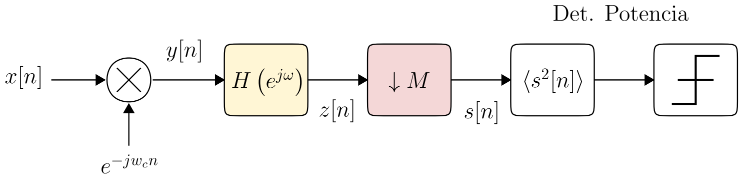
Tema 5: Análisis Espectral en Tiempo Discreto.

Carlos García de la Cueva [1]

[1]Departamento de Electrónica, Automática y Comunicaciones
ICAI-DEAC

Índice de Contenidos



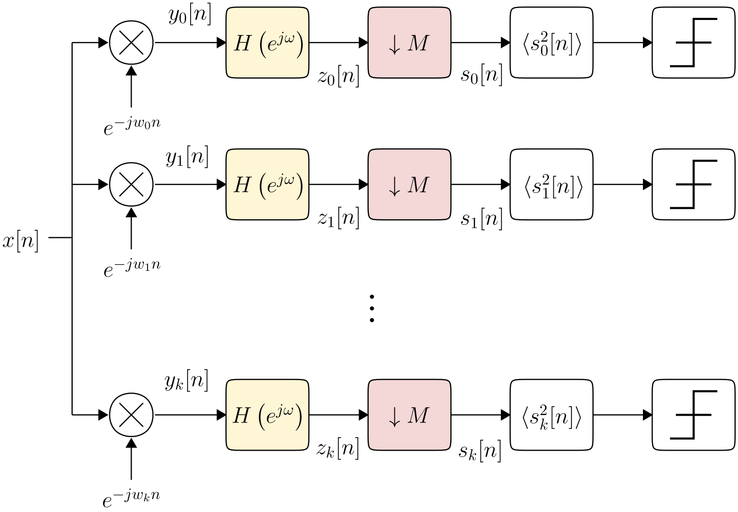
$$y[n] = x[n] \cdot e^{-j\omega_c n} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j(\omega-\omega_c)}\right), \quad \omega_c \ \in \ [-\pi, \ \pi)$$

$$z[n] = y[n] * h[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Z\left(e^{j\omega}\right) = Y\left(e^{j\omega}\right) \cdot H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$s[n] = z[n \cdot M] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} S\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} Z\left(e^{j(\omega - 2\pi i)/M}\right)$$

Donde se cumple que $H\left(e^{j\omega}\right)$ es paso bajo con $BW_{-3dB} \leq 1/M$.

- **Análisis espectral mediante un banco de filtros**



Análisis espectral mediante filtrado

$$y_k[n] = x[n] \cdot e^{-j\omega_k n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y_k\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j(\omega+\omega_k)}\right)$$

$$\omega_k = \frac{k}{M}, \quad M \equiv \text{ Nº Sub-Bandas}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M-1$$

$$z_k[n] = y_k[n] * h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Z_k\left(e^{j\omega}\right) = Y_k\left(e^{j\omega}\right) \cdot H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$s_k[n] = z_k[n \cdot M] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_k\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} Z_k\left(e^{j(\omega-2\pi i)/M}\right)$$

Si $H\left(e^{j\omega}\right)$ es un filtro FIR, se puede aplicar una **descomposición polifásica** para optimizar los recursos HW.

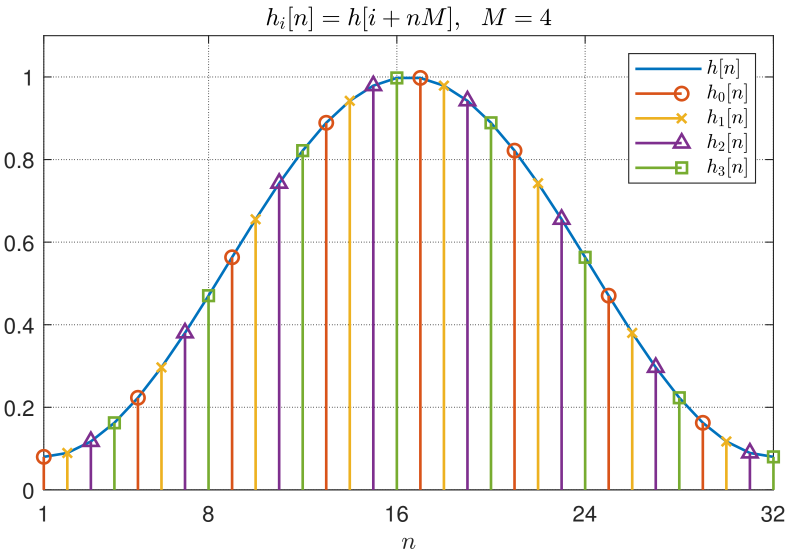
- **Descomposición Polifásica de filtros FIR**

$$
\begin{aligned}
H\left(e^{j\omega}\right) &= \sum_{n=0}^{N-1} h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{K-1} h[i+nM]e^{-j\omega(i+nM)} = \\
&= \sum_{i=0}^{M-1} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{K-1} h[i+nM]e^{-j\omega Mn}\right)}_{H_i\left(e^{j\omega M}\right)} e^{-j\omega i} = \\
&= \sum_{i=0}^{M-1} H_i\left(e^{j\omega M}\right) e^{-j\omega i}
\end{aligned}
$$

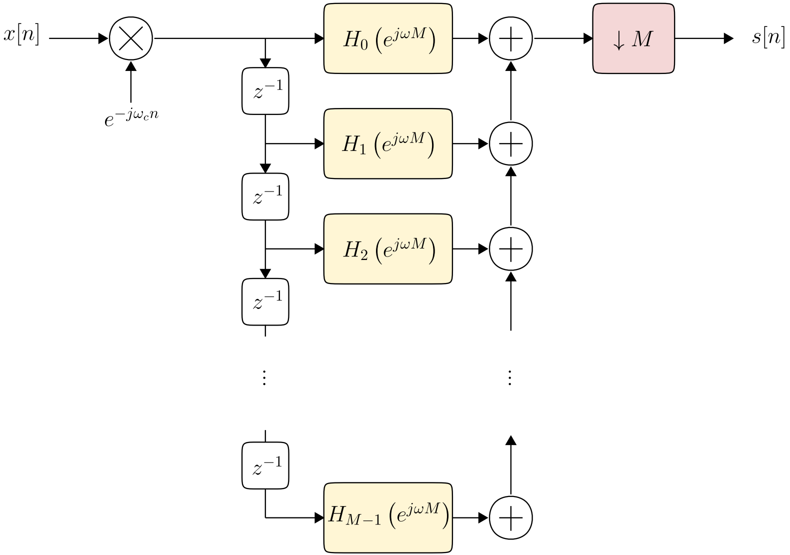
donde $K = N/M \in \mathbb{Z}$ [1] y $H_i\left(e^{j\omega}\right) = \mathcal{F}\left\{h_i[n]\right\}$ con $h_i[n] = h[i+nM]$:

$$
H_i\left(e^{j\omega M}\right) = \sum_{n=0}^{K-1} h[i+nM]e^{-j\omega Mn}
$$

[1] Si $K = N/M \notin \mathbb{Z}$, se completa $h[n]$ con $0's$ a la derecha.

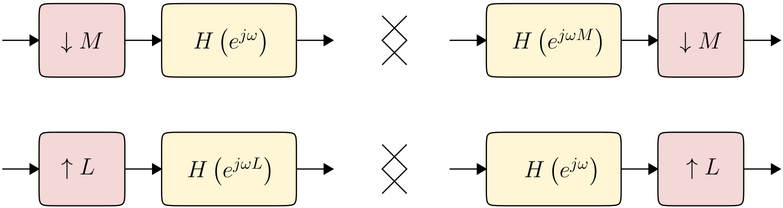

$h_i[n] = h[i + nM], \quad M = 4$
$h[n]$
$h_0[n]$
$h_1[n]$
$h_2[n]$
$h_3[n]$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
8
16
24
32
n

Análisis espectral mediante filtrado



Análisis espectral mediante filtrado

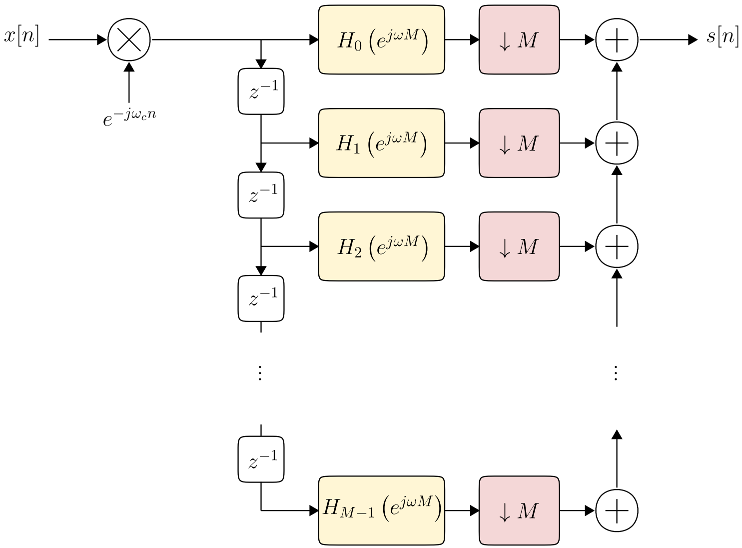
- **Relaciones duales para diezmadores e interpoladores**



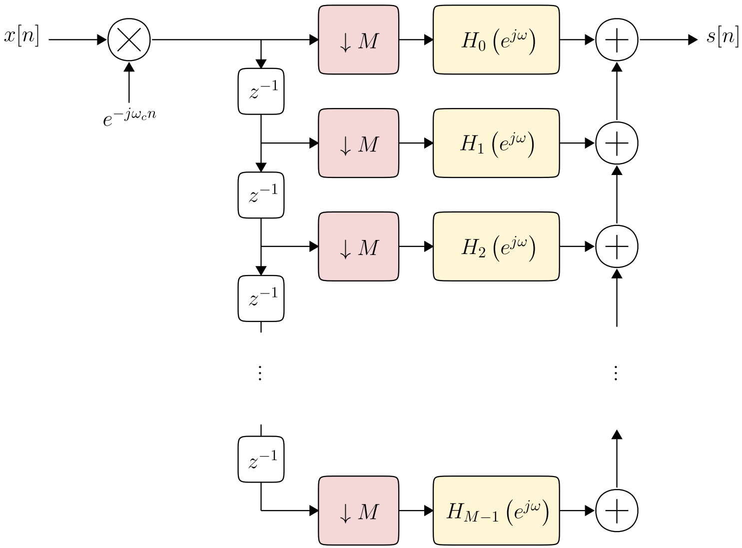
a) En la descomposición polifásica de un filtro FIR se obtienen subsistemas de orden M (ó L) de la forma $H_i\left(e^{j\omega M}\right)$ (ó $H_i\left(e^{j\omega L}\right)$).

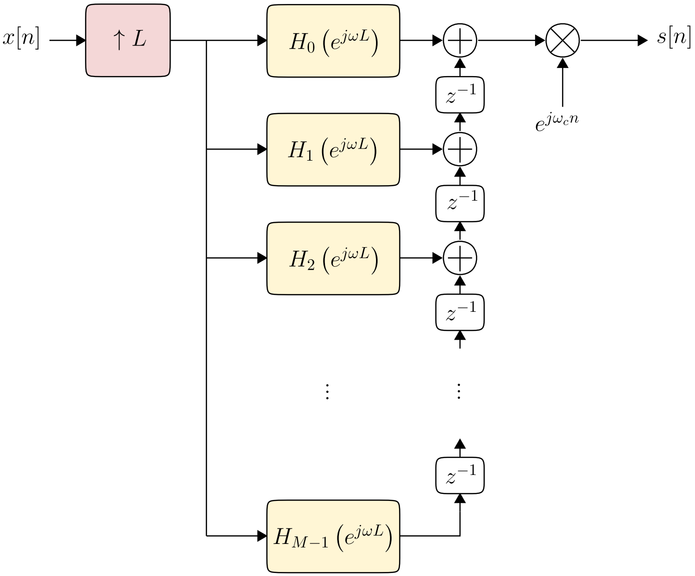
b) Al trasladar cada uno de los subsistemas al dominio de reloj más lento, se reduce el número de operaciones por segundo necesarias para calcular las salidas [2].

[2] En la implementación HW, los beneficios se reflejan en una reducción de la frecuencia de reloj (lo cual reduce los posibles errores de "timing"), o una reducción de los recursos HW consumidos por el sistema en un factor igual al factor de diezmado (o interpolado)


$x[n]$
$e^{-j\omega_c n}$
z^{-1}
z^{-1}
z^{-1}
z^{-1}
$H_0\left(e^{j\omega M}\right)$
$H_1\left(e^{j\omega M}\right)$
$H_2\left(e^{j\omega M}\right)$
$H_{M-1}\left(e^{j\omega M}\right)$
$\downarrow M$
$\downarrow M$
$\downarrow M$
$\downarrow M$
$s[n]$

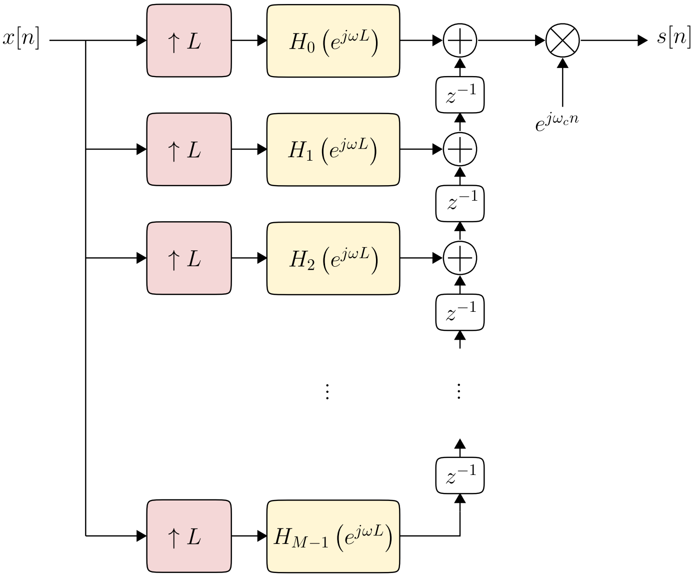
Análisis espectral mediante filtrado



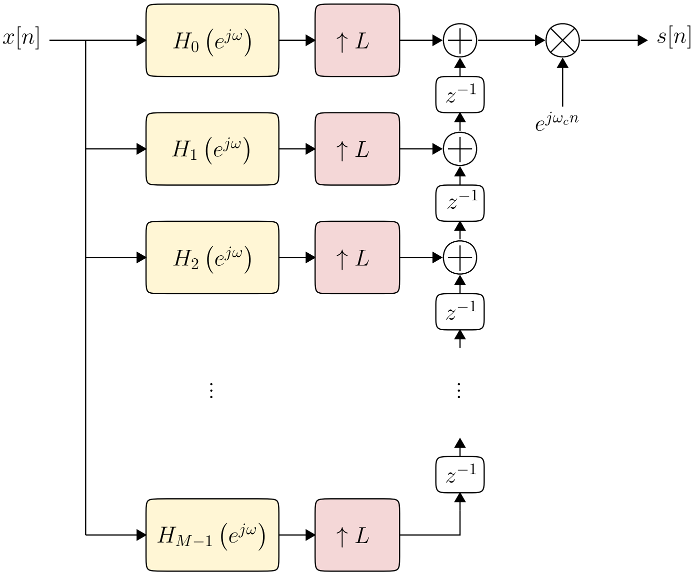


$x[n]$
$\uparrow L$
$H_0\left(e^{j\omega L}\right)$
$H_1\left(e^{j\omega L}\right)$
$H_2\left(e^{j\omega L}\right)$
$H_{M-1}\left(e^{j\omega L}\right)$
z^{-1}
z^{-1}
z^{-1}
z^{-1}
$e^{j\omega_c n}$
$s[n]$

Análisis espectral mediante filtrado



Análisis espectral mediante filtrado



- Las señales periódicas son el subconjunto de señales que cumplen:

$$x[n] = x[n - kN], \quad \forall\ k\ \in\ \mathcal{Z}, \quad N \equiv \text{ Periodo}$$

- Las señales periódicas se pueden expresar a partir de su desarrollo en serie de Fourier:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k e^{j\omega_k n}, \quad \forall\ n\ \in\ \mathcal{Z}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}$$

$$\alpha_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega_k n}$$

- A continuación, se recuerda la definición de la DTFT[3]:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n}$$

[3] Discrete-Time Fourier Transform (Transformada de Fourier en tiempo discreto)

- Relación entre el desarrollo en serie de Fourier y la DTFT:

$$\alpha_k = X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_k}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}$$

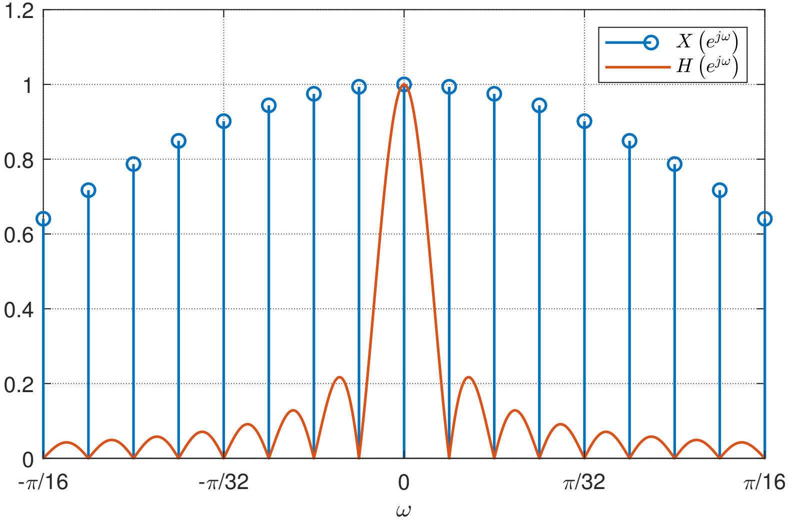
$$X\left(e^{j\omega_k}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega_k n} = \alpha_k$$

Los coeficientes del desarrollo en serie, α_k, de una señal periódica $x[n]$, de periodo N, se corresponden con las componentes espectrales de la DTFT situadas en ω_k.

- Interpretación de $\alpha_k = X\left(e^{j\omega_k}\right)$ como las salidas de un banco de filtros:

$$\alpha_k = X\left(e^{j\omega_k}\right) = \left(\left(x[n]\cdot e^{-j\omega_k n}\right) * h[n]\right)\downarrow N, \quad h[n] = 1\ \forall\ 0 \leq n < N$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{sin\left(\omega N/2\right)}{sin\left(\omega/2\right)}\cdot e^{-j\omega(N-1)/2}$$


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-π/16
-π/32
0
π/32
π/16
ω
$X\left(e^{j\omega}\right)$
$H\left(e^{j\omega}\right)$

- Definición de la DFT:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

- Y la transformada inversa, IDFT, se define como:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j(2\pi/N)kn}, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

- Relación entre la DFT y la DTFT:

$$X[k] = X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_k}, \quad \omega_k = 2\pi k/N$$

- La DFT representa el espectro de $X\left(e^{j\omega}\right)$ muestreado cada $\Delta\omega = 2\pi/N$.
- Para señales periódicas, de periodo N, se cumple que $X[k] = X\left(e^{j\omega}\right)$.

- **Propiedades de la DFT**

a) Linealidad

$$x_3[n] = \alpha_1 \cdot x_1[n] + \alpha_2 \cdot x_2[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X_3[k] = \alpha_1 \cdot X_1[k] + \alpha_2 \cdot X_2[k]$$

b) n módulo N

$$(n)_N = n - \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor \cdot N$$

c) Desplazamiento Temporal

$$x_1\left[(n - n_0)_N\right] \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1[k]\, e^{-j2\pi n_0 k/N}$$

d) Modulación

$$\cdot x_1[n] \cdot e^{j2\pi k_0 n/N} \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1\left[(k - k_0)_N\right]$$

- **Convolución Circular**

$$Z[k] = X[k] \cdot Y[k] \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} z[n] = x[n] \; ⓝ \; y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot y\left[(n-m)_N\right]$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \;\; k = 0, \;\ldots, \; N-1$$

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j2\pi kn/N}, \;\; k = 0, \;\ldots, \; N-1$$

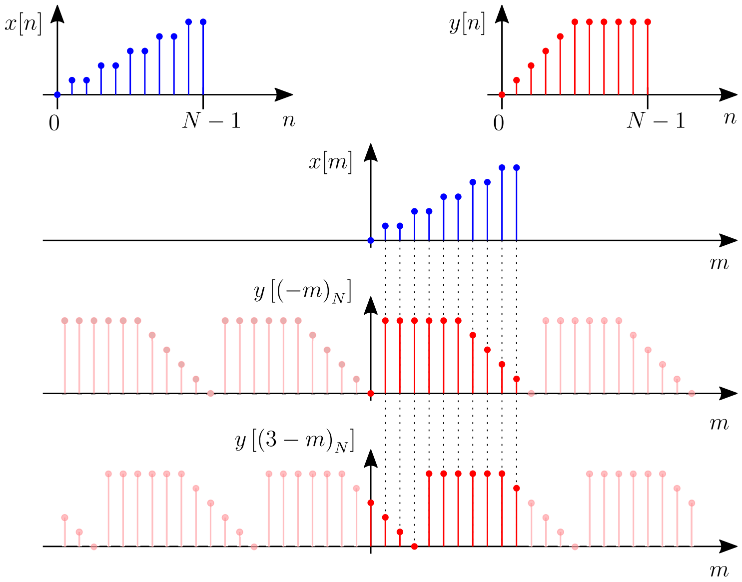
donde $X[k]$ e $Y[k]$ tienen el mismo número de componentes en frecuencia k.

N es la longitud de la señal más extensa en el dominio temporal:

$$N = max\,(L_x, L_y)$$

La convolución circular no se obtiene a partir de su definición, sino que se trata de el resultado de la multiplicación en el dominio de la frecuencia de dos DFTs correspondientes a dos secuencia temporales discretas.

La Transformada Discreta de Fourier (DFT)



- **Relación entre Convolución Circular y Convolución Lineal**

a) Por defecto, la convolución lineal (CL) no coinide con la convolución circular (CC).

b) Sea una señal $x[n]$ de longitud L_x, convolucionada con una señal $y[n]$ de longitud L_y:

$$z[n] = x[n] * y[n]$$

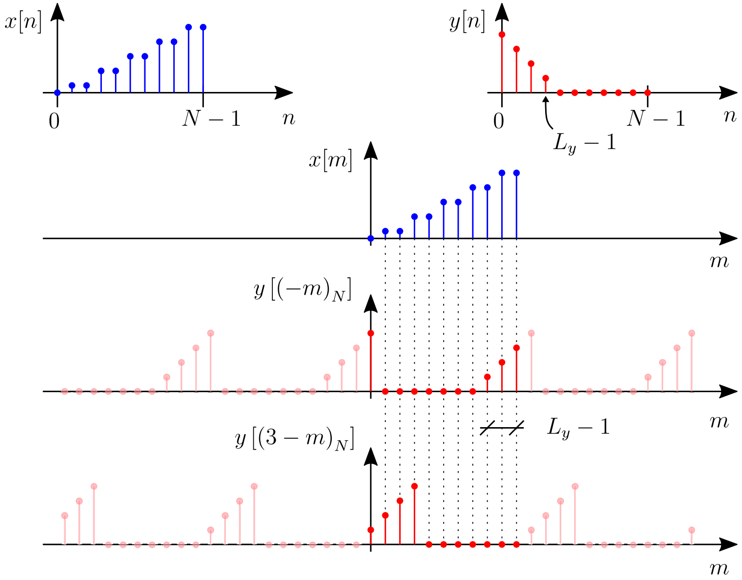
la longitud L_z de la señal resultante, $z[n]$, se calcula como:

$$L_z = L_x + L_y - 1$$

c) Sin embargo, para el caso de la convolución circular $L_z = max\,(L_x, L_y)$.

$$z[n] = x[n] \; Ⓝ \; y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot y\left[(n-m)_N\right], \; n = 0, \; \ldots, N-1$$

d) Si $L_y < L_x$, las primeras $L_y - 1$ muestras de $z[n]$ están afectadas por el efecto de la operación módulo N.


$x[n]$
0
$N-1$
n
$y[n]$
0
$N-1$
n
$L_y - 1$
$x[m]$
m
$y\left[(-m)_N\right]$
m
$L_y - 1$
$y\left[(3-m)_N\right]$
m

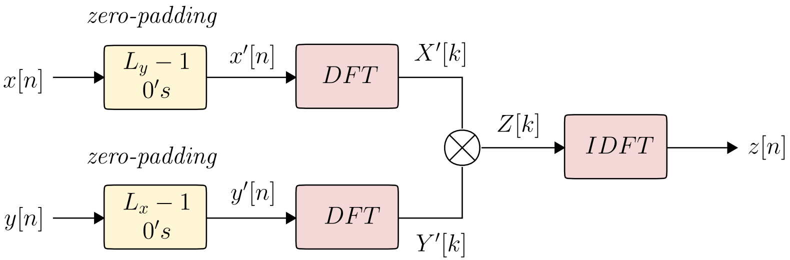
e) Para que CC = CL, se deben cumplir que:

$$N = L_x + L_y - 1$$

De este modo, la operación módulo N no distorsiona la salida de la CL.

f) Se deben añadir $L_y - 1$ ceros a la derecha de $x[n]$ antes de calcular su DFT.

g) Se deben añadir $L_x - 1$ ceros a la derecha de $y[n]$ antes de calcular su DFT.



- Complejidad computacional de la convolución lineal aplicando su definición:

$$O\left((P+N-1)\cdot P\right)$$

- Complejidad computacional de la convolución lineal mediante la DFT:

$$O\left(N_{FFT}\cdot\left(log_2\left(N_{FFT}\right)+1\right)\right),\quad N_{FFT}\geq P+N-1$$

- Si la señal de entrada se subdivide en fragmentos de longitud L y se realizan convoluciones lineales parciales:

$$O\left((N+P-1)\cdot\left(log_2\left(L+P-1\right)+1\right)\right),$$

- En aplicaciones de tiempo real, no se puede esperar a recibir toda la secuencia de entrada para calcular una convolución (el tiempo de espera puede ser ∞).

- **Fundamentos de la convolución por bloques**

a) La señal de entrada, $x[n]$, se subdivide en segmentos de longitud fija L.

$$x[n] = \sum_r x_r\left[n - r \cdot L\right], \quad x_r[m] = x[r \cdot L + m], \quad 0 \leq m \leq L - 1$$

b) La señal filtrada por el sistema, de respuesta al impulso $h[n]$:

$$h[n] \neq 0 \quad \forall \quad 0 \leq n \leq P - 1, \quad P \leq L$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{m=0}^{P-1} h[m] \cdot x[n-m] = \sum_{m=0}^{P-1} h[m] \cdot \sum_r x_r[n - r \cdot L - m] = \\ &= \sum_r \sum_{m=0}^{P-1} h[m] \cdot x_r[n - r \cdot L - m] \end{aligned}$$

$$y_r[n] = \sum_{m=0}^{P-1} h[m] \cdot x_r[n-m] \longrightarrow \boxed{y[n] = \sum_r y_r[n - r \cdot L]}$$

- **Overlap-Add (Solape y Suma)**

a) Se basa en calcular cada $y_r[n]$ a partir de la CL de $x_r[n]$ con $h[n]$.

b) La CL se calcula mediante la multiplicación de las DFTs de $x_r[n]$, $X_r[k]$, y $h[n]$, $H[k]$:

$$y_r[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[m] \cdot x_r\left[(n-m)_N\right], \quad N \geq L + P - 1$$

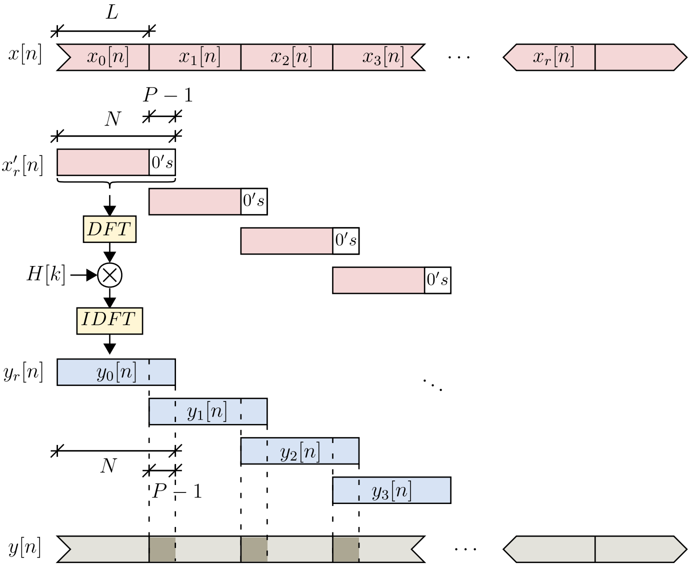
$$Y_r[k] = X_r[k] \cdot H[k] \longrightarrow y_r[n] = IDFT\left\{Y_r[k]\right\}$$

c) Cada una de las DFTs, $X_r[k]$ y $H[k]$ son de longitud $N \geq L + P - 1$.

d) Como $P < N$ y $L < N$, las secuencias $x_r[n]$ y $h[n]$ se deberán completar con 0's a la derecha antes de calcular las DFTs:

$$x'_r[n] = \begin{cases} x_r[n] & , \ 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & , \ L \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad h'[n] = \begin{cases} h[n] & , \ 0 \leq n \leq P-1 \\ 0 & , \ L \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

Técnicas de filtrado mediante la DFT



- **Overlap-Save (Solape y Almacenamiento)**

a) Se basa en calcular cada $y_r[n]$ a partir de la CC de $x_r[n]$ con $h[n]$.

b) Suponiendo que $x_r[n]$ es de longitud L y $h[n]$ de longitud P, donde $L > P$. Las primeras $P-1$ muestras a la salida de la CC $\neq$ CL, y deben ser eliminadas.

c) Como las primera $P-1$ muestras de $y_r[n]$ van a ser eliminadas, la secuencia $x_r[n]$ se deberá completar con las últimas $P-1$ muestras del bloque anterior.

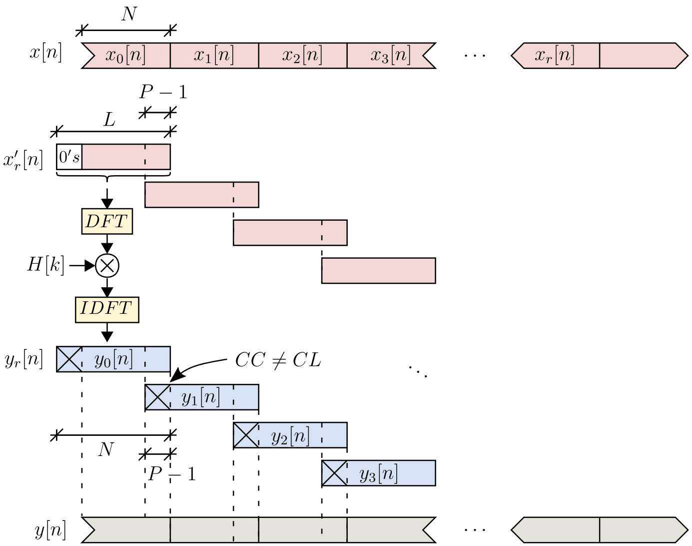
$$x_r[n] = x\left[n + r\cdot(L-P+1) - (P-1)\right],\ \ n = 0,\ \ldots,\ L-1$$

d) La CC se calcula mediante la multiplicación de las DFTs de $x_r[n]$, $X_r[k]$, y $h[n]$, $H[k]$:

$$y_r[n] = \sum_{m=0}^{P-1} h[m]\cdot x_r\left[(n-m)_L\right]$$

$$Y_r[k] = X_r[k]\cdot H[k] \ \longrightarrow\ y_r[n] = IDFT\left\{Y_r[k]\right\}$$

e) Cada una de las DFTs, $X_r[k]$ y $H[k]$ son de longitud L. Se eliminan las primeras $P-1$ muestras de cada bloque a la salida $y_r[n]$.


N
x[n]
x_0[n]
x_1[n]
x_2[n]
x_3[n]
· · ·
x_r[n]
P − 1
L
x'_r[n]
0's
DFT
H[k]
IDFT
y_r[n]
y_0[n]
CC ≠ CL
y_1[n]
y_2[n]
N
P − 1
y_3[n]
y[n]
· · ·

- **FFT diezmado en el tiempo**

a) La DFT tiene un complejidad computacional del tipo $O\left(N^2\right)$ defina por:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{k \cdot n}, \quad W_N = e^{-j2\pi/N}$$

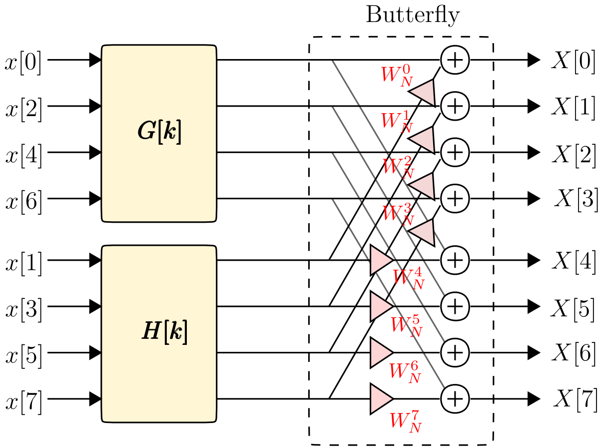
b) Separando el sumatorio en índices pares e impares:

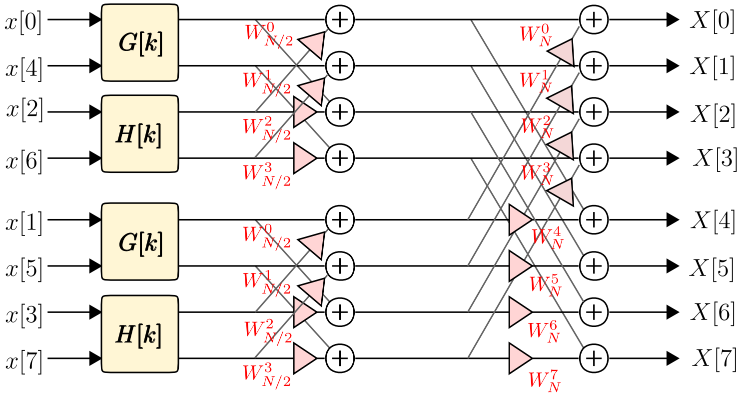
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2 \cdot n] W_N^{k \cdot 2 \cdot n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2 \cdot n + 1] W_N^{k \cdot (2 \cdot n + 1)}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2 \cdot n] W_{N/2}^{k \cdot n} + \left(\sum_{n=0}^{N/2-1} x[2 \cdot n + 1] W_{N/2}^{k \cdot n} \right) \cdot W_N^k$$

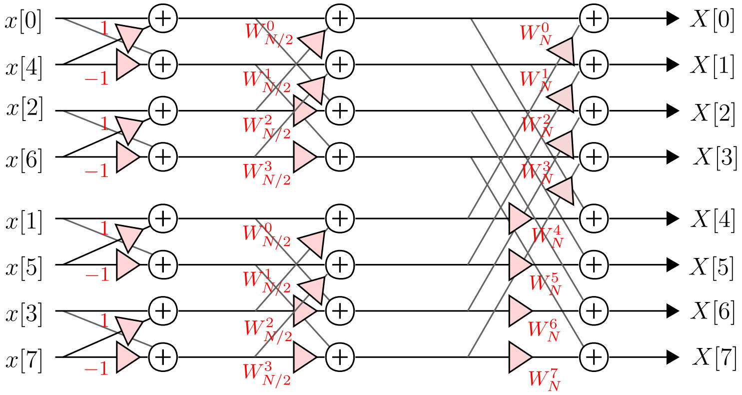
$$X[k] = G[k] + H[k] \cdot W_N^k, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

c) Se cumple que $G[k] = G[k + N/2]$ y $H[k] = H[k + N/2]$.


Butterfly
x[0]
x[2]
x[4]
x[6]
x[1]
x[3]
x[5]
x[7]
G[k]
H[k]
W_N^0
W_N^1
W_N^2
W_N^3
W_N^4
W_N^5
W_N^6
W_N^7
X[0]
X[1]
X[2]
X[3]
X[4]
X[5]
X[6]
X[7]


x[0]
x[4]
x[2]
x[6]
x[1]
x[5]
x[3]
x[7]
G[k]
H[k]
G[k]
H[k]
$W_{N/2}^0$
$W_{N/2}^1$
$W_{N/2}^2$
$W_{N/2}^3$
$W_{N/2}^0$
$W_{N/2}^1$
$W_{N/2}^2$
$W_{N/2}^3$
W_N^0
W_N^1
W_N^2
W_N^3
W_N^4
W_N^5
W_N^6
W_N^7
X[0]
X[1]
X[2]
X[3]
X[4]
X[5]
X[6]
X[7]

La Transformada Rápida de Fourier (FFT)



- **FFT diezmado en la frecuencia**

a) Se dividen los índices en frecuencia k pares e impares.

$$X_o[k] = X[2 \cdot k] \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\longrightarrow} x_o[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n + m \cdot N/2], \quad 0 \leq n \leq N/2 - 1$$

$$X_1[k] = X[2 \cdot k + 1] \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\longrightarrow} x_1[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n + m \cdot N/2] \cdot W_N^{n + m \cdot N/2}, \quad 0 \leq n \leq N/2 - 1$$

b) Detalle del cálculo de $X_1[k]$:

$$X'[k] = X[K + 1] \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\longrightarrow} x'[n] = x[n] \cdot e^{-j2\pi n/N} = x[n] \cdot W_N^n$$

$$X_1[k] = X'[2 \cdot K] \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\longrightarrow} x_1[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x'[n + m \cdot N/2]$$

c) Sabiendo que $x[n]$ tiene longitud N:

$$x_o[n] = x[n] + x[n + N/2]$$

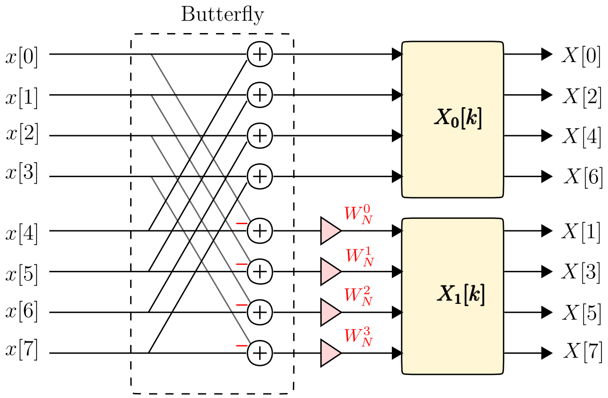
$$x_1[n] = x[n] \cdot W_N^n + x[n + N/2] \cdot W_N^n \cdot W_N^{N/2} = (x[n] - x[n + N/2]) \cdot W_N^n$$

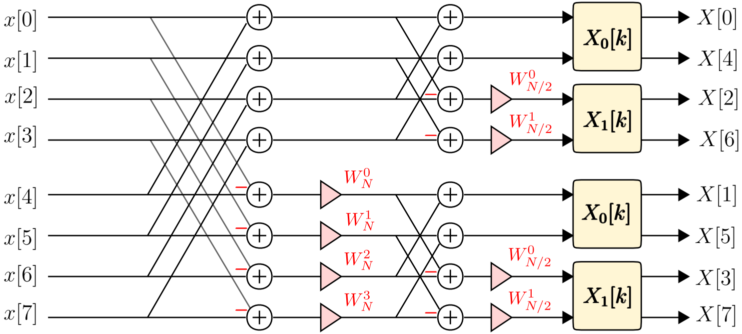
$$W_N^{N/2} = e^{-j2\pi N/2 \cdot N} = e^{-j\pi} = -1$$

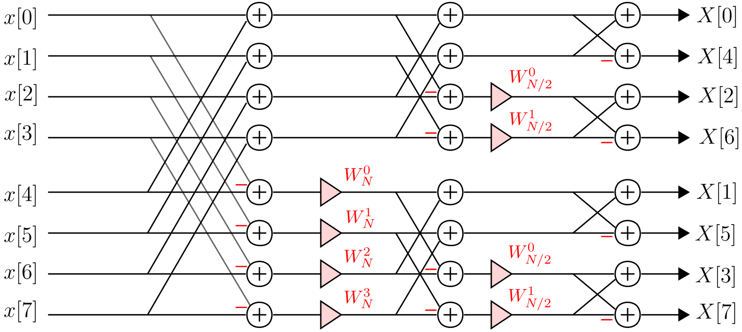
d) A partir de las ecuaciones anteriores:

$$X_0[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n + N/2]) \cdot W_{N/2}^{k \cdot n}$$

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} ((x[n] - x[n + N/2]) \cdot W_N^n) \cdot W_{N/2}^{k \cdot n}$$


Butterfly
$x[0]$
$x[1]$
$x[2]$
$x[3]$
$x[4]$
$x[5]$
$x[6]$
$x[7]$
W_N^0
W_N^1
W_N^2
W_N^3
$X_0[k]$
$X_1[k]$
$X[0]$
$X[2]$
$X[4]$
$X[6]$
$X[1]$
$X[3]$
$X[5]$
$X[7]$


$x[0]$
$x[1]$
$x[2]$
$x[3]$
$x[4]$
$x[5]$
$x[6]$
$x[7]$
W_N^0
W_N^1
W_N^2
W_N^3
$W_{N/2}^0$
$W_{N/2}^1$
$W_{N/2}^0$
$W_{N/2}^1$
$X_0[k]$
$X_1[k]$
$X_0[k]$
$X_1[k]$
$X[0]$
$X[4]$
$X[2]$
$X[6]$
$X[1]$
$X[5]$
$X[3]$
$X[7]$


x[0]
x[1]
x[2]
x[3]
x[4]
x[5]
x[6]
x[7]
W_N^0
W_N^1
W_N^2
W_N^3
$W_{N/2}^0$
$W_{N/2}^1$
$W_{N/2}^0$
$W_{N/2}^1$
X[0]
X[4]
X[2]
X[6]
X[1]
X[5]
X[3]
X[7]

- **Complejidad computacional de la FFT**

a) Cada etapa tiene $\boldsymbol{N}$ multiplicaciones.

b) si $\boldsymbol{N = 2^q}$, se obtienen $\boldsymbol{q}$ etapas del algoritmo.

c) La complejidad computacional del algoritmo queda:

$$O\left(\boldsymbol{N} \cdot log_2\left(\boldsymbol{N}\right)\right) = O\left(\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{q}\right)$$

Referencias

a) Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer. "Discrete Time Signal Processing". Prentice-Hall. Third Edition