

【日常小测】超级绵羊异或

题目大意

求 $(b) \oplus (b + a) \oplus (b + 2a) \oplus \dots \oplus (b + (n - 1)a)$

其中 $n, a, b \leq 10^9$

解题报告

因为是二进制，所以我们每一位分开考虑

又因为数 a 二进制下第 k 位的奇偶性与 $a \gg (k - 1)$ 的奇偶性相同

所以对于第 k 位，我们实际是要求 $\sum_{x=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{ax+b}{2^k} \right\rfloor$ ，我们将其一般化：求解

$$f(a, b, c, n) = \sum_{x=0}^n \left\lfloor \frac{ax+b}{c} \right\rfloor$$

设 $s(x) = \sum_{i=1}^x i$ 。为了只讨论 $a, b < c$ 的情况，我们先来预处理一下：

1. 若 $a \geq c$ 那么显然 $f(a, b, c, n) = f(a \% c, b, c, n) + \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor \cdot s(n)$
2. 若 $b \geq c$ 那么显然 $f(a, b, c, n) = f(a, b \% c, c, n) + \left\lfloor \frac{b}{c} \right\rfloor \cdot n$

之后我们就可以施展膜法了：

$$\text{设 } m = \left\lfloor \frac{an+b}{c} \right\rfloor$$

$$\text{那么原式} = \sum_{x=0}^n \sum_{y=0}^m [y < \left\lfloor \frac{ax+b}{c} \right\rfloor]$$

把 $y < \left\lfloor \frac{ax+b}{c} \right\rfloor$ 提出来，可以化简：

$$y < \left\lfloor \frac{ax+b}{c} \right\rfloor = c(y+1) \leq ax+b = cy+c-b-1 < ax = x > \left\lfloor \frac{cy+c-b-1}{a} \right\rfloor$$

$$\text{那么原式} = \sum_{y=0}^m \sum_{x=0}^n [x > \left\lfloor \frac{cy+c-b-1}{a} \right\rfloor] = n(m+1) - \sum_{y=0}^m \left\lfloor \frac{cy+c-b-1}{a} \right\rfloor$$

$$\text{相当于 } f(a, b, c, n) = n(m+1) - f(c, c-b-1, a \% c, m)$$

窝萌发现，这货的形式简直和辗转相处搞 \gcd 一模一样

于是这货的复杂度也是 $O(\log n)$ 的

当然这题还有一种数形结合的推法

推出来式子略有不同，不过时间复杂度仍然为 $O(\log n)$

不过本文这种推法似乎更优？据敦敦敦讲，这货可以推广到高维

但我不会 QwQ

Code

```
1  #include<bits/stdc++.h>
2  #define LL long long
3  using namespace std;
4
5  inline int read() {
6      char c=getchar(); int ret=0,f=1;
7      while (c<'0' || c>'9') {if(c=='-')f=-1;c=getchar();}
8      while (c<='9'&& c>='0') {ret=ret*10+c-'0';c=getchar();}
9      return ret*f;
10 }
11
12 LL cal(LL a, LL b, LL c, LL n) {
13     if (a >= c) return (((n-1)*n/2)*(a/c)&1) ^ cal(a%c, b, c, n);
14     if (b >= c) return (n * (b/c) & 1) ^ cal(a, b%c, c, n);
15     if (!a) return (b/c) * n & 1;
16     LL nw = (a * (n - 1) + b) / c;
17     return ((n-1) * nw & 1) ^ cal(c, c - b - 1, a, nw);
18 }
19
20 int main() {
21     for (int T=read(),a,b,n;T;T--) {
22         n = read(); b = read();
23         a = read(); LL c = 1, ans = 0;
24         if (!b) {printf("%d\n", (n&1)?a:0); continue;}
25         for (int i=0;i<=60;i++,c<=1)
26             ans += cal(a, b, c, n) * c;
27         printf("%lld\n",ans);
28     }
29     return 0;
30 }
```

作者：Qizy

The logo for 'Qizy' is displayed in a stylized, cursive font. The letters are dark gray, and the overall design is elegant and modern.