五、树上删边游戏

1．游戏规则

从某一棵树上删除一条边，同时删去所有在删除边后不再与根相连的部分。双方轮流进行，无法再进行删除者判定为失败，也就是比你拿掉最后一部分你就赢了。一个游戏中有多棵树，我们把它们的根都挂在天花板上…或者说，放在地板上也行..这么做是为了方便后面的一些解释和处理。

在这篇文章中，我们讨论的将是公平游戏，也就是双方可以删除任意的边，我们称这个游戏为：Green Hackenbush，暂且称之为树上公平删边游戏。这个命名是因为还有另外一种删边游戏，为不公平的，参与者双方一方只能删除蓝色边，一方只能删除红色边，而绿色边是两边都可以删除的。

2．竹子竹子！

为了更好地解决树上删边游戏的相关问题，我们引入“竹子”。竹子长的像下面这样

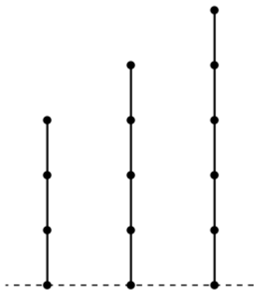

图 2.1

根据上面的游戏规则，拿掉竹子上的某一节，那么竹子上面的那些也会跟着被删掉。仔细想想会发现，这不就是最简单的 Nim 游戏吗？有很多堆火柴，每次只能拿走某一堆火柴中的任意数量的火柴。而这里则是有很多个种在地板上的竹子，我们每次只能选一根出来，任意砍掉一部分或者全部。既然发现这是 Nim 游戏了，那么相应的 SG 值就知道了: g(x)=x..

3．克朗原理**(Colon Principle)**

搞定竹子之后，我们就可以来研究树上删边游戏究竟要怎么解决。其实，树上删边游戏就是个拔了层树皮的 Nim 游戏。为什么这么说呢，我们介绍克朗原理

克朗原理：对于树上某一个点，它的分支可以转换为以这个点为根的一根竹子，这个竹子的长度等于它各个分支的边的数量的异或和。

（怕翻译不好所以把原文放上来：When branches come together at a vertex, one may replace the branches by a non-branching stalk of length equal to their nim sum.）

现在我们来分析下图所示的树上删边游戏。

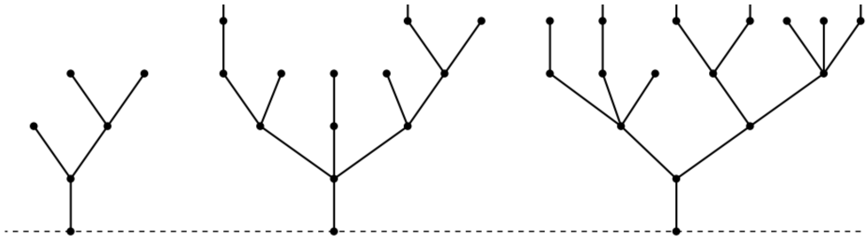

图 3.1

对于第一个图，1 号点有 2 个分支，分支上的边树分别为 1、1，异或和为 0，所以 1 号点的分支被替换为长度为 0 的竹子，也就是说上面两个分支被删掉了。所以对于 2 号点，就剩下 2 个分支，同理被消掉。最后这个图被转化为一根长度为 1 的竹子，其 SG 值为 1。

对于第二个图，分析过程如下，SG 值=8

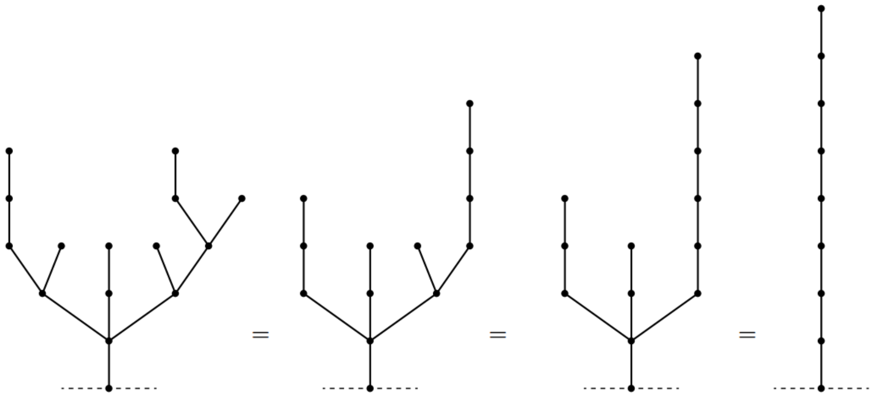

图 3.2

对于最后一个图，同理可以得出 SG 值=4。

现在，我们就可以算出这个游戏在当前状态的 SG 值：1 xor 8 xor 4=13≠0，所以这个是先手必胜状态，也就是 N 位置。然后剩下的就是找要到删去哪条边了。

假设我们要删掉的是图 3.1 中第二棵树上的某一条边，也就是说，我们要让这棵树的 SG 值变为 1 xor 4=5，才能使得到的游戏状态的 SG 值为 0.

我们看图 3.2 中的倒数第二个图，这里面所得到的竹子长度： 3 xor 2 xor 6=7，我们要让它变成 4，这样子加上最下面那条边的话得出来就是 5. 因为 2 xor 6=4，所以可以直接删掉最左边的 3 条边。当然，如果要删除中间的话，那么删除的条数就是 2-4 xor 3 xor 6=1, 同理，删除最右边的话，就要删去 6-4 xor 3 xor 2=1 条。

好了，这样子我们就利用克朗原理解决了树上删边游戏的问题。关于克朗原理的证明，因为笔者比较懒所以就不翻译过来了。请看下面这段：

Proof of the Colon Principle. Consider a fixed but arbitrary graph, G, and select an arbitrary vertex, x, in G. Let H1 and H2 be arbitrary trees (or graphs) that have the same Sprague-Grundy value. Consider the two graphs G1 = Gx : H1 and G2 = Gx : H2, where Gx : Hi represents the graph constructed by attaching the tree Hi to the vertex x of the graph G. The colon principle states that the two graphs G1 and G2 have the same Sprague-Grundy value. Consider the sum of the two games as in Figure 6.4(图 3.3).

The claim that G1 and G2 have the same Sprague-Grundy value is equivalent to the claim that the sum of the two games has Sprague-Grundy value 0. In other words, we are to show that the sum G1 +G2 is a P-position. (证明两个游戏的 SG 值相同，只要证明它们的 SG 值异或后为 0 即可，也就是看成一个 Nim 游戏的和来理解)

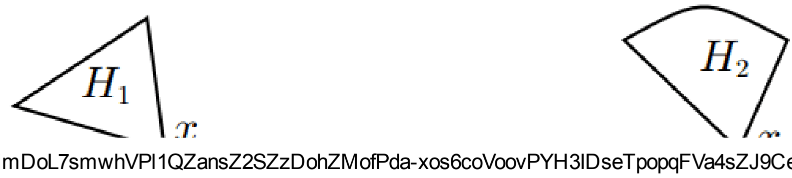

图 3.3

Here is a strategy that guarantees you a win if you are the second player to move in G1 + G2. If the first player moves by chopping one of the edges in G in one of the games, then you chop the same edge in G in the other game. (Such a pair of moves may delete H1 and H2 from the games, but otherwise H1 and H2 are not disturbed.) If the first player moves by chopping an edge in H1 or H2, then the Sprague-Grundy values of H1 and H2 are no longer equal, so that there exists a move in H1 or H2 that keeps the Sprague-Grundy values the same. In this way you will always have a reply to every move the opponent may make. This means you will make the last move and so win.(其实就是轮流取，慢拿的肯定赢，因为每次都可以拿走和被取走那部分 SG 值相同的。)

其实克朗原理的意思应该这么理解，对树上一个点，在它的分支都被转换成竹子之后，我们可以求出它的 SG 值，而克朗原理是说，可以将它替换称一个 SG 值相同的竹子。其实，不单单对于树上删边游戏，应该是对于博弈论大部分问题，只要 SG 值相同，都可以相互转换。上面的证明是证明可以转换的原因。

4. 图上删边游戏

研究过树上的，现在来讨论下图上删边游戏的。就像下面这样的图：

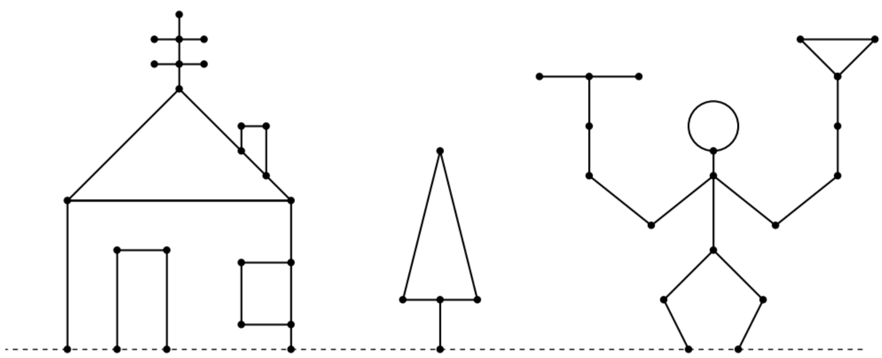

图 4. 1

在《Game Theory》的第四章中，我们知道任意一个图都可以等价为一个 Nim 游戏中的火柴堆(Nim 堆)。为了找到这个火柴堆，我们需要试着把这个图转换成一棵树，然后就可以用上面的办法转换成一个 Nim 堆。这里我们介绍另一个原理，费森原理。

费森原理：环上的点可以在被融合，且不改变图的**SG** 值。

（原文：The vertices on any circuit may be fused without changing the Sprague-Grundy value of the graph.）

其实这个原理看起来好像没什么用，但是，这个原理使我们能将一个图去化简成为我们能够计算的样子。现在我们看看在图 4. 1 是怎么化简的。

首先，我们先研究下最左边那个房子的门。如图 4. 2 所示，地板上的那两个点可以看

成一个，因为地板其实就是一个点，那么门就变成了地板上的一个三角形。接着，就用到费森原理了。三角形是一个环，而我们可以把环上的点换成连在一个点上的三个环。其实这里可以看出，费森原理是允许我们将环上的点换成一个环去表示。最后，每个环分别等价于一个大小为 1 的 Nim 堆，所以这三个环的异或和(Nim sum 后称为 Nim 和)是 1，等价于一个大小为 1 的 nim 堆。

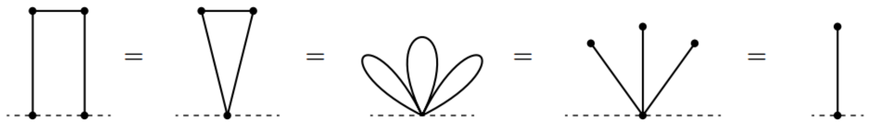

图 4.2

一般来说，我们可以把一个带有奇数边的环等价于只有一个端点的一条边，而偶数边的环等价于一个点。举个例子，图 4.1 中第二个图，树上的环带有 4 条边，等价于一个点，所以这棵树就被等价为一条边，即等价于一个大小为 1 的 Nim 堆。同样的，图 4.1 中的房子上的烟囱可以等价为一个点，右边的窗也可以等价为一个点。接着，如图 4.3 进行转换，我们会得到房子的 SG 值为 3。

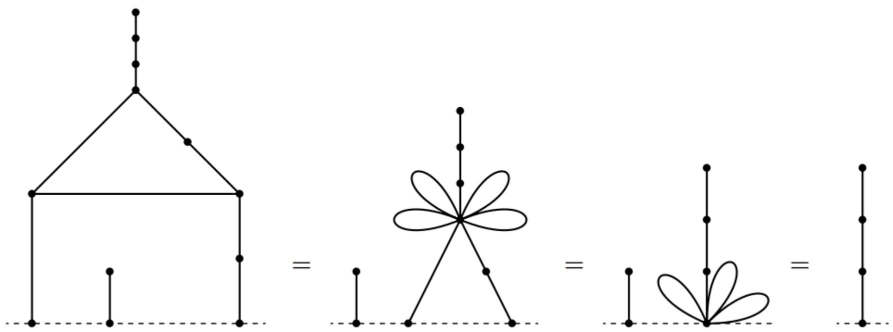

图 4.3

下面，请自己尝试计算图 4.1 最右边的人的 SG 值，答案为 4。然后，试试看你能不能找到图 4.1 为状态的游戏的解法。

5. 练习

《Game Theory》给的练习真的是太逗了。

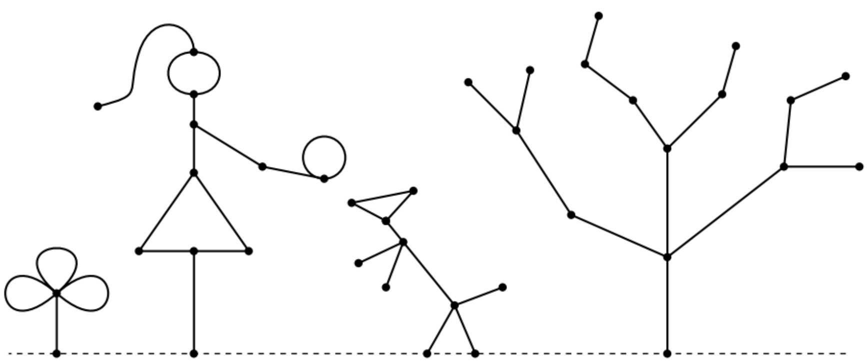

图 4.4

答案（从左到右）： 2 4 2 5

答案（从右到左）： 2 4 2 5