常用的连续傅里叶变换对及其对偶关系

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{d}\omega \qquad F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$$

	连续傅里叶变换对		对偶的连续傅里叶变换对		
重要	连续时间函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$	连续时间函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$	重要
√	冲激 $\delta(t)$	1	直流 1	$2\pi\delta(\omega)$	√
√	冲激偶 $\delta'(t)$	$\mathrm{j}\omega$	t	$2\pi\mathrm{j}\,\delta'(\omega)$	
	$\delta^{(n)}(t)$	$(\mathrm{j}\omega)^n$	t^n	$2\pi\mathrm{j}^n\delta^{(n)}(\omega)$	
√	阶跃 $u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$	$\frac{1}{2}\delta(t)-\frac{1}{2\pi\mathrm{j}t}$	$u(\omega)$	
	单位斜变 $tu(t)$	$\mathrm{j}\pi\delta'(\omega)-\frac{1}{\omega^2}$			
√	符号 $\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t=0\\ -1, & t<0\end{cases}$	$\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$	$\frac{1}{\pi t}, t\neq 0$	$F(\omega)=\begin{cases}-\mathrm{j}, & \omega>0\\ 0, & \omega=0\\ \mathrm{j}, & \omega<0\end{cases}$	
√	冲激延时 $\delta(t-t_0)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$	复指数信号 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	√
√	余弦 $\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$	$\delta(t+t_0)+\delta(t-t_0)$	$2\cos(t_0\omega)$	
√	正弦 $\sin(\omega_0 t)$	$\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$	$\delta(t+t_0)-\delta(t-t_0)$	$\mathrm{j}2\sin(t_0\omega)$	
√	门脉冲 $G_\tau(t)=\begin{cases}1, & \lvert t\rvert<\tau/2\\ 0, & \lvert t\rvert\geq\tau/2\end{cases}$	抽样函数 $\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$	抽样脉冲 $\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_c t)$	低通 $G_{2\omega_c}(\omega)=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<\omega_c\\ 0, & \lvert\omega\rvert\geq\omega_c\end{cases}$	√
√	三角 $f(t)=\begin{cases}1-\lvert t\rvert/\tau, & \lvert t\rvert<\tau\\ 0, & \lvert t\rvert\geq\tau\end{cases}$	$\tau\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{2})$	$\frac{\omega_c}{2\pi}\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega_c t}{2})$	$F(\omega)=\begin{cases}1-\lvert\omega\rvert/\omega_c, & \lvert\omega\rvert<\omega_c\\ 0, & \lvert\omega\rvert\geq\omega_c\end{cases}$	
√	单边指数 $\mathrm{e}^{-at}u(t), a>0$	$\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}$	$\frac{1}{\tau-\mathrm{j}t}$	$2\pi\mathrm{e}^{-\tau\omega}u(\omega), \tau>0$	
√	双边指数 $\mathrm{e}^{-a\lvert t\rvert}, a>0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$	$\frac{\tau}{t^2+\tau^2}$	$\pi\mathrm{e}^{-\tau\lvert\omega\rvert}, \tau>0$	
√	$\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t), a>0$	$\frac{a+\mathrm{j}\omega}{(a+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_0^2}$			
√	$\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t), a>0$	$\frac{\omega_0}{(a+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_0^2}$			
	指数脉冲 $t\mathrm{e}^{-at}u(t), a>0$	$\frac{1}{(a+\mathrm{j}\omega)^2}$	$\frac{1}{(\tau-\mathrm{j}t)^2}, \tau>0$	$2\pi\omega\mathrm{e}^{-\tau\omega}u(\omega)$	
	$\frac{t^{k-1}\mathrm{e}^{-at}}{(k-1)!}u(t), a>0$	$\frac{1}{(a+\mathrm{j}\omega)^k}$			
√	时域周期冲激序列 $\delta_{T_1}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_1)\leftrightarrow\omega_1\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_1)=\delta_{\omega_1}(\omega)$ 频域周期冲激序列				√
√	钟形脉冲 $\mathrm{e}^{-(\frac{t}{\tau})^2}$	钟形脉冲 $\sqrt{\pi}\tau\mathrm{e}^{-(\frac{\omega\tau}{2})^2}$			
√	矩形调幅 $\cos\omega_0 t\left[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})\right]$	$\frac{\tau}{2}\left[\mathrm{Sa}\frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}+\mathrm{Sa}\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}\right]$			
√	$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$	$F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_1)\delta(\omega-n\omega_1)$，$F(n\omega_1)=\frac{1}{T_1}F_0(\omega)\Big\vert_{\omega=n\omega_1}$，$f_0(t)=f(t)\left[u(t+\frac{T_1}{2})-u(t-\frac{T_1}{2})\right]\leftrightarrow F_0(\omega)$			

<table>
<tr><td colspan="9">连续傅里叶变换性质及其对偶关系</td></tr>
<tr><td colspan="5">$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$ $$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{d}\omega$$</td><td colspan="4">$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$ $$F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$$</td></tr>
<tr><td colspan="4">连续傅里叶变换对</td><td colspan="5">对偶的连续傅里叶变换对</td></tr>
<tr><td>重要</td><td>名称</td><td>连续时间函数 $f(t)$</td><td>傅里叶变换 $F(\omega)$</td><td>名称</td><td>连续时间函数 $f(t)$</td><td>傅里叶变换 $F(\omega)$</td><td>重要</td></tr>
<tr><td>√</td><td>线性</td><td>$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$</td><td>$\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>√</td><td>尺度变换</td><td>$f(at), a\neq 0$</td><td>$\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$</td><td>尺度+时移</td><td>$f(at-b), a\neq 0$</td><td>$\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{b}{a}}$</td><td>√</td></tr>
<tr><td>√</td><td>对偶性</td><td colspan="2">$f(t)\leftrightarrow F(\omega)$</td><td>互易性</td><td colspan="2">$F(t)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$</td><td>√</td></tr>
<tr><td>√</td><td>时移</td><td>$f(t-t_0)$</td><td>$F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$</td><td>频移</td><td>$f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$</td><td>$F(\omega-\omega_0)$</td><td>√</td></tr>
<tr><td>√</td><td>时域微分</td><td>$f'(t)$</td><td>$\mathrm{j}\omega F(\omega)$</td><td>频域微分</td><td>$(-\mathrm{j}t)f(t)$</td><td>$F'(\omega)$</td><td>√</td></tr>
<tr><td>√</td><td>时域积分</td><td>$f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$</td><td>$\pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}$</td><td>频域积分</td><td>$\pi f(0)\delta(t)+\frac{f(t)}{-\mathrm{j}t}$</td><td>$\int_{-\infty}^{\omega}F(\sigma)\mathrm{d}\sigma$</td><td></td></tr>
<tr><td>√</td><td>时域卷积</td><td>$f(t)*h(t)$</td><td>$F(\omega)H(\omega)$</td><td>频域卷积</td><td>$f(t)p(t)$</td><td>$\frac{1}{2\pi}F(\omega)*P(\omega)$</td><td>√</td></tr>
<tr><td rowspan="2">√</td><td rowspan="2">反褶共轭对称性</td><td rowspan="2">$f(-t)$ 时域反褶
$f^*(t)$ 共轭
$f^*(-t)$ 共轭取反</td><td rowspan="2">$F(-\omega)$ 频域反褶
$F^*(-\omega)$ 共轭取反
$F^*(\omega)$ 共轭</td><td rowspan="2">奇偶虚实性</td><td>$f(t)$ 为实函数</td><td>$F(\omega)=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)$
实部 $R(\omega)$ 为偶函数
虚部 $X(\omega)$ 为奇函数</td><td rowspan="2">√</td></tr>
<tr><td>$f_e(t)=\mathrm{even}\{f(t)\}$ 实偶
$f_o(t)=\mathrm{odd}\{f(t)\}$ 实奇</td><td>$F(\omega)=R(\omega)$ 实偶
$F(\omega)=\mathrm{j}X(\omega)$ 虚奇</td></tr>
<tr><td></td><td>希尔伯特变换</td><td>$f(t)=f(t)u(t)$</td><td>$F(\omega)=R(\omega)+\mathrm{j}I(\omega)$
$R(\omega)=I(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>√</td><td>时域抽样</td><td>$f(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)$</td><td>$\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(\omega-n\omega_s)$</td><td>频域抽样</td><td>$\frac{1}{\omega_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(t-nT_s)$</td><td>$F(\omega)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$</td><td></td></tr>
<tr><td>√</td><td>帕塞瓦尔定理</td><td colspan="2">$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

双边拉普拉斯变换对与双边 z 变换对的类比关系

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \qquad X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

双边拉普拉斯变换对			双边 z 变换对		
重要	连续时间函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$ 和收敛域	离散时间序列 $x(n)$	象函数 $X(z)$ 和收敛域	重要
√	$\delta(t)$	1，整个 s 平面	$\delta(n)$	1，整个 z 平面	√
	n 阶导数 $\delta^{(n)}(t)$	s^n，有限 s 平面	k 阶后向差分 $\nabla^k\delta(n)$	$\frac{(z-1)^k}{z^k},\lvert z\rvert>0$	
√	$u(t)$	$\frac{1}{s},\sigma>0$	$u(n)$	$\frac{z}{z-1},\lvert z\rvert>1$	√
√	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2},\sigma>0$	$nu(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2},\lvert z\rvert>1$	√
√	$t^n u(t),n\in\mathbb{Z}^+$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\sigma>0$	$\frac{n!}{(n-k)!k!}u(n)$	$\frac{z}{(z-1)^{k+1}},\lvert z\rvert>1$	√
	$-u(-t)$	$\frac{1}{s},\sigma<0$	$-u(-n-1)$	$\frac{z}{z-1},\lvert z\rvert<1$	
	$-tu(-t)$	$\frac{1}{s^2},\sigma<0$	$-nu(-n-1)$	$\frac{z}{(z-1)^2},\lvert z\rvert<1$	
	$-t^n u(-t),n\in\mathbb{Z}^+$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\sigma<0$	$-\frac{n!}{(n-k)!k!}u(-n-1)$	$\frac{z}{(z-1)^{k+1}},\lvert z\rvert<1$	
√	$\mathrm{e}^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a},\sigma>-a$	$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a},\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$	√
√	$t\mathrm{e}^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2},\sigma>-a$	$na^{n-1}u(n)$	$\frac{z}{(z-a)^2},\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$	√
			$(n+1)a^n u(n)$	$\frac{z^2}{(z-a)^2},\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$	√
√	$t^n\mathrm{e}^{-at}u(t),n\in\mathbb{Z}^+$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}},\sigma>-a$	$\frac{(n+1)!}{(n+k-1)!k!}a^n u(n)$	$\frac{z^{k+1}}{(z-a)^{k+1}},\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$	√
	$-\mathrm{e}^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a},\sigma<-a$	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{z}{z-a},\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$	
	$-t\mathrm{e}^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^2},\sigma<-a$	$-(n+1)a^n u(-n-1)$	$\frac{z^2}{(z-a)^2},\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$	
	$-t^n\mathrm{e}^{-at}u(-t),n\in\mathbb{Z}^+$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}},\sigma<-a$	$-\frac{(n+1)!}{(n+k-1)!k!}a^n u(-n-1)$	$\frac{z^{k+1}}{(z-a)^{k+1}},\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$	
√	$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2},\sigma>0$	$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1},\lvert z\rvert>1$	√
√	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2},\sigma>0$	$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1},\lvert z\rvert>1$	√
√	$\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2},\sigma>-a$	$a^n\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z(z-a\cos\omega_0)}{z^2-2az\cos\omega_0+a^2},\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$	√
√	$\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2},\sigma>-a$	$a^n\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{az\sin\omega_0}{z^2-2az\cos\omega_0+a^2},\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$	√
	$\mathrm{e}^{-a\lvert t\rvert},a>0$	$\frac{-2a}{s^2-a^2},-a<\sigma<a$	$a^{\lvert n\rvert},\lvert a\rvert<1$	$\frac{(a-a^{-1})z}{(z-a)(z-a^{-1})},\lvert a\rvert<\lvert z\rvert<\lvert a^{-1}\rvert$	
	$\mathrm{e}^{-a\lvert t\rvert}\mathrm{sgn}(t),a>0$	$\frac{2s}{s^2-a^2},-a<\sigma<a$	$a^{\lvert n\rvert}\mathrm{sgn}(n),\lvert a\rvert<1$	$\frac{z^2-1}{(z-a)(z-a^{-1})},\lvert a\rvert<\lvert z\rvert<\lvert a^{-1}\rvert$	