NOIP2016 模拟赛题解

1、约瑟夫游戏：

30%：直接模拟，每次暴力删除即可。时间复杂度 $O(n^2)$。

50%：递推计算。设 F[n]表示 n 个人时最后剩下的人的编号。每增加 m-1 个人，答案向后移动 m 位。于是递推式为 F[n]=F[n-m+1]%(n-m+1)+m，初始 F[1]=1。时间复杂度 O(n/m)。

100%：容(da)易(biao)看出，只有 $F[m^a+m-1]=m$，其余的 F[n]都满足 F[n]=F[n-m+1]+m。于是设 $n=m^a+(m-1)k$（$m^a<n\le m^{a+1}$），那么 F[n]=km。时间复杂度 $O(\log_m n)$。

2、密码游戏：

30%：枚举 a 和 b，暴力检验即可。时间复杂度 $O(n(m!)^2)$。

100%：对于每一组 x_i 和 $y_i(0\le i<n)$，可列出方程：

$b[(a[(x_i+i)\%m]+i/m)\%m]=y_i$

设 j 和 k 满足 $y_j=y_k$，则将两个方程合并得：

$b[(a[(x_j+j)\%m]+j/m)\%m]=b[(a[(x_k+k)\%m]+k/m)\%m]$

$a[(x_j+j)\%m]+j/m\equiv a[(x_k+k)\%m]+k/m \pmod m$

$a[(x_j+j)\%m]-a[(x_k+k)\%m]\equiv k/m-j/m \pmod m$

这样就将两个方程合并为 $a[i]-a[j]\equiv k \pmod m$ 的形式。由于数据

随机，合并后的不同方程的个数的期望≥(n-m)(m-1)/m。又因为 $n \ge m^2$，所以方程个数的期望 $\ge (m-1)^2 \ge m-1$，所以可以用并查集求出所有 a[i] 与 a[0]在 mod m 剩余系下的差。再设 a[0]=0，即可解出所有 a[i]的值。再根据 a 推出 b 即可。时间复杂度 O(n+m)。

3、锦标赛游戏：

30%：显然每个人的期望奖金相同，且期望=总和/个数，所以枚举每种可能的锦标赛图（任意两个点之间有且仅有一条有向边），Tarjan 求出强连通分量，计算答案即可。时间复杂度 $O(n^2 2^{n(n-1)/2})$(边数是 $O(n^2)$的)。

100%：设 a[i]表示 i 个点的强连通的锦标赛图个数。枚举缩点+拓扑排序后最后一个新点包含的点数，可列出式子：

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}} = \sum_{i=1}^{n} C_n^i 2^{\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}} a[i]$$

将 a[n]移至左边，得到 a[n]递推式为：

$$a[n] = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} - \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i 2^{\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}} a[i]$$

再设 f[n]表示所有 n 个点的锦标赛图所有点的奖金总和的总和，枚举缩点+拓扑排序后最后一个新点包含的点数，可列出式子：

$$f[n]=\sum_{i=1}^{n}C_n^i a[i](f[n-i]+2^{\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}}d[i]i)$$

直接递推计算即可。时间复杂度 O(n²)。使用 NTT 可以将时间复杂度优化到 O(nlogn)，由于超过 NOIP 范围，在此不作叙述。