UFRN
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

IMD INSTITUTO METRÓPOLE DIGITAL

IMD0033 - Probabilidade
Aula 19 - Distribuições discretas II

Ivanovitch Silva
Novembro, 2017

Agenda

1. Distribuição Poisson
2. Distribuição Hipergeométrica

Distribuição de Poisson

A **Distribuição de Poisson** expressa a probabilidade de um número de ocorrências de um evento aleatório em um período de tempo (área ou volume).

1) As condições do experimento são constantes. Taxa média de ocorrência $\rightarrow \lambda$.
2) A informação sobre ocorrências em um período é independente de outro período qualquer
3) $X \sim Pois(\lambda)$

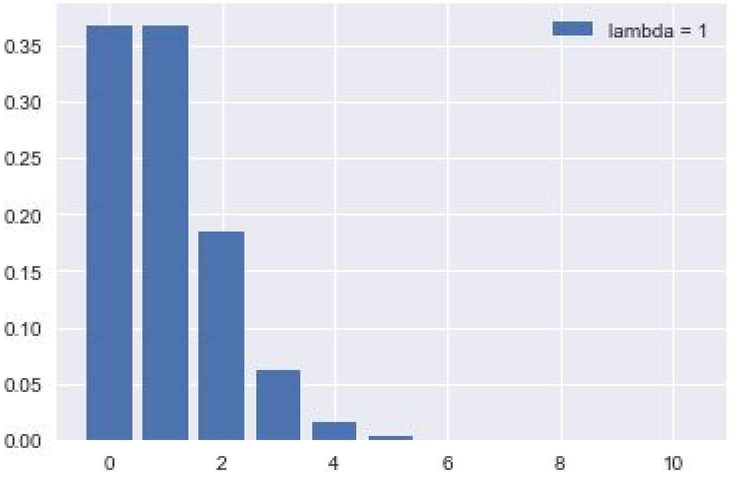
Distribuição de Poisson - Exemplos

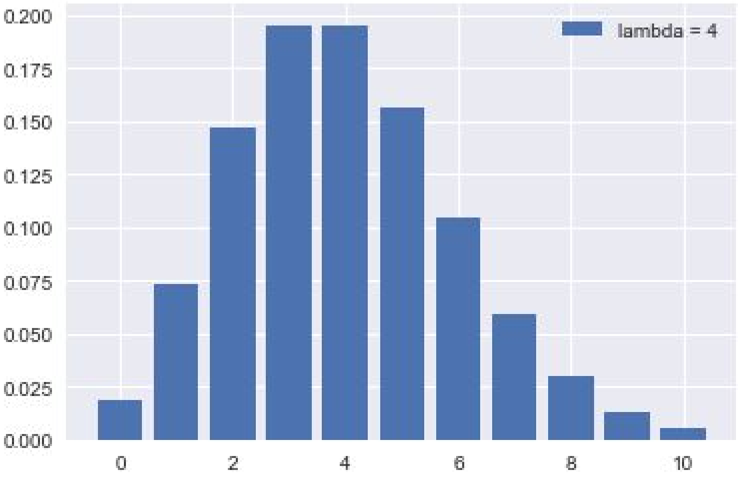
1) O número de chamadas telefônicas que chegam a uma central em um intervalo de 1min
2) O número de mutações em uma cadeia de DNA após o contato com uma certa quantidade de radiação
3) Medir a probabilidade que k componentes não estejam funcionando corretamente dentro de um intervalo de tempo t
4) O número de vezes que um servidor web é acessado por minuto

Distribuição de Poisson

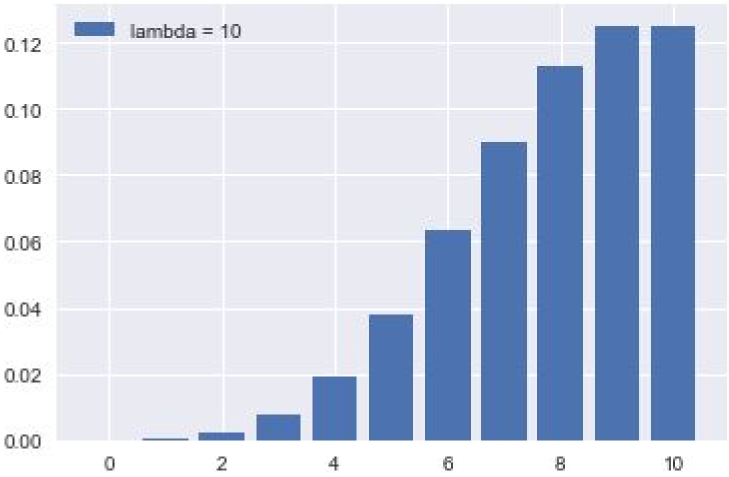
pmf $\Rightarrow$ $$\Pr(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

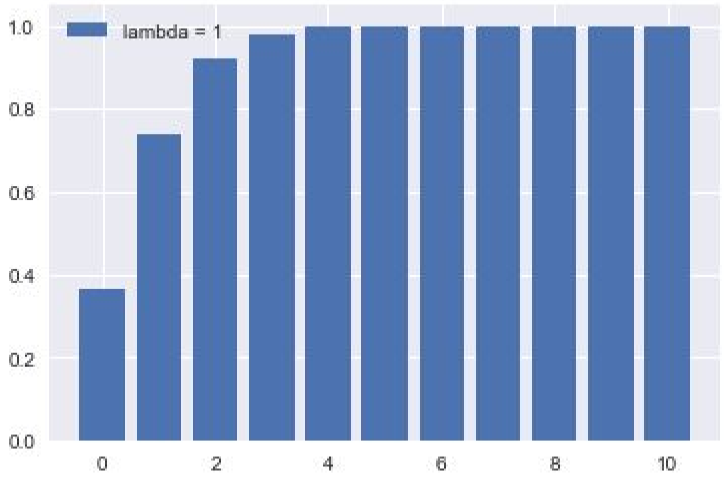
CDF $\Rightarrow$ $$\Pr(X \le k) = \sum_{i=0}^{\lfloor k \rfloor} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\lfloor k \rfloor} \frac{\lambda^i}{i!}$$

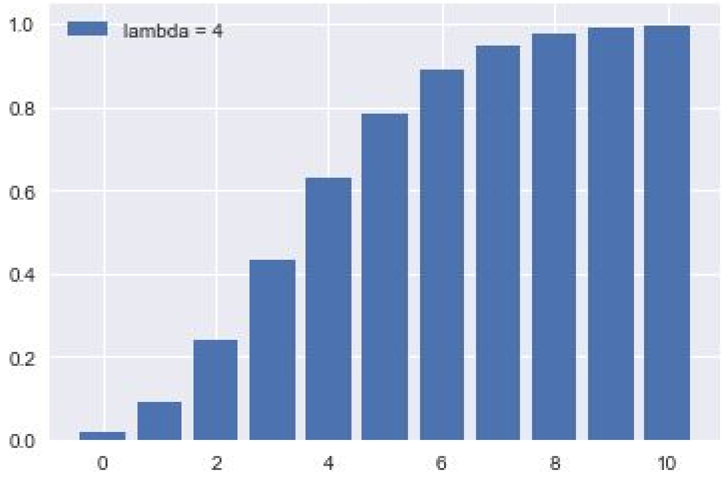

lambda = 1
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0
2
4
6
8
10


lambda = 4
0.200
0.175
0.150
0.125
0.100
0.075
0.050
0.025
0.000
0
2
4
6
8
10

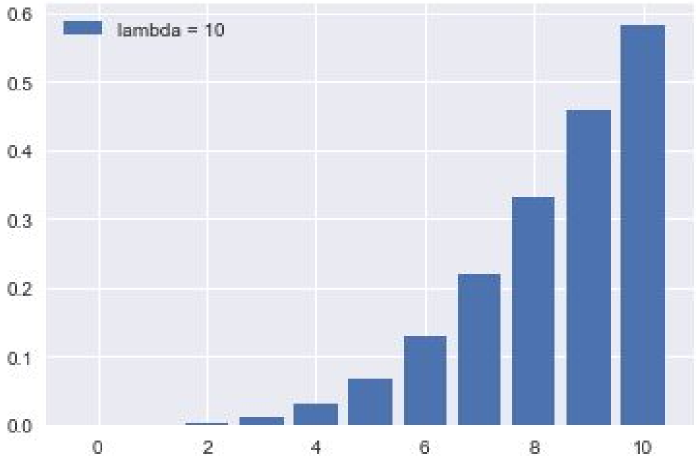
pmf


lambda = 10
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
0
2
4
6
8
10





cdf



Distribuição de Poisson - Exemplo

Na fabricação dos componentes eletrônicos de uma válvula industrial é esperado que uma falha ocorra a cada 5 anos x hora por componente. Dado que uma válvula foi escolhida aleatoriamente, qual a probabilidade de encontrarmos pelo menos 01 falha em seus componentes?

X~Pois(λ) → λ é 1/(43800)

$$\Pr(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X \geq 1) &= 1 - \Pr(X < 1) \\ &= 1 - \Pr(X = 0) \\ &= 1 - e^{-\lambda} \\ &= 2.283079e - 05 \\ &= 0.00002283079\end{aligned}$$

Distribuição Poisson - Aproximação

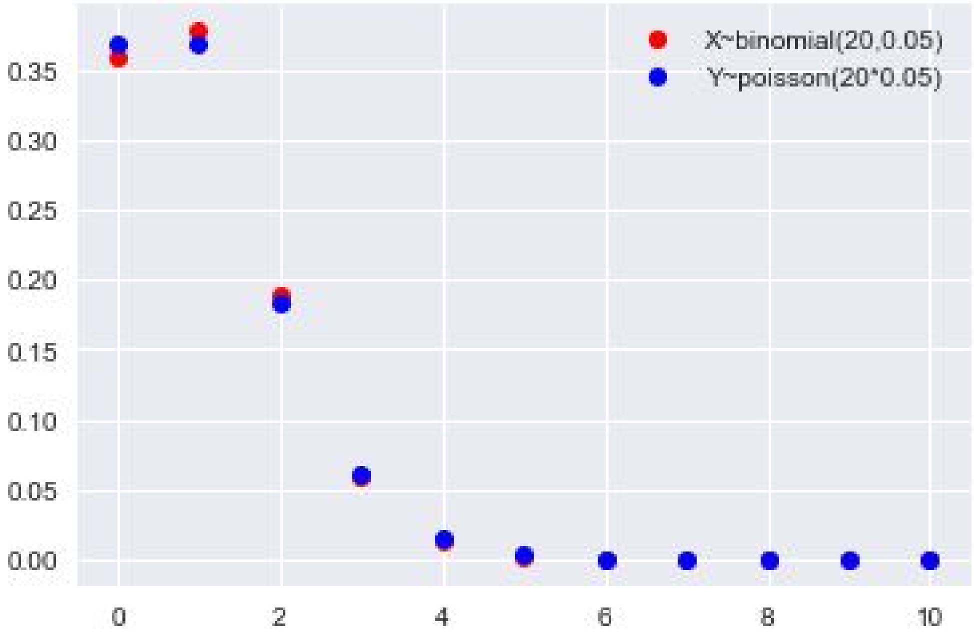
É possível provar [Ref 1] que a Poisson pmf pode ser usada como uma aproximação conveniente para a Binomial pmf quando *n* é muito grande e *p* é pequeno (n ≥ 20 e p ≤ 0.05)

$$X \sim Binomial(n,p) \approx Y \sim Pois(\lambda) \rightarrow \lambda = np$$

$$\begin{aligned} p_k &= P(Y_n = k) \\ &= p_{Y_n}(k) \\ &= \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & 0 \le k \le n \\ 0 & caso\ contrário \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Pr(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Distribuição Poisson - Aproximação



$$\lambda = np = 20 \, x \, 0.05 = 1$$

Distribuição Poisson - Aproximação

Em uma rede industrial sem fio foi verificado que a taxa de falhas na transmissão de um pacote é de 0.002%. Dado que 5000 pacotes foram transmitidos, qual a probabilidade que 2 pacotes tenham sido corrompidos?

Binomial(n,p) ~ Poisson(n · p)

Poisson (5000 x 0.00002)
Poisson (0.1, 2)

$$X \sim Binomial(5000, 0.00002)\ ?$$

$$\binom{5000}{2} 0.00002^2 (1 - 0.00002)^{4998}$$

$$\Pr(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Distribuição Hipergeométrica

Existem experimentos onde **a probabilidade de sucesso NÃO se mantém constante**. Em outras palavras, não é válido os ensaios de Bernoulli.

Em um lote de 100 chips sabe-se que há 5 chips defeituosos. Um possível cliente compra 4 chips. Qual a probabilidade de levar 2 chips defeituosos?

Existem 5 chips defeituosos e 95 em estado bom. A cada retirada/compra a probabilidade de levar um chip defeituoso é modificada.

Distribuição Hipergeométrica

Em um lote de 100 chips sabe-se que há 5 chips defeituosos. Um possível cliente compra 4 chips. Qual a probabilidade de levar 2 chips defeituosos?

As formas diferentes de selecionar 4 chips: $\binom{100}{4}$

As formas diferentes de selecionar 2 chips defeituosos: $\binom{5}{2}$

As formas diferentes de selecionar 2 chips em estado bom: $\binom{95}{2}$

A probabilidade de levar 2 chips defeituosos: $\dfrac{\binom{95}{2}\binom{5}{2}}{\binom{100}{4}}$

Distribuição Hipergeométrica

De uma maneira formal, a pmf da distribuição Hipergeométrica *hypergeom(k; n,d,m)* é definida como:

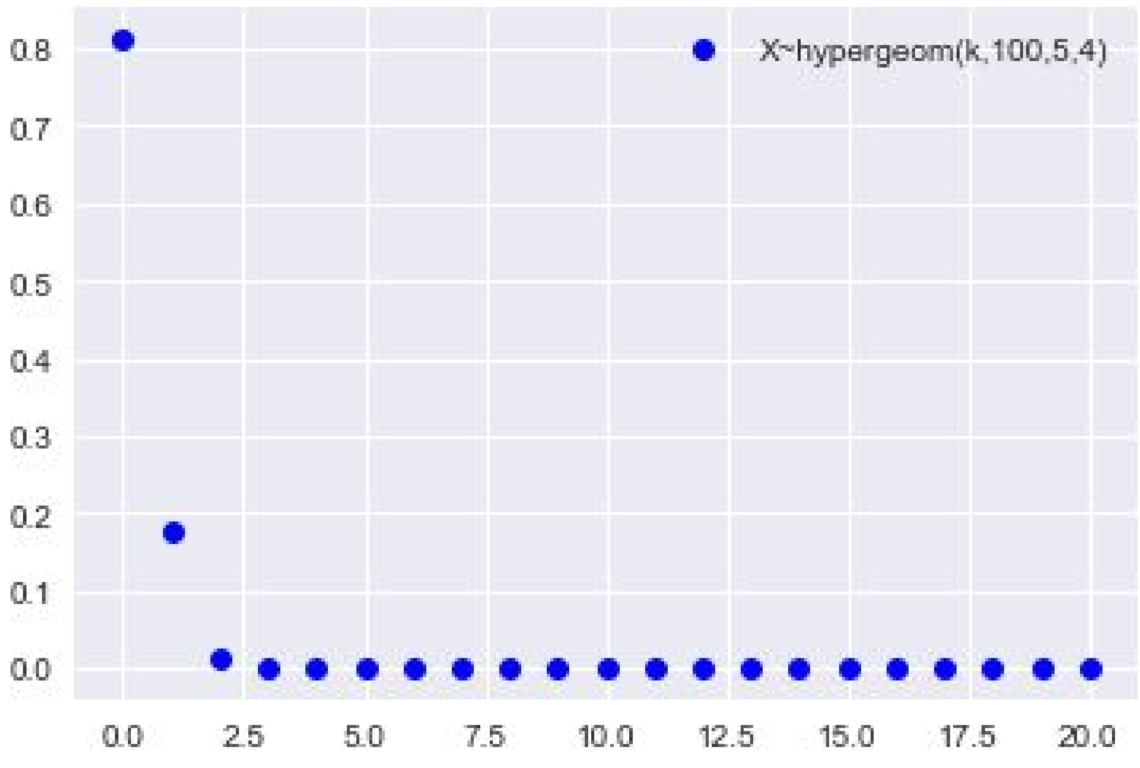
- probabilidade de ser escolhido k componentes defeituosos em um universo m de n componentes, sabendo que em n existem d componentes defeituosos.

pmf ⇨

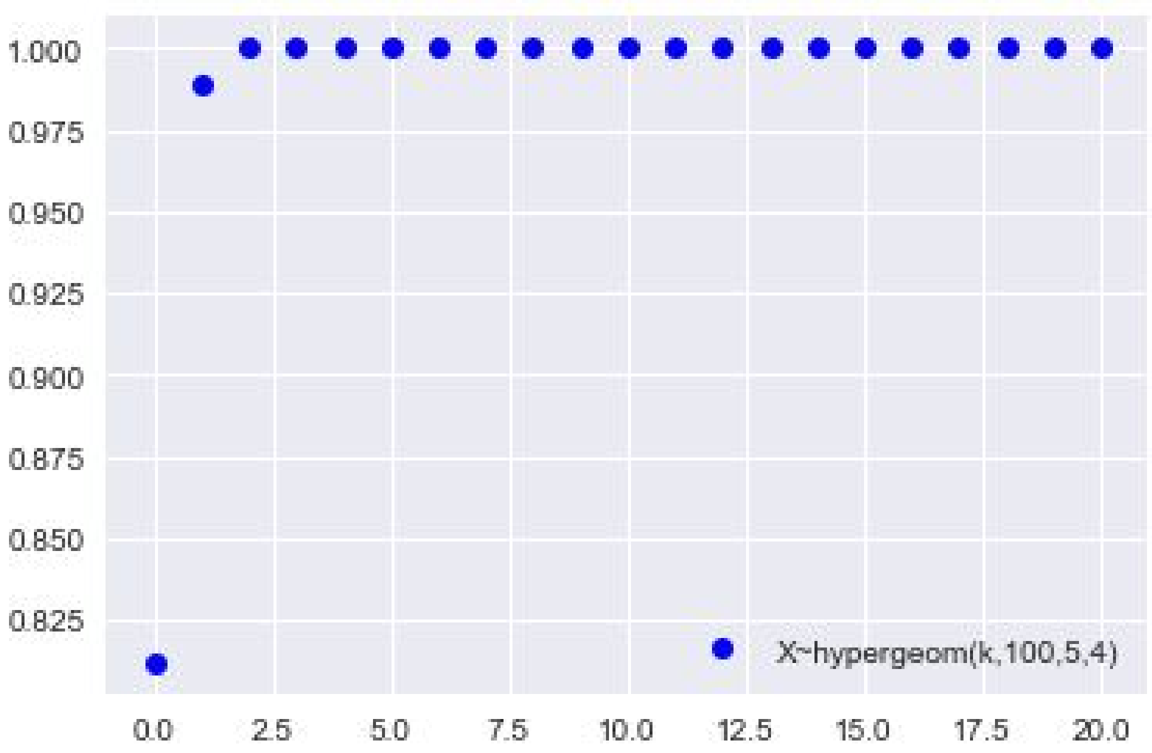
$$hypergeom(k; n, d, m) = \frac{\binom{d}{k} \times \binom{n-d}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

…. exemplo anterior hypergeom(2;100,5,4)

Distribuição Hipergeométrica - pmf



Distribuição Hipergeométrica - CDF



Referências

- Kishor S. Trivedi. Probabiliy & Statistics with Reliability, Queuing and Computer Science Applications. Cap 2.