IMD0033 - Probabilidade
Aula 20 - Distribuições Contínuas

Ivanovitch Silva

Novembro, 2017

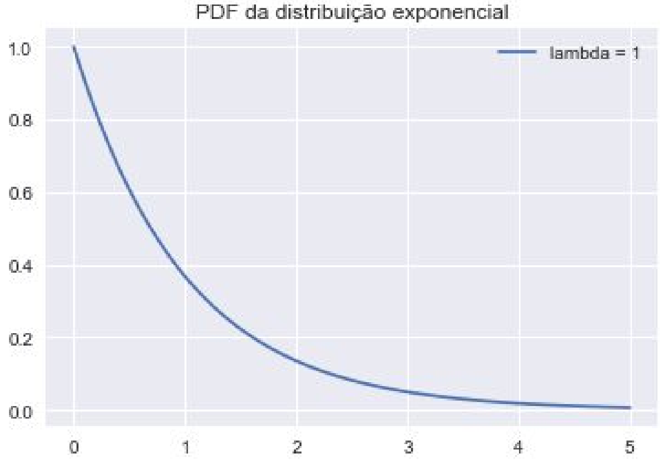
Agenda

- Distribuição Exponencial
- Distribuição Hypoexponencial
- Exemplos
  - Sistemas em série e paralelo
  - Redundância modular tripla

Distribuição exponencial

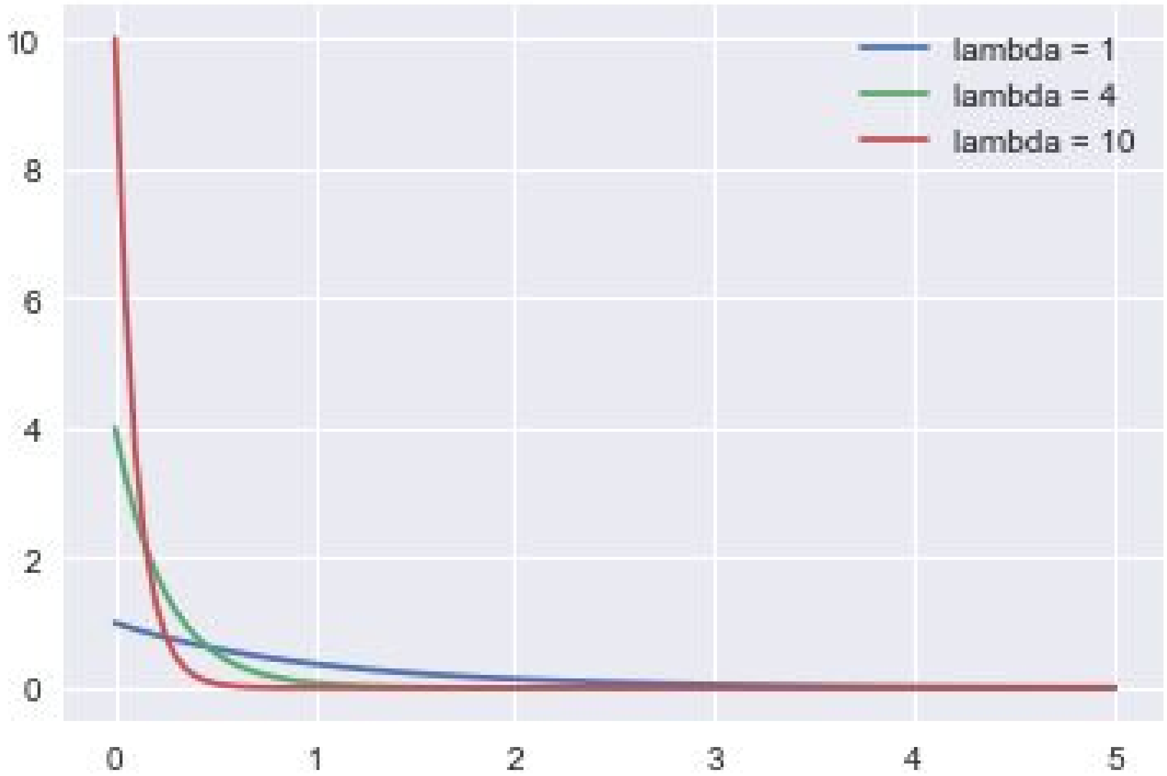
- Uma das distribuições mais fáceis de lidar devido sua simplicidade
  - Falhas de componentes eletrônicos, elétricos
  - Tempo de chegada das requisições em um servidor

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & x \geq 0 \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$



https://docs.scipy.org/doc/scipy-0.19.1/reference/generated/scipy.stats.expon.html

Distribuição exponencial



Distribuição exponencial

$$R(t) + F(t) = 1$$

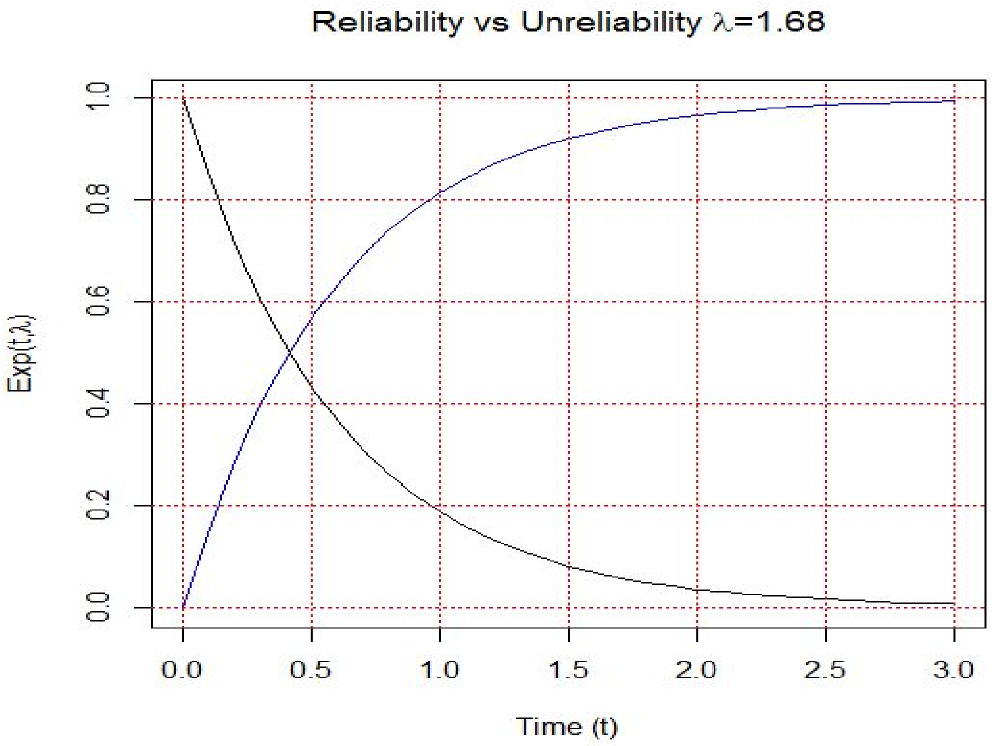
$$F(t) = \int_0^t f(x)dx$$

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$R(t) = 1 - F(t) \qquad R(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$$

Distribuição exponencial

Qual gráfico é a confiabilidade?



Distribuição exponencial

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}}$$

$$= \lambda$$

Taxa de falhas da distribuição exponencial é constante!!!

Distribuição exponencial

$$MTTF = \int_0^{\infty} tf(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt = \lambda \int_0^{\infty} te^{-\lambda t}dt$$

Pela regra da integral por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$u = t$$

$$du = dt$$

$$dv = e^{-\lambda t}dt$$

$$\int dv = v$$

$$v = -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}$$

$$\lambda \int_0 te^{-\lambda t}dt = \lambda(-t\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}dt)$$

$$MTTF = \frac{1}{\lambda}$$

Distribuição exponencial

Uma das principais propriedades da distribuição exponencial e a falta de memória **(memoryless property)**.

.... o tempo que nós esperamos pela chegada de um determinado evento é estatisticamente independente de quanto tempo já estávamos esperando pelo evento.

E.g: suponha que um carro tenha já tenha rodado 100.000 km. A propriedade de falta de memória diz que a probabilidade de rodar 10.000km e não falhar é a mesma de que comprar um carro zero km e rodar 10.000 sem falhar. Em outras palavras, os componentes do carro não envelhecem.

$$\Pr(X > t + s | X > t) = \Pr(X > s)$$

Distribuição Hypoexponencial

- Muitos processos na natureza podem ser divididos em fases sequenciais.
- Se o tempo gasto em cada etapa é:
  - Independente
  - Exponencialmente distribuido
- Pode ser mostrado que o tempo total da sequencia é Hypoexponencialmente distribuido.
- Exemplo: tempo das operações de entrada e saída em um computador em geral segue uma distribuição hypoexponencial.

Distribuição Hypoexponencial

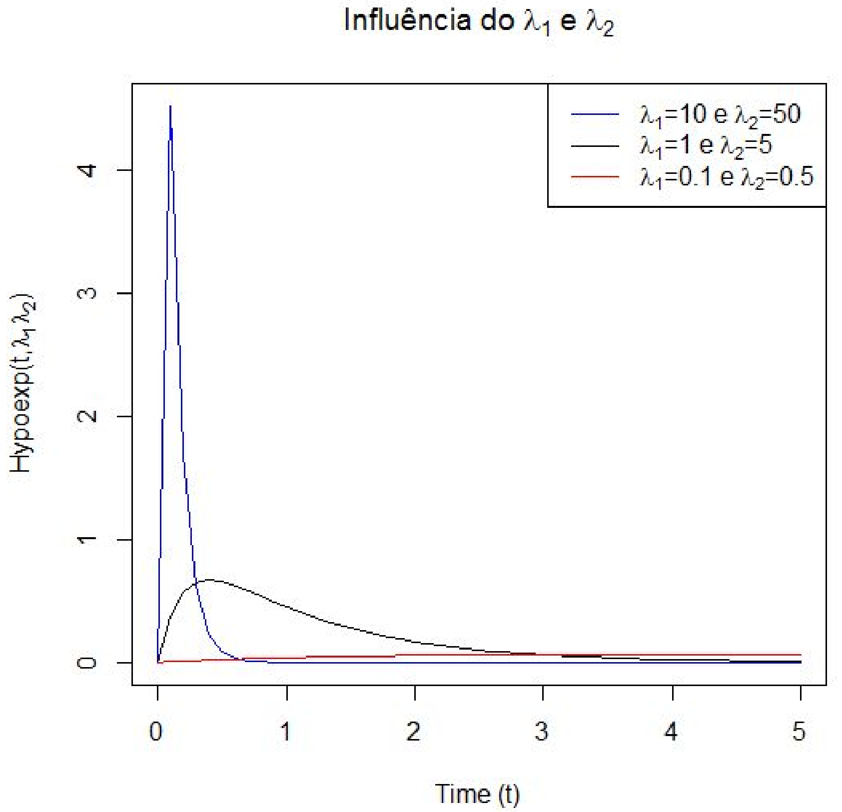
Uma variável aleatória X, com uma distribuição hypoexponencial de duas fases λ_1 e λ_2, denotada por X~HYPO(λ_1,λ_2), tem o PDF dado por:

$$f(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right), \qquad t > 0$$

A CDF de X~HYPO(λ_1,λ_2) é dada por:

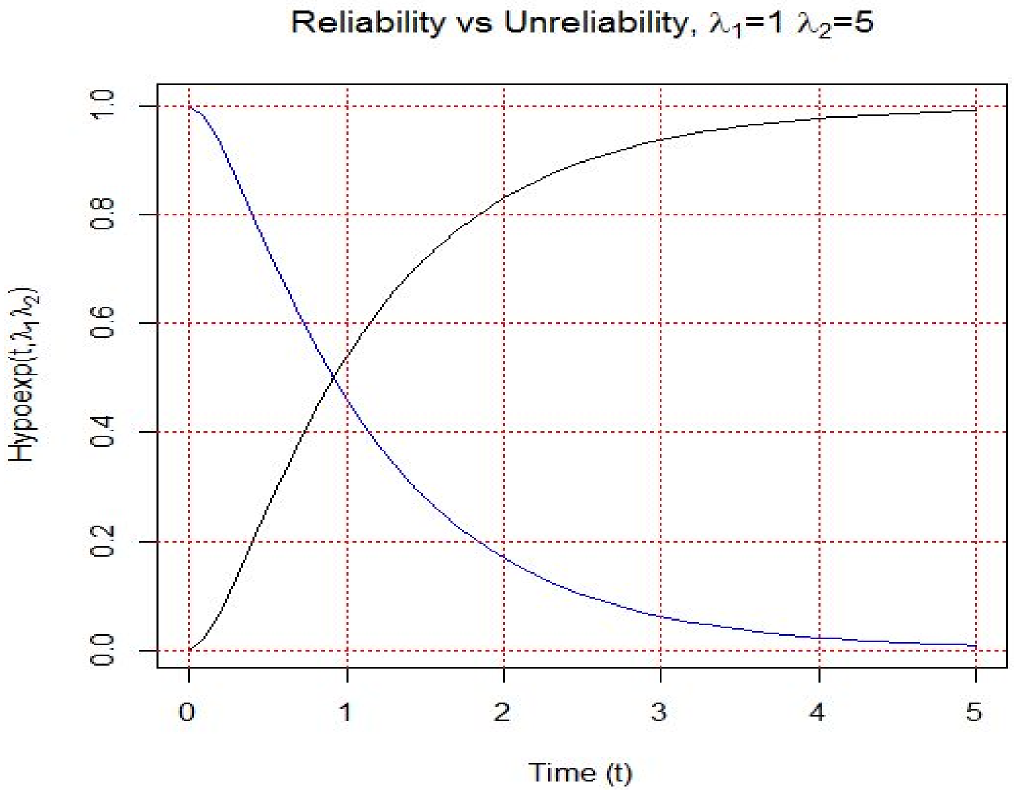
$$F(t) = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}, \qquad t \geq 0$$

Distribuição Hypoexponencial - PDF

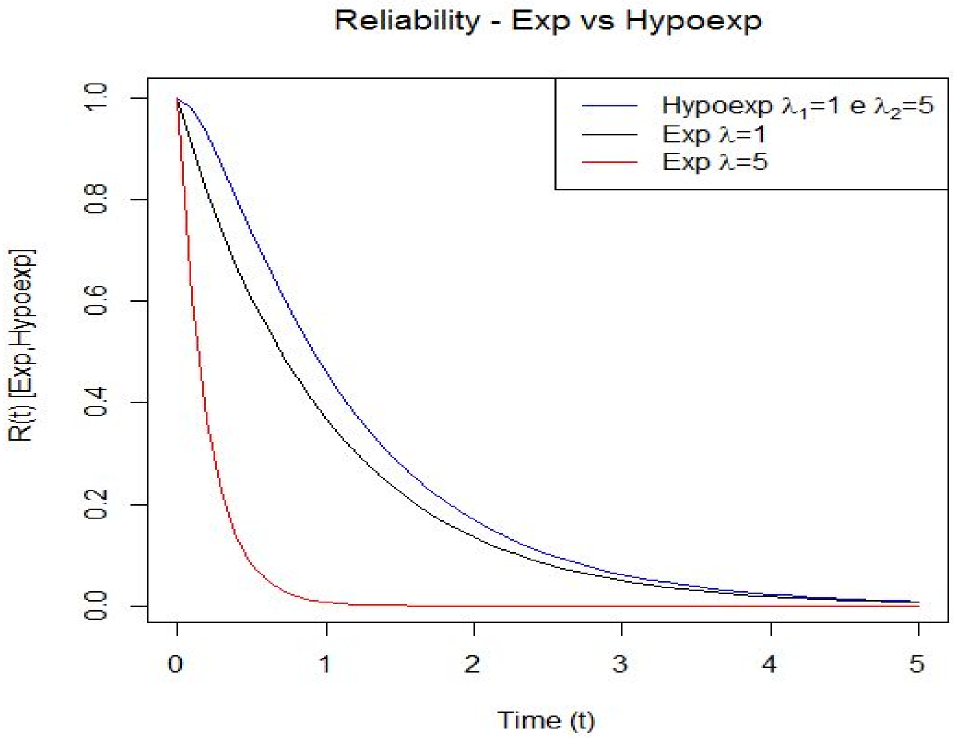


Distribuição Hypoexponencial

Qual gráfico é a confiabilidade?



Confiabilidade - Exp vs Hypoexp



Distribuição Hypoexponencial

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

$$f(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)$$

$$F(t) = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}$$

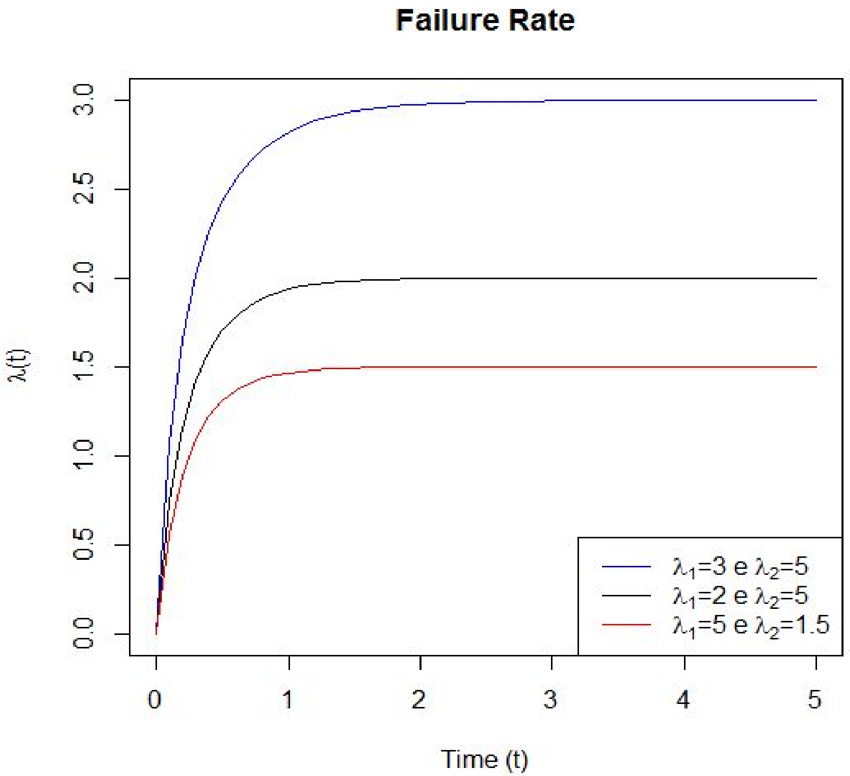
$$R(t) = 1 - F(t)$$

$$= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}$$

$$\lambda(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)}{\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}$$

Distribuição Hypoexponencial

A taxa de falha é uma função crescente de 0 até min(λ_1,λ_2)



Distribuição Hypoexponencial

$$MTTF = \int_0^{\infty} tf(t)dt \qquad f(t) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)$$

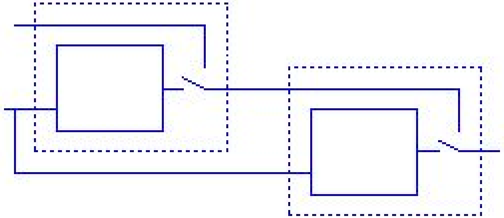
A partir da distribuição exponencial, sabe-se que:

$$\int_0^{\infty} t\, e^{-\lambda t}\mathrm{dt} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Assim: $$MTTF = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\frac{1}{{\lambda_1}^2} - \frac{1}{{\lambda_2}^2}\right) = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\lambda_k}$$

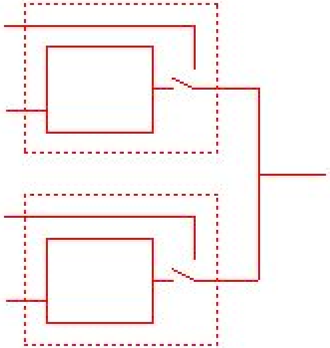
Tipos de Sistema



Série

Todos os componentes precisam funcionar

$$R_{SISTEMA} = R^n$$



Paralelo

Pelo menos um componente precisa funcionar

$$R_{SISTEMA} = 1 - (1 - R)^n$$

Sistemas em Série

Suponha que a distribuição do tempo de vida do i-esimo componente de um sistema em série (com N componentes) seja exponencial com parâmetro λ_i, então:

$$R_{Série} = R_1 R_2 \ldots R_N$$

$$= e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} \ldots e^{-\lambda_N t}$$

$$= exp\left[-\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i\right) t\right]$$

É exponencialmente distribuído com parâmetro:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i$$

Método por contagem de peças

O exemplo anterior é responsável por uma técnica muito utilizada na prática, o “**método por contagem de peças**” (parts count method)

O analista faz a contagem:

- o número n_i das partes de cada componente i
- cada componente i tem um λ_i

Assim, a taxa de falhas do sistema é dada por:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i n_i$$

Exemplo

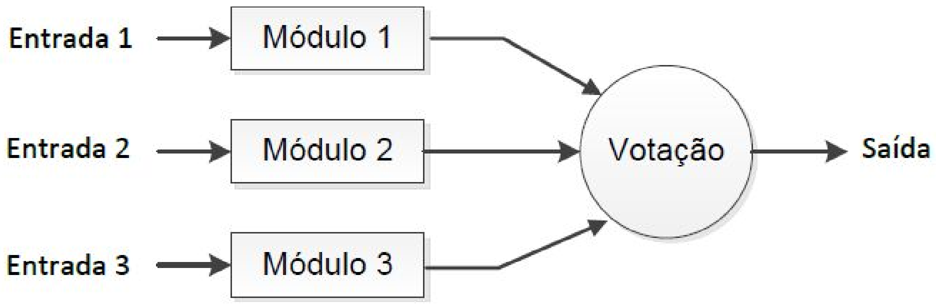
A implementação da memória cache de uma certa CPU é formada pelos componentes da tabela abaixo. Encontre a taxa de falhas do sistema assumindo que todos os componentes apresentam uma taxa de falhas com distribuição exponencial.

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i n_i$$

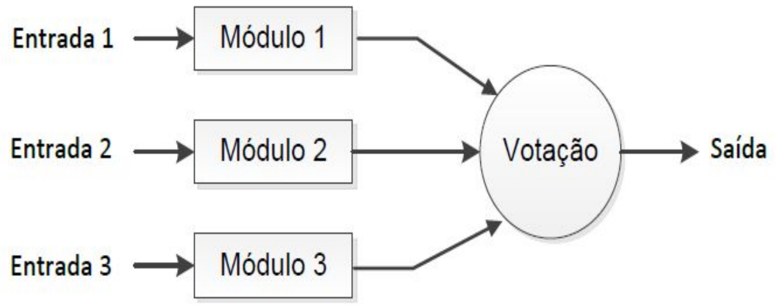
Tipo do Chip	Número de Chips n_i	Taxa de falhas
SSI	1.202	0.1218
MSI	668	0.2420
ROM	58	0.1560
RAM	414	0.6910
MOS	256	1.0602
BIP	2.086	0.1588

Redundância TMR

A redundância modular tripla (TMR - Triple Modular Redundancy) é formada por 03 componentes. O sistema é considerado operacional se dois componentes estão funcionando (KooN - 2oo3);



Exemplo - Redundância TMR



$$R_{TMR} = \sum_{i=2}^{3} \binom{3}{i} R^i (1-R)^{3-i}$$

$$= \binom{3}{2} R^2 (1-R) + \binom{3}{3} R^3 (1-R)^0$$

$$= 3R^2 - 2R^3$$

A redundância sempre melhora a confiabilidade do sistema?

$$R_{TMR} = \begin{cases} > R & se\ R > \frac{1}{2} \\ = R & se\ R = \frac{1}{2} \\ < R & se\ R < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exemplo - Redundância TMR

- Considere um sistema TMR e permita que X, Y, Z represente o tempo de vida dos três componentes.
- X, Y, Z são mutuamente independentes e exponencialmente distribuidas com taxa de falha ƛ
- Suponha que L seja o tempo de vida do sistema, tal que:

$$L = \min\{X, Y, Z\} + \min\{U, V\}$$

- U, V representam o tempo resídual dos componentes que continuarem a funcionar após a primeira falha
- Como a distribuição exponencial não tem memória, U e V possuem taxa de falha igual a ƛ

Cont...

$$L = \min\{X, Y, Z\} + \min\{U, V\}$$

A partir do método por contagem de peças:

- min{X,Y,Z} possui uma distribuição exponencial com taxa de falha 3ƛ
- min{U,V} possui uma distribuição exponencial com taxa de falha 2ƛ

L apresenta duas fases com distribuição exponenciais diferentes (3ƛ, 2ƛ).
L~Hypoexp(3ƛ, 2ƛ)

Cont...

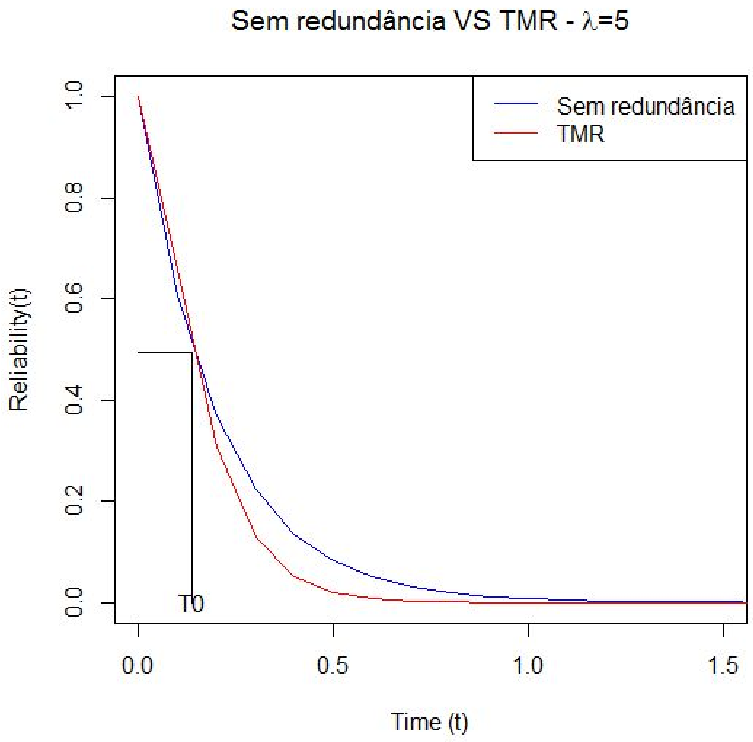
$$R_{TMR}(\mathrm{t}) = 3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}$$

L~Hypoexp(3ƛ, 2ƛ)

$$F(t) = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}$$

$$R(t) = 1 - F(t)$$

$$= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}$$

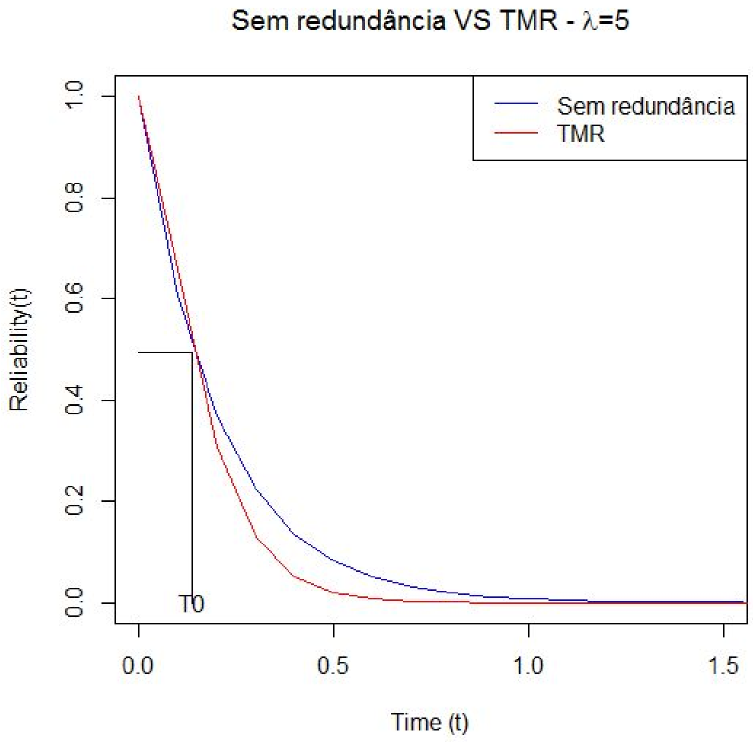


Cont...

$$R_{TMR}(\mathrm{t}) = 3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}$$

$$3e^{-2\lambda t_0} - 2e^{-3\lambda t_0} = e^{-\lambda t_0}$$

$$t_0 = \frac{\ln 2}{\lambda} \cong \frac{0.7}{\lambda}$$



Redundância TMR/Simplex

- Considere um sistema TMR e permita que X, Y, Z represente o tempo de vida dos três componentes.
- X, Y, Z são mutuamente independentes e exponencialmente distribuidas com taxa de falha ƛ
- Suponha que L seja o tempo de vida do sistema, tal que:

$$L = \min\{X, Y, Z\} + \min\{U\}$$

- Quando uma falha ocorre, o componente que falhou e um dos componentes em estado funcional são retirados.
- U representa o tempo resídual do componente que continuar no sistema

Cont...

$$L = \min\{X, Y, Z\} + \min\{U\}$$

A partir do método por contagem de peças:

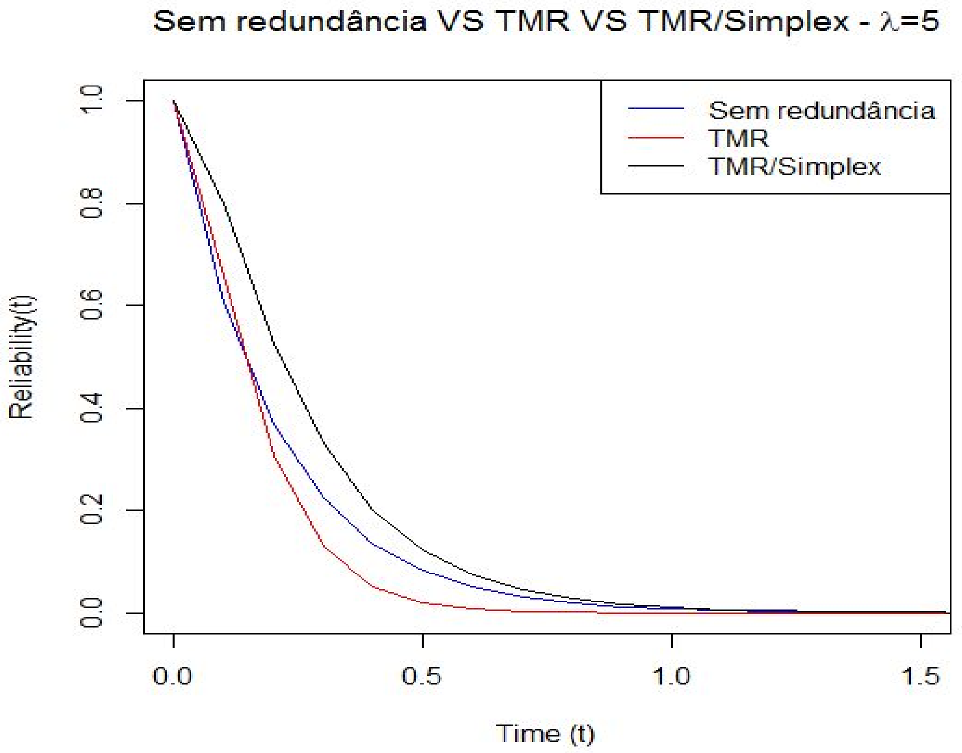
- min{X,Y,Z} possui uma distribuição exponencial com taxa de falha 3ƛ
- min{U} possui uma distribuição exponencial com taxa de falha ƛ

L apresenta duas fases com distribuição exponenciais diferentes (3ƛ, ƛ).
L~Hypoexp(3ƛ, ƛ)

Cont...

L~Hypoexp(3ƛ, ƛ)

$$R(t) = \frac{3}{2}e^{-\lambda t}\frac{1}{2}e^{-3\lambda t}$$



Referências

https://courses.engr.illinois.edu/ece313/fa2013/SectionB/Lectures/lec_21.pdf

Trivedi, Kishor. Probability & Statistics with Reliability, Queuing and Computer Science Applications. Wiley, 2002. Chapter 1 and 3.