

hihoCoder挑战赛10 题解

清华大学 陈立杰

Contents

1 幻想乡的日常	2
2 黑暗森林	2
3 时空阵	2

1 幻想乡的日常

首先有一个比较重要的结论。假如一个树上有 k 个被选中的点，容易看到对于每一个两个端点都被选中的边，都会使得联通块的数量减1。

那么问题就被转化成了，如果我们选中标号在 $[l, r]$ 中的点，有多少条边的两个端点的标号都在 $[l, r]$ 中呢？

考虑一条边 $a_k \leftrightarrow b_k$ ，那么问题也就变成了给你 $n - 1$ 个区间 $[a_k, b_k] (a_k < b_k)$ ，每次询问 $[l, r]$ 中包含了多少这 $n - 1$ 个区间中的子区间。

这是一个比较经典的问题，我们不妨使用离线算法。来处理所有询问。

我们从1到 n 扫描，并且维护一个树状数组 TA ，扫描到 i 的时候，我们令 TA 中位置 j 的值就是 $[j, i]$ 这个区间中包含的 $[a_k, b_k]$ 个数。

那么考虑从 $i \rightarrow i + 1$ 的转移，对于每个 $b_k = i + 1$ ，我们需要将树状数组中所有 $\leq a_k$ 的位置都加1。

那么在 $O(n \log n)$ 的时间内我们就能计算出答案了。

2 黑暗森林

首先让我们来考虑，如果给定了一个树上的边权，如何计算直径。

除了经典的二次DFS方法以外，我们还可以使用动态规划。

使用 dp_i 记录从点 i 往下最长的路径的长度， opt_i 记录 i 的子树中最长的路径的长度。

令 C 为 i 的孩子的集合，我们立刻就能得出转移方程：

$$dp_i = \max_{c \in C} dp_c + 1.$$

$$opt_i = \max \left(\max_{c \in C} opt_c, \max_{a, b \in C, a \neq b} (dp_a + dp_b) + 2 \right).$$

那么注意到，实际上对于一个子树 i ， dp_i 和 opt_i 这两个值本身已经刻画了所有我们需要的信息，所以对于原问题，我们可以使用这样一个DP。

令 $F_{i,d,opt}$ 表示子树 i ，从 i 往下最长路径为 d ，并且其中最长路径为 opt 的概率。

通过刚才列出的递推式子，我们能很容易的计算出 $F_{i,d,opt}$ 。

那么，通过根节点的每个状态的概率，就能轻松地计算出答案了。

3 时空阵

不妨考虑依次确定所有点的距离标号。

首先只有点1的距离标号是0，那么接下来我们需要枚举距离标号是1的点有几个，距离标号为2的点有几个，以此类推。

由于点 n 的距离标号是 k ，在枚举到 k 的时候要特殊判断。

那么我们来考虑这样一个DP，令 $f_{dist, total, cur}$ 表示现在已经考虑了前 $\leq dist$ 的距离标号的点，并且已经选择了 $total$ 个，距离标号为 $dist$ 的点有 cur 的方案数。

那么转移就是枚举距离标号为 $dist + 1$ 的点有多少个，不妨设为 nxt 个，注意到每个距离标号为 $dist + 1$ 的点，必然和至少一个距离标号为 $dist$ 的点有边相连，那么这里连边的方案数量就是 $(2^{cur} - 1)^{nxt}$ 。

进行简单的转移即可。