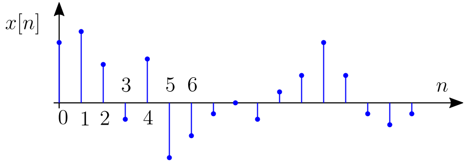
Tema 3: Sistemas LTI en tiempo discreto. Filtros FIR.

Carlos García de la Cueva [1]

[1]Departamento de Electrónica, Automática y Comunicaciones
ICAI-DEAC

Índice de Contenidos

Señales en tiempo discreto



- Cualquier secuencia discreta se puede expresar como:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k], \quad \delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

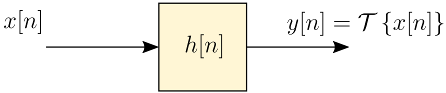
- Función escalón unidad:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k]$$

- Las secuencias discretas periódicas son aquellas que cumplen que:

$$x[n] = x[n+M], \ \forall \ n \ \text{ donde } M \text{ es el periodo}$$

Sistemas en Tiempo discreto



- Sistemas sin memoria:

$$y[n_0] = \mathcal{T}\{x[n_0]\}$$

- Sistemas lineales:

$$y[n] = \mathcal{T}\left\{\sum_k x_k[n]\right\} = \sum_k \mathcal{T}\{x_k[n]\}$$

- Sistemas invariantes en el tiempo:

$$y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\} \longrightarrow y[n-n_0] = \mathcal{T}\{x[n-n_0]\}$$

- Sistemas causales:

$$y[n_0] = \mathcal{T}\{x[n]\}, \ \forall \ n \ \leq n_0$$

- Sistemas estables:

$$|x[n]| \leq B_x < \infty \longrightarrow |y[n]| \leq B_y < \infty$$

Sistemas LTI en tiempo discreto

- Sistemas **lineales e invariantes en el tiempo** (LTI):

$$\begin{aligned} y[n] &= \mathcal{T}\left\{\sum_k x_k[n]\right\} = \sum_k \mathcal{T}\{x_k[n]\} \\ y[n-n_0] &= \mathcal{T}\{x[n-n_0]\} \end{aligned}$$

- Salida de un sistema LTI:

$$\begin{aligned} y[n] &= \mathcal{T}\{x[n]\} = \mathcal{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathcal{T}\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \end{aligned}$$

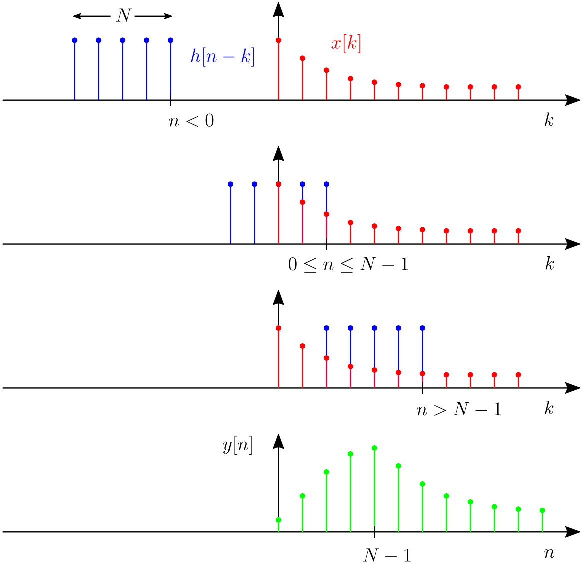
- Convolución discreta:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-(k-n)]$$

- **Ejemplo Convolución Discreta:** $h[n] = u[n] - u[n-N]$, $x[n] = a^n u[n]$, $a \neq 1$

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_k x[k]h[n-k] \\
y[n] &= 0, \ \forall \ n < 0 \\
y[n] &= \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^0 - a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \ \forall \ 0 \leq n \leq N-1 \\
y[n] &= \sum_{k=n-N+1}^{n} a^k = \frac{a^{n-N+1} - a^{n+1}}{1-a} = a^{n-N+1}\left(\frac{1-a^N}{1-a}\right), \ \forall \ n > N-1
\end{aligned}
$$

- Suma de una serie geométrica: $\sum_{n=N_1}^{N_2} a \cdot r^n = a \cdot \frac{r^{N_1} - r^{N_2+1}}{1-r}$
- Suma de una serie Telescópica: $\sum_{n=N_1}^{N_2} (a_n - a_{n+1}) = a_{N_1} + a_{N_2+1}$



N
$h[n-k]$
$x[k]$
$n<0$
k
$0 \leq n \leq N-1$
k
$n > N-1$
k
$y[n]$
$N-1$
n

Sistemas LTI en tiempo discreto

Propiedades de los sistemas LTI en tiempo discreto

- Conmutativa:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

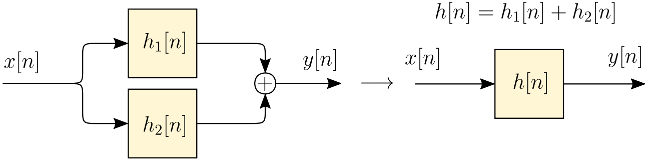
- Distributiva respecto de la suma:

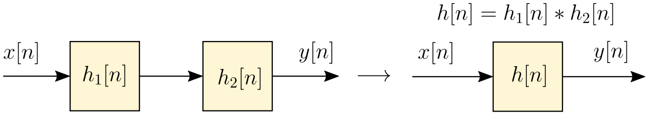
$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

- Asociativa:

$$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$

- Sistemas en paralelo y cascada:





- **Estabilidad**:

$$
\begin{aligned}
|x[n]| &\leq B_x \\
|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|\,|x[n-k]| \\
|y[n]| &\leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|
\end{aligned}
$$

de modo que el sistema será estable si y sólo si:

$$
\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = B_h < \infty}
$$

- **Causalidad**: $y[n_0]$ sólo depende de las muestras de entrada $x[n]\ \forall\ n \leq n_0$

$$
y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n_0-k],\ \forall\ n_0 - k \leq n_0 \ \rightarrow\ k \geq 0
$$

Para cumplir esta última condición, $\boxed{h[n] = 0,\ \forall\ n < 0}$

- La **Transformada de Fourier en Tiempo Discreto** (TFTD) se define como:

$$X\left(e^{jw}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn},\ \forall\ -\infty \leq w \leq \infty$$

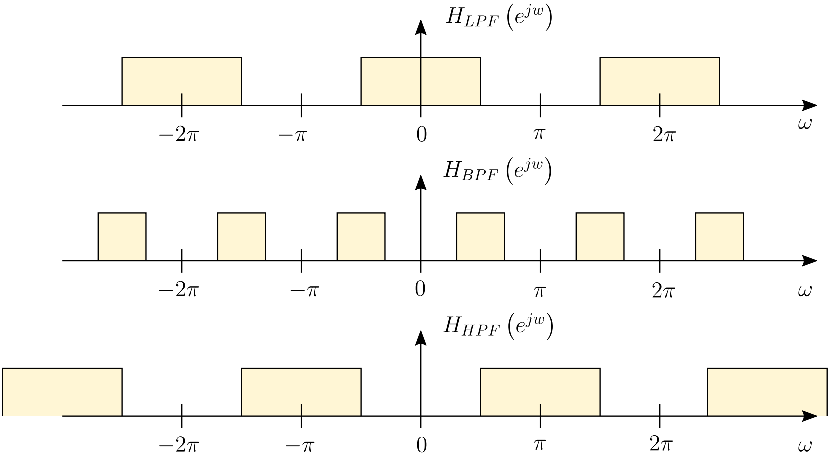
  donde w es una variable continua.

- Y la **transformada inversa**:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{jw}\right)e^{jwn}dw$$

- **Periodicidad** de la TFTD:

$$\begin{aligned}
X\left(e^{j(w+2\pi)}\right) &= X\left(e^{jw}\right) \\
X\left(e^{j(w+2\pi)}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(w+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn}e^{-j2\pi n} \\
X\left(e^{j(w+2\pi)}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn} = X\left(e^{jw}\right)
\end{aligned}$$



$H_{LPF}\left(e^{jw}\right)$
-2π
$-\pi$
0
π
2π
ω
$H_{BPF}\left(e^{jw}\right)$
-2π
$-\pi$
0
π
2π
ω
$H_{HPF}\left(e^{jw}\right)$
-2π
$-\pi$
0
π
2π
ω

- **Opcional.** Deducción de la transformada inversa:

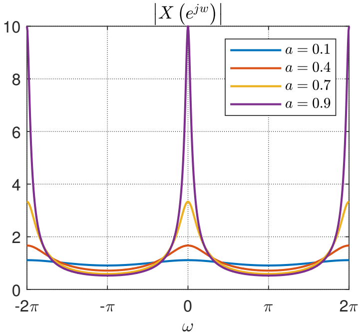
$$
\begin{aligned}
X\left(e^{jw}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn} \\
\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{jw}\right) e^{jwk} dw &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jw(n-k)} dw
\end{aligned}
$$

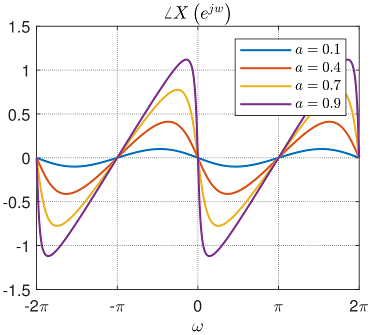
$$
\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jw(n-k)} dw = \left. \frac{e^{-jw(n-k)}}{-j(n-k)} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2 \cdot sin\left(\pi\left(n-k\right)\right)}{n-k} = 2\pi \cdot sinc(n-k) = 2\pi \cdot \delta[n-k]
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{jw}\right) e^{jwk} dw &= 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta[n-k] \\
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{jw}\right) e^{jwk} dw &= x[k]
\end{aligned}
$$

- **Ejemplo:** TFTD de $x[n] = a^n u[n]$

$$\begin{aligned} X\left(e^{jw}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jwn} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-jw}\right)^n = \frac{1}{1-ae^{-jw}}, \quad \forall \ |ae^{-jw}| = |a| < 1 \end{aligned}$$





- Condición de existencia de la TFTD:

$$\begin{aligned}
\left|X\left(e^{jw}\right)\right| &= \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn}\right| < \infty \\
\left|X\left(e^{jw}\right)\right| &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|\,|e^{-jwn}| \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty
\end{aligned}$$

- Relación de la existencia de la TFTD con la estabilidad de un sistema LTI:

$$|x[n]| < B_x, \quad |y[n]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

$$H\left(e^{jw}\right) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]||e^{-jwn}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Propiedades de la TFTD

- Linealidad:

$$ax[n] + by[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} aX\left(e^{jw}\right) + bY\left(e^{jw}\right)$$

- Desplazamiento temporal:

$$x[n - n_d] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-jwn_d}X\left(e^{jw}\right)$$

- Desplazamiento en frecuencia:

$$x[n]e^{jw_0 n} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j(w-w_0)}\right)$$

- Inversión temporal:

$$x[-n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X\left(e^{-jw}\right)$$

- Derivada de la TFTD:

$$nx[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{dX\left(e^{jw}\right)}{dw}$$

- Convolución temporal:

$$x[n] * y[n[\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X\left(e^{jw}\right) \cdot Y\left(e^{jw}\right)$$

- Multiplicación temporal:

$$x[n] \cdot y[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\theta}\right) Y\left(e^{j(w-\theta)}\right) dw$$

- Diezmado:

$$x[nM] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{j(w+2\pi k)/M}\right)$$

- Interpolación:

$$x\left[\frac{n}{L}\right] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X\left(e^{jwL}\right)$$

- Teorema de Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X\left(e^{jw}\right)|^2 dw$$

Pares de transformadas clásicas

Secuencia	TFTD
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	e^{-jwn_0}
$1, \quad (-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(w+2\pi k)$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-ae^{-jw}}$
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-jw}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(w+2\pi k)$
$(n+1)a^n u[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{(1-ae^{-jw})^2}$
$\frac{sin(w_c n}{\pi n}$	$X\left(e^{jw}\right) = \begin{cases} 1, & \lvert w\rvert < w_c \\ 0, & w_c < \lvert w\rvert < \pi \end{cases}$

Secuencia	TFTD
$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & resto \end{cases}$	$\frac{sin(w(M+1)/2)}{sin(w/2)} e^{-jwM/2}$
$e^{jw_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(w - w_0 + 2\pi k)$
$cos(w_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \left(e^{j\phi}\delta(w - w_0 + 2\pi k) + e^{-j\phi}\delta(w + w_o + 2\pi k)\right)$

- **Ejemplo 1:** Calcule la transformada inversa de $X\left(e^{jw}\right)$

$$X\left(e^{jw}\right) = \frac{1}{(1 - ae^{-jw})(1 - be^{-jw})} = \frac{a/(a-b)}{(1 - ae^{-jw})} - \frac{b/(a-b)}{(1 - be^{-jw})}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{X\left(e^{jw}\right)\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{a/(a-b)}{(1-ae^{-jw})}\right\} - \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{b/(a-b)}{(1-be^{-jw})}\right\}$$

$$x[n] = \frac{a}{a-b}a^n u[n] - \frac{b}{a-b}b^n u[n] = \frac{\left(a^{n+1}-b^{n+1}\right)u[n]}{a-b}$$

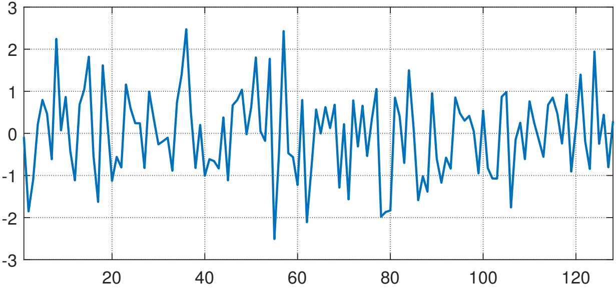
- **Ejemplo 2:** Calcular la respuesta al impulso a partir de un sistema en diferencias:

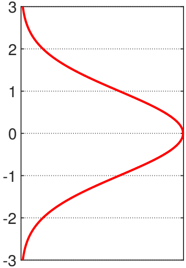
$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$$

$$Y\left(e^{jw}\right) - \frac{1}{2}Y\left(e^{jw}\right)e^{-jw} = X\left(e^{jw}\right) - \frac{1}{4}X\left(e^{jw}\right)e^{-jw}$$

$$H\left(e^{jw}\right) = \frac{Y\left(e^{jw}\right)}{X\left(e^{jw}\right)} = \frac{1-\frac{1}{4}e^{-jw}}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}$$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{H\left(e^{jw}\right)\right\} = \frac{1}{2}\delta[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n]$$





- Procesos discretos estacionarios en sentido amplio:

$$E\left\{x[n]\right\} = m_x[n] = m_x \;\longrightarrow\; E\left\{x[n \pm n_0]\right\} = m_x$$

$$E\left\{x[n_1] \cdot x[n_2]\right\} = R_x\left[n_1 - n_2\right] = R_x\left[\tau\right]$$

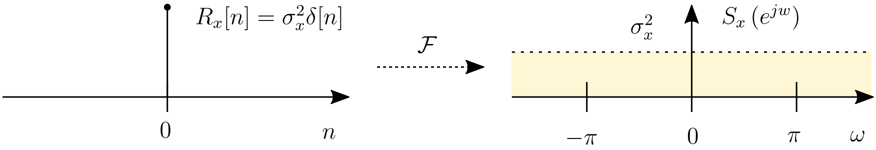
- Densidad espectral de potencia de ruido:

$$S_x\left(e^{jw}\right) = \mathcal{F}\left\{R_x\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_x[n]e^{-jwn}$$

- **Ruido Blanco**:

$$R_x[\tau] = \sigma_x^2 \delta[\tau] \longrightarrow S_x\left(e^{jw}\right) = \sigma_x^2 \ \forall \ w$$

$$P_x = E\left\{x^2[n]\right\} = R_x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_x\left(e^{jw}\right) dw = \sigma_x^2$$

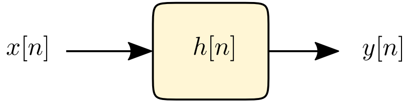


- **Ruido complejo**: $\widetilde{r}[n] = r_i[n] + j \cdot r_q[n]$. Donde se considera que $r_i[n]$ y $r_q[n]$ son procesos estocásticos independientes e idénticamente distribuidos (IID). Es decir, $m_i \approx m_q$ y $\sigma_i^2 \approx \sigma_q^2$.

$$\sigma_{\widetilde{r}}^2 = \sigma_i^2 + \sigma_q^2 \approx 2\sigma_i^2$$

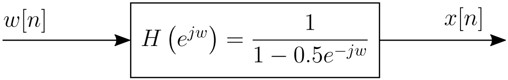
$$m_{\widetilde{r}} = m_i + j \cdot m_q$$

- **Procesos estacionarios discretos aplicados a sistemas LTI**



$$
\begin{aligned}
R_{yx}[\tau] &= h[\tau] * R_x[\tau] \\
R_y[\tau] &= R_{yx}(\tau) * h[-\tau]^* = R_x[\tau] * h[\tau] * h[-\tau]^* \\
S_y\left(e^{jw}\right) &= \mathcal{F}\left\{R_y[\tau]\right\} = S_x\left(e^{jw}\right) \cdot H\left(e^{jw}\right) \cdot H\left(e^{jw}\right)^* = S_x\left(e^{jw}\right) \cdot \left|H\left(e^{jw}\right)\right|^2 \\
m_y &= E\left\{y[n]\right\} = E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]E\left\{x[n-k]\right\} = \\
&= m_x \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] = m_x \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j0n} = m_x \cdot H\left(e^{j0}\right)
\end{aligned}
$$

- **Ejemplo:** Suponga que $w[n]$ es un ruido blanco de media nula y potencia σ_w^2:



a) Calcule la potencia del p.e a la salida (en función de $R_x[n]$).

$$E\left\{x^2[n]\right\} = R_x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_x\left(e^{jw}\right) dw$$

b) Calcule la densidad espectral de potencia del p.e a la salida.

$$S_x\left(e^{jw}\right) = S_w\left(e^{jw}\right) \cdot \left|H\left(e^{jw}\right)\right|^2 = \sigma_w^2 \cdot \frac{1}{1.25 - cos(w)}$$

c) Calcule la función de autocorrelación del p.e a la salida.

$$\begin{aligned} R_x[n] &= R_w[n] * h[n] * h[-n]^* = \sigma_w^2 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n]\right) \\ &= \frac{4\sigma_w^2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n+1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right) \end{aligned}$$

- **FIR** $\equiv$ Finite Impulse Response (respuesta al impulso de longitud finita)

$$h[n] = 0, \ \forall \ n < N_1 \text{ y } n > N_2, \ N_1 \leq N_2$$

- La salida de un filtro FIR se expresa como:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=N_1}^{N_2} h[k]x[n-k]$$

- **Estabilidad**: Los filtros FIR son estables por definición:

$$|x[n]| \leq B_x \ \longrightarrow \ |y[n]| \leq B_x \cdot \sum_{n=N_1}^{N_2} |h[n]| < \infty \ \longrightarrow \sum_{n=N_1}^{N_2} |h[n]| < \infty \ \forall \ |h[n]| \neq \infty$$

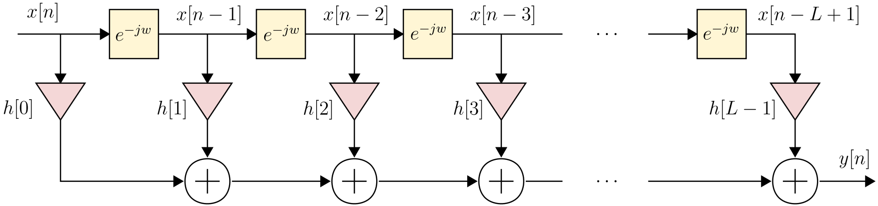
- Para que sea **realizable** se debe imponer además la condición de causalidad:

$$h[n] = 0, \ \forall \ n < 0 \ \longrightarrow \ h[n] = 0, \ \forall \ n < N_1 \text{ y } n > N_2, \ 0 \leq N_1 \leq N_2$$

- Tiene sentido entonces definir la **longitud** de un filtro FIR como:

$$L = N_2 - N_1 + 1$$

- **Diagrama de bloques de un filtro FIR causal**



$$h[n] = 0, \ \forall \ n < 0 \text{ y } n > L-1 \ , \quad L \equiv \text{ Longitud del filtro FIR}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-jw}\right\} = \delta[n-1] \ \longrightarrow \ \text{Retardo unitario}$$

- **Def. Transitorio de un filtro FIR:** Periodo de tiempo (muestras obtenidas a la salida $y[n]$) durante el cual la memoria[1] del filtro está incompleta.

$$\boldsymbol{L} \equiv \text{ Longitud o Memoria del filtro}$$

$$\textbf{Transitorio} \ \equiv \ L-1 \text{ Muestras}$$

[1]Se entiende por memoria cada uno de puntos previo y posterior a los retardos unitarios e^{-jw}.

Caso especial: Filtros causales simétricos.

- Partimos de una versión no-causal centrada en $n = 0$, es decir $h[k] = h[-k]$:

$$H\left(e^{jw}\right) = \sum_{n=-(L-1)/2}^{(L-1)/2} h[n]e^{-jwn} \quad = \quad h[0] + \sum_{n=1} 2 \cdot h[n] \cdot cos(wn)$$

$$\angle\left\{H\left(e^{jw}\right)\right\} \quad = \quad 0$$

- Se aplica un desplazamiento de $(L-1)/2$ muestras para convertirlo en causal.

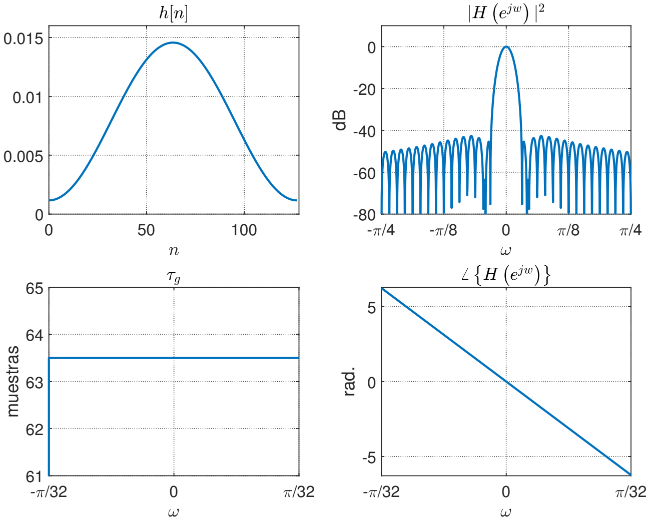
$$H'\left(e^{jw}\right) \quad = \quad H\left(e^{jw}\right) \cdot e^{-jw(L-1)/2}$$

$$\angle\left\{H\left(e^{jw}\right)\right\} \quad = \quad -jw(L-1)/2$$

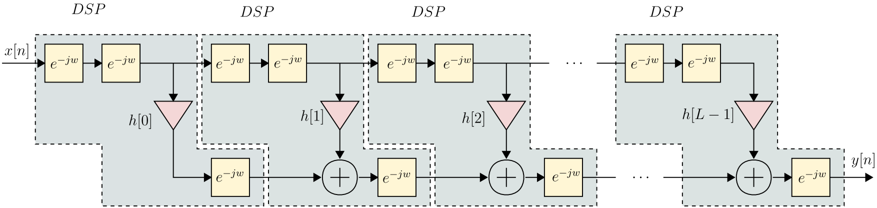
- De modo que un filtro FIR simétrico y causal provoca un retardo de grupo de:

$$\tau_g = -\frac{d\angle\left\{H\left(e^{jw}\right)\right\}}{dw} = \frac{L-1}{2} \text{ muestras}$$

- **Ejemplo filtro FIR simétrico y causal.** $L = 128$ Coeficientes.



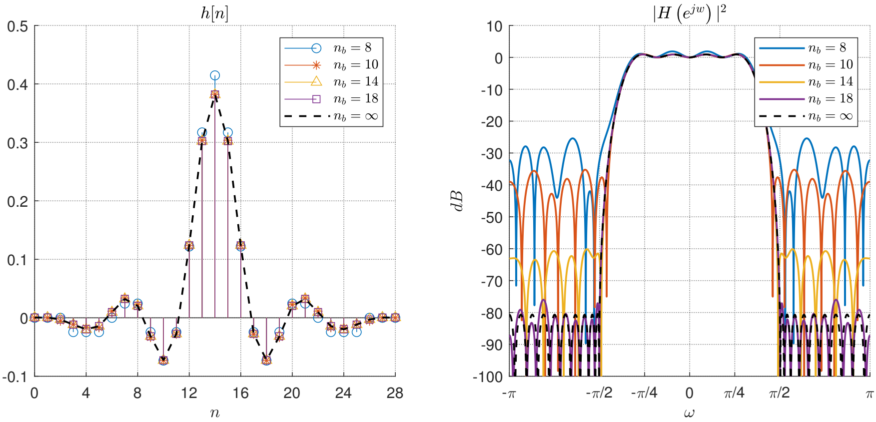
- **Implementación HW de filtros FIR**



- **DSPs**: Los principales fabricantes de FPGAs (Xilinx y Altera) ofrecen módulos ASIC[2] dedicados a operaciones matemáticas intensivas.
- Las principales operaciones de los DSPs aplicadas a sistemas lineales digitales son las de tipo **MAC** (Multiply and Accumulate).
- **Implementación SW de filtros FIR**
- Métodos basados en el filtrado en el dominio de la frecuencia mediante la FFT: **"Overlap-Add"** y **"Overlap-Save"**. Estas técnicas se verán en detalle en el tema 5.

[2] Application Specific Integrated Circuit

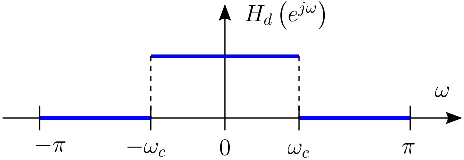
- **Consideraciones HW de filtros FIR**: Cuantificación de los coeficientes $h[n]$



- El número de bits (n_b) afecta sobre la respuesta en frecuencia del sistema.

Enventanado

- Se define la respuesta en frecuencia deseada $H_d\left(e^{jw}\right)$



- Se obtiene la respuesta al impulso a partir de la transformada inversa

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d\left(e^{jw}\right) e^{jwn}$$

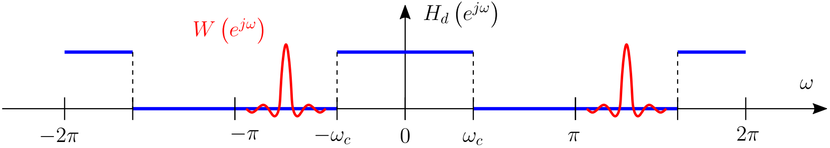
- Típicamente, $H_d\left(e^{jw}\right)$ es una función definida a trozos con discontinuidades en los límites de las bandas que da lugar a $h_d[n]$ no-causal y de longitud infinita.

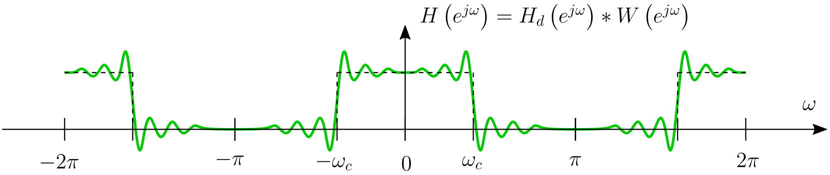
- Se restringe la longitud del filtro FIR y se fuerza la condición de causalidad.

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], \ 0 \le n \le L-1 \\ 0, \ \text{resto} \end{cases}$$

- Esta última operación se puede generalizar como una **función de enventanado**.

$$h[n] = h_d[n] \cdot w[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} H\left(e^{jw}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d\left(e^{j\theta}\right) W\left(e^{j(w-\theta)}\right) d\theta$$





- La selección de $w[n]$:

$$
\begin{aligned}
w[n] = 1\ \forall\ n \quad &\longrightarrow \quad W\left(e^{jw}\right) = 2\pi \cdot \delta(w) \\
H\left(e^{jw}\right) \quad &= \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H\left(e^{j\theta}\right) W\left(e^{j(w-\theta)}\right) = H_d\left(e^{jw}\right) \\
L_w = \infty\ \text{(longitud)} \quad &\longrightarrow \quad BW_w = 0\ \text{(Ancho de banda)}
\end{aligned}
$$

- Se debe de alcanzar un compromiso entre L_w y BW_w para aproximar $H_d\left(e^{jw}\right)$.

$$L_w \uparrow\uparrow \longrightarrow\ BW_w \downarrow\downarrow$$

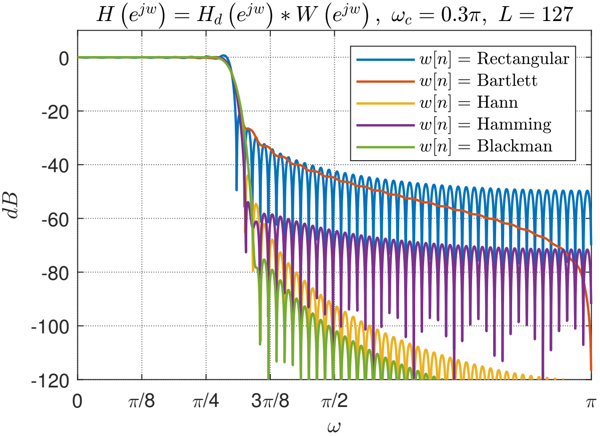
- Con la expresión matemática de $w[n]$ se logra controlar el SLL y $\Delta\omega$[3] de $H\left(e^{jw}\right)$.

$h[n] = h_d[n] \cdot \mathbf{w[n]}$	$\boldsymbol{SLL}(dB)$	$\boldsymbol{\Delta\omega}(rad)$
Rectangular	-21	$1.81\pi/(L-1)$
Bartlett	-25	$2.37\pi/(L-1)$
Hann	-44	$5.01\pi/(L-1)$
Hamming	-53	$6.27\pi/(L-1)$
Blackman	-74	$9.19\pi/(L-1)$

[3] $SLL \equiv$ Secondary Lobe Level o nivel de lóbulos secundarios, $\Delta\omega \equiv$ Banda de transición

- **Ejemplo diseño filtro FIR por el método de enventanado** $(h[n] = h_d[n] \cdot w[n])$

$$H_d\left(e^{jw}\right) = \begin{cases} e^{-jw(L-1)/2}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & , \ \omega_c < |\omega| > \pi \end{cases} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \quad h_d[n] = \frac{sen\left(\omega_c\left(n-(L-1)/2\right)\right)}{\pi\left(n-(L-1)/2\right)}$$



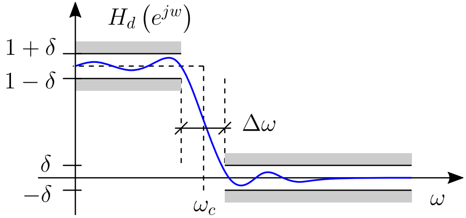
Enventanado Parametrizado (Ventana de Kaiser)

$$w[n] = \begin{cases} \dfrac{I_0\left[\beta\left(1-[(n-\alpha)/\alpha]^2\right)^{1/2}\right]}{I_0(\beta)} & , \ 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & , \ \textit{resto} \end{cases}$$

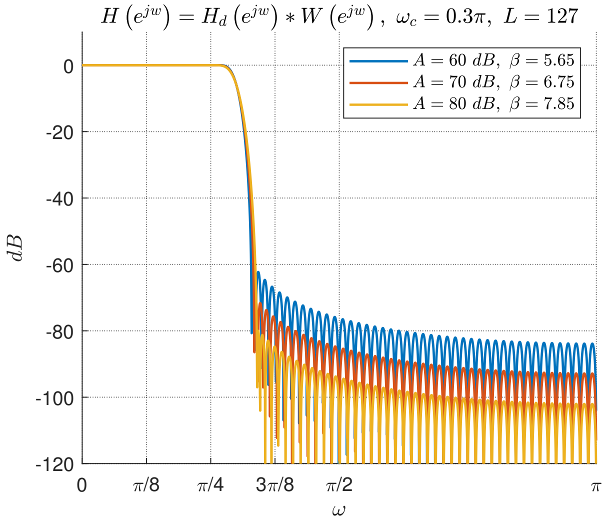
- Donde I_0 representa la función de Bessel modificada de orden 0, y $\alpha = (L-1)/2$.

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A-8.7) & , \ A > 50 \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21) & , \ 21 \leq A \leq 50 \\ 0 & , \ A < 21 \end{cases}$$

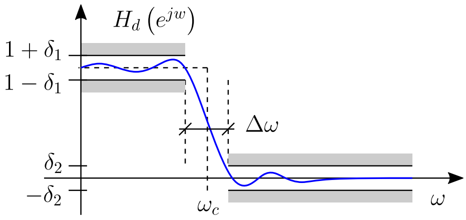
- Donde $A = -20\log_{10}\delta = SLL$, $L = \dfrac{A-8}{2.285\Delta\omega} + 1$, y $\Delta\omega \equiv$ Banda de transición.



- **Ejemplo diseño filtro FIR, ventana de Kaiser**



Diseño óptimo de filtros FIR (Parks-McClellan)



- Se pretende minimizar el error máximo de:

$$\boxed{E\left(e^{j\omega}\right) = W\left(e^{j\omega}\right)\cdot\left(H_d\left(e^{j\omega}\right) - A_e\left(e^{j\omega}\right)\right),\ \forall\ 0 \le \omega \le \pi}$$

$$A_e\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-(L-1)/2}^{(L-1)/2} h_e[n]e^{-j\omega n} = h_e[0] + \sum_{n=1}^{L-1} 2\cdot h_e[n]\cdot cos(\omega n)$$

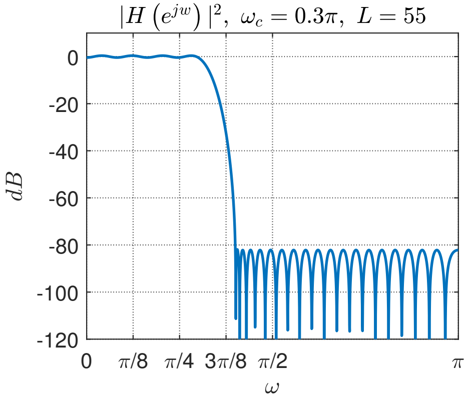
$$h_e[n] = h_e[-n], \quad h[n] = h_e[n-(L-1)/2], \quad W\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} \delta_2/\delta_1 & , 0 \le \omega \le \omega_c \\ 1 & , \omega > \omega_c \end{cases}$$

- Fórmula aproximada de diseño óptimo:

$$L = \left\lceil \frac{-10 \cdot \log_{10}(\delta_1 \cdot \delta_2) - 13}{2.324 \cdot \Delta\omega} \right\rceil + 1$$

- **Ejemplo diseño óptimo filtro FIR** (Parks-McClellan)

$\Delta\omega = \pi/10$, $r_p = 0.5dB \rightarrow \delta_1 = 1 - 10^{0.5/20}$, $SLL = -80dB \rightarrow \delta_2 = 10^{-80/20}$, $\boldsymbol{L = 55}$



Referencias

a) Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer. "Discrete Time Signal Processing". Prentice-Hall. Third Edition

b) A. Alviol, V. Naranjo, J. Paredes, "Tratamiento Digital de la Señal". http://personales.upv.es/aalbiol/librotds/librotds07.pdf