

EarthCup

By davidlee1999WTK

首先, 我们检验一下所有队伍的积分的总和是否等于 $n * (n - 1) / 2$, 因为显然每场比赛有一个队伍获胜, 积分总和应该等于比赛场数。

如果积分的总和不对, 就说明一定被修改过, 否则继续进行判断。

我们先来考虑数据范围是 $n \leq 100$ 时的解法。我们可以建立一个网络流的模型:

对于每场比赛建立一个点, 每支球队也建立一个点, S 为源点, T 为汇点:

1. 从 S 到每场比赛连一条容量为 1 的边
2. 每场比赛分别向它对应的两支球队各连一条容量为 1 的边
3. 第 i 支球队向 T 连一条容量为 a_i (第 i 支球队的积分) 的边

假如求一次最大流, 这个模型满流了, 即总流量为 $n * (n - 1) / 2$, 那么就存在至少一种能够满足积分数据的比赛胜负情况, 否则数据一定被修改过。直观理解就是每场比赛有 1 个积分, 这个积分要么分给参加这个比赛中的一支队伍, 要么给另一支。

利用最大流合理分配每场比赛的胜利(就是每个积分)给球队, 使每支队伍的最终积分符合给出的积分数据。

现在我们对这个模型做一点改动, 我们把第 i 支队伍拆成 a_i 个点, 拆出来的每个点向 T 连一条容量为 1 的边, 然后每场比赛向它对应的两支球队的所有拆出来的点都连一条容量为 1 的边。

在新的模型下, 依然是可以满流时有合法方案。

现在的模型是一个二分图匹配模型, 左右两部分点的个数相同, 我们可以利用霍尔定理来判断能否有符合条件的匹配方案。

应用在这道题中霍尔定理的简单描述就是, 对于二分图左边的任意 k 个点, 检查右边与他们直接相连的点的个数是否大于等于 k 。详细的解释和证明可以在网上搜索。对于这道题的模型, 我们就可以把所有队伍按积分排序, 检查所有积分前 k 小的的队伍积分总和是否大于等于 $k * (k - 1) / 2$, 假如检查 k 从 $1 \rightarrow n$ 一直都一直符合这个关系那么有合法方案, 否则数据是一定被修改过的。

$k * (k - 1) / 2$ 是 k 支队伍之间所有比赛的场数, 即对应这 k 支队伍之间表示比赛的结点的个数, 这些结点只与这 k 支队伍对应的结点相连。 k 支队伍的积分总和就相当于 k 支球队对应的结点的个数的总和。

其实这题有现成的定理, Landau's Theorem, 用来判断一个得分序列是否合法。参

见: [https://en.wikipedia.org/wiki/Tournament_\(graph_theory\)#Score_sequences_and_score_sets](https://en.wikipedia.org/wiki/Tournament_(graph_theory)#Score_sequences_and_score_sets)