

## 多重背包问题的单调队列优化

Posted on 2011-07-05 18:00 [Mato\\_No1](#) 阅读(3107) 评论(3) 编辑 收藏 引用 所属分类: 动态规划

多重背包问题朴素时间复杂度为 $O(NMS)$ （这里 $S$ 是所有物品的数量 $s$ 之和），经过二进制优化后时间复杂度为 $O(NM\log 2S)$ ，这个复杂度已经能够应付大多数题了，但对于某些特别卡时间的题（比如 $N*M=10^7$ 的），仍然会TLE。这时，可以用单调队列优化，时间复杂度降为 $O(NM)$ 。

首先看一下多重背包问题的朴素转移方程：

$$F[i][j] = \max\{F[i-1][j-x*w[i]]+x*v[i]\} \quad (0 \leq x \leq s[i], j \geq x*w[i])$$

如果使用滚动数组，忽略 $i$ 这一维，设 $w_0=w[i]$ ,  $v_0=v[i]$ ,  $s_0=s[i]$ ，得：

$$F[j] = \max\{F[j-x*w_0]+x*v_0\} \quad (0 \leq x \leq s_0, j \geq x*w_0)$$

看上去这和单调队列本有神马关系，因为决策下标 $(j-x*w_0)$ 不是一个整数区间，中间是有间隔的。然而可以发现，这个方程的限制条件“ $0 \leq x \leq s_0, j \geq x*w_0$ ”，也就是 $x$ 的下界是 $\max\{0, j/w_0\}$ （下取整），当 $j$ 单调递增时，这个下界也是单调递增的。这满足单调队列优化的条件中的“决策下标的下界单调”……不是，还不能这样说，因为这里的决策下标是 $j-x*w_0$ ，而不是 $x$ 。

那么怎样才可以把决策下标变为 $x$ ？

将决策下标按照模 $w_0$ 的余数进行分类，可以分成 $w_0$ 类，分别对应模 $w_0$ 余0、余1……余 $(w_0-1)$ 的情况。这时，上面方程中的所有决策下标 $j-x*w_0$ 都是同一类的。进一步，设 $q = j/w_0$ （下取整）， $r = j \% w_0$ ，则 $j = q*w_0 + r$ ，对于某个决策下标 $j'$ ，设 $k = (j'-r)/w_0$ ，即 $j' = k*w_0 + r$ 。显然可以发现， $k$ 的取值范围是： $k \geq 0$ 且 $q-s_0 \leq k \leq q$ ，也即 $k$ 的下界是 $\max\{0, q-s_0\}$ ——随 $j$ 的单调而单调。

然后，转移方程可以改为（这里把 $r$ 当成一个已知量了）：

$$F[q*w_0+r] = \max\{F[k*w_0+r]+(q-k)*v_0\} \quad (k \geq 0 \text{ 且 } q-s_0 \leq k \leq q)$$

$$\text{即 } F[q*w_0+r] = \max\{F[k*w_0+r]-k*v_0\} + q*v_0 \quad (k \geq 0 \text{ 且 } q-s_0 \leq k \leq q)$$

设 $G[k] = F[k*w_0+r]$ 得：

$$G[q] = \max\{G[k]-k*v_0\} + q*v_0 \quad (k \geq 0 \text{ 且 } q-s_0 \leq k \leq q)$$

这个方程已经可以使用单调队列来优化了！

这样可以得出算法：

（1）从1到 $n$ ，枚举 $i$ ，建立 $w[i]$ 个空的单调队列，每个队列的元素都是两个int值： $(k, \text{val})$ ，表示转换后下标和决策值 $(G[k]-k*v[i])$ ；

（2）从0到 $m$ ，枚举 $j$ ，得出 $q, r$ 的值，对于队列 $r$ ：

【1】删去队首过时（ $k < q-m[i]$ ）的元素；

【2】 $F[j]$ 入队（这里的 $F[j]$ 指上一阶段的 $F[j]$ ，即 $F[i-1][j]$ 。因此这一步操作一定要先进行），删去队尾所有决策值 $\text{val}$ 不大于 $(F[j]-q*v[i])$ 的元素。

【3】取出队首结点，其 $\text{val}$ 值加上 $q*v[i]$ 后即为本阶段 $F[j]$ 的值。

最后 $F[m]$ 即为结果。总时间复杂度为 $O(NM)$ 。

其实这个是可以推广的，即对于如下形式的转移方程（其中 $H, G$ 和 $W$ 均为常量， $B[i]$ 为决策下标的下界，随 $i$ 单调）：

$$F[i] = \max\{F[i-x*H+W]\} + G \quad (B[i] \leq i-x*H+W < i, x \in \mathbf{N})$$

都可以用上述的办法进行转化，从而进行单调队列优化。