IMD0033 - Probabilidade

Aula 17 - Regras de probabilidade e variáveis aleatórias

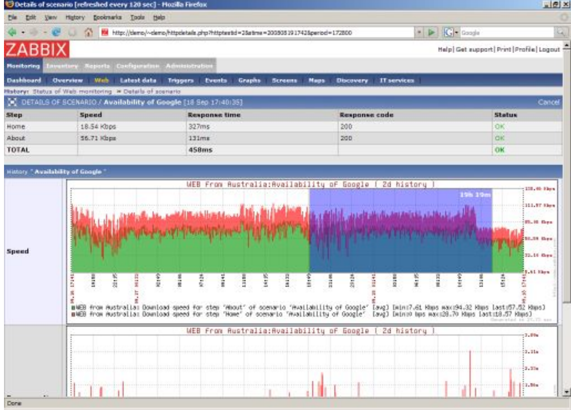
Ivanovitch Silva

Novembro, 2017

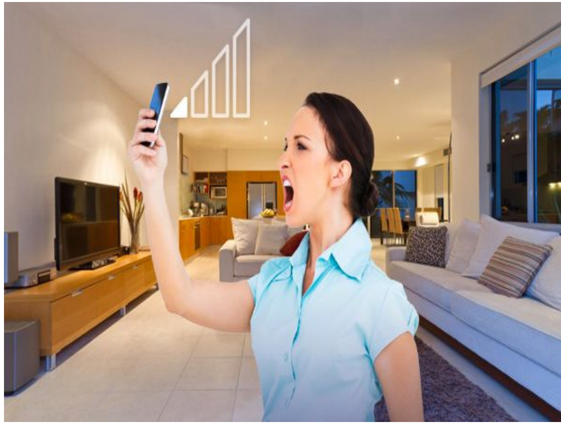
Agenda

- Motivação
- Principais definições
- Regras da probabilidade
- Variáveis aleatórias
  - PMF, PDF e CDF
- Referências

Introdução



- Comportamento dinâmico dos sistemas são representados por **variáveis estocásticas**
  - Taxa de perda de pacotes
  - Atraso
  - Confiabilidade do sistema
  - Taxa de falhas dos equipamentos



Modelagem estocástica (<u>variáveis aleatórias e funções de distribuições</u>)

Principais definições

Shaker

Experimento aleatório (random experiment)

É um experimento que pode ser repetido diversas vezes considerando <u>as mesmas condições iniciais.</u>

Envelhecimento

Choque Térmico

Salt-Spray Corrosão Acelerada

Principais definições

Amostra (single outcome)

É o resultado de um experimento aleatório específico (também chamado de <u>evento</u>)

Choque Térmico

Após um choque térmico de um Δ = 80º o componente sofreu um defeito?

Principais definições

Espaço amostral (sample space)

É o conjunto de todas as amostras de um experimento aleatório específico

Choque Térmico

$\Delta = 80^{o}$ - Houve defeito?
(sim,não)

Exemplo

Assuma uma variável aleatória P (quantidade de pacotes que chegam no gateway a cada minuto)

Dispositivo A
Tx = 3pkt/min

Dispositivo B
Tx = 2 pkt/min

Espaço amostral

A B

S = {(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(0,1),(1,1),

(2,1),(3,1),(0,2),(1,2),(2,2),(3,2)}

Representação - Espaço amostral

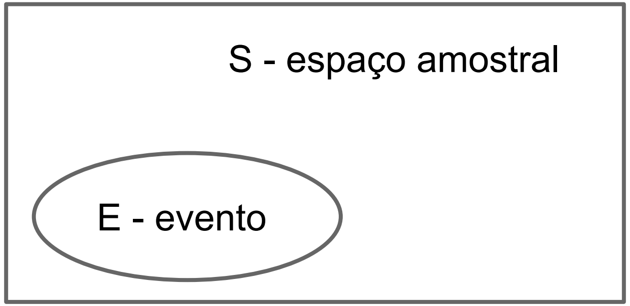
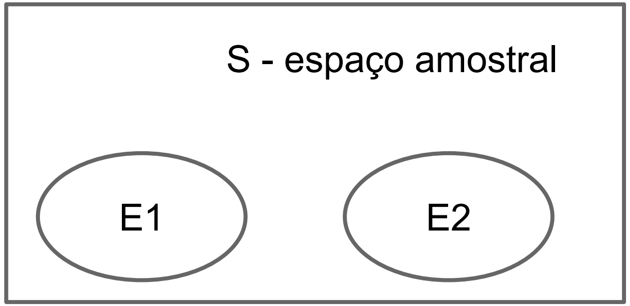
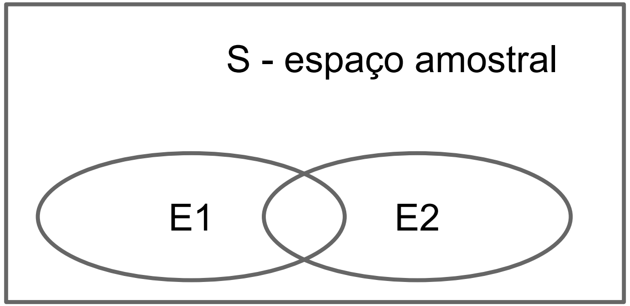


Diagrama de Venn

E1 - dispositivo A envia pelo menos 2 pacotes e
o dispositivo B envia pelo menos 1 pacote
E2 - a soma de pacotes enviados é menor que 2

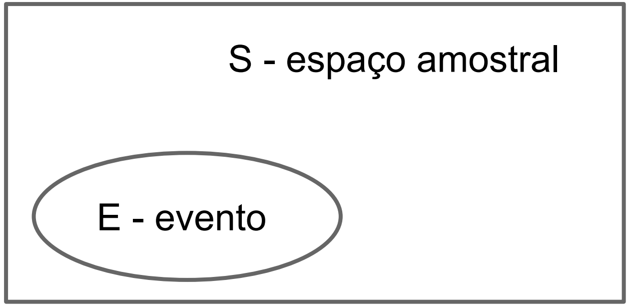


E1 e E2 são mutualmente exclusivos ou disjuntos



E1 - dispositivo A envia mais pacotes que o dispositivo B
E2 - dispositivo B envia pelo menos 1 pacote

Definição de probabilidade



- Assuma **S** ser o espaço amostral de um experimento aleatório.
- Para cada evento **E** do espaço amostral, nós assumimos que um número **Pr(E)** é definido e satisfaz:

1. $0 \leq Pr(E) \leq 1$
2. $Pr(S) = 1$
3. Para qualquer sequência de eventos E1, E2, … que são mutualmente exclusivos

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Ei\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(Ei)$$

Regras básicas

Complemento (probability of complementary events)

$Pr(E^*) = 1 - Pr(E)$

Regra da soma (addition rule of probability)

$Pr(E_1 \cup E_2) = Pr(E_1) + Pr(E_2) - Pr(E_1 \cap E_2)$

se E_1 e E_2 são mutualmente exclusivo:

$Pr(E_1 \cup E_2) = Pr(E_1) + Pr(E_2)$

Regras básicas

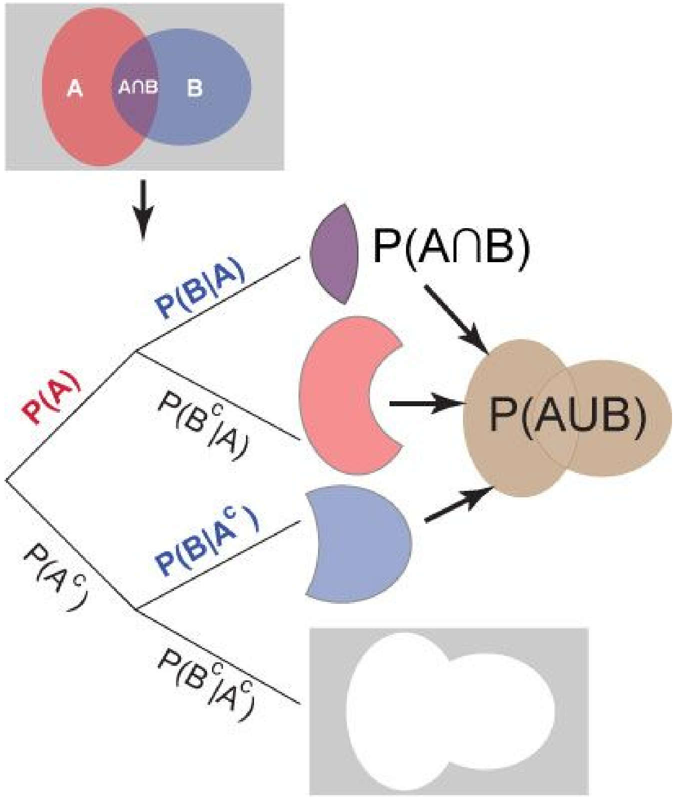
Probabilidade condicional (conditional probability)

Estamos interessados em encontrar a probabilidade do evento E_2 dado que o evento E_1 ocorreu.

$$\Pr(E_2 \mid E_1) = \frac{\Pr(E_1 \cap E_2)}{\Pr(E_1)}$$

Note que o espaço amostral não é mais S e sim E_1. Dado que E_1 ocorreu, estamos interessado na proporção relativa de E_2

Regras básicas



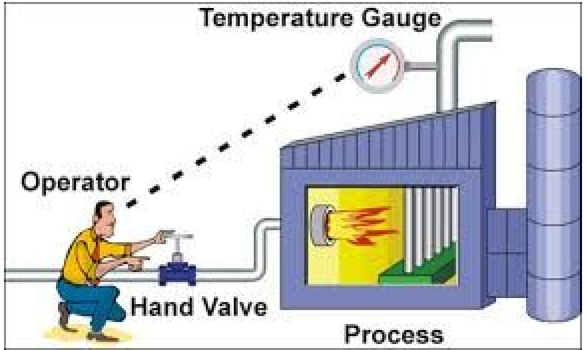
$$P(B|A) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(A)}$$

Regras básicas

Probabilidade Condicional

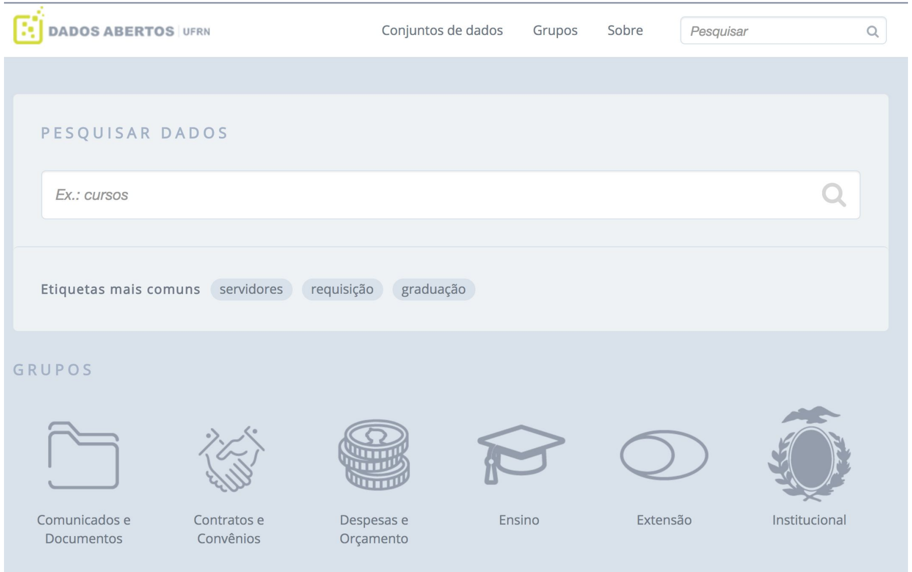
Dado que está chovendo, qual a probabilidade de um pacote de dados ser perdido?

Dado que o operador colocou o controle em modo manual, qual a probabilidade de falha do sistema?



Regras básicas

Probabilidade Condicional



Dado que um aluno tirou uma nota maior que 5 (cinco) na primeira unidade de IMD0033, qual a probabilidade dele passar no componente curricular?

Regras básicas

Regra do produto (product rule of probability)

Apenas uma derivação da regra condicional

$$\Pr(E_2 \mid E_1) = \frac{\Pr(E_1 \cap E_2)}{\Pr(E_1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\Pr(E_1 \cap E_2) = \Pr(E_2 \mid E_1) \cdot \Pr(E_1) = \Pr(E_1 \mid E_2) \cdot \Pr(E_2)$$

Regras básicas

Eventos independentes (independent events)

Dois eventos E_1 e E_2 são ditos independentes se a ocorrência de um não contribui para a ocorrência do outro.

$$\Pr(E_2 \mid E_1) = \Pr(E_2) \quad \text{ou} \quad \Pr(E_1 \mid E_2) = \Pr(E_1)$$

$$\Downarrow$$

$$\Pr(E_1 \cap E_2) = \Pr(E_2 \mid E_1) \cdot \Pr(E_1)$$ Regra do produto

$$\Downarrow$$

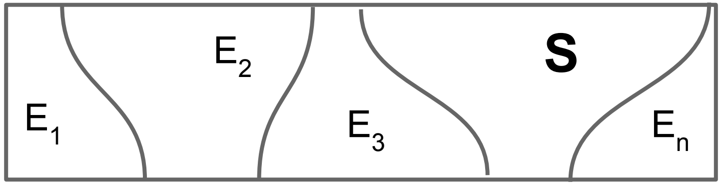
$$\Pr(E_1 \cap E_2) = \Pr(E_2) \cdot \Pr(E_1)$$

Regras básicas

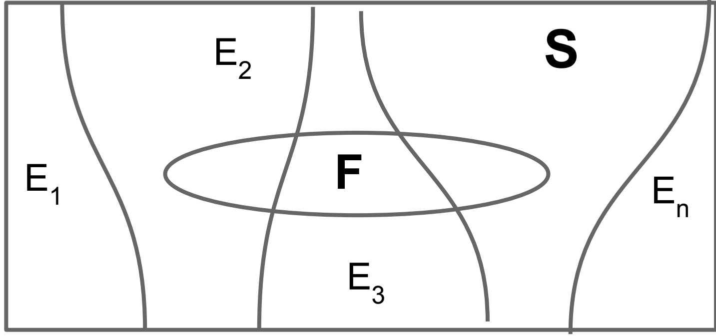
Partição do espaço amostral (partition of the sample space)

Uma coleção de eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ em um espaço amostral S é dito ser uma partição de S se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ são mutualmente exclusivo e

$$S = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \ldots \cup E_n$$



Regras básicas

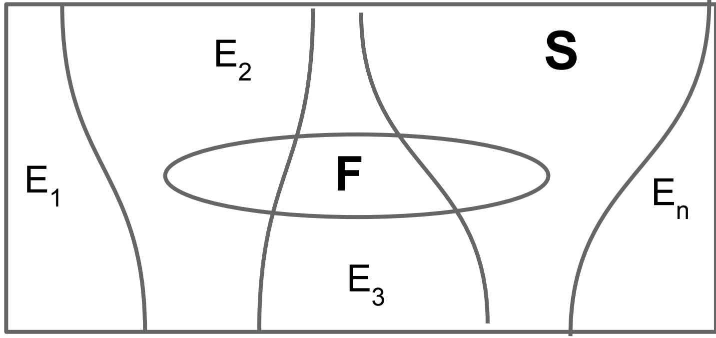


Lei da Probabilidade Total (law of total probability)

Seja F um evento do espaço amostral S, e E_1, E_2, …, E_n uma partição de S, podemos calcular a probabilidade de F da seguinte forma:

$$\Pr(F) = \sum_{i=0}^{n} \Pr(F \cap E_i) = \sum_{i=0}^{n} \Pr(F \mid E_i) \cdot \Pr(E_i)$$

Regras básicas



Fórmula de Bayes (Bayes formula)

A lei da probabilidade total nos diz que:

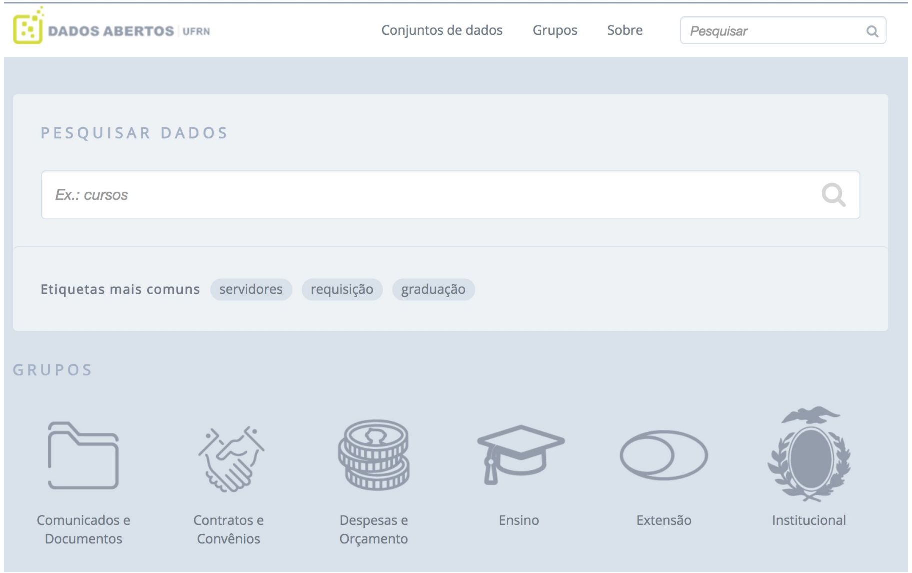
$$\Pr(F) = \sum_{i=0}^{n} \Pr(F \cap E_i) = \sum_{i=0}^{n} \Pr(F \mid E_i) \cdot \Pr(E_i)$$

$$\Pr(E_j \mid F) = \frac{\Pr(F \cap E_j)}{\Pr(F)} = \frac{\Pr(F \cap E_j)}{\sum_{i=0}^{n} \Pr(F \cap E_i)} = \frac{\Pr(F \mid E_j) \cdot \Pr(E_j)}{\sum_{i=0}^{n} \Pr(F \mid E_i) \cdot \Pr(E_i)}$$

Teorema de Bayes

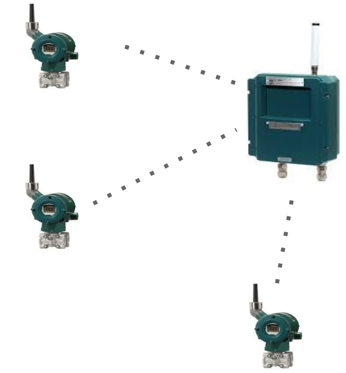
Ajuda a atualizar a nossa hipótese baseado em uma nova evidência.

Regras básicas
Teorema de Bayes



Dado que um aluno tirou uma nota maior que 5 (cinco) na primeira unidade de IMD0033, qual a probabilidade dele passar no componente curricular?

Exemplo

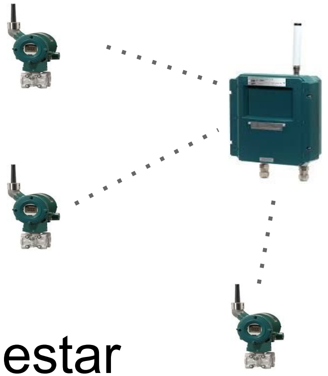


Um gateway recebe dados de 3 equipamentos (E_1,E_2,E_3)
A proporção de pacotes gerados por equipamento é:
E_1 = 20%, E_2 = 30% e E_3 = 50%.

A fração de pacotes corrompidos é: E_1 = 5%, E_2=3%, E_3=1%

Se um pacote é escolhido ao acaso, sabendo que o pacote está corrompido, qual a probabilidade de que o pacote tenha sido originado no equipamento E_3?

Exemplo - Solução



- Assuma E_i como sendo a probabilidade de um equipamento i ser escolhido aleatoriamente.
- Assuma C como sendo a probabilidade de um pacote estar corrompido

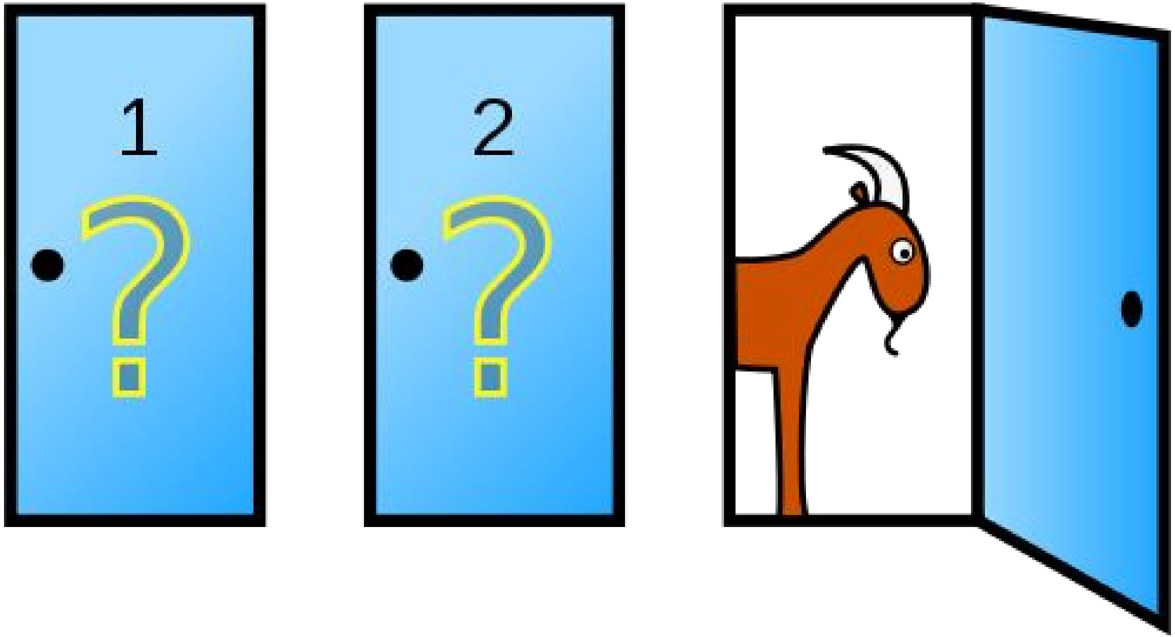
$Pr(E_1) = 0.20 \quad Pr(E_2) = 0.30 \quad Pr(E_3) = 0.50$

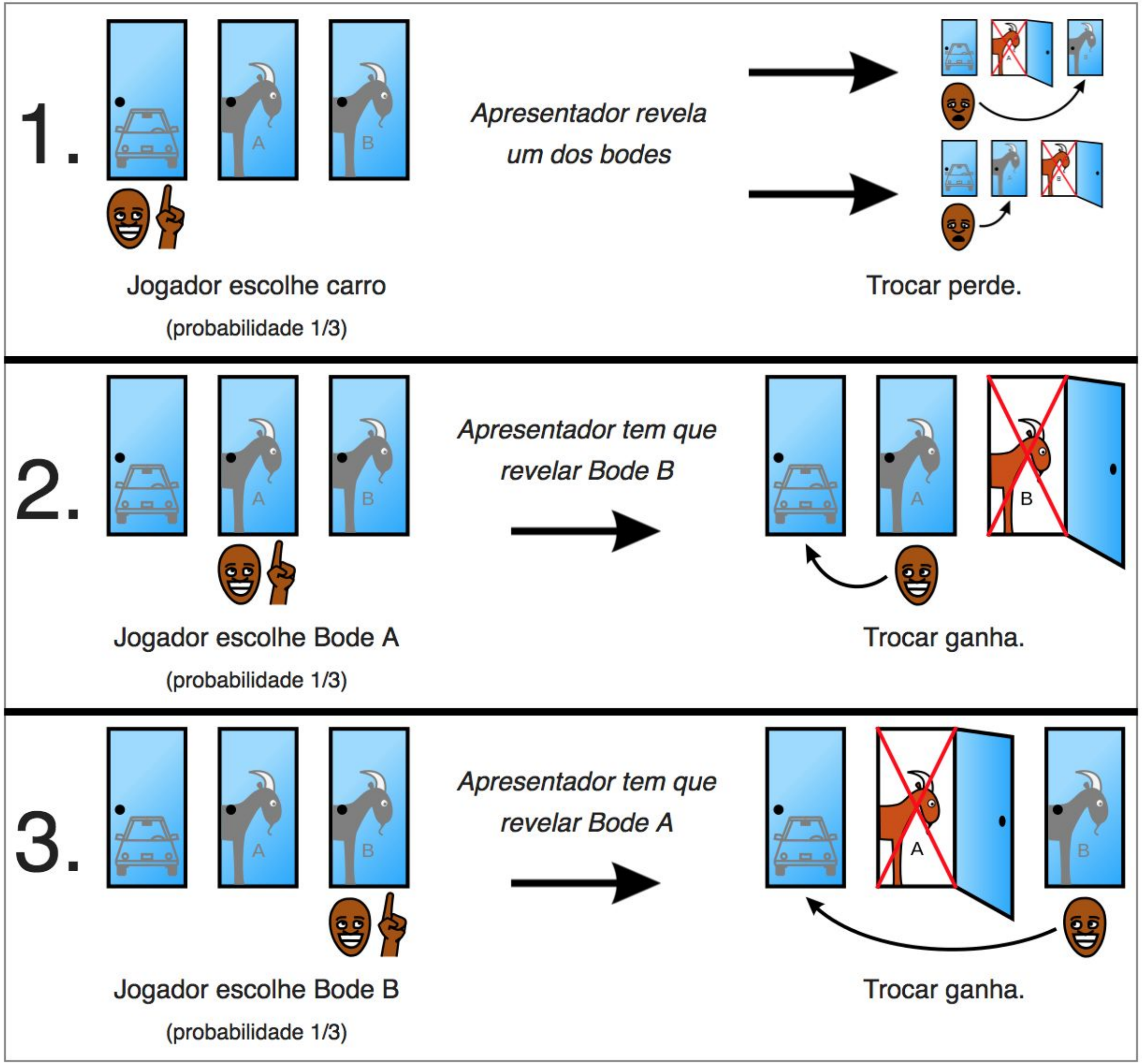
As probabilidades condicionais $Pr(C|E_i)$ já foram dadas pela questão
$Pr(C|E_1) = 0.05 \quad Pr(C|E_2) = 0.03 \quad Pr(C|E_3) = 0.01$

Precisamos agora calcular C
$Pr(C) = \sum_i Pr(C|E_i)\, Pr(E_i) = 0.05x0.20 + 0.03x0.30 + 0.01x0.50 = 0.024 = 2.4\%$

Por fim
$Pr(E_3|C) = Pr(C|E_3) \times Pr(E_3) / Pr(C) = 0.01 \times 0.50 / 0.024 = 0.2083 = 20.83\%$

Paradoxo de Monty Hall




1.
A
B
Apresentador revela
um dos bodes
Jogador escolhe carro
(probabilidade 1/3)
Trocar perde.
2.
A
B
Apresentador tem que
revelar Bode B
A
B
Jogador escolhe Bode A
(probabilidade 1/3)
Trocar ganha.
3.
A
B
Apresentador tem que
revelar Bode A
A
B
Jogador escolhe Bode B
(probabilidade 1/3)
Trocar ganha.

Variável Aleatória (random variable)

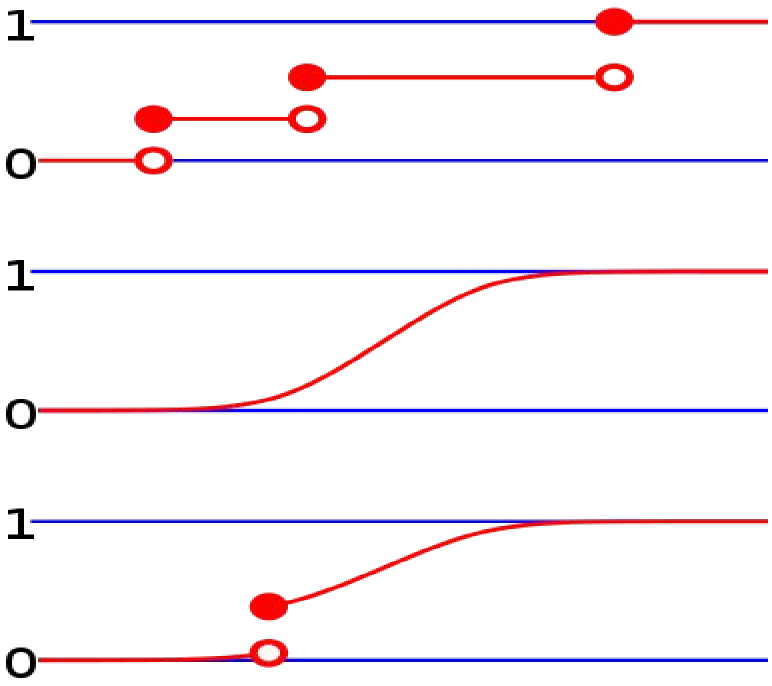
Uma variável aleatória é uma função que faz o mapeamento de cada elemento de um espaço amostral para um número real.

1. Jogar uma moeda. S = {0,1}
2. Busca de um elemento no banco de dados. S = {0,1}
3. Tempo gasto para identificar se um item está ou não localizado no banco de dados. $S = \{t \mid t > 0\}$
4. Observar quanto tempo um sistema fica operacional após um reboot. $S = \{t \mid > 0\}$

Em geral uma variável X é usada para representar a variável aleatória enquanto que um x é usado para representar o seu valor.

Variável Aleatória (random variable)

- Discretas (discrete)
- Contínuas (continuous)
- Misturadas (mixed) - não é discreta tampouco contínua



Variável Aleatória - Representação

Discretas	PMF	CDF
Contínua	PDF	CDF

Função Massa de Probabilidade (Probability Mass Function - PMF)
Função Densidade de Probabilidade (Probability Density Function - PDF)
Função Distribuição Acumulada (Cumulative Distribution Function - CDF)

Função massa de probabilidade (PMF)

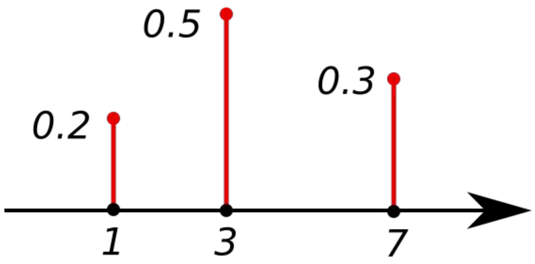
PMF é uma função que nos informa a probabilidade de que uma variável aleatória tenha exatamente um determinado valor.

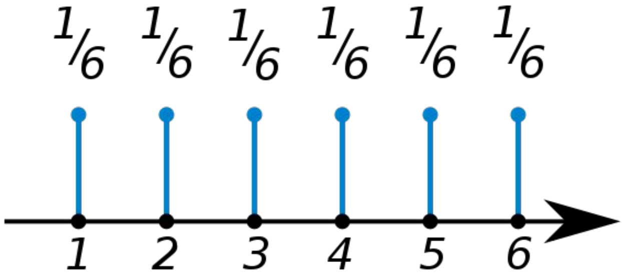
$$p_X(x) = P(X = x)$$

$$0 \leq p_X(x) \leq 1$$

$$\sum p_X(x) = 1$$

Variáveis Aleatórias Discretas

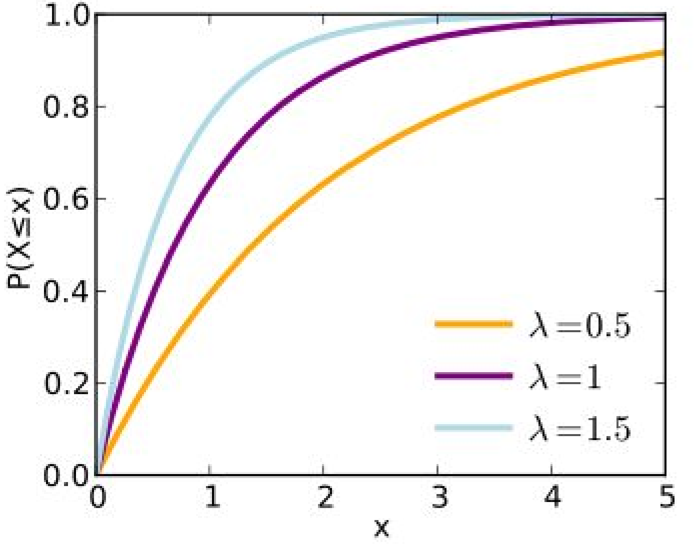




Função distribuição acumulada (CDF)

A função distribuição acumulada de uma variável aleatória X, representada em geral por F_X, é definida por:

$$F_X(\mathrm{x}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{x}), \quad -\infty < \mathrm{x} < \infty$$



Propriedades importantes

$$(P1)\ 0 \leq F_X(x) \leq 1, \quad -\infty < x < \infty$$
$$(P2)\ \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0 \ e \ \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$$

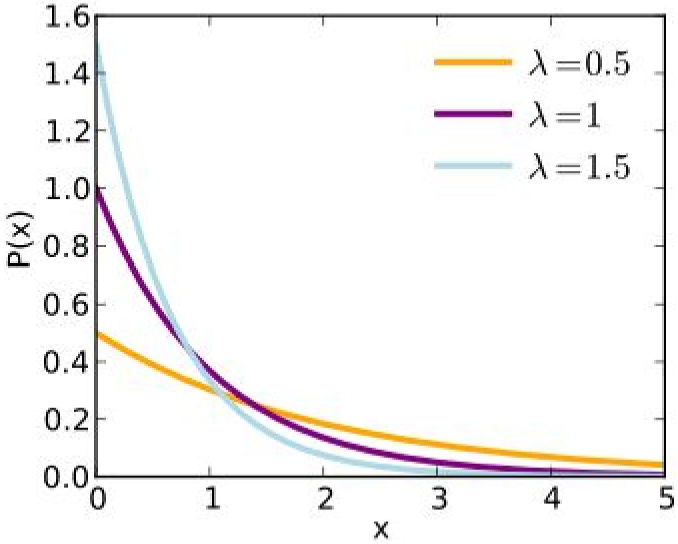
Função densidade de prob. (PDF)

Para uma variável aleatória contínua, X, a função densidade de probabilidade de X é definida como:

Note que f(x) não é uma probabilidade, assim, f(x) > 1

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \quad -\infty < x < \infty$$



Referências

- Trivedi, Kishor. *Probability & Statistics with Reliability, Queuing and Computer Science Applications.* 2nd Edition. Wiley, 2002. Cap. 2 and 3.
- Rausand, Marvin. *Reliability of Saftety-Critical Systems - Theory and Applications*. Wiley, 2014. Appendix A.