基础图论算法题目讨论

jcvb

默认大家已经掌握大多数基础图论算法，如

- BFS和DFS以及其各种性质
- 拓扑排序的算法
- Dijkstra
- Kruskal, Prim
- 强连通分量、双连通分量的Tarjan算法

若未特殊说明，默认图的点数是n，边数是m，默认图中没有自环或重边，默认权值都是非负。

例题

一个带边权的无向图，请从中挑选一条边并将它的边权改为原来的两倍，最大化1到n的最短路长度。

$n \leqslant 250, m \leqslant 250000$

枚举修改哪条边

枚举修改哪条边
不需要枚举全部m条边

例题

一张有向图带边权图中，有k个特殊点$v_1, v_2, \cdots, v_k$，
求$dis(v_i, v_j), (i \neq j)$的最小值。
$n, m \leqslant 10^5$

提示：拆二进制

例题

一张边权全为1的有向图中，求出一条从1出发的路径和另一条从n出发的路径，使得两条路径的长度相等，且终点位于同一个点（路径允许重复经过边或点）。最小化路径的长度，或者输出无解。

$n \leqslant 250, 0 \leqslant m \leqslant n(n-1)$

直接DP需要$O(n^2)$的状态数，每次$O(n^2)$的转移，总共是$O(n^4)$。

直接DP需要$O(n^2)$的状态数，每次$O(n^2)$的转移，总共是$O(n^4)$。
提示：修改一下状态表示，让两条路径分别转移。

例题

一张图中，每条边$(u_i, v_i), u_i \neq v_i$可以双向通行，从u_i走到v_i的花费是x_i，从v_i走到u_i的花费是y_i。
求一条从1出发，至少经过一条边，最终回到1的回路，使得除了1以外每个点至多被经过一次，并最小化总花费。
$n, m \leqslant 100000$

暴力：假设最优解是$1 \to x \to \cdots \to y \to 1$。直接枚举$x \neq y$然后用Dijkstra求$x \to y$不经过1的最短路。

暴力：假设最优解是$1 \to x \to \cdots \to y \to 1$。直接枚举$x \neq y$然后用Dijkstra求$x \to y$不经过1的最短路。
优化？
提示：从1跑单源最短路的同时对每个点u记录最短路上1之后的那个点，$second[u]$。还要求出$second'[u] \neq second[u]$的次优路径。

例题

从一个n个点的完全无向图中删掉m条边，求剩下的图中有几个连通分量，并求剩下的图中1号点到其他所有点的最短路长度（边权是1）。

BFS。每次枚举未被访问到的结点。

例题

一张带边权的有向图中有k个关键点。给定整数s，然后有q个询问，每次给出两个点u_i, v_i，求一条从u_i到v_i的最短路径，使得至少经过s次关键点（同一个点若被经过了多次就计算多次），输出路径长度。

$1 \leqslant n, m, q \leqslant 50000, 1 \leqslant s, k \leqslant 100$

对每个关键点作起点跑dijkstra。然后把关键点拿出来dp，求出u到v经过s个关键点的最短路。然后再给它们连上边，以每个关键点作为起点，用dijkstra跑出到图中每个点且经过s个关键点的最短路。这样每次询问就可以$O(k)$了。

例题

一张有向图中，求一条从1到n再到1的路径，使得路径上经过的不同的点的数目最少。
$n, m \leqslant 100$

提示：首先分析最优解的结构

提示：首先分析最优解的结构

如果考虑有A一个重复经过的点，那么路径一定形为：

1 -> a1 -> A -> b1 -> 2

1 <- a2 <- A <- b2 <- 2

如果a1和b2，a2和b1中没有重复经过的点，那么最终答案就是(1, A)的子问题 + (A,2)的子问题。

提示：首先分析最优解的结构

如果考虑有A一个重复经过的点，那么路径一定形为：

1 -> a1 -> A -> b1 -> 2

1 <- a2 <- A <- b2 <- 2

如果a1和b2，a2和b1中没有重复经过的点，那么最终答案就是(1, A)的子问题 + (A,2)的子问题。

如果有一个重复的点B，那么路径就有如下形式：

1 -> a11 -> B -> a12 -> A -> b1 -> 2

1 <- a2 <- A <- b21 <- B <- b22 <- 2

可以发现，花费最小的情况下，必有a12 =b21

提示：首先分析最优解的结构

如果考虑有A一个重复经过的点，那么路径一定形为：

1 -> a1 -> A -> b1 -> 2

1 <- a2 <- A <- b2 <- 2

如果a1和b2，a2和b1中没有重复经过的点，那么最终答案就是(1, A)的子问题 + (A,2)的子问题。

如果有一个重复的点B，那么路径就有如下形式：

1 -> a11 -> B -> a12 -> A -> b1 -> 2

1 <- a2 <- A <- b21 <- B <- b22 <- 2

可以发现，花费最小的情况下，必有a12 =b21

重复以上的步骤，最终保证他们之间不存在重复的点。于是可以确定最终的路径为：

1->…->path->…->2

1<-…<-path<-…<-2

提示2：然后考虑DP。DP可以用BFS实现。

提示2：然后考虑DP。DP可以用BFS实现。
考虑动态规划f[x][y]表示1到x与y到1中路径不重复的点的个数，答案即为f[n][n].转移分为5种情况。

1. x的下一个点i不是重复点，那么i一定不与x，y相等。$f[i][y] = \min(f[i][y], f[x][y] + 1)$
2. y的上一个点i不是重复点，与(1)类似，$f[x][i] = \min(f[x][i], f[x][y] + 1)$
3. x与y均为重复点，$f[y][x] = \min(f[y][x], f[x][y] + dis[x][y] - 1)$
4. x是重复的点，y的上一个点是x，有$f[x][x] = \min(f[x][x], f[x][y])$
5. y是重复的点，x的下一个点是y，有$f[y][y] = \min(f[y][y], f[x][y])$

例题

$p[1..n]$是$1, 2, \cdots, n$的一个排列，有m条限制，第i条限制要求$p[a_i] < p[b_i]$。
求满足所有限制的字典序最小的p数组。
$n, m \leqslant 100000$

此题和拓扑排序问题并不一样。

此题和拓扑排序问题并不一样。
提示：它等价于一个拓扑排序问题。

此题和拓扑排序问题并不一样。
提示：它等价于一个拓扑排序问题。
倒着字典序最大即可

此题和拓扑排序问题并不一样。
提示：它等价于一个拓扑排序问题。
倒着字典序最大即可
反证：如果存在$b > a$都能选却选了a的情况，
$p[a] = s, p[a_1] = s - 1, p[a_2] = s - 2, \cdots, p[b] = s - k$，
调整为
$p[b] = s, p[a] = s - 1, p[a_1] = s - 2, p[a_2] = s - 3, \cdots,$
不会变差

例题

一个带边权的无向图，其中有k个关键点。共有q个询问，每次输入u, v，它们都是关键点，求出一个最小的d，使得存在某条$u \to v$的路径上每走过d的长度至少经过一个关键点。
$1 \leqslant k \leqslant n \leqslant 100000, q \leqslant 100000$

例题

一个带边权的无向图，其中有k个关键点。共有q个询问，每次输入u, v，它们都是关键点，求出一个最小的d，使得存在某条$u \to v$的路径上每走过d的长度至少经过一个关键点。

$1 \leqslant k \leqslant n \leqslant 100000, q \leqslant 100000$

如果所有点都是关键点就变成了最小瓶颈路询问(NOIP2013)。

求出每个关键点管辖的区域（离这个关键点最近的点的集合）

求出每个关键点管辖的区域（离这个关键点最近的点的集合）
考虑跨越两个区域的边

例题

一个可能有重边的无向图，现在要给每条边定向，并满足q个限制，第i个限制要求从u_i可以走到v_i。请问是否存在满足所有限制的定向方法。

$1 \leqslant n, m, q \leqslant 200000$

提示：考虑双连通分量

例题

给一个有向图，你可以选择一条边把它反向（也可以不选），然后选一条路径起点终点都为1的路径出来，问最多有多少个点可以被经过？（一条边可以经过多次但一个点在路径中无论出现多少正整数次对答案的贡献均为1）

$n, m \leqslant 100000$

提示：缩强连通分量，变成DAG

提示：缩强连通分量，变成DAG
从一个1能到达的点连到一个能到达1的点

例题

二维平面上有n个点，两点i,j之间的边权为它们的Manhattan距离$|x_i-x_j|+|y_i-y_j|$。求最大生成树。
$1 \leqslant n \leqslant 100000$

提示：Borůvka算法

提示：Borůvka算法

每轮从当前每个连通分量找最大的出边，连起来。最多做$\log n$轮即可全部连通。