莫比乌斯反演

编辑

莫比乌斯反演是组合数学中很重要的内容，可以用于解决很多组合数学的问题。

中文名	莫比乌斯反演公式
外文名	Möbius inversion formula
提出者	奥古斯特·费迪南德·莫比乌斯
应用学科	数学
适用领域范围	组合数学

目录

莫比乌斯反演的引入

编辑

莫比乌斯反演是数论中的重要内容，在许多情况下能够简化运算。我们考虑以下求和函数：

$$F(n)=\sum_{d|n} f(d)$$

我们需要找到f(n)与F(n)之间的关系。从和函数定义当中，我们可以知道：

F(1)=f(1)

F(2)=f(1)+f(2)

F(3)=f(1)+ f(3)

F(4)=f(1)+f(2)+f(4)

F(5)=f(1)+f(5)

F(6)=f(1)+f(2)+f(3)+f(6)

F(7)=f(1)+f(7)

F(8)=f(1)+f(2)+f(4)+f(8)

那么：

f(1)=F(1)

f(2)=F(2)-f(1)=F(2)-F(1)

f(3) =F(3)-F(1)

f(4)=F(4) -f(2)- f(1) =F(4)-F(2)

f(5) =F(5)-F(1)

f(6)=F(6)-F(3)-F(2)+F(1)

f(7)=F(7)-F(1)

f(8)=F(8)-F(4)

从中，可以看出，若n=p ^{2} (p为质数)那么，F(p)=f(1)+f(p)，F(n)=f(1)+f(p)+f(p ^{2})，所以，f(n)=F(p ^{2})-F(p).

如果我们要让函数满足：

那么通过以上推导，我们可以知道μ(p ^{2})=0.所以我们作出以下猜测：

$$f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)F\left(\frac{n}{d}\right)$$

莫比乌斯反演定理

编辑

设 $f(n)$ 和 $g(n)$ 是定义在正整数集合上的两个函数,定义如下。

$$f(n)=\sum_{d,n}g(d)=\sum_{d,n}g\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$g(n)=\sum_{d,n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d,n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)f(d)$$

则 $f(n)==g(n)$.

莫比乌斯反演定理证明

编辑

充分性证明：

$$f(n)=\sum_{d,n}g(d)=\sum_{d,n}g\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$\sum_{d,n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d,n}\mu(d)\sum_{d_1,\frac{n}{d}}g(d_1)$$

$$\sum_{d,n}\sum_{d_1,\frac{n}{d}}\mu(d)g(d_1)$$

$$\sum_{d_1,n}\sum_{d,\frac{n}{d_1}}\mu(d)g(d_1)=\sum_{d_1,n}g(d_1)\sum_{d,\frac{n}{d_1}}\mu(d)=g(n)$$

考虑到：

$$\sum_{d,\frac{n}{d_1}} \mu(d) = \begin{pmatrix} 1, d_1 = n \\ 0, d_1 < n \end{pmatrix}$$

因此

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) = \sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d)$$

必要性证明：

$$g(n) = \sum_{d,n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d,n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d)$$

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} g(d) &= \sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n} \sum_{d_1|\frac{n}{d}} \mu\left(\frac{n}{dd_1}\right) f(d_1) \\ &= \sum_{dd_1|n} \mu\left(\frac{n}{dd_1}\right) f(d_1) \\ &= \sum_{d_1|n} f(d_1) \sum_{d|\frac{n}{d}} \mu\left(\frac{n}{dd_1}\right) \\ &= f(n) \end{aligned}$$

考虑到：

$$\sum_{d\left|\frac{n}{d_1}\right.} \mu\left(\frac{n}{dd_1}\right) = \sum_{d\left|\frac{n}{d_1}\right.} \mu(d) = \begin{cases} 1, d_1 = n \\ 0, d_1 < n \end{cases}$$

因此

$$f(n) = \sum_{d,n} g(d) = \sum_{d,n} g\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$g(n) = \sum_{d,n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d,n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d)$$

莫比乌斯函数μ(d)定义

编辑

若d=1 那么μ(d)=1

若d=$p_1p_2\ldots p_r$ （r个不同质数，且次数都为一）μ(d)=$(-1)^r$

其余 μ(d)=0

莫比乌斯反演的性质

编辑

性质一（莫比乌斯反演公式）： $f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)F\left(\frac{n}{d}\right)$

性质二：$\mu(n)$是积性函数

性质三：设f是算术函数，它的和函数 $F(n)=\sum_{d|n}f(d)$ 是积性函数，那么 f 也是积性函数。