莫比乌斯函数与容斥原理

Qizy

2018 年 2 月 8 日

成都石室中学
yongzhengqi@gmail.com

目录

基础定义

卷积

设 $F(X)$ 是满足只要 $x > y$ 就有 $f(x,y) = 0$ 的所有实数函数 $f : X \times X \to \Re$ 的集合

对于 $\forall f, g \in F(X)$，定义卷积 $h = f * g$:

$$h(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{\{z:x\le z\le y\}} f(x,z)g(z,y) & x \le y \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{1}$$

不难发现，卷积满足结合律

$$f * (g * h) = (f * g) * h \ (f, g, h \in F(X))$$

Kronecker delta function

我们定义 Kronecker delta function δ ：

$$\delta(x,y)=\begin{cases}1 & 若 x=y\\ 0 & otherwise\end{cases} \tag{2}$$

不难发现，对于所有 $f\in F(X), \delta * f = f * \delta = f$，因此对卷积来说 δ 就是一个恒等函数

如果我们把二元函数看作是矩阵的话，δ 相当于是单位矩阵

我们定义 zeta function ζ:

$$\zeta(x,y)=\begin{cases}1 & 若 x\le y\\ 0 & otherwise\end{cases} \tag{3}$$

不难发现，ζ 函数是偏序集 $(X,\le)$ 的一种表示，因为它包含了所有满足 $x\le y$ 的元素对 x,y 的全部信息

如果我们把二元函数看作是矩阵的话，ζ 相当于是特殊的上三角矩阵

Möbius function

我们定义 Möbius function μ 为 ζ 的逆函数：

$$\mu * \zeta = \delta \tag{4}$$

因为对于 $\forall y \in X, \zeta(y, y) = 1$，所以 ζ 总有逆函数，即 μ 总是存在

Möbius function 的一些推论

运用(1)式有：

$$\sum_{\{z:x\leq z\leq y\}} \mu(x,z)\zeta(z,y) = \delta(x,y) \qquad (x \leq y) \tag{5}$$

或等价地：

$$\sum_{\{z:x\leq z\leq y\}} \mu(x,z) = \delta(x,y) \qquad (x \leq y) \tag{6}$$

由(6)式有：

$$\text{对于所有}x, \mu(x,x) = 1 \tag{7}$$

以及：

$$\mu(x,y) = -\sum_{\{z:x\leq z<y\}} \mu(x,z) \qquad (x < y) \tag{8}$$

直积

设 $(X, \leq_1), (Y, \leq_2)$ 为两个偏序集。在下面集合

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

上定义关系 $\leq$ 为

$$(x, y) \leq (x', y') \text{当且仅当} x \leq_1 x' \text{且} y \leq_2 y'$$

显然 $(X \times Y, \leq)$ 是一个偏序集，叫做 $(X, \leq_1)$ 和 $(Y, \leq_2)$ 的直积

我们可以把这个直积结构拓展到任意个偏序集上

一般的莫比乌斯反演

定义在有限偏序集上的莫比乌斯反演

设 $(X, \leq)$ 是偏序集且有最小元 0。设 μ 是它的莫比乌斯函数，并设 $F : X \to \Re, G : X \to \Re$ 是定义在 X 上的实值函数，有：

$$G(x) = \sum_{\{z:z\leq y\}} F(z) \qquad (x \in X)$$
$$\Leftrightarrow F(x) = \sum_{\{y:y\leq x\}} G(y)\mu(y,x) \qquad (x \in X) \tag{9}$$

证明

设 ζ 为 $(X,\leq)$ 的 ζ 函数，有：

$$
\begin{aligned}
\sum_{\{y:y\leq x\}} G(y)\mu(y,x) &= \sum_{\{y:y\leq x\}} \sum_{\{z:z\leq y\}} F(z)\mu(y,x) \\
&= \sum_{\{y:y\leq x\}} \mu(y,x) \sum_{\{z:z\in X\}} \zeta(z,y)F(z) \\
&= \sum_{\{z:z\in X\}} \sum_{\{y:y\leq x\}} \zeta(z,y)\mu(y,x)F(z) \\
&= \sum_{\{z:z\in X\}} F(z) \sum_{\{y:z\leq y\leq x\}} \zeta(z,y)\mu(y,x) \\
&= \sum_{\{z:z\in X\}} \delta(z,x)F(z) \\
&= F(x)
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

一般的莫比乌斯反演与容斥原理

一般的莫比乌斯反演与容斥原理

一般的莫比乌斯函数

定义在有限偏序集上的莫比乌斯函数

设 μ 为有限偏序集 $(P(X_n), \subseteq)$ 的莫比乌斯函数，其中 $X_n = \{1, 2, \cdots, n\}$。当 $A \subseteq B \subseteq X_n$ 时：

$$\mu(A, B) = (-1)^{|B|-|A|} \tag{10}$$

证明

使用归纳法进行证明：

(α) 当 $A = B$ 时，由(7)得 $\mu(A, B) = \mu(A, A) = 1$，从而如果 $A = B$ 则(10)成立

(β) 当 $A \subset B$ 时，设 $p = |B| - |A|$，有：

$$\begin{aligned} \mu(A, B) &= -\sum_{\{C: A \subseteq C \subset B\}} \mu(A, C) && (11) \\ &= -\sum_{\{C: A \subseteq C \subset B\}} (-1)^{|C|-|A|} \qquad \text{(根据归纳假设)} && (12) \\ &= -\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{p}{k} && (13) \end{aligned}$$

其中(12)→(13)可以看作依据 $|C| - |A| = k$ 来分类

证明

由二项式定理得：

$$0 = (1-1)^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \tag{14}$$

因此：

$$\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{p}{k} = -(-1)^p \binom{p}{p} \tag{15}$$

将(15)带入(13)有：

$$\mu(A,B) = (-1)^p \binom{p}{p} = (-1)^p = (-1)^{|B|-|A|} \tag{16}$$

由 $(\alpha), (\beta)$ 得(10)成立 $\square$

一般的莫比乌斯反演与容斥原理

更一般的容斥原理

设 $X_n\{1,2,\cdots,n\}$，且设 $F: P(X_n) \to \Re, G: P(X_n) \to \Re$ 为定义在 X_n 的子集上的函数，有：

$$
\begin{aligned}
& G(K) = \sum_{L \subseteq K} F(L) \qquad (K \subseteq X_n) \\
\Leftrightarrow & F(K) = \sum_{L \subseteq K} (-1)^{|K|-|L|} G(L) \qquad (K \subseteq X_n)
\end{aligned} \tag{17}
$$

证明

将(10)带入(9)有

$$\begin{aligned} & G(K)=\sum_{L\subseteq K}F(L) \qquad (K\subseteq X_n) \\ \Leftrightarrow & F(K)=\sum_{L\subseteq K}(-1)^{|K|-|L|}G(L) \qquad (K\subseteq X_n) \end{aligned} \tag{18}$$

Q.E.D.

一般与经典的莫比乌斯反演

一般与经典的莫比乌斯反演

定义在全序集上的莫比乌斯函数

结论

设 μ 是全序集 $(X_n, \leq)$ 的莫比乌斯函数，其中 $X_n = \{1, 2, \cdots, n\}, 1 < 2 < \cdots < n$，当 $a <= b$ 有：

$$\mu(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{若} a = b \\ -1 & \text{若} a = b - 1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{19}$$

证明

当 $a=b$ 时，由(7)得 $\mu(a,b)=\mu(a,a)=1$

当 $a=b-1$ 时，由(8)得 $\mu(a,b)=-\mu(a,a)=-1$

当 $a<b-1$ 时，使用归纳法证明：

> 固定 a，对 b 作归纳
>
> (α) 当 $a=b-2$ 时，由(8)得
>
> $\mu(a,b)=-\mu(a,a)=-\mu(a,a+1)=0$
>
> (β) 当 $a<b-2$ 时，由(8)及归纳假设得
>
> $\mu(a,b)=-\sum\limits_{a\le c<b}\mu(a,c)=0$
>
> 由 $(\alpha),(\beta)$ 得当 $a<b-1$ 时，$\mu(a,b)=0$

综上(19)成立 $\square$

一般与经典的莫比乌斯反演

直积与莫比乌斯函数

结论

设 $(X, \leq_1), (Y, \leq_2)$ 为两个有限偏序集，且它们的莫比乌斯函数分别为 μ_1, μ_2。设 μ 为 $(X, \leq_1), (Y, \leq_2)$ 的直积的莫比乌斯函数，有：

$$\mu((x, x'), (y, y')) = \mu_1(x, x')\mu_2(y, y') \qquad ((x, y), (x', y') \in X \times Y) \tag{20}$$

证明

当 $(x,y)\not\leq(x',y')$ 时，$\mu((x,y),(x',y'))=0$，且或者 $x\not\trianglelefteq_1 x'$，或者 $y\not\trianglelefteq_2 y'$，所以 $\mu_1(x,x')=0$ 或 $\mu_2(y,y')=0$，所以 $\mu((x,x'),(y,y'))=\mu_1(x,x')\mu_2(y,y')=0$

当 $(x,y)\leq(x',y')$ 时，使用归纳法证明：

对在这一偏序下介于 (x,y) 和 (x',y') 之间的序偶个数作归纳

(α) 当 $(x,y)=(x',y')$ 时 $\mu((x,x'),(y,y'))=\mu_1(x,x')=\mu_2(y,y')=\mu_1(x,x')\mu_2(y,y')=1$

证明

(β) 当 $(x,y)<(x',y')$ 时，有：

$$\begin{aligned}
\mu((x,y),(x',y')) &= -\sum_{\{(u,v):(x,y)\leq(u,v)<(x',y')\}}\mu((x,y),(u,v))\\
&= -\sum_{\{(u,v):(x,y)\leq(u,v)<(x',y')\}}\mu_1(x,u)\mu_2(y,v)\\
&= -(\sum_{\{u:x\leq_1 u\leq_1 x'\}}\mu_1(x,u))(\sum_{\{v:y\leq_2 v\leq_2 y'\}}\mu_2(y,v))\\
&\quad+\mu_1(x,x')\mu_2(y,y')\\
&= -(0)(0)+\mu_1(x,x')\mu_2(y,y')
\end{aligned}$$

由 $(\alpha),(\beta)$ 得当 $(x,y)\leq(x',y')$ 时，(20)成立

综上，(20)成立 $\square$

推论

有限个有限偏序集的直积的莫比乌斯函数是它们的莫比乌斯函数的乘积

一般与经典的莫比乌斯反演

经典的莫比乌斯函数

设 $\mu(a,b)$ 是偏序集 $(X_n, |)$ 的莫比乌斯函数，其中 $X_n = \{1, 2, \cdots, n\}$，有：

$$\mu(1,n) = \begin{cases} 1 & \text{若} n = 1 \\ (-1)^k & \text{若 } n \text{ 是互不相同的 } k \text{ 个素数的乘积} \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{21}$$

整数 n 有唯一质因数分解，因此：

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

由(8)得：

$$\mu(1,n) = -\sum_{\{m \geq 1 : m|n, m \neq n\}} \mu(1,m)$$

因此只需要考虑 $(X_n^*, |)$，其中 X_n^* 是 X_n 中所有满足 $k|n$ 的正整数 k 组成的子集。设 r 和 s 为 X_n^* 中的整数，有：

$$r = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}, s = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_3^{\gamma_3}$$

其中 $0 \leq \beta_i, \gamma_i \leq \alpha_i$。于是，$r|s$ 当且仅当 $\beta_i \leq \gamma_i (i = 1, 2, \cdots, k)$。因此，偏序集 $(X_n^*, |)$ 正好是大小分别为 $\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \cdots, \alpha_k + 1$ 的 k 个全序集的直积

证明

由(20)得：

$$\mu(1,n)=\prod_{i=1}^{k}\mu(1,p_i^{\alpha_i})$$

由(19)得：

$$\mu(1,p_i^{\alpha_i})=\begin{cases}1 & \text{若}\alpha_i=0\\ -1 & \text{若}\alpha_i=1\\ 0 & \text{若}\alpha_i\geq 2\end{cases}$$

因此(21)成立 $\square$

一般与经典的莫比乌斯反演

经典的莫比乌斯函数的推论

结论

设 $\mu(a,b)$ 是有限偏序集 $(X_n, |)$ 的莫比乌斯函数，当 $a|b$ 时，有：

$$\mu(a,b) = \mu(1, \frac{b}{a}) \tag{22}$$

证明

固定 a，对 b 作归纳证明：

(α) 当 $a=b$ 时，由(7)得 $\mu(a,b)=\mu(1,1)=1$

(β) 当 $a<b$ 时，由(8)有：

$$
\begin{aligned}
\mu(a,b) &= -\sum_{\{c:a|c,c|b,c<b\}} \mu(a,c) \\
&= -\sum_{\{c:c|\frac{b}{a},c<\frac{b}{a}\}} \mu(a,ac) \\
&= -\sum_{\{c:c|\frac{b}{a},c<\frac{b}{a}\}} \mu(1,c) \qquad \text{(根据归纳假设)} \\
&= \mu(1,\frac{b}{a}) \qquad \text{(根据(8))}
\end{aligned}
$$

由 (α), (β) 得(22)成立 $\square$

一般与经典的莫比乌斯反演

经典的莫比乌斯反演

结论

设 F, G 为定义在正整数集上的实值函数，有：

$$G(n) = \sum_{k:k|n} F(k)$$
$$\Leftrightarrow F(n) = \sum_{k:k|n} \mu(\frac{n}{k}) G(k) \tag{23}$$

其中把 $\mu(1, \frac{n}{k})$ 写作 $\mu(\frac{n}{k})$

由(9)有：

$$F(n) = \sum_{\{k:k|n\}} \mu(k,n)G(k) \tag{24}$$

将(22)带入(24)得：

$$F(n) = \sum_{\{k:k|n\}} \mu(k,n)G(k) = \sum_{k:k|n} \mu(1,\frac{n}{k})G(k)$$

Q.E.D

经典的莫比乌斯反演与容斥原理

经典的莫比乌斯反演与容斥原理

莫比乌斯函数的容斥理解

莫比乌斯函数的容斥理解

考虑特例：$\varphi(n) = \sum\limits_{d:d|n} \mu(d)\frac{n}{d}$ 的容斥理解：

删掉与 n 至少有一个质因数相同的数，加上与 n 至少有两个质因数相同的数，$\cdots$

本质上是按最大公因数的不同质因子的个数来容斥

经典的莫比乌斯反演与容斥原理

莫比乌斯反演的容斥理解

莫比乌斯反演的容斥理解

考虑 $G(n)=\sum\limits_{k:k|n}F(k)\Leftrightarrow F(n)=\sum\limits_{k:k|n}\mu(k)G(\frac{n}{k})$ 的容斥理解：

定义 $h(k,n)=k$ 与 n 的质因数分解中次数不相等的质因数的个数

$$\begin{aligned}
F(n)=&\sum_{k:k|n}F(k)-\sum_{\{k:k|n,h(k,n)\geq 1\}}F(k)\\
&+\sum_{\{k:k|n,h(k,n)\geq 2\}}F(k)-\cdots-(-1)^{h(1,n)+1}F(1)\\
=&G(n)-\sum_{\{k:k|d,h(k,n)\geq 1\}}G(k)\\
&+\sum_{\{k:k|n,h(k,n)\geq 2\}}G(k)-\cdots-(-1)^{h(1,n)+1}G(1)\\
=&\sum_{k:k|n}\mu(\frac{n}{k})G(k)
\end{aligned}$$

一般情况

考虑经典的莫比乌斯反演公式

$$G(n)=\sum_{k:k|n}F(k) \tag{25}$$

$$\Leftrightarrow F(n)=\sum_{k:k|n}\mu(k)G(\frac{n}{k}) \tag{26}$$

(26)中的 k 实际上是在枚举哪几个质因数的次数不同

本质上是按照质因数分解后，次数不同的质因数的个数来容斥

参考资料

参考资料

Richard A. Brualdi. *Introductory Combinatorics*

潘承洞, 潘承彪. 初等数论

Thank you!