

倍增问题

Qizy

2018 年 2 月 2 日

成都石室中学

yongzhengqi@gmail.com

目录

中心思想

例题 1 • 信息复用

例题 2 • 拆二进制

例题 3 • 综合应用

课后练习

参考资料

中心思想

1. 信息复用
2. 拆二进制

例题 1 · 信息复用

区间询问

给定一个长度为 n 的序列 a_i 。给定 m 个询问，每个询问形如 l_i, r_i ，你需要输出 $\max_{x=l_i}^{r_i} \{a_x\}$

$$n, m \leq 10^7$$

将询问按右端点为关键字排序，依次处理。

使用并查集类似的思想来做到信息复用。

时间复杂度： $O(n\alpha(n))$

例题 2 · 拆二进制

给定一棵 n 个点的树，每个点有权值 a_i ，再给定 q 个询问，每个询问形如 p_i, l_i ，你需要询问从编号为 p_i 的点向上走 l_i 步经过的所有点上权值的最小值。

$$n, q \leq 100000$$

类似于倍增 LCA 处理

任意正整数都存在唯一二进制分解

时间复杂度: $O((n + q) \log n)$

例题 3 · 综合应用

开车旅行

城市从左到右依次由 1 到 n 编号，保证各个城市的海拔高度互不相同，记城市 i 的海拔高度为 H_i ，城市 i 和城市 j 之间的距离 $d_{i,j} = |H_i - H_j|$ 。旅行过程中，A 和 B 轮流开车，第一天 A 开车，之后每天轮换一次。他们计划选择一个城市 S 作为起点，一直向右行驶，并且最多行驶 X 公里就结束旅行。A 和 B 的驾驶风格不同，B 总是选择最近的城市作为目的地，而 A 总是选择第二近的城市作为目的地（注意：本题中如果当前城市到两个城市的距离相同，则认为离海拔低的那个城市更近）。如果其中任何一人无法按照自己的原则选择目的城市，或者到达目的地会使行驶的总距离超出 X 公里，他们就会结束旅行。

开车旅行

你需要回答两个问题：

1. 对于一个给定的 $X = X_0$ ，从哪一个城市出发，A 开车行驶的路程总数与 B 行驶的路程总数的比值最小（如果 B 的行驶路程为 0，此时的比值可视为无穷大，且两个无穷大视为相等）。如果从多个城市出发，A 开车行驶的路程总数与 B 行驶的路程总数的比值都最小，则输出海拔最高的那个城市。
2. 对任意给定的 $X = X_i$ 和出发城市 S_i ，A 开车行驶的路程总数以及 B 行驶的路程总数。

$$1 \leq S_i \leq n \leq 10^5, 1 \leq M \leq 10^5$$

$$-10^9 \leq H_i \leq 10^9, 0 \leq X_0, X_i \leq 10^9$$

考虑暴力模拟的过程，有很多重复信息

于是通过倍增来重复使用信息

时间复杂度： $O(n \log n)$

课后练习

输入一篇文章，其中共有 n 个单词，取出其中连续一段进行排版，使得不超过 r 行，每行的总宽度不超过 c （包括隔开单词的空格）。求最多能取出几个单词？

$n, r, c \leq 10^6$ ，输入字符数 $\leq 5 \times 10^6$

$O(n \log n)$ 预处理倍增数组

用二进制来凑 r

时间复杂度: $O(n \log n)$

一个带边权有向图，求 a 到 b 经过 k 条边（同一条边可多次经过）的最短路长度。

$$n \leq 300, k \leq 10^{18}$$

倍增 Floyd

时间复杂度: $O(n^3 \log n)$

参考资料

[1] 金策，倍增例题