

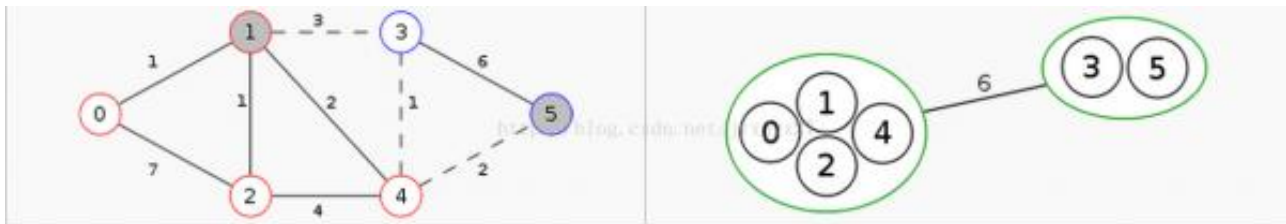
Gomory-Hu tree 最小割树 介绍及实现

Gomory-Hu tree是一颗代表了所有源目节点对间的最小割的树。求解出Gomory-Hu tree就可以了解两两节点对之间的最大流（最大流最小割定理）。举例：

下图左侧为一无向图，右侧为初始Gomory-Hutree（所有点在统一集合中），下面进行Gomory-Hu tree的求解。



步骤一：任意选定一个源节点和一个目的节点。在本例中不失一般性选择节点1为源节点(s)，5为目的节点(t)。则可得最大流为6，且最小割相应的将点分为如下图右侧所示的两个集合。



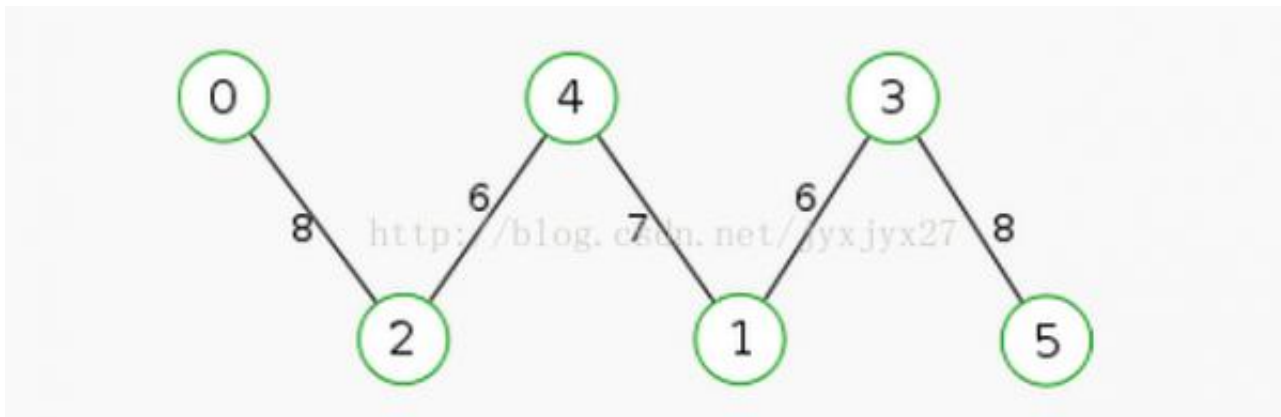
步骤二：任意选定与之前步骤不同的一个源节点和一个目的节点。在本例中不失一般性选择节点3为源节点(s)，5为目的节点(t)。由于0124四个节点已经被视作一个集合，则可得最大流为8，且最小割相应的将点分为如下图右侧所示的三个集合。



步骤三：任意选定与之前步骤不同的一个源节点和一个目的节点。在本例中不失一般性选择节点1为源节点(s)，2为目的节点(t)。同上可得最大流为6，且最小割相应的将点分为如下图右侧所示的四个集合。

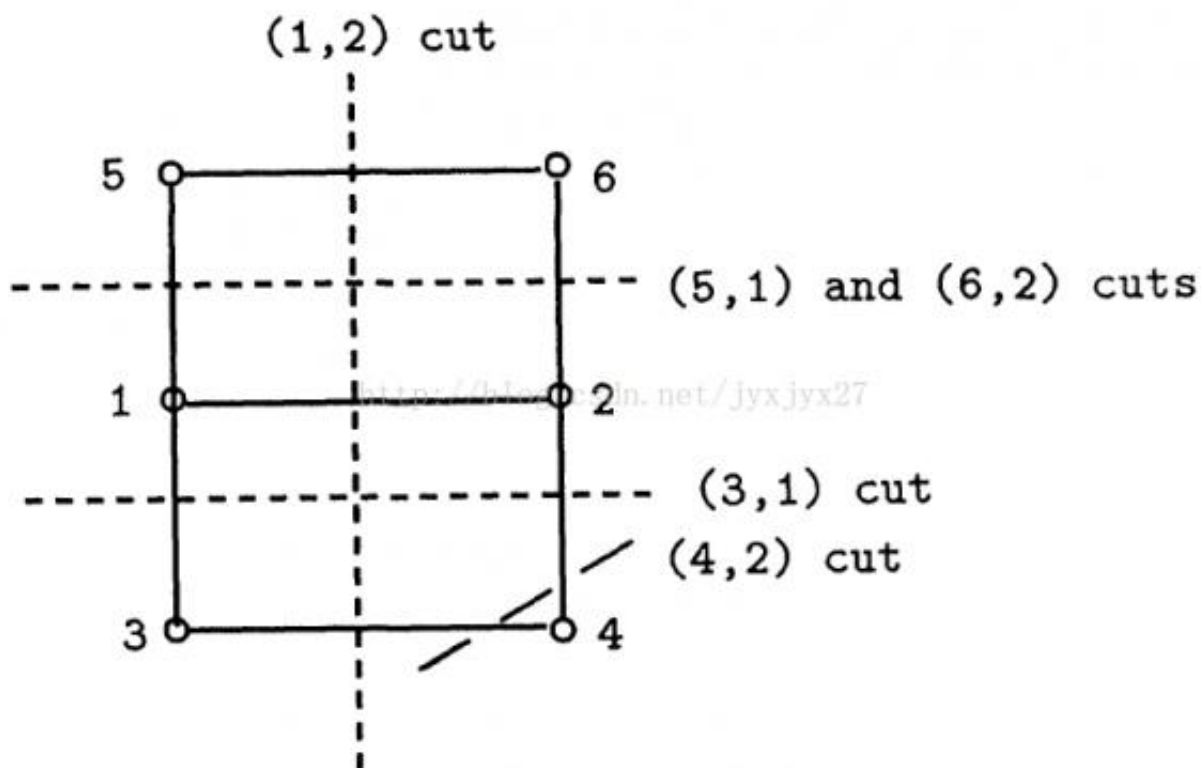


重复以上步骤可以将原无向图划分为一棵Gomory-Hutree，如下图所示。



通过此求解过程可知，代码实现整个步骤是十分复杂的。1990年Dan Gusfield通过"Very Simple Methods for All Pairs Network Flow Analysis"一文提出了一种容易实现的Gomory-Hutree的求解方法，也是本文采用的实现方法。下面通过例子来介绍这种实现方法：

不失一般性，举例原图是拥有6个节点的无向图，节点间的权重皆为1，节点间的最小割如下图所示：

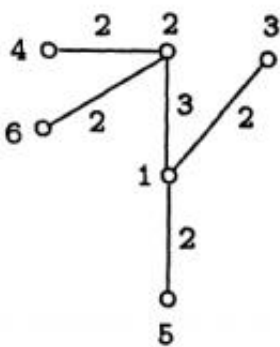
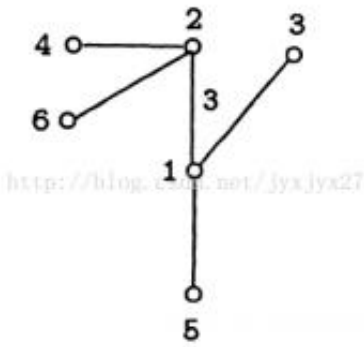
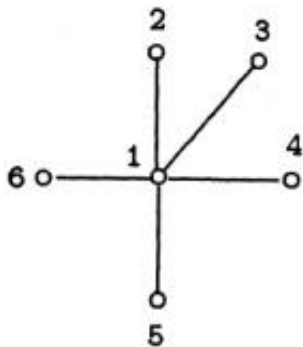


步骤一：创建一棵星型树，节点1为中心节点，其他节点为叶子节点，如下图左侧所示。

步骤二：分别选编号为2至6的节点为源节点（s），重复做步骤三和步骤四。

步骤三：在星型树中令与s节点相邻的节点为目的节点（t），计算s与t之间的最大流，并由此得到最小割。将最大流标注在星型树中s节点与t节点间的链路上。

步骤四：对于每一个编号大于s的节点i，如果在原图中s与i是邻居，且i与s在同一割集中，则去除星型图中i与t的连接，增加i与s的连接，如下图中间所示。



最后可得到右侧所示的Gomory-Hutree。