一点微小的工作

北京大学 杜宇飞

叉姐

一些积分问题

一点微小的工作

用积分解决问题

好处都有啥?

- 单刀直入，不伤脑
- 代码好写，不占队友的机时
- 不易写错，分类讨论少

简而言之，就和暴力差不多。

用积分解决问题 (CONT’D)

那为什么大家都不用呢?

- 精度越好，速度越慢
- 而且，一般精度和速度都不行

SIMPSON 积分法

先分段，用抛物线估计曲顶矩形。

对于 $[a,b]$ 一段，其面积可以估算为

$$(b-a)\frac{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{6}$$

为什么用二次曲线，而不是直线或者三次、四次曲线?

- 性能和精度的平衡

自适应积分法

对于区间 $[a, b]$，记估计得到的曲顶矩形的面积为 $S'(a, b)$。

用下面方法计算积分:

$$S(a,b)=\begin{cases} S'(a,b) & \left|S'(a,b)-S'\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)-S'\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)\right| \text{ 满足精度要求} \\ S\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)+S\left(\dfrac{a+b}{2},b\right) & \text{否则} \end{cases}$$

亦即如果精度满足要求，就在本层用 $S'(a, b)$ 估算积分；否则递归。

自适应积分法 (CONT'D)

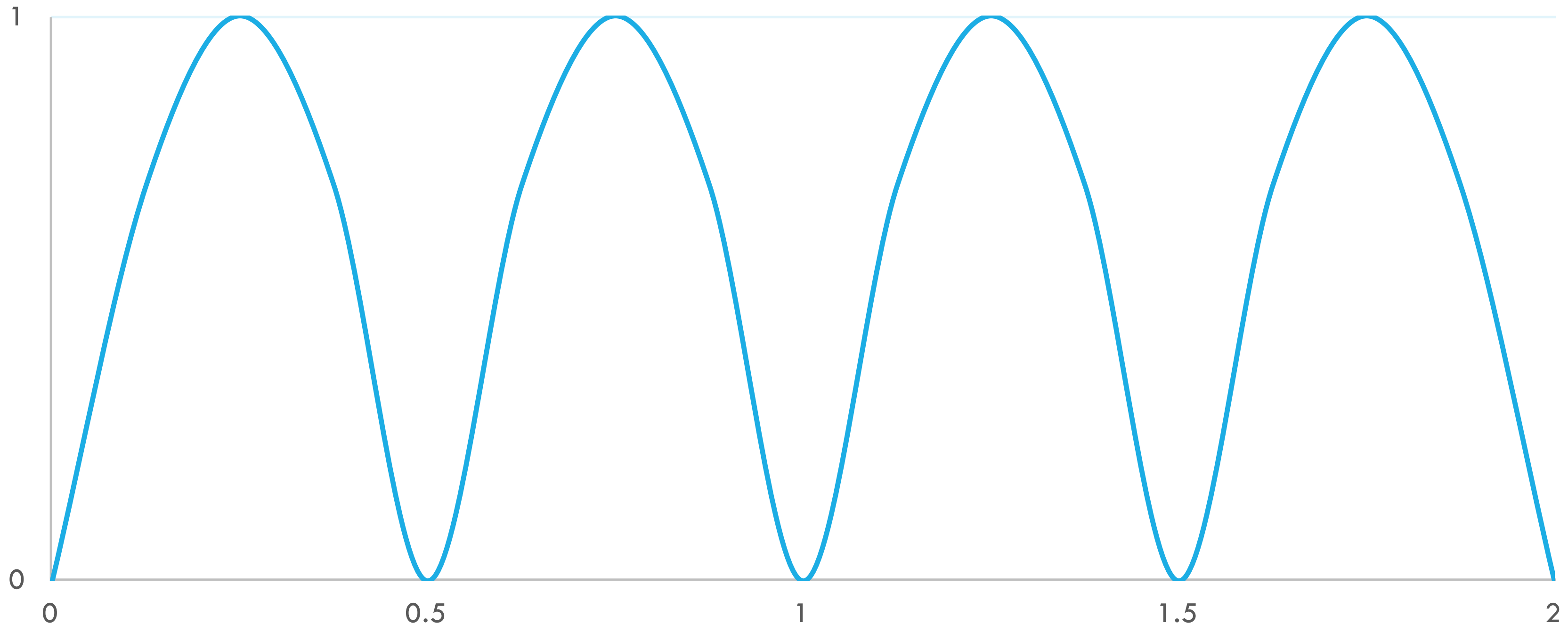
自适应积分法——

- 可以在函数变化比较大的地方多分一些段，而在其他地方少分一些段。
- 在有限的时间内达到比较好的精度。

自适应积分法的局限——

自适应积分法 (CONT'D)

算出来答案是 0——



自适应积分法 (CONT'D)

可以根据具体的问题处理。

- 先将区间等分为若干份，然后在每份内部做自适应积分。
- 如果函数中有大段区域是 0，也可以找出不为 0 的值对应的定义域，在这些定义域内做积分。

精度控制

记 $\Delta = \left| S'(a,b) - S'\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S'\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right|$，精度设定为 ϵ。

绝对误差：$\Delta \le \epsilon(b-a)$

相对误差：$\Delta \le \epsilon S'(a,b)$

但是这个对结果的误差并不能做出保证（上一张图就是一个例子），所以还是一种玄学。

求面积：条形微元

最常见的积分题，大家都会做。

例：在一个平面上，有一些简单多边形，边数之和不超过 100。求这些简单多边形的面积并。

求面积：条形微元 (CONT'D)

将函数 $f(x_0)$ 定义为：直线 $x = x_0$ 与这些多边形所交部分之长。

不妨设这些多边形的横坐标最小为 x_1，最大为 x_2。那么答案为

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

这个函数可能有大段的函数值是 0。可以先找出函数值大于 0 的区间。

求面积：扇形微元

稍微有些不常见了，但是做法没有什么区别。

例：有一个矩形的房间，房间内有很多简单多边形形状的障碍物，边数之和不超过 100，相交不相交无所谓。你站在房间的一点，求你视野的面积。

求面积：扇形微元 (CONT'D)

将函数 $f(\alpha)$ 定义为，从你出发的极角为 α 的射线与所有障碍物的最靠近你的交点，与你之间的距离。

那么答案为

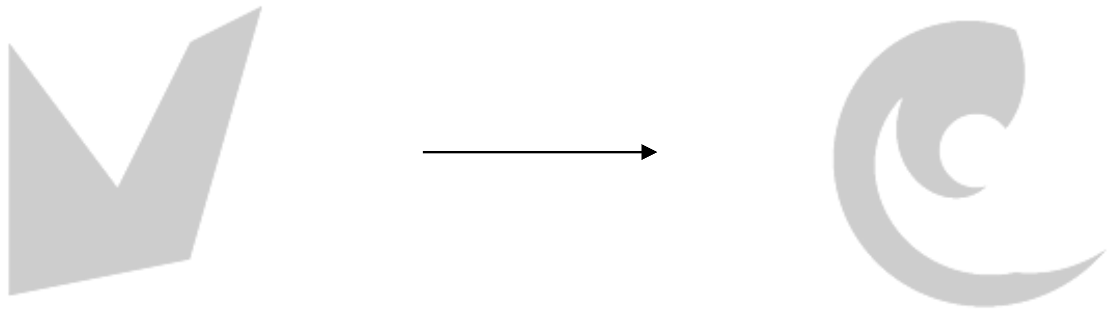
$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$$

积分项可以理解为半径为 $f(\alpha)$，弧度为 $\mathrm{d}\alpha$ 的扇形。

求面积：边界微元

如果能够确定图形的边界，那么它的面积当然可以求。

例：给定一个简单多边形（不超过 10W 条边），纵坐标落在 $[-\pi, \pi]$ 内。对它做一个极坐标变换（即变换 $T(x,y) = (x\cos y, x\sin y)$），求变换之后的图形的面积。



求面积：边界微元 (CONT'D)

如果某图形的边界是封闭不自交曲线 T，那么它的面积是

$$\oint_T \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{2}$$

亦即，若 T 可以表示为 $\big(x(t), y(t)\big), t \in [0,1]$，那么这个图形的面积就是

$$\int_0^1 \frac{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)}{2}\,\mathrm{d}t$$

这个东西可以理解为 (x, y) 与 $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$ 的叉积。

求面积：边界微元 (CONT’D)

对于一条边 (x_0,y_0) 到 (x_1,y_1)，记 $x(t)=x_0+t(x_1-x_0)$，$y(t)=y_0+t(y_1-y_0)$，那么变换后的 $\tilde{x}=x\cos y$，$\tilde{y}=x\sin y$。

计算可得

$$\frac{\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y}-\tilde{y}\,\mathrm{d}\tilde{x}}{2}=\frac{(y_1-y_0)x^2(t)\,\mathrm{d}t}{6}$$

积分后得到

$$\frac{(y_1-y_0)(x_0^2+x_0x_1+x_1^2)}{6}$$

所以答案就是本式对各边的累加。

求重心

如果是均质的，可以用条形微元。重心的横坐标为

$$\frac{\int_I x f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_I f(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\int_I x f(x)\,\mathrm{d}x}{S}$$

如果是非均质的，那么需要用重积分。设密度函数是 $h(x,y)$，重心横坐标为

$$\frac{\iint_D x h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_D h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \frac{\iint_D x h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{M}$$

不过我从来没见过需要用积分的求重心题。一般用质点组就搞定了。

求弧长

用微元 $\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$。

和求重心一样，这种题也很不多见。真的碰上了，直接用这个算就是了。大家都会的。

求体积：“片”形微元

就像求面积可以切条，求体积也可以切片。

例 (POJ 2150)：给定一个简单多边形（实际上是简单四边形），落在 $[0,10]\times[0,10]$ 内。首先把这个多边形放在 xOz 平面的 $[0,10]\times[0,10]$ 区域，沿 y 轴平移 10，得到一个柱体；然后这个多边形放在 yOz 平面的 $[0,10]\times[0,10]$ 区域，沿 x 轴平移 10，得到另一个柱体。求这个柱体的

- 体积。
- 表面积。

求体积：“片”形微元 (CONT’D)

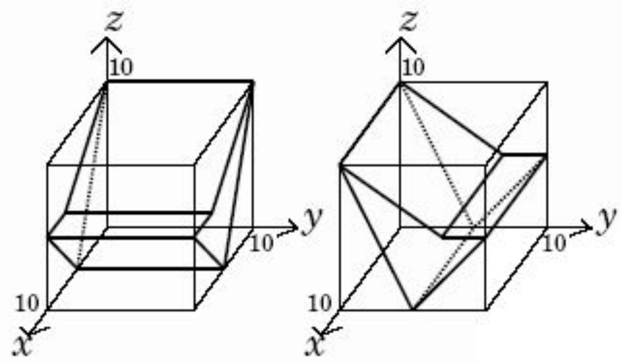


Figure 14: Two identical prisms at right angles

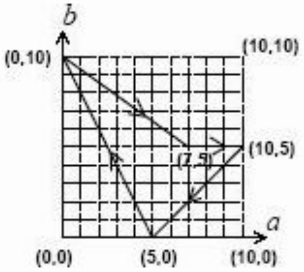


Figure 15: Outline of the cross section

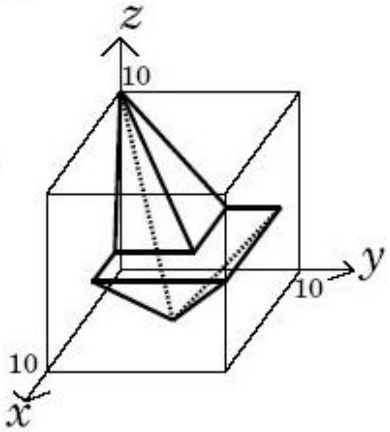
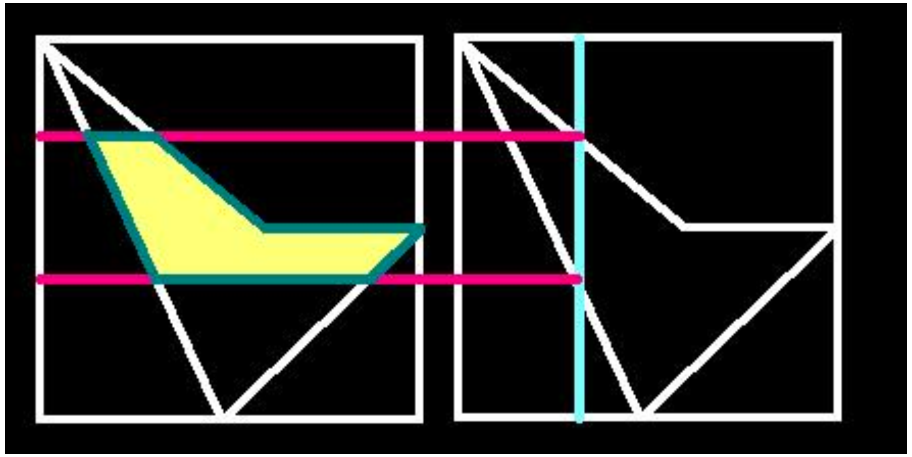


Figure 16: The intersection

求体积：“片”形微元 (CONT’D)

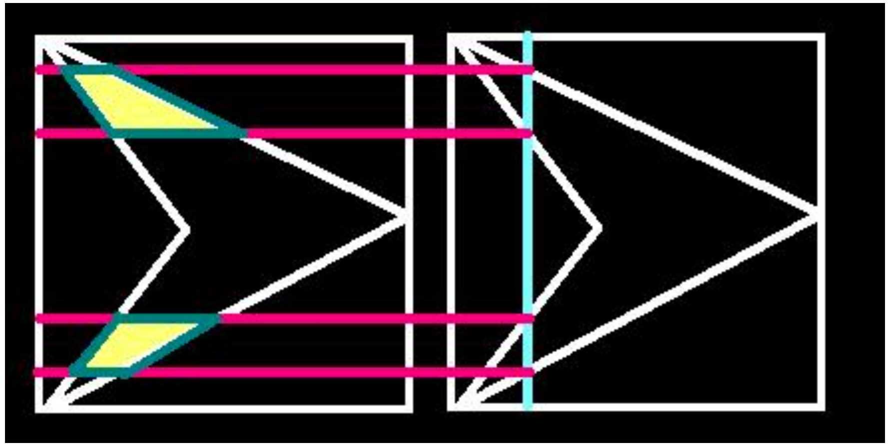
考虑这玩意儿与 yOz 平面的截面。它应该是两个柱体各自截面的交。

对于那个在 x 轴上平移的柱体，这个截面就是原来的四边形；而对于另外一个柱体，这个截面是一个或者多个矩形。



求体积：“片”形微元 (CONT’D)

或者



求体积：“片”形微元 (CONT'D)

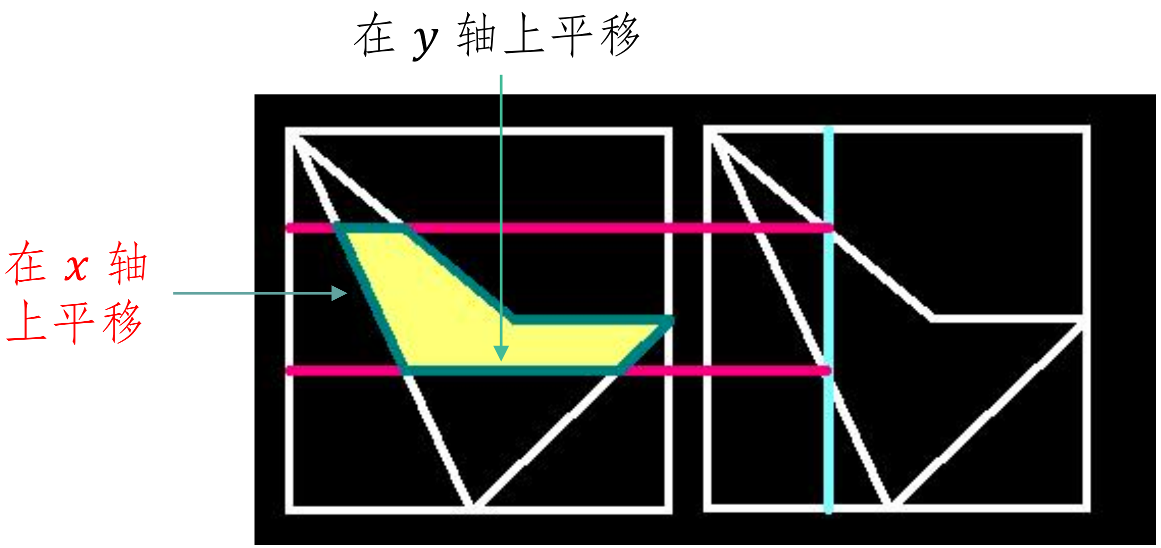
所以求体积，就用截面的面积在 x 轴上作积分即可。

那么表面积怎么求?

求体积：“片”形微元 (CONT’D)

容易想到的思路是，用截面的周长作积分。但是这是不正确的。

不难发现，对在 x 轴上平移得到的柱体上来的边做积分，由于它原来所在的面与 xOz 平面平行，所以得到的是与 xOz 平面平行的面。

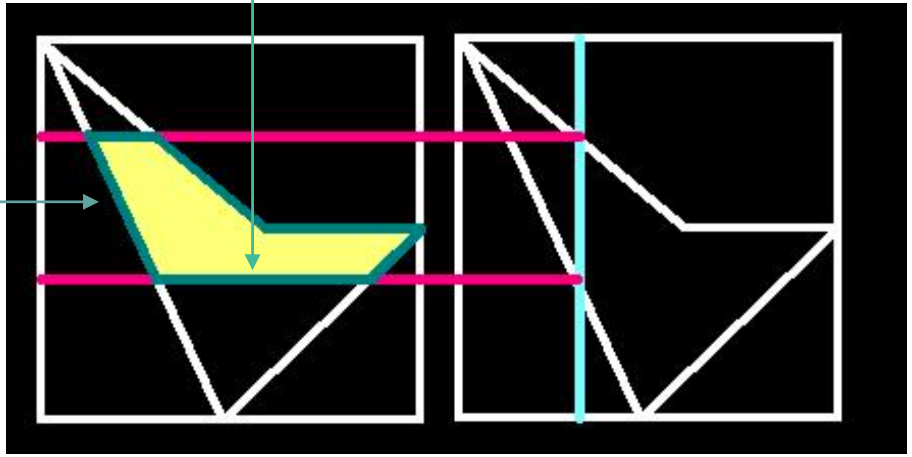


求体积：“片”形微元 (CONT'D)

但是，对在 y 轴上平移得到的柱体上来的边做积分，由于它原来所在的面与 yOz 平面不平行，得到的不是与 yOz 平面平行的面。

在 y 轴上平移

在 x 轴上平移

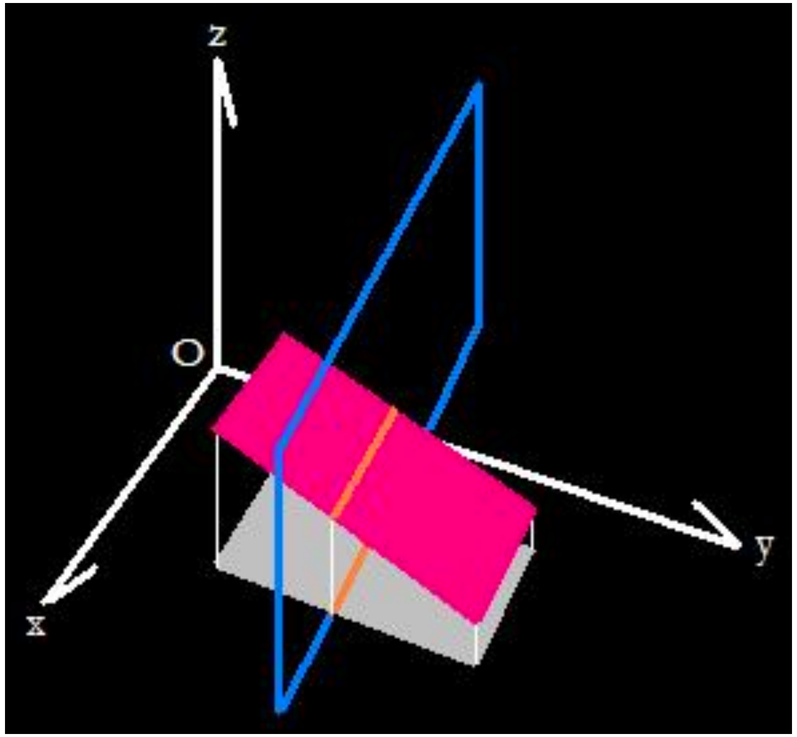


求体积：“片”形微元 (CONT’D)

这样的面与 yOz 平面有一夹角 θ，其面积为它在 yOz 平面上的投影的面积的 $\frac{1}{\cos\theta}$ (即$\sec\theta$ 倍)。

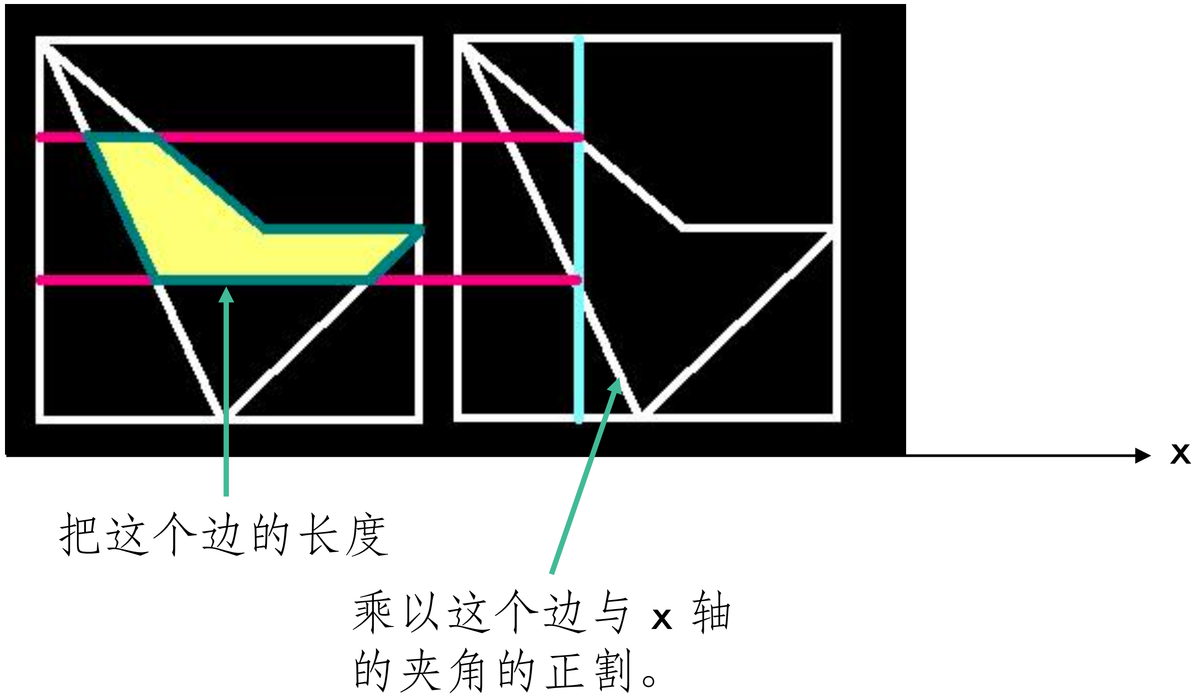
而用这样的面上的边作积分，得到的面即为投影面的一部分。所以对应到原立体上的一个面，其面积也是 $\sec\theta$ 倍。

所以，简而言之，把所有与 y 轴平行的边的长度乘上 $\sec\theta$，其中 θ 是——



求体积：“片”形微元 (CONT’D)

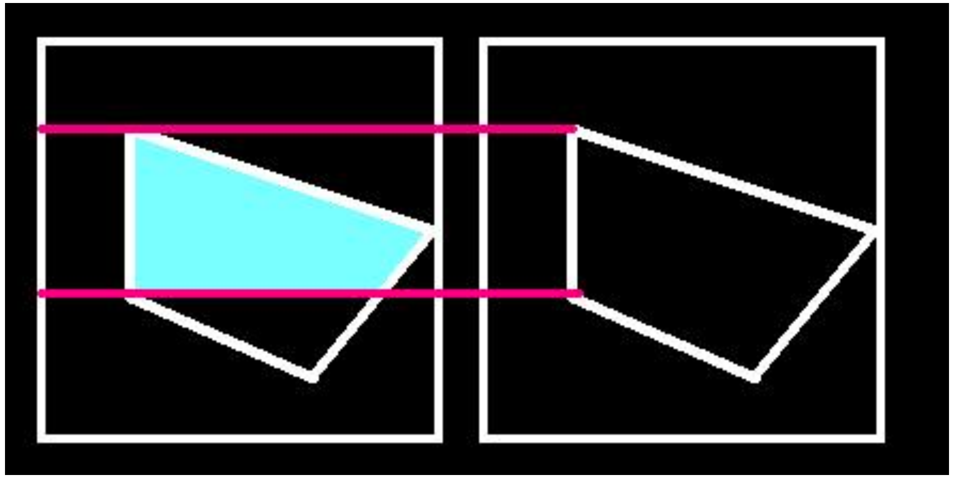
——是这个边与 x 轴的夹角（下面这个图看看就好，左右两部分的坐标轴是不一样的）。



求体积：“片”形微元 (CONT’D)

坑点：与截面 (yOz 平面) 平行的面的面积算不到。

方法：特判。下面的蓝色面的面积直接加上。



求体积：球坐标微元

例：

- 你有一个房间无限大，且处在第一卦限（也就是说，房间即为点集 $\{(x,y,z),x,y,z\geq 0\}$，三面墙分别是 $x=0,y=0,z=0$）。
- 你有一个手电筒在 (x_0,y_0,z_0) 处，手电筒射出一个光锥，光锥的高线方向为 (x_l,y_l,z_l)，并且母线与高线的夹角为 α（也就是说，所有起点为 (x_0,y_0,z_0)，且延伸方向与 (x_l,y_l,z_l) 的夹角不超过 α 的射线，都是手电筒射出的光线）。
- 求光锥的体积。

求体积：球坐标微元 (CONT'D)

用球坐标做这题十分简便。

在球坐标中，表示一个方向需要两个角 (ϕ, θ)，分别称为纬度和经度。

设向 (ϕ, θ) 射出的光线，到墙为止的长度为 $r(\phi, \theta)$，那么答案就是

$$\frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\alpha} \mathrm{d}\phi\ r^3(\phi, \theta) \sin\phi$$

求体积：球坐标微元 (CONT'D)

为何微元是

$$\frac{1}{3}r^3 \sin\phi \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta$$

从 Jacobi 行列式的角度出发，(r,ϕ,θ) 坐标系到 (x,y,z) 坐标系的变换为：

$$x = r\sin\phi\cos\theta\,,\ y = r\sin\phi\sin\theta\,,\ z = r\cos\phi$$

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,\theta)}\right| \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = r^2 \sin\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

求体积：球坐标微元 (CONT'D)

对 r 做一次积分，即得原式等于

$$\int_0^{r(\phi,\theta)} r^2 \sin\phi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3} r^3 \sin\phi \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}\theta$$

也可以以高中生的视角来看。向量 $r(\phi,\theta)$ 在 ϕ 上微动 $\mathrm{d}\phi$，得到一条长度为 $r\,\mathrm{d}\phi$ 的边；在 θ 上微动 $\mathrm{d}\theta$，得到一条长度为 $r\sin\phi\,\mathrm{d}\theta$ 的边。

两方向同时微动得到的这一小条可以近似为一个四棱锥，高为 r，所以体积微元是

$$\frac{1}{3} r^3 \sin\phi \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}\theta$$

(以上都是胡说八道)

求体积：球坐标微元 (CONT’D)

做重积分，可以化为累次积分，用 Simpson 自适应积分嵌套来做。

当然，这样时间开销和精度的损失就更大了。

一个几何题能用积分过的前兆

精度要求不高。

- “小数点后两位”（同时答案看上去不超过 1000）
- “相对误差 1e-3”

要积的函数比较连续，变化比较平缓。

要积的函数很好算。

标准做法的时间复杂度也没好到哪儿去。

标准做法特别繁，出题人看上去又比较傻逼。

~~要积的函数的原函数被你算出来了~~(这种一般叫数学题)

球面几何初步

一点微小的工作

球

除非特指，球均指单位球。

球面几何学从某种程度上说就是单位向量的几何学。球上一点就是一个单位向量。

球面几何是非欧几何的一种。

球坐标

球上的一个点由 (ϕ, θ) 确定。

ϕ 为纬度，取值为 $[-\pi/2, \pi/2]$；θ 为经度，取值为 $[-\pi, \pi]$。

这个点的坐标为

$$(\cos\phi\cos\theta\,, \cos\phi\sin\theta\,, \sin\phi)$$

大圆距离

球面上，两点的最短路线为**大圆**的弧，即两点与球心所在平面与球所交出的圆。

先求两点的夹角（即球心到两点所成的两个向量的夹角）α，则它们的大圆距离即为 α。

大圆的弧称为球面上的**边**，又称为**测地线**。边可以看做是两端点的夹角。

球面角

球上的两边有一个夹角。

球上的边也可以看做一个平面（球心与两端点所称的平面），而球上两边的夹角即为两个平面的二面角。

在这个定义下：过球上一点有多少条已知边的平行线？答案是 0 条。

- 在欧氏几何中，答案是 1 条。
- 在双曲面几何中，答案是无穷多条。

球面三角形

球面上的三条边也可以组成**球面三角形**。

我们可以想象一个地球上的三角形，它就是一个球面三角形。只不过，一般情况下这个三角形都非常小，以至于可以用欧式几何的方法处理。

而当球面三角形的尺度很大的时候，可以发现：球面三角形的内角和可以大于π。

角盈

球面三角形的内角和与 π 的差值称为**角盈**，又叫**角超**。

球面三角形的面积等于角盈。

上页结论之证明

记 A' 为 A 的对径点，B,C 类似。

那么

$$\varDelta ABC + \varDelta A'BC = 2A$$

$$\varDelta ABC + \varDelta AB'C = 2B$$

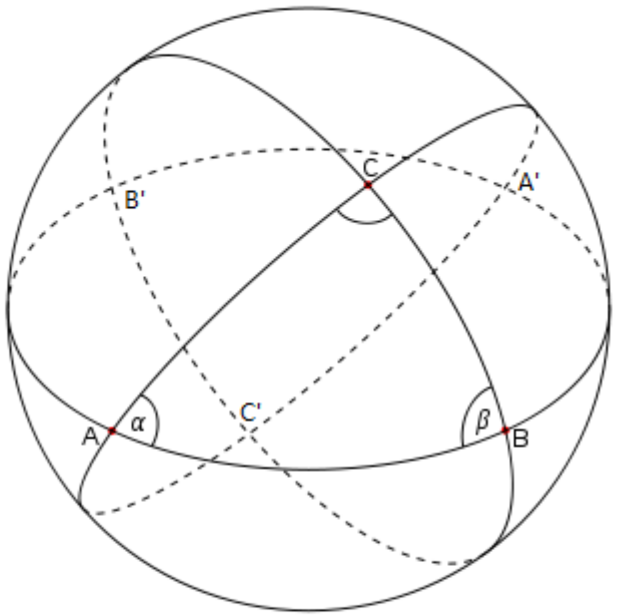
$$\varDelta ABC + \varDelta ABC' = 2C$$

$$\varDelta ABC' = \varDelta A'B'C$$

$$\varDelta ABC + \varDelta A'BC + \varDelta AB'C + \varDelta A'B'C = 2\pi$$

因此

$$2\varDelta \mathrm{ABC} = 2\mathrm{A} + 2\mathrm{B} + 2\mathrm{C} - 2\pi$$



推论

逆时针地走过这个三角形，则左转的角度为

$$(\pi - A) + (\pi - B) + (\pi - C) = 3\pi - A - B - C = 2\pi - \varDelta ABC$$

所以，你转过的角度（即外角和）与 2π 的差值即为三角形的面积。

这个推论可以在多边形甚至任意球面图形上推广。逆时针绕着该图形走一圈，你所向左转过的角度即为该图形的面积。

球的正弦定理与余弦定理

以下定理仅给出，不证明。

对于球面三角形 ABC，记 D 为 A, B, C 三个向量的混合积，即 $\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC})$，那么有

$$D=\sin A\sin b\sin c$$

其中 A, B, C 为三角形的内角 A, B, C 的大小；a, b, c 为三角形内角 A, B, C 所对之边（也可以看做是角）的大小。

有正弦定理

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}=\frac{D}{\sin a\sin b\sin c}$$

球的正弦定理与余弦定理

以及余弦定理

$$\cos A \sin b \sin c = \cos a - \cos b \cos c$$

$$\cos B \sin a \sin c = \cos b - \cos a \cos c$$

$$\cos C \sin a \sin b = \cos c - \cos a \cos b$$

以上三式是等价的。

正弦定理与余弦定理的作用正像它们在平面几何中的作用，可以用于解三角形。

解球面三角形

例：在球面上一点 A，你向方向 v_1 走了 a_1 长度，你妹子向方向 v_2 走了 a_2 长度，且 v_1 和 v_2 的夹角为 θ。求你和你妹子现在的距离。