NOI 2009 诗人小G

问题简述

有N个诗句需要被排版为若干行，顺序不能改变。一行内可以有若干个诗句，相邻诗句之间有一个空格。定义行标准长度L，每行的不协调度为|实际长度-L|^P，整首诗的不协调度就是每行不协调度之和。任务是安排一种排版方案，使得整首诗的不协调度最小。

问题建模

这是一个最优化问题，抽象成动态规划模型。设第i个诗句的长度为Len[i]，前i个诗句的总长度为SumL[i]，$SumL[i]=\sum_{j=1}^{i} Len[i]$。F[i]为对前i个诗句排版的最小不协调度。

解法1 朴素的动态规划

算法描述

显然每个F[i]可以被分解为F[j]和第j+1...i个句子组成一行的状态，所以状态转移方程为

$$F[i]=Min_{j=0}^{i-1}\left\{F[j]+\left|\sum_{k=j+1}^{i} Len[k]+(i-j-1)-L\right|^P\right\}$$

简化后，可以书写成

$$F[i]=Min_{j=0}^{i-1}\{F[j]+|SumL[i]-SumL[j]+(i-j-1)-L|^P\}$$

在具体实现时，应记录每个状态的决策，以便于输出合法方案。考虑到“最小的不协调度超过10^{18}输出"Too hard to arrange"”，为防止64位整型运算溢出，可以先用浮点数类型计算，然后再用整型算出具体值。

复杂度分析

状态数为O(N)，每次转移需要以O(N)的时间枚举j，所以时间复杂度为O(N^2)。在实际测试中通过了测试点1，2，3，得到30分。

参考程序

```
/*
 * Problem: NOI2009 poet
 * Author: Guo Jiabao
 * Time: 2009.9.22 13:30
```

```
 * State: Solved
 * Memo: 朴素动态规划
*/
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <cmath>
#include <cstring>
using namespace std;

typedef long long big;

const int MAXN=100001,SMAXL=32;
const big INF=~0ULL>>1,LIMIT=1000000000000000000LL;

big F[MAXN],sumL[MAXN];
int N,L,P;
int Len[MAXN],deci[MAXN],sel[MAXN];
char sent[MAXN][SMAXL];

void init()
{
    scanf("%d%d%d\n",&N,&L,&P);
    for (int i=1;i<=N;++i)
    {
        gets(sent[i]);
        Len[i] = strlen(sent[i]);
        sumL[i] = sumL[i-1] + Len[i];
    }
}

big power(big a)
{
    big t=1;
    double dt=1;
    if (a < 0)
        a = -a;
    for (int i=1;i<=P;i++)
    {
        dt *= a;
```

```
        if (dt > LIMIT)
            return INF;
        t *= a;
    }
    return t;
}

void solve()
{
    int i,j,k;
    big minv,t;
    for (i=1;i<=N;++i)
    {
        minv = INF;
        for (j=0;j<=i-1;++j)
        {
            t = power(sumL[i] - sumL[j] + i-j-1 - L);
            if ( double(t) + double(F[j]) <= LIMIT && t + F[j] < minv)
            {
                minv = t + F[j];
                k = j;
            }
        }
        F[i] = minv;
        deci[i] = k;
    }
}

void print()
{
    if (F[N] <= LIMIT)
    {
        cout << F[N] << endl;
        int i,j;
        for (i=N,j=0;i;i=deci[i])
            sel[++j] = i;
        for (i=0;j;j--)
        {
            for (++i;i < sel[j];++i)
                printf("%s ",sent[i]);
```

```
            printf("%s\n",sent[i]);
        }
    }
    else
        printf("Too hard to arrange\n");
    printf("--------------------\n");
}

int main()
{
    int i,T;
    freopen("poet.in","r",stdin);
    freopen("poet.out","w",stdout);
    scanf("%d",&T);
    for (i=1;i<=T;i++)
    {
        init();
        solve();
        print();
    }
    return 0;
}
```

解法2 贪心的动态规划

算法描述

观察测试点4，5的N值较大，而L值较小，因此可以限制每行长度，以优化状态转移。

$$F[i] = \mathrm{Min}_{j=0}^{i-1}\left\{\begin{matrix} F[j] + |SumL[i] - SumL[j] + (i-j-1) - L|^P \\ (j < i-1 \text{ 时应满足 } SumL[i] - SumL[j] + (i-j-1) \le 2L) \end{matrix}\right\}$$

实现时应让j从i-1到0枚举，当j<i-1时一旦发现行长度超过2L，即停止枚举j，因为j继续减少会让行长度继续增加。

算法证明

一个空行的不协调度为L^P，若一行内包含多余一个句子，且行长度L'>2L，则行不协调度$(L'-L)^P>L^P$。把该行拆分为两行后，设长度分别为L1和L2，L1+L2=L'-1，拆分后的两行不协调度之和为(L1-L)P+(L2-L)P<$(L'-L)^P$，所以拆分为两行后比合在一行好。因此应保证当一行包含多于一个句子时，行长度<=2L。

复杂度分析

状态数为O(N)，每次转移需要O(Min{N,L})的时间，所以时间复杂度为O(Min{N^2,NL})。在实际测试中通过了前5个测试点，得到50分。

参考程序

```
/*
 * Problem: NOI2009 poet
 * Author: Guo Jiabao
 * Time: 2009.9.22 13:51
 * State: Solved
 * Memo: 朴素动态规划 剪枝
*/
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <cmath>
#include <cstring>
using namespace std;

typedef long long big;

const int MAXN=100001,SMAXL=32;
const big INF=~0ULL>>1,LIMIT=1000000000000000000LL;

big F[MAXN],sumL[MAXN];
int N,L,P;
int Len[MAXN],deci[MAXN],sel[MAXN];
char sent[MAXN][SMAXL];

void init()
{
    scanf("%d%d%d\n",&N,&L,&P);
    for (int i=1;i<=N;++i)
    {
        gets(sent[i]);
        Len[i] = strlen(sent[i]);
        sumL[i] = sumL[i-1] + Len[i];
    }
}
```

```
big power(big a)
{
    big t=1;
    double dt=1;
    if (a < 0)
        a = -a;
    for (int i=1;i<=P;i++)
    {
        dt *= a;
        if (dt > LIMIT)
            return INF;
        t *= a;
    }
    return t;
}

void solve()
{
    int i,j,k;
    big minv,t;
    for (i=1;i<=N;++i)
    {
        minv = INF;
        for (j=i-1;j>=0;--j)
        {
            t = sumL[i] - sumL[j] + i-j-1 - L;
            if (j < i-1 && t > L + L)
                break;
            t = power(t);
            if ( double(t) + double(F[j]) <= LIMIT && t + F[j] < minv)
            {
                minv = t + F[j];
                k = j;
            }
        }
        F[i] = minv;
        deci[i] = k;
    }
}
```

```
void print()
{
    if (F[N] <= LIMIT)
    {
        cout << F[N] << endl;
        int i,j;
        for (i=N,j=0;i;i=deci[i])
            sel[++j] = i;
        for (i=0;j;j--)
        {
            for (++i;i < sel[j];++i)
                printf("%s ",sent[i]);
            printf("%s\n",sent[i]);
        }
    }
    else
        printf("Too hard to arrange\n");
    printf("--------------------\n");
}

int main()
{
    int i,T;
    freopen("poet.in","r",stdin);
    freopen("poet.out","w",stdout);
    scanf("%d",&T);
    for (i=1;i<=T;i++)
    {
        init();
        solve();
        print();
    }
    return 0;
}
```

解法3 凸壳优化动态规划

算法描述

观察发现测试点6，7的N和L都很大，而P值为2。经分析发现可以使用单调队列维护凸壳。

算法分析与证明

当P=2时，观察状态转移方程

$$F[i] = \mathrm{Min}_{j=0}^{i-1}\{F[j] + (\mathrm{SumL}[i] - \mathrm{SumL}[j] + (i - j - 1) - L)^2\}$$

设对于F[i]的最优决策为k，那么对于所有的j≠k，均满足

$$F[k] + (\mathrm{SumL}[i] - \mathrm{SumL}[k] + (i - k - 1) - L)^2 < F[j] + (\mathrm{SumL}[i] - \mathrm{SumL}[j] + (i - j - 1) - L)^2$$

设$A[i] = \mathrm{SumL}[i] + i - 1 - L$, $B[i] = \mathrm{SumL}[i] + i$, 则有

$$F[k] + (A[i] - B[k])^2 < F[j] + (A[i] - B[j])^2$$

$$F[k] + (A[i])^2 + (B[k])^2 - 2A[i]B[k] < F[j] + (A[i])^2 + (B[j])^2 - 2A[i]B[j]$$

$$2A[i](B[j] - B[k]) < (F[j] + (B[j])^2) - (F[k] + (B[k])^2)$$

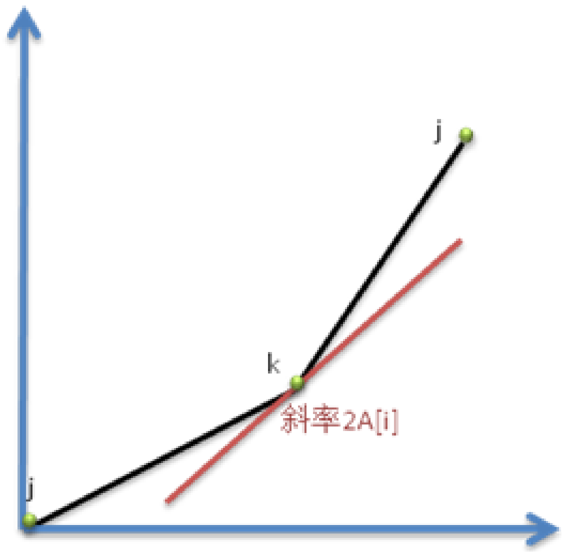
因为SumL为单调增函数，所以A，B均为增函数。当B[j]>B[k] ⇒j>k，有

$$2A[i] < \frac{(F[j] + (B[j])^2) - (F[k] + (B[k])^2)}{(B[j] - B[k])}$$

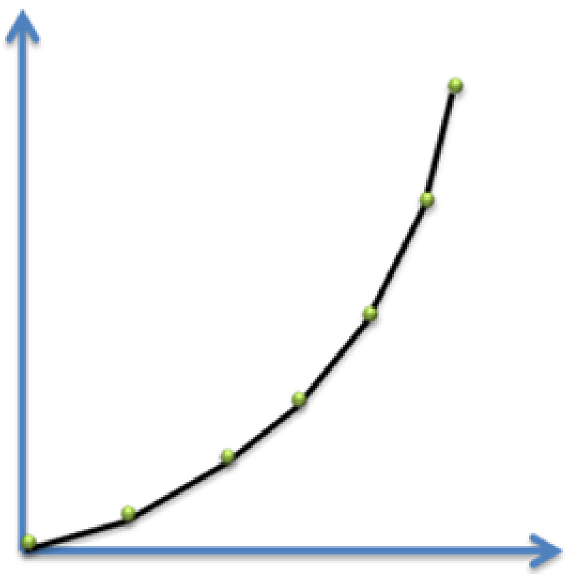
相对的，当j<k时有

$$\frac{(F[j] + (B[j])^2) - (F[k] + (B[k])^2)}{(B[j] - B[k])} < 2A[i]$$

如果把$(B[i],F[i]+B[i]^2)$看作是二维平面上的一个点，那么$\frac{(F[j]+(B[j])^2)-(F[k]+(B[k])^2)}{(B[j]-B[k])}$恰为斜率公式。因此对于最优决策k，应保证在对应点右边任意一个决策j的对应点，满足直线kj斜率大于2A[i]；在对应点左边任意一个决策j的对应点，满足直线kj斜率小于2A[i]。



因此所有最优决策在平面上的对应点连线就是一个斜率递增的凸壳。



具体实现时，用单调队列维护每个点(B[i],F[i]+B[i]^2)，每在队尾加入一个新的点，判断斜率是否递增，如果不是则不断删除队尾元素。求F[i]的最优决策只需不断在队首删除点，直到队首两点组成的直线斜率刚好大于2A[i]，最优决策就是左端点的对应决策。

复杂度分析

用单调队列每次维护凸壳的时间复杂度为均摊O(1)，所以时间复杂度为O(N)。经测试可以通过测试点6，7，配合解法2，一共可以得到70分。

参考程序

```
/*
 * Problem: NOI2009 poet
 * Author: Guo Jiabao
```

```
 * Time: 2009.9.22 14:30
 * State: Solved
 * Memo: 朴素动态规划 剪枝 凸壳优化
*/
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <cmath>
#include <cstring>
using namespace std;

typedef long long big;

const int MAXN=100001,SMAXL=32;
const big INF=~0ULL>>1,LIMIT=1000000000000000000LL;

struct MonoQueue
{
    struct point
    {
        big x,y;
        int id;
    }P[MAXN];

    int head,tail;

    void initialize()
    {
        head = 0;
        tail = -1;
    }

    void insert(big x,big y,int id)
    {
        point p={x,y,id};
        for (;head + 1 <= tail;--tail)
        {
            double k1,k2;
            k1 = (p.y - P[tail].y) / double(p.x - P[tail].x);
            k2 = (P[tail].y - P[tail-1].y) / double(P[tail].x - P[tail-1].x);
```

```
            if (k1 > k2)
                break;
        }
        P[++tail] = p;
    }

    int getmin(big v)
    {
        for (;head + 1 <= tail;++head)
        {
            double k = (P[head+1].y - P[head].y) / double(P[head+1].x -
P[head].x);
            if (k > v)
                break;
        }
        return P[head].id;
    }
}MQ;

big F[MAXN],sumL[MAXN],A[MAXN],B[MAXN];
int N,L,P;
int Len[MAXN],deci[MAXN],sel[MAXN];
char sent[MAXN][SMAXL];

void init()
{
    scanf("%d%d%d\n",&N,&L,&P);
    for (int i=1;i<=N;++i)
    {
        gets(sent[i]);
        Len[i] = strlen(sent[i]);
        sumL[i] = sumL[i-1] + Len[i];
    }
}

big power(big a)
{
    big t=1;
    double dt=1;
    if (a < 0)
```

```
        a = -a;
    for (int i=1;i<=P;i++)
    {
        dt *= a;
        if (dt > LIMIT)
            return INF;
        t *= a;
    }
    return t;
}

void tq()
{
    int i,j;
    big t;
    MQ.initialize();
    MQ.insert(0,0,0);
    for (i=1;i<=N;i++)
    {
        B[i] = sumL[i] + i;
        A[i] = B[i] - 1 - L;
    }
    for (i=1;i<=N;i++)
    {
        j = MQ.getmin(A[i] + A[i]);
        t = power(sumL[i] - sumL[j] + i-j-1 - L);
        if ( double(t) + double(F[j]) <= LIMIT )
            F[i] = F[j] + t;
        else
            F[i] = INF;
        if ( double(B[i]) * double(B[i]) + F[i] <= LIMIT)
            t = F[i] + B[i] * B[i];
        else
            t = INF;
        MQ.insert(B[i],t,i);
        deci[i] = j;
    }
}

void simple()
```

```
{
    int i,j,k;
    big minv,t;
    k = -1;
    for (i=1;i<=N;++i)
    {
        minv = INF;
        for (j=i-1;j>=0;--j)
        {
            t = sumL[i] - sumL[j] + i-j-1 - L;
            if (t > L + L)
                break;
            t = power(t);
            if ( double(t) + double(F[j]) <= LIMIT && t + F[j] < minv)
            {
                minv = F[j] + t;
                k = j;
            }
        }
        F[i] = minv;
        deci[i] = k;
    }
}

void solve()
{
    if (P == 2)
        tq();
    else
        simple();
}

void print()
{
    if (F[N] <= LIMIT)
    {
        cout << F[N] << endl;
        int i,j;
        for (i=N,j=0;i;i=deci[i])
            sel[++j] = i;
```

```
        for (i=0;j;j--)
        {
            for (++i;i < sel[j];++i)
                printf("%s ",sent[i]);
            printf("%s\n",sent[i]);
        }
    }
    else
        printf("Too hard to arrange\n");
    printf("--------------------\n");
}

int main()
{
    int i,T;
    freopen("poet.in","r",stdin);
    freopen("poet.out","w",stdout);
    scanf("%d",&T);
    for (i=1;i<=T;i++)
    {
        init();
        solve();
        print();
    }
    return 0;
}
```

解法**4** 决策单调性优化动态规划

算法描述

可以观察到或证明出，该状态转移方程满足决策单调性。因此我们可以使用双端队列维护每个决策区间，对于每个新决策使用二分查找确定位置并更新决策队列。

算法证明

再次观察状态转移方程

$$\mathbf{F[i] = Min_{j=0}^{i-1}\{F[j] + |SumL[i] - SumL[j] + (i - j - 1) - L|^P\}}$$

设$W[i,j] = |SumL[i] - SumL[j] + (i - j - 1) - L|^P$，状态转移方程可以化为1D/1D标准形式

$F[i] = Min_{j=0}^{i-1}\{F[j] + W[i,j]\}$

要证明上述状态转移方程具有决策单调性，k(i)表示F[i]的最优决策，即

$\forall i \le j, k(i) \le k(j)$

当且仅当满足四边形不等式

①：$\forall i \le j, W[i,j] + W[i+1,j+1] \le W[i+1,j] + W[i,j+1]$

设$a[i] = SumL[i] + i$，$D[i] = Len[i] + 1$，$X = L + 1$。其中$a[i+1] = a[i] + D[i+1]$。

于是$W[i,j] = |a[i] - a[j] - X|^P$。要证明①，只需证明

②：$|a[i] - a[j] - X|^P + |a[i+1] - a[j+1] - X|^P \le |a[i+1] - a[j] - X|^P + |a[i] - a[j+1] - X|^P$

设$S = a[i] - a[j] - X$，$T = a[i+1] - a[j] - X$，则②等价于

$|S|^P + |T - D[j+1]|^P \le |T|^P + |S - D[j+1]|^P$

③：$|S|^P - |S - D[j+1]|^P \le |T|^P - |T - D[j+1]|^P$

因为$T = S + D[i+1]$，且D[i+1]恒为正数，所以S<T。于是要证明③，只需证明下列函数在整数域内(非严格)单调递增

④：$\mathbf{f(x) = |x|^P - |x - c|^P}$ **(c, P为正整数)**

(1)若**P**为偶数

$f(x) = x^P - (x-c)^P$，求导得$f'(x) = P(x^{P-1} - (x-c)^{P-1})$。

因为$x > x - c$，P-1为奇数，所以$x^{P-1} - (x-c)^{P-1} > 0$，$f'(x) > 0$恒成立，f(x)在实数域内单调递增。

(2)若**P**为奇数

(a)当X-C>=0

$f(x) = x^P - (x-c)^P$，求导得$f'(x) = P(x^{P-1} - (x-c)^{P-1})$。

因为$x > x - c > 0$，P-1为偶数，所以$x^{P-1} - (x-c)^{P-1} > 0$，$f'(x) > 0$恒成立，f(x)在实数域内单调递增。

(b)当X<=0

$f(x) = (-x)^P - (c-x)^P$，求导得$f'(x) = P(x^{P-1} + (c-x)^{P-1})$。因为P-1为偶数，$f'(x) > 0$恒成立，f(x)在实数域内单调递增。

(c)当0<X<C

$f(x) = x^P - (c-x)^P$，求导得$f'(x) = P(x^{P-1} + (c-x)^{P-1})$。因为P-1为偶数，$f'(x) > 0$恒成立，f(x)在实数域内单调递增。

综上所述，f(x)在实数域内单调递增，即在正数域内单调递增，因而③②①依次得证。

因此状态转移方程$F[i] = \mathrm{Min}_{j=0}^{i-1}\{F[j] + |SumL[i] - SumL[j] + (i-j-1) - L|^P\}$具有决策单调性。

复杂度分析

状态数为O(N)，每次维护决策队列的时间为O(logN)，所以时间复杂度为O(NlogN)。在测试中通过了全部测试点，拿到了100分。

参考程序

```
/*
 * Problem: NOI2009 poet
 * Author: Guo Jiabao
 * Time: 2009.9.22 16:30
 * State: Solved
 * Memo: 动态规划 决策单调性
*/
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
```

```
#include <cmath>
#include <cstring>
using namespace std;

typedef long long big;

const int MAXN=100001,SMAXL=32;
const big LIMIT=1000000000000000000LL;

struct interval
{
    int s,t,deci;
}di[MAXN];

double F[MAXN];
int N,L,P,Stop;
int Len[MAXN],deci[MAXN],sel[MAXN];
char sent[MAXN][SMAXL];
big G[MAXN],sumL[MAXN];

void init()
{
    scanf("%d%d%d\n",&N,&L,&P);
    for (int i=1;i<=N;++i)
    {
        gets(sent[i]);
        Len[i] = strlen(sent[i]);
        sumL[i] = sumL[i-1] + Len[i];
    }
}

double dpower(double a)
{
    double t=1;
    if (a < 0)
        a = -a;
    for (int i=1;i<=P;i++)
        t *= a;
    return t;
}
```

```
double getF(int i,int j)
{
    double t = dpower(sumL[i] - sumL[j] + i-j-1 - L);
    return F[j] + t;
}

big power(big a)
{
    big t=1;
    double dt=1;
    if (a < 0)
        a = -a;
    for (int i=1;i<=P;i++)
    {
        dt *= a;
        if (dt > LIMIT)
            return LIMIT+1;
        t *= a;
    }
    return t;
}

big getG(int i,int j)
{
    big t = power(sumL[i] - sumL[j] + i-j-1 - L);
    if (F[j] + t <= LIMIT)
        return G[j] + t;
    else
        return LIMIT + 1;
}

void update(int i)
{
    while (di[Stop].s > i && getF(di[Stop].s,i) < getF(di[Stop].s,di[Stop].deci) )
    {
        di[Stop-1].t = di[Stop].t;
        Stop --;
    }
    int a=di[Stop].s,b=di[Stop].t,m;
```

```
    if (a < i+1)
        a = i+1;
    while (a+1<b)
    {
        m = (a + b) >> 1;
        if ( getF(m,di[Stop].deci) < getF(m,i) )
            a = m;
        else
            b = m-1;
    }
    if ( a < b && getF(b,di[Stop].deci) < getF(b,i) )
        a = b;
    if (a+1 <= di[Stop].t)
    {
        di[Stop + 1].s = a+1;
        di[Stop + 1].t = di[Stop].t;
        di[Stop + 1].deci = i;
        di[Stop].t = a;
        ++Stop;
    }
}

void solve()
{
    int i,j;
    di[Stop=1].s = 1;
    di[Stop].t = N;
    for (i=j=1;i<=N;i++)
    {
        if (i > di[j].t)
            ++j;
        deci[i] = di[j].deci;
        F[i] = getF(i,deci[i]);
        update(i);
    }
    for (i=1;i<=N;i++)
        G[i] = getG(i,deci[i]);
}

void print()
```

```
{
    if (G[N] <= LIMIT)
    {
        cout << G[N] << endl;
        int i,j;
        for (i=N,j=0;i;i=deci[i])
            sel[++j] = i;
        for (i=0;j;j--)
        {
            for (++i;i < sel[j];++i)
                printf("%s ",sent[i]);
            printf("%s\n",sent[i]);
        }
    }
    else
        printf("Too hard to arrange\n");
    printf("--------------------\n");
}

int main()
{
    int i,T;
    freopen("poet.in","r",stdin);
    freopen("poet.out","w",stdout);
    scanf("%d",&T);
    for (i=1;i<=T;i++)
    {
        init();
        solve();
        print();
    }
    return 0;
}
```