集合划分问题

瞿绍军
湖南师范大学

10251

- n个元素的集合{1,2,□, n }可以划分为若干个非空子集。例如，当n=4 时，集合{1，2， 3，4}可以划分为15 个不同的非空子集如下：{{1}，{2}，{3}，{4}}， {{1，2}，{3}，{4}}， {{1，3}，{2}，{4}}， {{1，4}，{2}，{3}}， {{2，3}，{1}，{4}}， {{2，4}，{1}，{3}}， {{3，4}，{1}，{2}}，{{1，2}，{3，4}}， {{1，3}，{2，4}}， {{1，4}，{2，3}}， {{1，2，3}，{4}}， {{1，2，4}，{3}}，{{1，3，4}，{2}}， {{2，3，4}，{1}}， {{1，2，3，4}} 给定正整数n，计算出n 个元素的集合{1,2,□, n }可以划分为多少个不同的非空子集。

分析

- 其中，集合{{1，2，3，4}} 由1个子集组成；
- 集合{{1，2}，{3，4}}，{{1，3}，{2，4}}，{{1，4}，{2，3}}，{{1，2，3}，{4}}，{{1，2，4}，{3}}，{{1，3，4}，{2}}，{{2，3，4}，{1}} 由2个子集组成；
- 集合{{1，2}，{3}，{4}}，{{1，3}，{2}，{4}}，{{1，4}，{2}，{3}}，{{2，3}，{1}，{4}}，{{2，4}，{1}，{3}}，{{3，4}，{1}，{2}} 由3 个子集组成；
- 集合{{1}，{2}，{3}，{4}} 由4个子集组成。

- 设n个元素的集合可以划分为F(n,m)个不同的由m个非空子集组成的集合。
  考虑3个元素的集合，可划分为
  ① 1个子集的集合：{{1，2，3}}
  ② 2个子集的集合：{{1，2}，{3}}，{{1，3}，{2}}，{{2，3}，{1}}
  ③ 3个子集的集合：{{1}，{2}，{3}}
  ∴F(3,1)=1;F(3,2)=3;F(3,3)=1;

- 如果要求F(4,2)该怎么办呢？
  A.往①里添一个元素{4}，得到{{1，2，3}，{4}}
  B.往②里的任意一个子集添一个4，得到
  {{1，2，4}，{3}}，{{1，2}，{3，4}}，
  {{1，3，4}，{2}}，{{1，3}，{2，4}}，
  {{2，3，4}，{1}}，{{2，3}，{1，4}}
  ∴F(4,2)=F(3,1)+2*F(3,2)＝1+2*3＝7

递推式

- (1)若m==1，则F(n,m)=1;
- (2)若n==m，则F(n,m)=1;
- (3)若非以上两种情况，F(n,m)可以由下面两种情况构成
- a.向n-1个元素划分成的m个集合里面添加一个新的元素，则有m*F(n-1,m)种方法;
- b.向n-1个元素划分成的m-1个集合里添加一个由一个元素形成的独立的集合，则有F(n-1,m-1)种方法。
- 得F(n,m)=F(n-1,m-1)+m*F(n-1,m)（m<n&&m!=1)

要求的F(n)

- $F(n) = \sum(F(n,j)$　　$(j = 1\sim n)$.

斯特林

- 斯特林数出现在许多组合枚举问题中. 对第一类斯特林数 StirlingS1[n,m]， 给出恰包含 m 个圈的 n 个元素 的排列数目. 斯特林数满足母函数关系 . 注意某些 的定义与 Mathematica 中的不同， 差别在于因子 . 第二类斯特林数 StirlingS2[n,m]给出把 n 个可区分小球分配到m 个不可区分的的盒子，且盒子没有空盒子的方法的数量. 它们满足关系 . 划分函数 PartitionsP[n]给出把整数 n 写为正整数的和，不考虑顺序的方法的数目. PartitionsQ[n]给出把整数 n 写为正整数的和， 并且和中的整数是互不相同的 写法的数目。

斯特林

- 设S(p,k)是斯特林数
- S(p,k)的一个组合学解释是：将p个物体划分成k个非空的不可辨别的（可以理解为盒子没有编号）集合的方法数。
- S(p,k)的递推公式是：
- **S(p,k) = k*S(p-1,k) + S(p-1,k-1) ,1<= k <=p-1**
- 边界条件：
- **S(p,p) = 1 ,p>=0**
- **S(p,0) = 0 ,p>=1**

贝尔数

- **贝尔数**以埃里克·坦普尔·贝尔（Eric Temple Bell）为名，是组合数学中的一组整数数列，开首是（OEIS的A000110数列）：
- B_n是基数为n的集合的划分方法的数目。集合S的一个划分是定义为S的两两不相交的非空子集的族，它们的并是S。例如$B_3 = 5$因为3个元素的集合$\{a, b, c\}$有5种不同的划分方法：

贝尔数

- {{*a*}, {*b*}, {*c*}}{{*a*}, {*b*, *c*}}{{*b*}, {*a*, *c*}}{{*c*}, {*a*, *b*}}{{*a*, *b*, *c*}};
- B_0是1因为空集正好有1种划分方法。空集的每个成员都是非空集合，而它们的并是空集本身。所以空集是它的唯一划分。
- 贝尔数适合递推公式：

$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$