \cap E_i)} = \frac{\Pr(F | E_j) \cdot \Pr(E_j)}{\sum_{i=0}^n \Pr(F | E_i) \cdot \Pr(E_i)}$$

Regras básicas

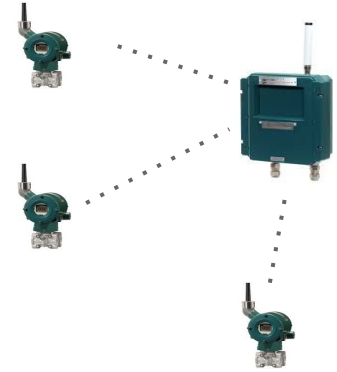
Teorema de Bayes



Dado que um aluno tirou uma nota maior que 5 (cinco) na primeira unidade de IMD0033, qual a probabilidade dele passar no componente curricular?

Exemplo

Um gateway recebe dados de 3 equipamentos (E_1, E_2, E_3)
A proporção de pacotes gerados por equipamento é:
 $E_1 = 20\%$, $E_2 = 30\%$ e $E_3 = 50\%$.

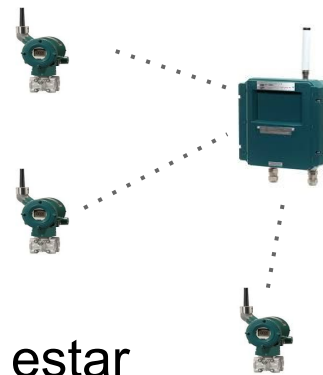


A fração de pacotes corrompidos é: $E_1 = 5\%$, $E_2 = 3\%$, $E_3 = 1\%$

Se um pacote é escolhido ao acaso, sabendo que o pacote está corrompido, qual a probabilidade de que o pacote tenha sido originado no equipamento E_3 ?

Exemplo - Solução

- Assuma E_i como sendo a probabilidade de um equipamento i ser escolhido aleatoriamente.
- Assuma C como sendo a probabilidade de um pacote estar corrompido



$$\Pr(E_1) = 0.20 \quad \Pr(E_2) = 0.30 \quad \Pr(E_3) = 0.50$$

As probabilidades condicionais $\Pr(C|E_i)$ já foram dadas pela questão

$$\Pr(C|E_1) = 0.05 \quad \Pr(C|E_2) = 0.03 \quad \Pr(C|E_3) = 0.01$$

Precisamos agora calcular C

$$\Pr(C) = \sum_i \Pr(C|E_i) \Pr(E_i) = 0.05 \times 0.20 + 0.03 \times 0.30 + 0.01 \times 0.50 = 0.024 = 2.4\%$$

Por fim

$$\Pr(E_3|C) = \Pr(C|E_3) \times \Pr(E_3) / \Pr(C) = 0.01 \times 0.50 / 0.024 = 0.2083 = 20.83\%$$

Variável Aleatória (random variable)

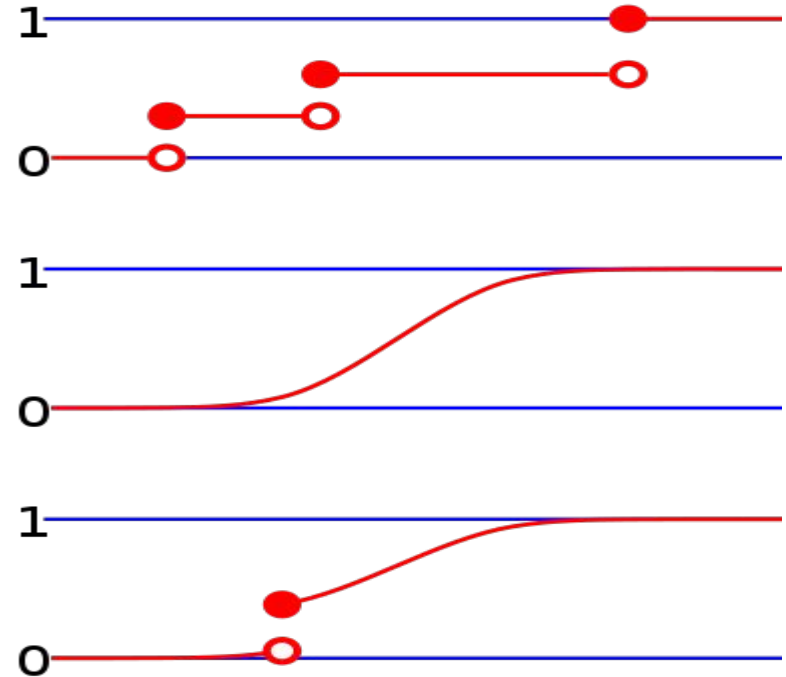
Uma variável aleatória é uma função que faz o mapeamento de cada elemento de um espaço amostral para um número real.

1. Jogar uma moeda. $S = \{0, 1\}$
2. Busca de um elemento no banco de dados. $S = \{0, 1\}$
3. Tempo gasto para identificar se um item está ou não localizado no banco de dados. $S = \{t \mid t > 0\}$
4. Observar quanto tempo um sistema fica operacional após um reboot. $S = \{t \mid t > 0\}$

Em geral uma variável X é usada para representar a variável aleatória enquanto que um x é usado para representar o seu valor.

Variável Aleatória (random variable)

- Discretas (discrete)
- Contínuas (continuous)
- Misturadas (mixed) - não é discreta tampouco contínua



Variável Aleatória - Representação

Discretas	PMF	CDF
Contínua	PDF	CDF

Função Massa de Probabilidade (Probability Mass Function - PMF)

Função Densidade de Probabilidade (Probability Density Function - PDF)

Função Distribuição Acumulada (Cumulative Distribution Function - CDF)

Função massa de probabilidade (PMF)

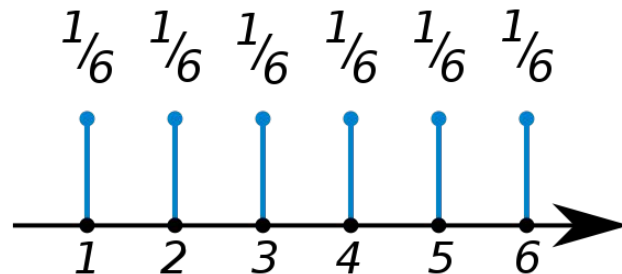
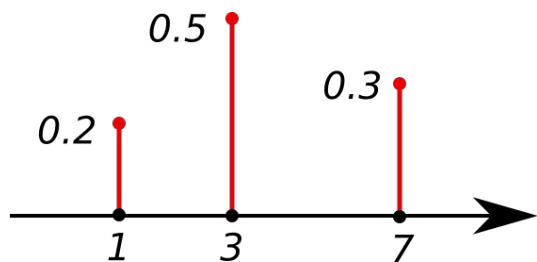
PMF é uma função que nos informa a probabilidade de que uma variável aleatória tenha exatamente um determinado valor.

$$p_X(x) = P(X = x)$$

$$0 \leq p_X(x) \leq 1$$

$$\sum p_X(x) = 1$$

Variáveis Aleatórias
Discretas



Função distribuição acumulada (CDF)

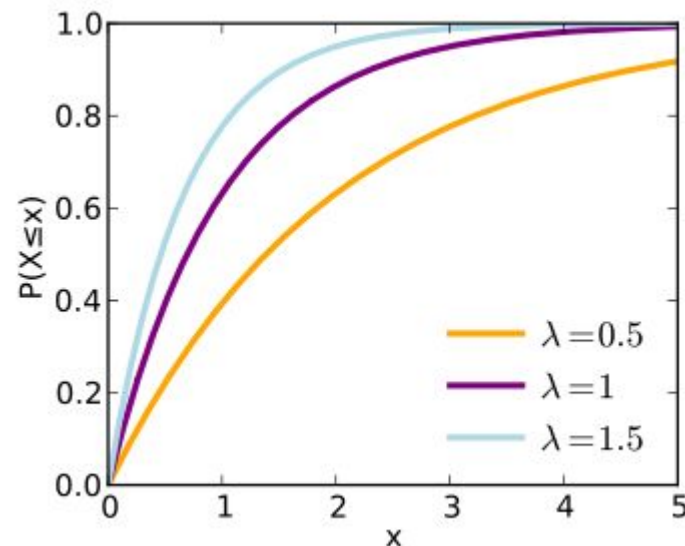
A função distribuição acumulada de uma variável aleatória X , representada em geral por F_X , é definida por:

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad -\infty < x < \infty$$

Propriedades importantes

$$(P1) \quad 0 \leq F_X(x) \leq 1, \quad -\infty < x < \infty$$

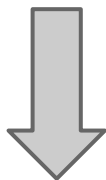
$$(P2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$$



Função densidade de prob. (PDF)

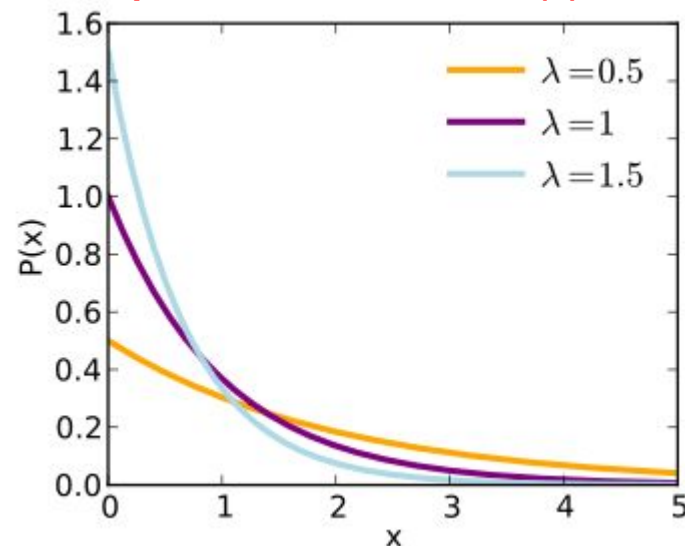
Para uma variável aleatória contínua, X , a função densidade de probabilidade de X é definida como:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$



$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt, \quad -\infty < x < \infty$$

Note que $f(x)$ não é uma probabilidade, assim, $f(x) > 1$



Referências

- Trivedi, Kishor. *Probability & Statistics with Reliability, Queuing and Computer Science Applications*. 2nd Edition. Wiley, 2002. Cap. 2 and 3.
- Rausand, Marvin. *Reliability of Safety-Critical Systems - Theory and Applications*. Wiley, 2014. Appendix A.