pick定理及其证明

标签： matrix 图形 c 2010　　2012-03-19 22:06　248人阅读　评论(0) 收藏 举报

分类： 计算几何（2）

转自：http://www.cnblogs.com/yujunyong/articles/2010482.html

pick定理：在一个平面直角坐标系内，以整点为顶点的简单多边形（任两边不交叉），它内部整点数为a，它的边上（包括顶点）的整点数为b，则它的面积**S = a+b/2-1**

先看最简单的三角形，如果只有三个顶点在格点上，边上（不包括顶点）与内部均没有其它整点

那么根据pick定理S=3/2-1=1/2

以下证明凡面积大于1/2的三角形在边上或者在内部有其它整点

证：首先可以通过平移和轴对称将三角形的一个顶点移至原点，另两个位于x轴或第一象限中

设三角形为OAB，O(0,0),A(a,c),B(b,d)并不纺设d/b>c/a,它的面积为n/2(n为整数，因为S=(ad-bc)/2）

若c=0,a>1,则OA边上有其它整点，命题得证

若c=0,a=1,b=1，那么由于面积大于1/2，d>1，则AB边上有其它整点，命题得证

若c=0,a=1,b>1，则将B移至原点并旋转180度，归为另两点均位于第一象限的情况

O(0,0),A(a,c),B(b,d),abcd均为正整数，ad-bc=n>1

若a,c不互质，则命题得证，以下讨论a,c与b,d均互质的情况

（上一篇里的链接有用pick定理证明farey序列性质的问题，这里也用上篇证明farey序列的方法类似证明这个结论）

取n的一个质因数p

存在正整数k<p，使(ka+b)/p,(kc+d)/p均为正整数

则[(ka+b)/p,(kc+d)/p]即为所求的其他整点

因为(ka+b)/p=[(ka+b)/(k+1)]*[(k+1)/p]

(kc+d)/p=[(kc+d)/(k+1)]*[(k+1)/p]

因为(k+1)≤p

所以这个整点在AB的某个k+1等分点与O的连线线段上，命题得证

所以对于边上或内部无其他整点的最简单三角形，它的面积只能为1/2，pick定理成立

对于其它三角形，用第二数学归纳法

(1)2i+b-2=2的情况成立

(2)假设对2i+b-2<n的情况成立

则当2i+b-2=n，若三角形内部有整点，则将此点与三角形三顶点相连形成三个新的三角形

设有k个内点落在了新形成的三条边上

三个三角形的总内点为i-k，边上的数(同时属于多个三角形的点重复计算）为(b-3)+2*(k+2)+1*3=b+2k+4

所以2S=2S1+2S2+2S3=(2i1+b1-2)+(2i2+b2-2)+(2i3+b3-2)=2(i-k)+(b+2k+4)-6=2i+b-2成立

若无内点，则将某边上的整点与相对的顶点相连得到两个三角形

证明方法同上.......

所以对于三角形，pick定理成立

对于任意简单多边形，我们可以把它分成若干三角形
当连接多边形的某一对角线将它分为两个多边形的时候
对角线外的其他点计数保持不变，对角线内的点由于同时被计算两次，也就是2△i=△b
而端点的两点分别被多算了1，总共多算2，由此补足了分成两个图形而多减的2

所以将多边形分成若干三角形以后，值不变
所以对任意简单多边形，pick定理均成立

Pick定理的几个出人意料的应用 (摘自matrix67)

Pick定理的几个出人意料的应用 (摘自matrix67)
2009-11-13 11:34

考虑直线x+y=n，其中n是一个素数。这条直线将恰好通过第一象限里的n-1个格点（如上图，图中所示的是n=11的情况）。将这n-1个点分别和原点相连，于是得到了n-2个灰色的三角形。仔细数数每个三角形内部的格点数，你会发现一个惊人的事实：每个三角形内部所含的格点数都是一样多。这是为什么呢？

Pick定理是说，在一个平面直角坐标系内，如果一个多边形的顶点全都在格点上，那么这个图形的面积恰好就等于边界上经过的格点数的一半加上内部所含格点数再减一。例如，上图多边形的边界上有8个格点，内部含有7个格点，那么其面积就等于8/2+7-1=10。我们曾经在这里看到过一个非常神奇非常诡异的证明。这个定理有一些非常巧妙的应用。在上面的问题里，所有三角形都是等底等高的，因此它们的面积都相等。另外，注意到x与y的和是一个素数，这表明x和y是互素的（否则x+y可以提出一个公因数d，与和为素数矛盾），也就是说(x,y)和原点的连线不会经过其它格点。既然所有三角形的面积都相等，边界上的格点数也相等，由Pick定理，我们就能直接得出每个三角形内部的格点数也相等了。

另一个有趣的问题则是，一个n*n的正方形最多可以覆盖多少个格点？把这个正方形中规中矩地放在直角坐标系上，显然能够覆盖(n+1)^2个格点。貌似这已经是最多的了，不过如何证明呢？利用Pick定理，我们能够很快说明它的最优性。注意到由于任两个格点间最近也有一个单位的间距，再考虑到正方形的周长为4n，因此该正方形的边界上最多有

4n个格点。把正方形边界上的格点数记作B，内部所含格点数记为I，于是它所能覆盖的总格点数等于I+B，由于I+B = I+B/2-1 + B/2+1 ≤ n^2 + 4n/2 + 1 = (n+1)^2，结论立即得证。

一个东西最出神入化的运用还是见于那些与它八杆子打不着的地方。Farey序列是指把在0到1之间的所有分母不超过n的分数从小到大排列起来所形成的数列，我们把它记作F_n。例如，F_5就是

0/1, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1

Farey序列有一个神奇的性质：前一项的分母乘以后一项的分子，一定比前一项的分子与后一项分母之积大1。用Pick定理来证明这个结论异常简单。把分母不超过n的每一个0和1之间的分数都标在平面直角坐标系上，例如0/1就对应点(1,0)，1/5就对应点(5,1)。考虑一根从原点出发的射线由x轴正方向逆时针慢慢转动到y轴正方向，这根射线依次扫过的标记点恰好就是一个Farey序列（因为Farey序列相当于是给每个标记点的斜率排序）。考虑这根射线扫过的两个相邻的标记点，它们与原点所组成的三角形面积一定为1/2——由于分数都是最简分数，因此它们与原点的连线上没有格点；又因为这是射线扫过的两个相邻的标记点，因此三角形内部没有任何格点。另外注意到，由于三角形面积等于叉积的一半，因此两个点(m,n)和(p,q)与原点组成的三角形面积应该为(mq-np)/2。于是，对于Farey序列的两个相邻分数n/m和q/p，我们有(mq-np)/2 = 1/2，即mq-np=1。

来源：
http://www.cut-the-knot.org/ctk/PickApps.shtml
http://www.cut-the-knot.org/ctk/PickToFarey.shtml