Wuvin (http://trinkle.blog.uoj.ac/archive?tag=%E6%95%B0%E5%AD%A6#)

登出 (http://uoj.ac/logout?_token=5U9XYUHCwP6OBPwXSobWLS7DKvhitp9jPgamRO5TTotkHhqDmeVs2aKZXJ0s)

(http://uoj.ac/) Trinkle的博客

标签

K-D tree (/archive?tag=K-D%20tree) **半平面交** (/archive?tag=%E5%8D%8A%E5%B9%B3%E9%9D%A2%E4%BA%A4) **对偶** (/archive?tag=%E5%AF%B9%E5%81%B6) **凸包** (/archive?tag=%E5%87%B8%E5%8C%85) **黑科技** (/archive?tag=%E9%BB%91%E7%A7%91%E6%8A%80) **数学** (/archive?tag=%E6%95%B0%E5%AD%A6) **AC自动机** (/archive?tag=AC%E8%87%AA%E5%8A%A8%E6%9C%BA) **LCT** (/archive?tag=LCT) **计算几何** (/archive?tag=%E8%AE%A1%E7%AE%97%E5%87%A0%E4%BD%95) **Code** (/archive?tag=Code)

共找到 2 篇包含 “数学” 标签的博客：

圆的反演 (http://trinkle.blog.uoj.ac/blog/602)

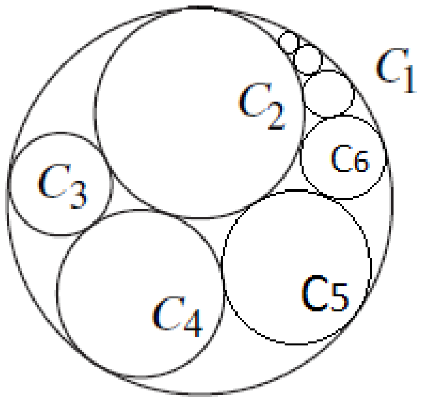
2015-07-11 20:16:47 **By Trinkle (http://uoj.ac/user/profile/Trinkle)**

Codechef July Challenge 2015 (http://www.codechef.com/JULY15/) » NTHCIR (http://www.codechef.com/JULY15/problems/NTHCIR)

虽然我知道在比赛还没结束前挂题解不好，但是还是想骗一发访问量 (http://trinkle.is-programmer.com/2015/7/11/circle_inversion.102620.html)。

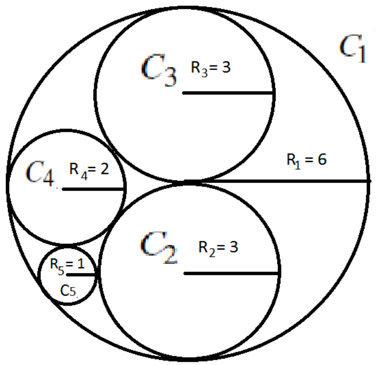
题目大概是这样的：

有很多圆，满足 $C_n (n \geq 4)$ 与 $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$都相切，$C_3$ 与 C_1, C_2 相切，C_2 与 C_1 相切，图形如下：



现已知 r_1, r_2, r_3, r_4，求 r_n。询问数<=1000w，$n \leq 10^9$，时限 $1.5s$

例如：当 $r_1 = 6, r_2 = r_3 = 3, r_4 = 2$ 的时候，圆大概长这样：

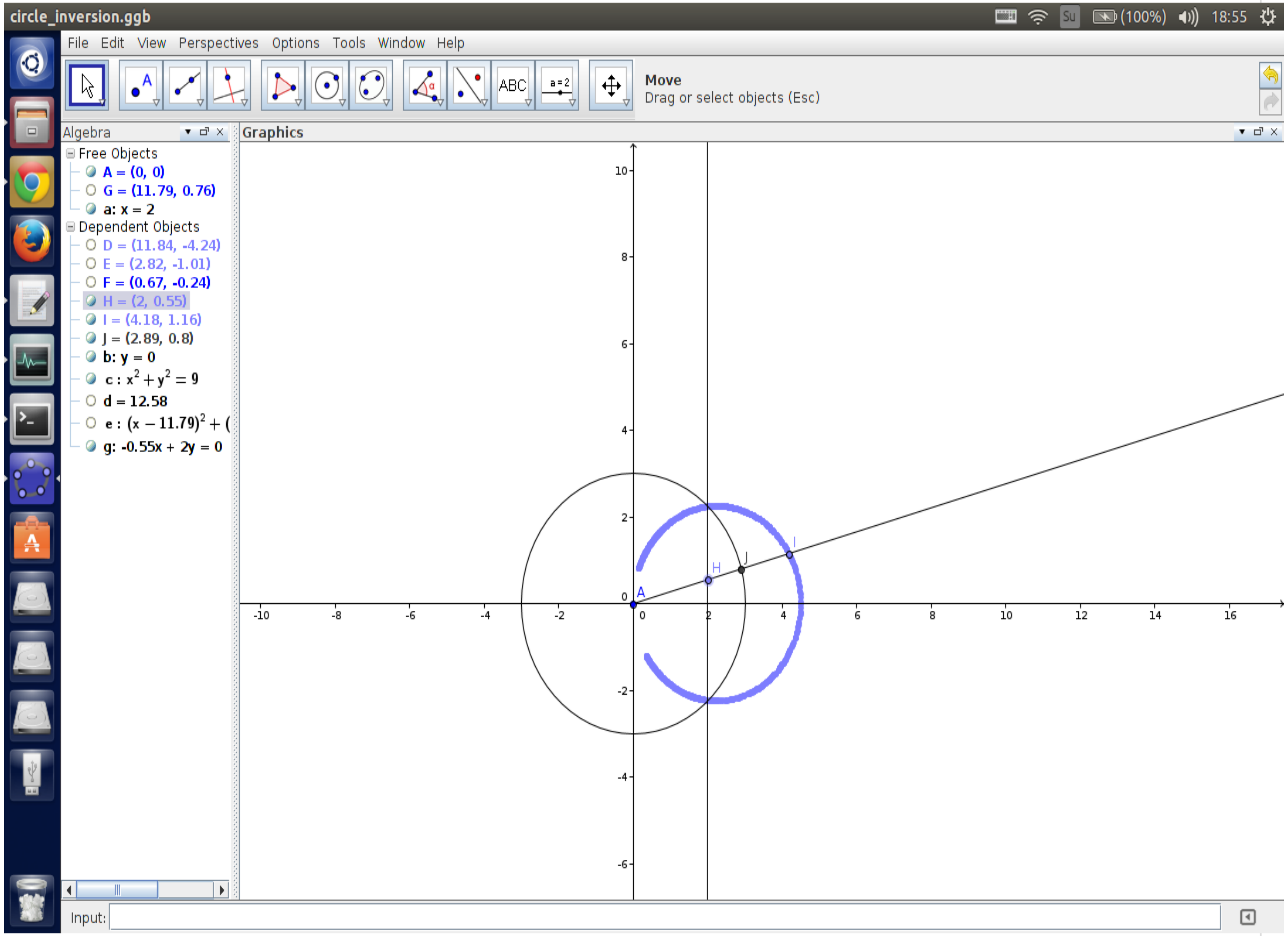


圆的反演是什么呢？

我们先选定一个点 O为反演中心，以 O 为圆心，半径为 r 画一个圆。然后对于平面上的点 P 和 P'，如果 P 和 P' 在以 O 为起点的射线上，并且 $|OP| \cdot |OP'| = r^2$，那么就说 P 和 P' 互为反演点。

所以圆外的点反演一下会到圆内，圆内会到圆外，圆上则不变。

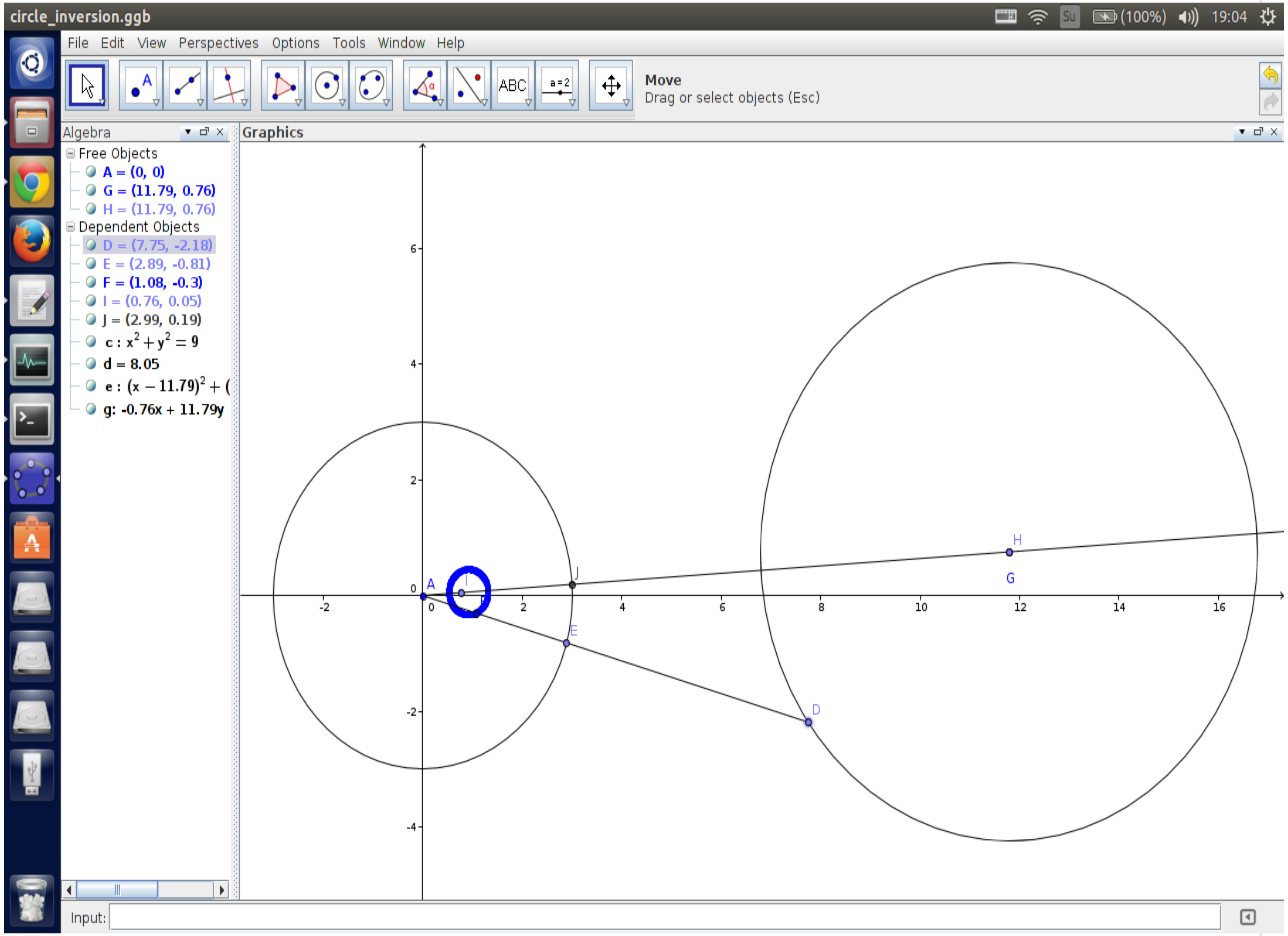
我找了 $GeoGebra$ 来玩玩，效果差不多是长下面这个样子的：



反演中心为坐标原点，点 H 在直线上移动，点 J 为射线 AH的焦点，点 I 为点 H 的反演点。

可以看到，一条不过反演中心的直线反演之后变成了一个过反演中心的圆。而且直线和两个圆两两相交。

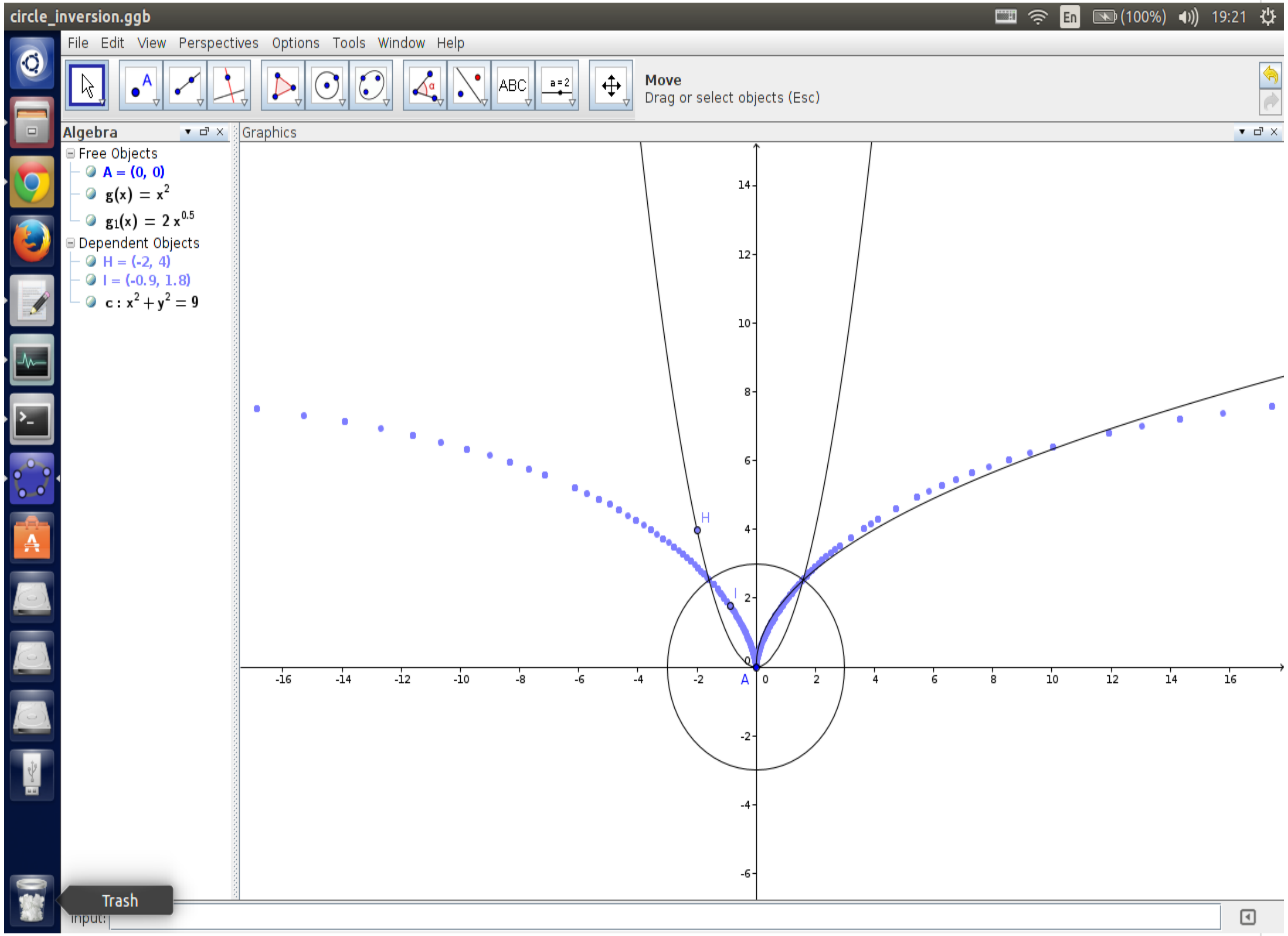
由于反演的可逆性，这个圆反演一下就变成了一条直线啦~



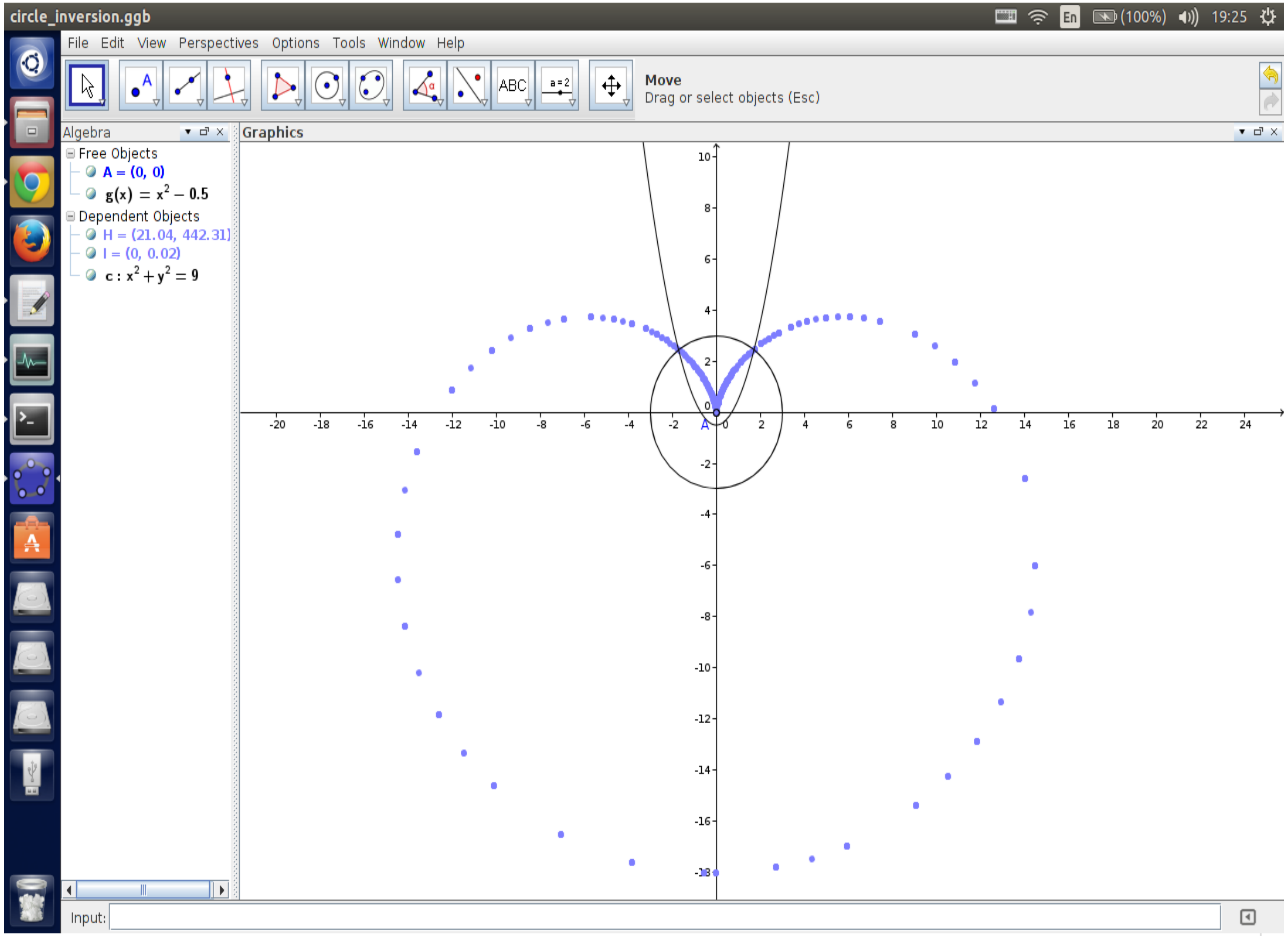
一个不过反演中心的圆反演以后是一个以反演中心位似的圆。

从上面的图来看，显然两个圆是反过来对应的，并不是直接位似。还有切记，圆心反演完以后并不是反演完的圆的圆心，比如上面的点 H 和 I。

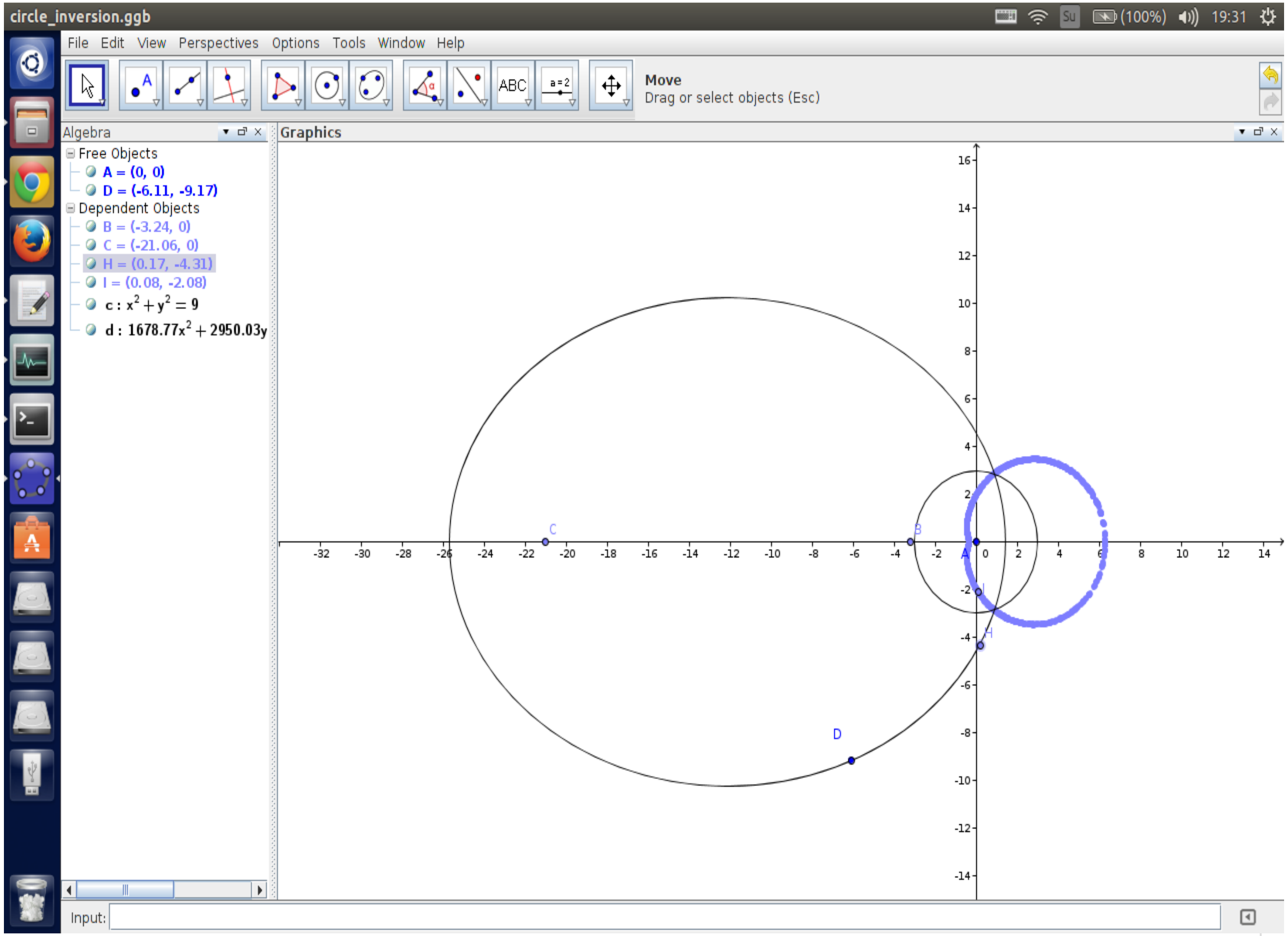
再来一个好玩点的：



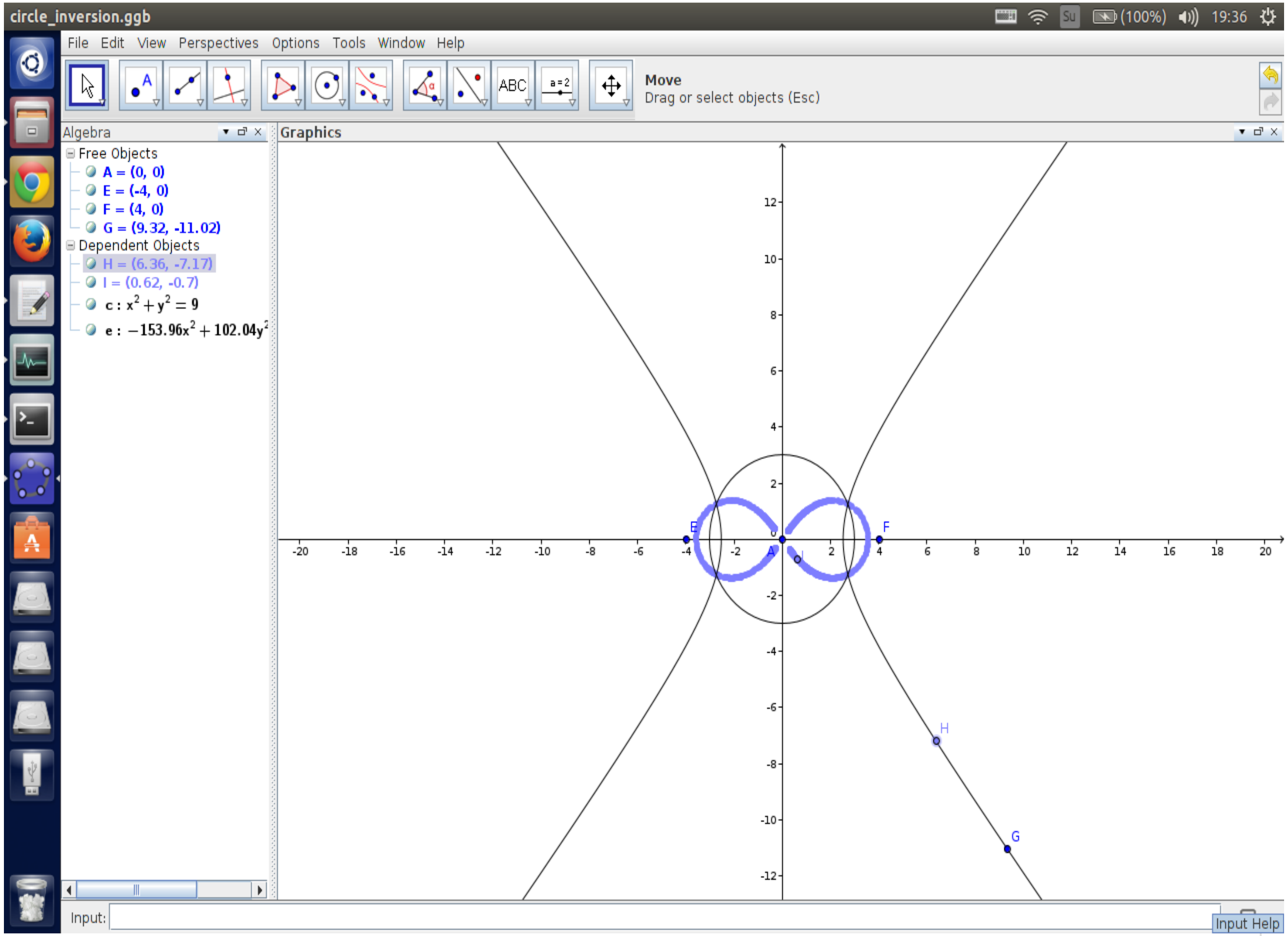
抛物线反演一下，不知道变成了什么。。。右边的黑线是 $2\sqrt{x}$，然而不能拟合。



然后稍微往下移一点就变成了心型线！

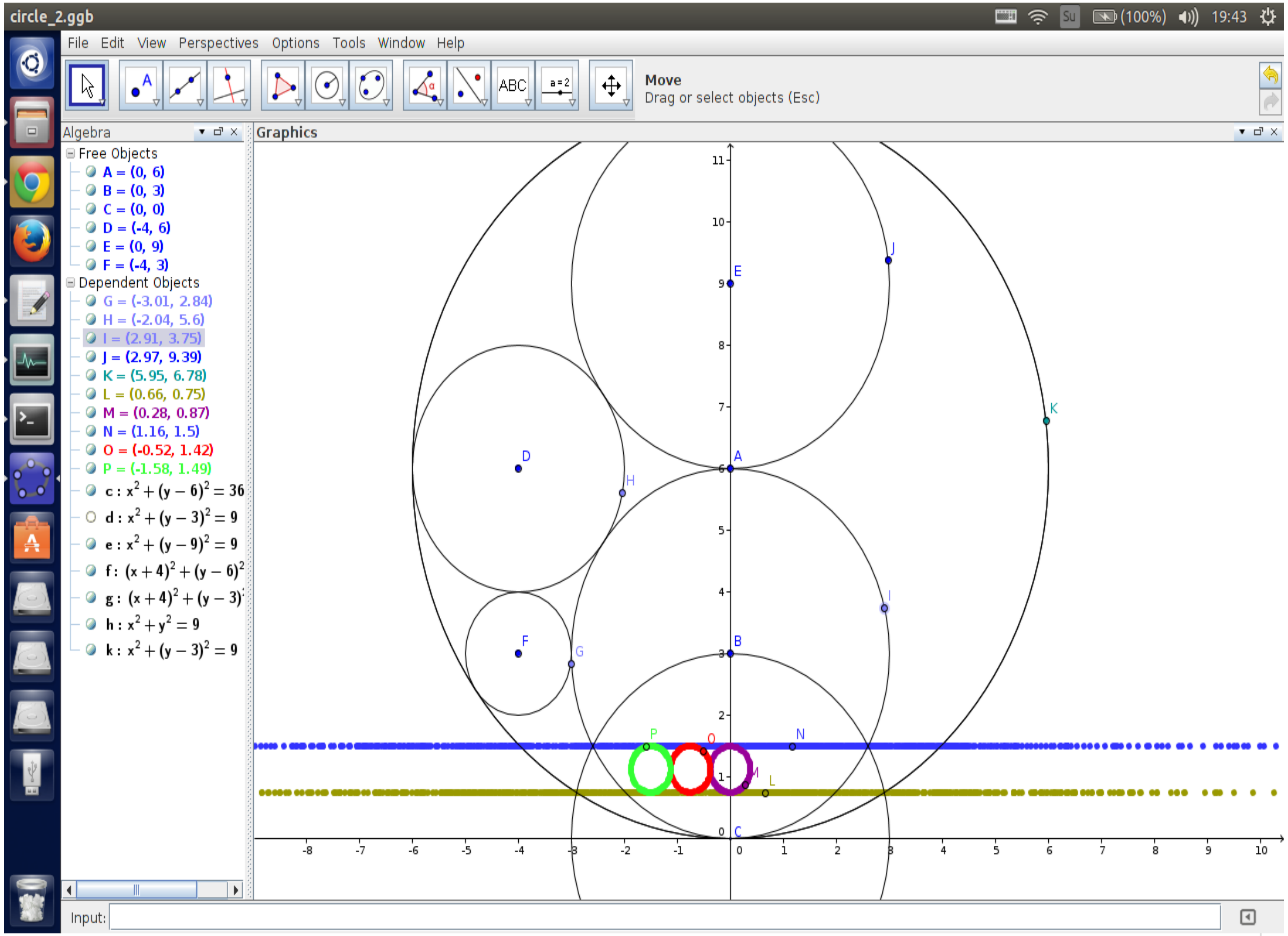


椭圆好像跟上面两种差不多，不是太好玩。



双曲线反演一下变成了 ∞...

我们不妨把样例反演一下变成下面这样：



由于反演前后的几何性质是不会发生改变的，比如反演前两个圆相切，反演完以后他们两个还是相切，只不过可能不是圆与圆相切而是直线与圆相切之类的，因此我们可以像这张图这样建立反演中心，圆 C_1, C_2 反演完以后就变成了两条直线，而 $C_3, C_4, \cdots$ 反演完之后，由于没过反演中心，所以还是圆；又因为它们都与圆 C_1, C_2 相切，所以反演以后的圆统统都被夹在了两条直线里面，大小都一样，而且一个挨着一个。

这里详细讲了怎么求一个圆的反演 (http://blog.csdn.net/acdreamers/article/details/16966369)

然而我觉得如果不会求的话，可以随便找圆上的三个点，然后把这三个点反一下，然后再以这三个点画个圆就好了，简单粗暴= =

注意不能直接求圆心。原因在上面第二张截屏。

于是这题的解法已经十分明了了：先把 C_1, C_2 反成直线，解三角形解出 C_3 的位置，然后反成小圆，看一下 C_4 塞哪里符合题意，然后就可以 $O(1)$ 求出第 n 个圆反演完以后的圆，直接反回去就好了。

计算几何 (/archive?tag=%E8%AE%A1%E7%AE%97%E5%87%A0%E4%BD%95) **数学** (/archive?tag=%E6%95%B0%E5%AD%A6)

阅读全文 (http://trinkle.blog.uoj.ac/blog/602)

好评 (http://trinkle.blog.uoj.ac/archive?tag=%E6%95%B0%E5%AD%A6#) 差评 (http://trinkle.blog.uoj.ac/archive?tag=%E6%95%B0%E5%AD%A6#) [+**5**] 好评 差评 [+**5**]

BZOJ3157/3516/4126 国王奇遇记 题解 (http://trinkle.blog.uoj.ac/blog/478)

2015-06-06 19:51:54 **By Trinkle (http://uoj.ac/user/profile/Trinkle)**

本题按时间复杂度的不同共有三种解法。

Sol-1 $O(m^2log(n))$

令 $f(n,k)=\sum_{i=1}^{n} i^k \cdot m^i$

$$
\begin{aligned}
f(n+1,k) &= \sum_{i=1}^{n+1} i^k \cdot m^i \\
&= m + \sum_{i=2}^{n+1} i^k \cdot m^i \\
&= m + m\sum_{i=1}^{n} (i+1)^k \cdot m^i \\
&= m + m\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} C_k^j \cdot i^j \cdot m^i \\
&= m + m\sum_{j=0}^{k} C_k^j \cdot \sum_{i=1}^{n} i^j \cdot m^i \\
&= m + m\sum_{j=0}^{k} C_k^j \cdot f(n,j)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(2n,k) &= \sum_{i=1}^{2n} i^k \cdot m^i \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^k \cdot m^i + \sum_{i=n+1}^{2n} i^k \cdot m^i \\
&= f(n,k) + \sum_{i=1}^{n} (i+n)^k \cdot m^{i+n} \\
&= f(n,k) + m^n \sum_{i=1}^{n} m^i \cdot \sum_{j=0}^{k} C_k^j \cdot i^j \cdot n^{k-j} \\
&= f(n,k) + m^n \sum_{j=0}^{k} C_k^j \cdot n^{k-j} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^j \cdot m^i \\
&= f(n,k) + m^n \sum_{j=0}^{k} C_k^j \cdot n^{k-j} \cdot f(n,j)
\end{aligned}
$$

所以我们只要花$O(m^2)$的时间就能从n转移到$n+1$或者$2n$，类似快速幂的思想就能在$O(m^2 log(n))$的时间内解决这题。

Sol-2 $O(m^2)$

好像网络上的题解都是这个复杂度。

令 $f(k)=\sum_{i=1}^{n}i^k\cdot m^i$

$$\begin{aligned}(m-1)\cdot f(k)&=\sum_{i=1}^{n}i^k\cdot m^{i+1}-\sum_{i=1}^{n}i^k\cdot m^i\\&=\sum_{i=2}^{n+1}(i-1)^k\cdot m^i-\sum_{i=1}^{n}i^k\cdot m^i\\&=n^k\cdot m^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}m^i\cdot[(i-1)^k-i^k]\\&=n^k\cdot m^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}m^i\cdot\sum_{j=0}^{k-1}C_k^j\cdot i^j\cdot(-1)^{k-j}\\&=n^k\cdot m^{n+1}+\sum_{j=0}^{k-1}C_k^j\cdot(-1)^{k-j}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^j\cdot m^i\\&=n^k\cdot m^{n+1}+\sum_{j=0}^{k-1}C_k^j\cdot(-1)^{k-j}\cdot f(j)\\f(k)&=\frac{n^k\cdot m^{n+1}+\sum_{j=0}^{k-1}C_k^j\cdot(-1)^{k-j}\cdot f(j)}{m-1}\end{aligned}$$

特判$m=1$的情况，当$m\neq 1$时直接用上面的式子$O(m^2)$转移。

Sol-3 $O(m)$

Orz完杜教的ppt才懂

令$G(n)=\sum_{i=0}^{n-1}i^m\cdot m^i$，注意这里只加到$n-1$

然后把m很小的时候的公式找出来：

$m=2\ \ G(n)=2^n\cdot(n^2-4\cdot n+6)-6$

$m=3\ \ G(n)=3^n\cdot(\frac{4\cdot n^3-18\cdot n^2+36\cdot n-33}{8})+\frac{33}{8}$

$m=4\ \ G(n)=4^n\cdot(\frac{27\cdot n^4-144\cdot n^3+360\cdot n^2-528\cdot n+380}{81})-\frac{380}{81}$

$m=5\ \ G(n)=5^n\cdot(\frac{128\cdot n^5-800\cdot n^4+2400\cdot n^3-4600\cdot n^2+5700\cdot n-3535}{512})+\frac{3535}{512}$

$m=6\ \ G(n)=6^n\cdot(\frac{3125\cdot n^6-22500\cdot n^5+78750\cdot n^4-183000\cdot n^3+305550\cdot n^2-340020\cdot n+189714}{10625})-\frac{189714}{15625}$

//公式最后一项的有理数还是一个神奇的数列 (http://oeis.org/A121376)

根据上面这些公式，不难得出答案的式子一定是长这样的：

$$G(n)=m^n\cdot F_m(n)-F_m(0)$$

其中$F_m(n)$是一个m次多项式(代入n后的值)，形如$c_0\cdot n^m+c_1\cdot n^{m-1}+\ldots+c_{m-1}\cdot n+c_m$

归纳法证一下发现结论是对的。

所以

$$G(n+1)-G(n)=n^m\cdot m^n=m^{n+1}\cdot F_m(n+1)-m^n\cdot F_m(n)$$

$$n^m=m\cdot F_m(n+1)-F_m(n)$$

$$F_m(n+1)=\frac{n^m+F_m(n)}{m}$$

设$F_m(0)=x$，则$F_m(1)$~$F_m(m+1)$都能通过上面的递推式变成形如$Ax+B$的形式。

由于$F_m(n)$是一个次数为m的多项式(代入n后的值)，所以有下面这个式子：

$$\sum_{i=0}^{m+1}(-1)^i\cdot C_{m+1}^iF_m(i)=0$$

为什么呢？

首先，$F_m(i)$是可以线性表示成若干个组合数之和，于是我们只要证明

$$\forall k \le m, \sum_{i=0}^{m+1}(-1)^i \cdot C_{m+1}^i C_i^k = 0$$

注意到i的范围只能是$[k, m+1]$，否则后面那坨东西直接变成0。

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=k}^{m+1}(-1)^i \cdot C_{m+1}^i \cdot C_i^k \\
&= \sum_{i=k}^{m+1}(-1)^i \cdot \frac{(m+1)!}{i! \cdot (m+1-i)!} \cdot \frac{i!}{k! \cdot (i-k)!} \\
&= \frac{(m+1)!}{(m+1-k)! \cdot k!} \sum_{i=k}^{m+1}(-1)^i \cdot \frac{(m+1-k)!}{(m+1-i)! \cdot (i-k)!} \\
&= C_{m+1}^k \sum_{i=k}^{m+1}(-1)^i \cdot C_{m+1-k}^{i-k} \\
&= C_{m+1}^k \sum_{i=0}^{m+1-k}(-1)^{i-k} \cdot C_{m+1-k}^i \\
&= (-1)^k \cdot C_{m+1}^k \cdot (1-1)^{m+1-k} = 0
\end{aligned}$$

于是这个鬼畜的结论就证完啦~对任意m次多项式都能用~

然后就能根据这个式子列方程，就能把$F_m(0)$给解出来。

然而题目不是叫你求$F_m(0)$，而是求$m^n \cdot F_m(n) - F_m(0)$

当$n \le m$的时候，好办，把之前用到的$F_m(n) = A(n) \cdot F_m(0) + B(n)$直接算一下，然后就能得到答案了。

当$n > m$的时候，？

假设我们已经求出了$F_m(0), F_m(1), \dots, F_m(m)$

令

$$F_m(n) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k a_k$$

经过二项式反演可得

$$a_k=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\cdot C_k^j\cdot F_m(j)$$

$$\begin{aligned}
F_m(n) =& \sum_{k=0}^{m}C_n^k\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\cdot C_k^j\cdot F_m(j)\\
=& \sum_{j=0}^{m}F_m(j)\cdot\sum_{k=j}^{m}(-1)^{k-j}\cdot C_n^k\cdot C_k^j\\
=& \sum_{j=0}^{m}F_m(j)\cdot\sum_{k=j}^{m}(-1)^{k-j}\cdot\frac{n!\cdot k!}{k!\cdot(n-k)!\cdot j!\cdot(k-j)!}\\
=& \sum_{j=0}^{m}F_m(j)\cdot\sum_{k=j}^{m}(-1)^{k-j}\cdot\frac{n!\cdot(n-j)!}{(n-k)!\cdot j!\cdot(k-j)!\cdot(n-j)!}\\
=& \sum_{j=0}^{m}F_m(j)\cdot\sum_{k=j}^{m}(-1)^{k-j}\cdot C_n^j\cdot C_{n-j}^{k-j}\\
=& \sum_{j=0}^{m}F_m(j)\cdot C_n^j\cdot\sum_{k=0}^{m-j}(-1)^{k}\cdot C_{n-j}^{k}\\
=& \sum_{j=0}^{m}F_m(j)\cdot C_n^j\cdot(-1)^{m-j}\cdot C_{n-j-1}^{m-j}\\
=& \sum_{j=0}^{m}F_m(j)\cdot(-1)^{m-j}\cdot\frac{n!\cdot(n-j-1)!}{j!\cdot(n-j)!\cdot(m-j)!\cdot(n-m-1)!}\\
=& \frac{n!}{(n-m-1)!}\sum_{j=0}^{m}F_m(j)\cdot(-1)^{m-j}\cdot\frac{1}{j!\cdot(m-j)!\cdot(n-j)}\\
=& \sum_{j=0}^{m}F_m(j)\cdot(-1)^{m-j}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m)}{j!\cdot(m-j)!\cdot(n-j)}
\end{aligned}$$

$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m)}{n-j}$可以用一个前缀乘积和一个后缀乘积优化成$O(m)$的预处理复杂度。

所以只要花$O(m)$的时间就好了。

上面有一步用到了这个式子(第六行到第七行)：

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot C_n^i &= C_n^0-C_n^1+\dots\\ &= C_{n-1}^0-C_n^1+\dots\\ &= -C_{n-1}^1+C_n^2-\dots\\ &= C_{n-1}^2-C_n^3+\dots\\ &= (-1)^k\cdot C_{n-1}^k\end{aligned}$$

复杂度分析：求1~$m+1$的所有阶乘、逆元、阶乘逆元以及i^m都能做到$O(m)$的时间复杂度。

求$\forall i\in[1,m]F_m(i)$也只要用线性复杂度。

当$n\le m$的时候，只要用$O(1)$的时间得到答案。

当$n>m$的时候，照着最后一个式子求。前面的乘数花$O(m)$的时间算，后面的$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m)}{n-j}$，$\frac{1}{j!}$和$\frac{1}{(m-j)!}$直接$O(1)$

打了一个下午题解终于把这个坑给填了233

~~其实我已经在这篇blog里面贴了代码，然而只有神犇才能看得见。~~

数学 (/archive?tag=%E6%95%B0%E5%AD%A6) **黑科技** (/archive?tag=%E9%BB%91%E7%A7%91%E6%8A%80)
阅读全文 (http://trinkle.blog.uoj.ac/blog/478)
好评 (http://trinkle.blog.uoj.ac/archive?tag=%E6%95%B0%E5%AD%A6#) 差评 (http://trinkle.blog.uoj.ac/archive?tag=%E6%95%B0%E5%AD%A6#) [+9] 好评 差评 [+9]