

万能公式：找规律什么的都弱爆了

[读图模式](#)

TomLenen

2013-05-04 23:16

小学的奥数题中，最令人头疼的题型无非是找规律了，各种毫无规律的数列。你可以试试下面的例子：

*1, 4, 14, 53, 90, 268, 977, 1586

*1, 3, 7, 8, 0, 5, 9, 2, 4, 6

*4, 2, 5, 2, 6, 10, 3, 7, 6, 4, 6

其实一直以来，我也一直很疑惑有没有什么找规律的秒杀解。就像小学的挠破头都解不了的应用题，到了中学以连数学不及格的人都可以轻而易举地列个方程解掉。直到看到了[一个帖子](#)两个网友的对话：

@Talentedpope：哦，设一个8次多项式，待定系数法，结束了。。。

@三哥臭皮匠：不如直接说用拉格朗日插值呢.....

等等，拉格朗日插值，我学过。等等？这货居然可以这么用！？

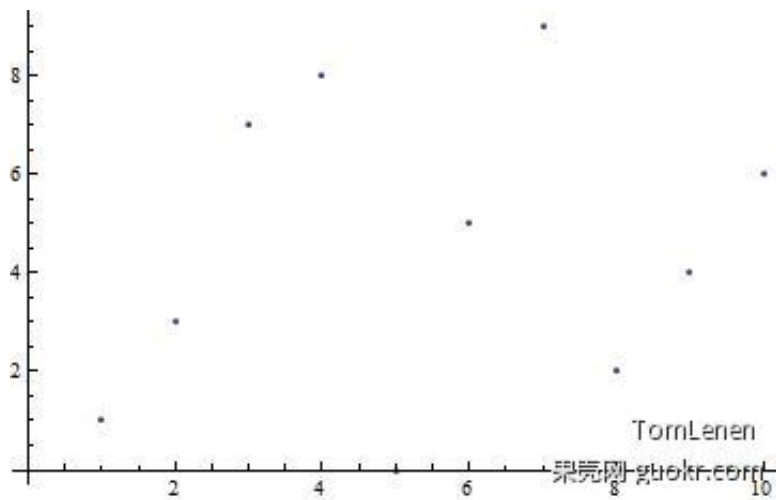
好吧，作为面向小学生以及其父母的方法，我觉得有义务要详细解释一下什么叫做拉格朗日插值法。

首先，这个方法为什么叫做拉格朗日插值法呢？一是因为拉格朗日“提出”了这种方法（其实拉格朗日并不是第一个提出的，只是因为他名气比较大，很多人都是因为他才了解到这个方法），所以有“拉格朗日”。

那为什么叫做“插值法”呢？

好吧.....所谓的插值，就是“插”“值”，就是指找出一个通过给出离散数据点的函数（好吧，好吧，我知道小学生不懂函数和离散）。那么，数列中给出数据可以表示为在坐标系上的点，x坐标就是第几项，y坐标就是该项的值。

比如说，“1, 3, 7, 8, 0, 5, 9, 2, 4, 6”这个数列可以表示为：

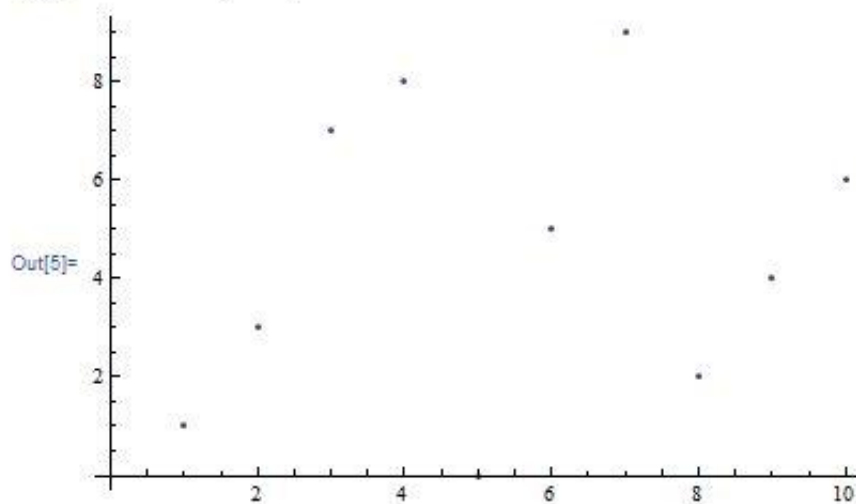


在Mathematica中用几行简单的代码即可做到：

```
In[4]:= data = {1, 3, 7, 8, 0, 5, 9, 2, 4, 6}
```

```
Out[4]= {1, 3, 7, 8, 0, 5, 9, 2, 4, 6}
```

```
In[5]:= ListPlot[data]
```



接下来，我们找出这些点都在哪一个函数上面，接着下来把下一项的项数带进去，就得到了下一项的值——这实际上就是通项公式！

事不宜迟，马上来试一试！

首先，我们先来看看拉格朗日插值公式是怎么样的：

$$L(x) := \sum_{j=0}^k g_j \ell_j(x)$$

$$\ell_j(x) := \prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{j-1}) (x - x_{j+1}) \dots (x - x_k)}{(x_j - x_0) \dots (x_j - x_{j-1}) (x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_k)}$$

好吧，我知道小学生又看不懂了。

那下面我们先试一个简单的数列：1、8、27...那下一个是什么呢？

首先，这表示存在一个函数。当自变量分别为1、2、3时函数值为1、8、27。于是我们可以设一个函数：

$$x_0 = 1 \quad f(x_0) = 1$$

$$x_1 = 2 \quad f(x_1) = 8$$

$$x_2 = 3 \quad f(x_2) = 27$$

接下来就是关键的一步了！小学生可以不懂这是怎么回事。但有什么问题？考试会用就行了（如果你不介意再解释一下一些其他的问题...比如未知数、自变量和分数的运算）。

$$L(x) = 1 \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} + 8 \cdot \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3} + 27 \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2}$$

$$= 6x^2 - 11x + 6.$$

容易看到，整个式子是三项的和，每一个点都有一项。对于每一个单独的点来说，分子是这一点的函数值乘上x与其他点的自变量的差。而分母就是该点的自变量和其他点的自变量的差的积。

于是，一个通项公式就出来了。是 $6x^2 - 11x + 6$ 。

于是我们迫不及待地把x=4带进去，得到58。

至此，大功告成。

等等，什么答案写着是64？别管了，肯定是盗版书印错答案了。有什么可能拉格朗日大牛会错呢？

什么，我们的规律不对？正确的是y=x^3?好的，让我看看。嗯...难道是拉格朗日错了？但是前面我们的估算也是没问题的啊。

再仔细看一下坑爹的高数课本，才发现原来是我们一直搞错了。如果我们给的是n个点，那么拉格

朗日给出的函数将会是 $(n-1)$ 次的。

这不坑爹吗...用公式之前还得想清楚这个函数是几次的，而且如果是更高次数的还没办法加上点去求（更别说斐波那契数列这样的用递归定义的数列了）。

这就意味着，就算是1、2、3、4、5、6...这样的数列，拉格朗日插值法在耗尽你大量的考试时间去求出通项公式以后，还会给出一个超级坑爹的答案！

那么这个方法还有什么用！

别急，前面的计算都是为后面做铺垫的。现在才是主要内容。

无论是分布得多么奇怪的点，拉格朗日插值法总能给出一条经过这些点的函数图象。也就是说，就算是1、2、3、4、5、6、（1568）这样明显不靠谱的答案也是“有规律的”。因为你总可以设一个六次多项式，找出这个数列的通项公式。

所以说：

1、3、5、7、9、（1598），是对的

3、1、4、1、5、9、2、（999），是对的

1，1，2，3，5，7，（8989），是对的

2，4，6，8，（5），是对的

如果老师斗胆把你的答案批错的话，你大可以把这篇文章打印出来，然后跟老师说：“这个空填任何数都是可以的，因为你总可以设一个 n 次多项式，然后.....”

(我承认这是伪科普，真娱乐....)