doi: 10.3969/j.issn.1008-1399.2014.05.002

递推数列通项的矩阵解法

龚丽燕[1,2]，陈益智[2]，蔡俊树[2]

(1. 广东工业大学 应用数学学院，广东 广州 510520；
2. 惠州学院 数学系，广东 惠州 516007)

摘　要　分情形讨论递推数列求通项的问题，介绍相应的矩阵解法，并借助实例说明其应用.

关键词　递推数列；通项；矩阵；对角化

中图分类号　O152.7　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008-1399(2014)05-0003-04

Matrix Theory and Recursive Sequences

GONG Liyan, CHEN Yizhi, CAI Junshu

(1. School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, PRC;
2. Department of Mathematics, Huizhou University, Huizhou 516007, PRC)

Abstract: In this paper, general term formulas for some recursive sequences are obtained with the corresponding matrices. Also, some examples are illustrated.

Keywords: recursive sequence, general term, matrix, diagonalization

矩阵是从实际问题的计算中抽象出来的一个数学概念，是线性代数的基本内容之一，它在物理、工程技术、经济等许多领域中也有着广泛的应用. 最近，已有不少文献[1-2]借助矩阵的思想解决了初等数学中的一些数学问题. 本文将利用矩阵的思想方法来解决高考数学及中学竞赛数学中一些具有一定难度的递推数列问题. 我们就最近几年高考数学及竞赛数学中所出现的递推数列问题，分 4 种类型给出了矩阵思想的相应求解方法. 结果发现，用矩阵思想来求解数列问题有时比常规做法要来得更简便、快捷些. 同时，矩阵理论的这些应用，不仅可以让我们对高等数学和初等数学有效衔接方面有更深刻的认识，也可以让我们的数学思维得到进一步的拓宽.

对于本文出现而未提及的数学概念或术语，可参看文献[3-4].

情形 1　递推数列形如

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}$$
$$(c_k \neq 0,\ n = k+1,\ k+2, \cdots).$$

对此情形的数列，通过观察等式，可等价给出方程组

$$\begin{cases} a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}, \\ a_{n-1} = a_{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-k+1} = a_{n-k+1}. \end{cases}$$

该方程组可表示为矩阵形式

收稿日期：2012-07-13；**修改日期**：2013-12-11

基金项目：国家级大学生创新创业训练计划项目(201310577008)；广东高校优秀青年创新人才培养计划项目(2013LYM0086)；广东省教育科研项目(2013JK168)；广东省高等教育教学改革与教学研究项目(GDJG20141242)

作者简介：龚丽燕(1989—)，女，广东河源人，硕士研究生，研究方向为非线性泛函分析. Email: gongly89@163.com

陈益智(1980—)，男，广东龙川人，讲师，博士，从事代数学研究. Email: cyz@hzu.edu.cn

蔡俊树(1992—)，男，广东汕尾人，2010 级数学与应用数学专业本科生. Email: 1205725368@qq.com

参考文献

[1]　李庆杨，王能超，易大义. 数值分析[M]. 5 版. 北京：清华大学出版社，2008：239.

[2]　孙雨雷，冯君淑. 数值分析(第 5 版)同步辅导及习题全解[M]. 北京：中国水利水电出版社，2011：117.

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \cdots \\ a_{n-k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \cdots \\ a_{n-k} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

若令

$$\boldsymbol{A}_{n-k+1} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \cdots \\ a_{n-k+1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{n-k} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \cdots \\ a_{n-k} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

则式(1) 可以写成

$$\boldsymbol{A}_{n-k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_{n-k}.$$

由该式递推得

$$\boldsymbol{A}_{n-k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_{n-k} = \cdots = \boldsymbol{A}^{n-k}\boldsymbol{A}_1.$$

于是求 a_n 就归结为求 $\boldsymbol{A}_{n-k+1}$，也就是求 $\boldsymbol{A}^{n-k}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$ 为对角形矩阵，则问题将变得更方便求解.

例 1 已知数列$\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n.$$

求数列$\{a_n\}$ 的通项公式.

解 由原数列可得

$$\begin{cases} a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n, \\ a_{n+1} = a_{n+1}, \end{cases}$$

也即

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}.$$

可令

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

则存在

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}.$$

从而

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{P}^n\boldsymbol{T}^{-1} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n+2} - 1 \\ 2^{n+1} - 1 \end{bmatrix},$$

所以

$$a_n = 2^n - 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

注 1 通过该题的求解，我们可发现矩阵思想解决此类型题非常简便，运用矩阵方法可避免了构造新数列的难点，更突出了矩阵方法方便、快捷的优点. 利用该方法，还可以类似求解：2009 年全国高考数学文科卷中的数列题；2005 年天津文科第 18 题.

情形 2 递推数列形如

$$a_n = \frac{aa_{n-1} + b}{ca_{n-1} + d}.$$

对此数列，记

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

则可求得

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

的上下两行分别为 a_2 的分子、分母；依次求得矩阵

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

的上下两行分别为 a_n 的分子、分母.

例 2 已知数列$\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = 2, \quad a_n = \frac{3a_{n-1} + 5}{5a_{n-1} + 3} (n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}^*),$$

求数列$\{a_n\}$ 的通项公式.

解 由题意记

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},$$

由所给数列的递推关系得

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

易求得矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的特征根和对应的一个特征向量为

$$\lambda_1 = -2, \quad \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = 8, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

则存在

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

使得

$$T^{-1}A_1T=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}=P,$$

所以

$$A_n=TP^{n-1}T^{-1}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}(-2)^{n-1}\times\frac{1}{2}+8^{n-1}\times\frac{3}{2}\\ (-2)^{n-1}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+8^{n-1}\times\frac{3}{2}\end{bmatrix}.$$

从而知

$$a_n=\frac{3\times(-4)^{n-1}+1}{3\times(-4)^{n-1}-1}.$$

注 2　此类型特征明显，用常规方法解决此类型数列通项难点在于需构建$\{\frac{a_n-p}{a_n-q}\}$型的数列，然而 p，q 值不易求出.用矩阵思想可达到思路清晰，一目了然的效果.

情形 3　递推数列形如

$$a_{n+1}=pa_n+qb^n.$$

由此数列可得

$$\begin{cases}a_{n+1}=pa_n+qb^n,\\ b^n=b\times b^{n-1},\end{cases}$$

写成矩阵形式即

$$\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p & qb\\ 0 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b^{n-1}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}p & qb\\ 0 & b\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}a_{n-1}\\ b^{n-2}\end{bmatrix}=\cdots=$$

$$\begin{bmatrix}p & qb\\ 0 & b\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}a_1\\ 1\end{bmatrix}.$$

由此原问题转化成求矩阵运算，进而可求出通项公式 a_n.

例 3　设数列满足

$$a_1=2,\quad a_{n+1}-a_n=3\times2^{2n-1},$$

求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解　将递推关系 $a_{n+1}-a_n=3\times2^{2n-1}$ 变形后写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ 4^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ 4^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & 4\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}a_1\\ 1\end{bmatrix}.$$

易求得矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

的特征根和对应的一个特征向量分别为

$$\lambda_1=1,\quad \alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \lambda_2=4,\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},$$

则存在

$$T=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

使得

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}=P,$$

所以

$$\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ 4^n\end{bmatrix}=TP^nT^{-1}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^{2n+1}\\ 4^n\end{bmatrix},$$

从而可知

$$a_n=2^{2n-1}.$$

注 3　该问题的常规思路是通过构造$\{a_n-2^{2n-1}\}$型的常数列来求解，然而却不易想到.矩阵的解法可绕开这些难点，故问题转化成求解幂矩阵的问题.

情形 4　双递推数列形如

$$\begin{cases}a_{n+1}=aa_n+bb_n+\alpha_1,\\ b_{n+1}=ca_n+db_n+\alpha_2,\end{cases}(\alpha_1,\alpha_2\text{ 为常数}).$$

对此数列，可写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & \alpha_1\\ c & d & \alpha_2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ 1\end{bmatrix}=$$

$$\cdots=\begin{bmatrix}a & b & \alpha_1\\ c & d & \alpha_2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{n+1}\begin{bmatrix}a_0\\ b_0\\ 1\end{bmatrix},$$

因此原问题转化成求幂矩阵问题，从而可求出数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

例 4　设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足

$$a_0=1,\quad b_0=0,$$

$$\begin{cases}a_{n+1}=7a_n+6b_n-3,\\ b_{n+1}=8a_n+7b_n-4,\end{cases}(n=0,1,2,\cdots).$$

求证：a_n 是完全平方数.

解　由已知条件容易推知

$$a_1=4,\quad a_2=49.$$

记矩阵

$$A=\begin{bmatrix}7 & 6 & -3\\ 8 & 7 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

易求得矩阵 A 的特征根为

$$\lambda_1 = 7+4\sqrt{3},\ \lambda_2 = 7-4\sqrt{3},\ \lambda_3 = 1,$$

则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{bmatrix} 7+4\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 7-4\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

于是可由

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 8 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 7+4\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 7-4\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} \boldsymbol{P}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

求得 a_n 的通项公式形如

$$a_n = k_1(7+4\sqrt{3})^n + k_2(7-4\sqrt{3})^n + k_3,$$

将 a_0, a_1, a_2 代入上式可求得

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{4},\quad k_3 = \frac{1}{2},$$

于是有

$$a_n = \frac{1}{4}(7+4\sqrt{3})^n + \frac{1}{4}(7-4\sqrt{3})^n + \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{4}[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3}^n)]^2.$$

注 4 双递推数列问题在中学数学题中比较少见，多出现在竞赛题中. 竞赛题用一般方法解决过程较为复杂，如此题，需构造新数列再用特征方程的方法解决. 若用矩阵思想解决，可达事半功倍的效果.

参考文献

[1] 秦伟伟. 用矩阵求解递推数列的通项[J]. 高中数学教与学，2009(12)：12-14.

[2] 杨传富. 一类数列通项公式的矩阵算法[J]. 高等数学研究，2007，5(10)：24-25.

[3] 张禾瑞. 高等代数[M]. 4 版. 北京：高等教育出版社，1999.

[4] 北京大学数学系几何代数教研室. 高等代数[M]. 北京：高等教育出版社，2003.

简讯

伯克利加大教授郁彬荣升双料院士

美国国家科学院公布了今年 84 名新进院士名单，华裔共有三人入选，其中伯克利加州大统计系、电子工程与电脑科学系校长教授(Chancellor's Professor) 郁彬(Bin Yu) 成为"双料" 院士，在 2013 年担任美国人文科学院院士后，今年进入国家科学院.

郁彬表示，入选国科院院士是一份荣誉，很高兴能受到鼓励，也认为这是对她研究团队的肯定. 她认为，现代的科学问题都不只单一领域之中，统计学者其实是"数据科学家"，利用数据、数学工具和批判性思考，来共同解决科学问题. 这份荣耀证明统计学是一门有用的学科，希望能鼓励更多华裔学生进入统计领域.

她解释，统计学不光是数学问题，更重要的是研究者必须具备批判性思考，在面对问题时不可过度保守，必须要有冒险精神去挑战. 郁彬表示，在多年和其他科学学者合作下，她发现统计计算和科学突破有重要关连. 在大数据(Big Data) 时代下，资料库如何在科学领域中被使用，如何运用数学将抽象理论和现实情况进行整合，甚至连计算什麽、为什麽计算，都需要有精确的批判性思考，和大量的领域知识才做得到.

因此郁彬在教学上，特别注重训练学生进行批判性思考. 她说，学生通常喜欢被动接受教授指令，但是在长期从事研究下，就会了解花时间静下来思考问题的重要.

出生在书香世家，外祖父为抗战烈士法官郁曼陀、舅公(外祖父的弟弟) 为郁达夫，郁彬认为人文和科学在内在思维的本质，其实是相通的. 她以达·芬奇既是艺术家、又是科学家为例，指出有时和其他科学家在讨论问题时，她的人文家庭背景，有时反而可以让她跳出框架思考.

郁彬 1984 年毕业于北京大学数学系，1987 年和 1990 年先后获得伯克利加大统计学硕士和博士学位. 她在 2009 年到 2012 年间，担任伯克利加大统计系系主任，并为北大微软统计和信息技术实验室创办者之一. 2013 年入选美国人文科学院院士，现为 4500 多名会员的美国数理统计学会主席.

郁彬认为，目前统计学在学术理论和实用层面上接轨得很好，尤其现在学科间所筑的高墙已经陆续倒下，各类学科领域的学者集合起来，共同鑽研一项科学问题也相当常见. 她未来希望能够回到应用统计领域中，进一步研究与分析因果关係与预测两者间的关连性.

(据世界新闻网)