微积分摘要

俞鼎力

绍兴市第一中学

2014 年 2 月 26 日

目录 I

目录 II

目录 III

Outline I

Outline II

Outline III

- 微积分基本定理
- 分部积分和换元
- 反常积分
- 数值积分

6 积分学的应用

- 积分学在几何中的应用
- 物理应用举例
- 面积原理
- Wallis 公式和 Stirling 公式

集合的映射

定义 1.1

设 A, B 是两个集合，如果 f 是一种规律，使得对 A 中的每一个元素 x，B 中有唯一确定的元素——记为 $f(x)$——与 x 对应，则称 f 是一个从 A 到 B 的**映射**，用

$$f : A \to B$$

来表示. 集合 A 叫作映射 f 的**定义域**；$f(x) \in B$ 叫作 x 在映射 f 下的**像**或 f 在 x 上的**值**.

- 设 $E\subset A$，$f(E)=\{f(x): x\in E\}$. $f(A)$ 叫作 f 的**值域**.
- f 与 g **相等**（$f=g$）：$\forall x\in A$ 均有 $f(x)=g(x)$.
- f **满射**：$f(A)=B$.
- f **单射**：当 $x,y\in A$，且 $x\neq y$ 时，均有 $f(x)\neq f(y)$.
- f **一对一**：f 既是单射又是满射. 这时 A 与 B 之间**一一对应**.
- f 的逆映射：在 f 是从 A 到 B 的一一映射的情况下，可以定义 f 的逆映射 $f^{-1}: B\to A$. 如果 $y=f(x)$，则 $f^{-1}(y)=x$.

定义 1.2

设映射 $f\colon B\to C$，映射 g 的定义域为 A. 当 $x\in A_1=g^{-1}(B)$ 时，定义映射

$$f\circ g(x)=f(g(x))$$

显然，$f\circ g(x):A_1\to C$，称为映射 f 和 g 的复合.

- 设 f，g 和 h 都是 A 到 A 的映射，那么

$$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h.$$

- 设 $f\colon A\to A$，那么 f 的 n 次的复合 $f\circ f\circ\cdots\circ f$(这里有 n 个 f)，可以简记为 f^n.
- $f\circ g\neq g\circ f$.

函数

定义 1.3

函数是一种特殊的映射. 如果对映射 $f\colon X \to Y$, X 和 Y 都由实数组成, 则 f 称为一个**函数**. 简而言之, 函数是实数到实数的映射. 说得精确一些, f 是单变量函数.

设 f 与 g 是两个函数, 定义域分别为 A 与 B, 那么在 $A \cap B$ 上有

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in A \cap B).$$

类似地定义:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x), (fg)(x) = f(x)g(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

若函数 f 在 X 与 Y 之间建立了一个一一对应，那么有逆映射 f^{-1}，称 f^{-1} 为 f 的**反函数**. 如果

$$y = f(x) \quad (x \in X),$$

那么

$$x = f^{-1}(y) \quad (y \in Y).$$

定义 1.4

- 函数 $f\colon X \to Y$ 叫作 X 上的递增 (递减) 函数，如果对任何 $x_1, x_2 \in X$，只要 $x_1 < x_2$，便有 $f(x_1) \le f(x_2)(f(x_1) \ge f(x_2))$.
- 函数 f 叫作严格递增（递减）函数，如果对任何 $x_1, x_2 \in X$，只要 $x_1 < x_2$，便有 $f(x_1) < f(x_2)(f(x_1) > f(x_2))$.
- (严格) 递增或 (严格) 递减函数，统称为 (严格) 单调函数.

函数的极限

定义 1.5

设函数 f 在点 x_0 的近旁有定义，但 x_0 这一点自身可以是例外. 设 l 是一个实数. 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得对一切满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的 x，均有 $|f(x) - l| < \varepsilon$，则称当 x 趋于点 x_0 时函数 f 有**极限**l，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l;$$

或者更简单一些，记作 $f(x) \to l \quad (x \to x_0)$.
这时，也可以说函数 f 在点 x_0 有**极限**l.

定理 1.1

设 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0} g(x)$ 存在，那么有：

1. $\lim_{x\to x_0}(f\pm g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$;
2. $\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$;
3. $\lim_{x\to x_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$，其中 $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

定理 1.2 (夹逼原理)

设函数 f, g 与 h 在点 x_0 的近旁 (点 x_0 自身可能是例外) 满足不等式 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. 如果 f 与 g 在点 x_0 有相同的极限 l，那么函数 h 在点 x_0 也有极限 l.

定义 1.6

设函数 f 在点 (x_0, x_0+r)(r 是一个确定的正数) 上有定义. 设 l 是一个给定的实数. 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta \in (0, r)$，使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时有

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

则称 l 为 f 在 x_0 处的**右极限**，表示成

$$l = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

常记为 $f(x_0+)$.
类似地可以定义 f 在 x_0 处的左极限 $f(x_0-)$.

定理 1.3

设函数 f 在点 x_0 的某个领域内 (x_0 可能是例外) 有定义，那么 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是

$$f(x_0+) = f(x_0-),$$

这个共同的值也就是函数 f 在 x_0 处的极限值.

几个有用的极限

- $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

证明.

由单位圆上的面积可得：当 $x \in (0, \pi/2)$ 时，$\sin x < x < \tan x$，由此推出

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

根据定理 1.2，得到 $f(0+) = 1$. 由于 f 是偶函数，所以也有 $f(0-) = 1$. 依定理 1.3，即得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. $\square$

无穷大和无穷小

定义 1.7

设 x_0 是一个实数，函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个近旁 (可能除 x_0 之外) 有定义. 如果对任意给定的正数 A，存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| > A$，则称 "当 x 趋向于 x_0 时，函数 f 趋向于**无穷大**"，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

或者 $f(x) \to \infty \quad (x \to x_0)$.

同理定义**无穷小**.

定义 1.8

设当 $x \to x_0$ 时，f 和 g 都是无穷小，并且 g 在 x_0 的一个充分小的近旁 (除 x_0 之外) 不取零值.

1. 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$，那么称 f 是比 g 更高阶的无穷小;
2. 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$，则称 f 与 g 是同阶的无穷小;
3. 如果 (2) 中的极限值 $l = 1$，那么称 f 与 g 是等价的无穷小，记为

$$f \sim g \quad (x \to x_0).$$

例 1.1

- $\sin x \sim x \quad (x \to 0)$,
- $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x \quad (x \to 0)$,
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (x \to 0)$.

与无穷小类似，设在某一极限过程中，f 和 g 都是无穷大，那么：

- 当 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$，称 g 是比 f **更高阶的无穷大**;
- 当 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在且不等于 0 时，称他们是**同阶的无穷大**; 当这极限值等于 1 时，称 f 与 g 是**等价的无穷大**.

定理 1.4

如果当 $x \to x_0$(x_0 可以是 $\pm\infty$) 时，f，g 是等价的无穷小或无穷大，那么：

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)h(x)$;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{h(x)}$.

例 1.2 (证明)

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx} = \dfrac{a}{b}$,
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1)\tan\frac{x}{2}}{1 - \cos x^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{2}$.

定义 1.9

设函数 f 与 g 在 x_0 的近旁 (x_0 除外) 有定义，并且 $g(x) \neq 0$.

1. 当 $x \to x_0$ 时，若比值 $f(x)/g(x)$ 保持有界，即存在正整数 M，使得 $|f(x)| \leq M|g(x)|$ 成立，就用 $f(x) = O(g(x))(x \to x_0)$ 来表示;
2. 当 $x \to x_0$ 时，若 $f(x)/g(x)$ 是一个无穷小，即

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

就用 $f(x) = o(g(x))(x \to x_0)$ 来表示.

连续函数和极限计算

定义 1.10

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. 我们称函数 f 在点 $x_0\in(a,b)$ **连续**，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

定理 1.5

如果函数 f 与 g 在 x_0 处连续，那么 $f \pm g$ 与 fg 都在 x_0 处连续. 进一步，若 $g(x_0) \neq 0$，则 f/g 也在 x_0 处连续.

定理 1.6

设函数 g 在 t_0 处连续，记 $g(t_0)$ 为 x_0. 如果函数 f 在 x_0 处连续，那么复合函数 $f \circ g$ 在 t_0 处连续.

定义 1.11

设 I 是一个开区间. 如果函数 f 在 I 上每一点都连续，则称 f 在 I 上**连续**. 设 $I = [a, b]$，称 f 在 I 上连续，是指 f 在 (a, b) 上连续，并且在 a 点处右连续，同时在 b 点处左连续.

多项式函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数，以及由它们经过有限次的四则运算、有限次复合所形成的函数，统称为**初等函数**.

定理 1.7

初等函数在它们各自的定义域上都是连续的.

如果函数 f 在 x_0 处连续，那么

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

例 1.3

计算以下极限：

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}(\alpha\in\mathbb{R})$.

例 1.4

- 求解有理函数 $p(x)/q(x)$ 的极限，其中 p 与 q 是多项式.
- 计算极限 $l = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{m}{x^m-1} - \frac{n}{x^n-1}\right)$.
- 求解**幂指函数**$u(x)^{v(x)}(u(x)>0)$ 的极限，其中 $\lim u(x) = 1, \lim v(x) = \infty$.

Outline I

Outline II

Outline III

- 微积分基本定理
- 分部积分和换元
- 反常积分
- 数值积分

6 积分学的应用

- 积分学在几何中的应用
- 物理应用举例
- 面积原理
- Wallis 公式和 Stirling 公式

导数的定义

定义 2.1

设函数 f 在点 x_0 的近旁有定义，如果极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在且有限，则称这个极限值为 f 在点 x_0 的**导数**，记作 $f'(x_0)$，并称函数 f 在点 x_0 **可导**.

函数 f 在点 x_0 可导的一个充分必要条件是，在点 x_0 的左、右导数存在且相等，这里 $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

定义 2.2

如果函数 f 在开区间 (a, b) 中的每一点可导，则称 f 在 (a, b) 上可导；如果 f 在 (a, b) 上可导，并且在点 a 处有右导数，在点 b 处有左导数，则称 f 在闭区间 $[a, b]$ 上可导.

导数的计算

例 2.1 (证明)

1. $c' = 0$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$;
3. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;
4. $(\sin x)' = \cos x$;
5. $(\cos x)' = -\sin x$;
6. $(a^x)' = a^x \ln a$.

定理 2.1

1. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$;
2. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

定理 2.2 (链式法则)

设函数 φ 在点 t_0 处可导，函数 f 在点 $x_0 = \varphi(t_0)$ 处可导，那么复合函数 $f \circ \varphi$ 在点 t_0 处可导，并且

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = f' \circ \varphi(t_0)\, \varphi'(t_0).$$

定理 2.3 (反函数的求导)

设 $y = f(x)$ 在包含 x_0 的区间 I 上连续且严格单调. 如果它在 x_0 处可导，且 $f'(x) \neq 0$，那么它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导，并且

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

高阶导数

例 2.2

- $(e^{\lambda x})^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$
- $\sin^{(n)} x = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

定理 2.4 (Leibniz(莱布尼茨))

设函数 f 与 g 在区间 I 上都有 n 阶导数，那么乘积 fg 在区间 I 上也有 n 阶导数，并且

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

微积分学的中值定理

定理 2.5 (Fermat(费马))

若函数 f 在其极值点 $x_0 \in (a, b)$ 处可导，则必有 $f'(x_0) = 0$.

定理 2.6 (Rolle(罗尔))

设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，且 $f(a) = f(b)$，那么存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

引理 2.1

设函数 f 与 λ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，并且 $\lambda(a)=1,\lambda(b)=0$，则必存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\lambda'(\xi)(f(a)-f(b)).$$

定理 2.7 (Lagrange(拉格朗日))

设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，则存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

定理 2.8 (Cauchy(柯西))

设函数 f 和 g 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且当 $x \in (a,b)$ 时，$g'(x) \neq 0$，这时必存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

利用导数研究函数

1. 单调性：$f' \geq 0 (\leq 0)$;
2. 严格单调性：在 (1) 的基础上满足在任何开子区间上，$f' \neq 0$;
3. 严格极大值：$f'(x_0) = 0$，$f''(x_0) < 0$;
4. 凸性：$f'' \geq 0$.

L'Hospital 法则

定理 2.9 (L'Hospital(洛必达))

设 f，g 在 (a,b) 上可导，并且 $g(x)\neq 0$ 对 $x\in(a,b)$ 成立. 又设

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=0.$$

在这些条件下，如果极限

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在 (或为 ∞)，那么便有

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

定理 2.10

设 f，g 在 (a, b) 上可导，$g(x) \neq 0$ 且

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \infty.$$

如果极限 $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为 ∞），那么

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Outline I

Outline II

Outline III

函数的微分

设函数 $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$. 回顾 f 在点 $x_0\in(a,b)$ 处可导的定义，即极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，通常记它为 $f'(x_0)$. 由此推知

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)$$

当 $\Delta x\to 0$ 时是一个无穷小. 或者说，当 $\Delta x\to 0$ 时，

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x) \tag{3.1}$$

定义 3.1

设函数 f 在 (a,b) 上有定义，且 $x_0 \in (a,b)$. 如果存在一个常数 λ，使得

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\lambda\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0)\tag{3.2}$$

则称函数 f 在点 x_0 **处可微**. 函数的改变量的线性主要部分 $\lambda\Delta x$ 称为 f 在 x_0 处的可微，记作 $\mathrm{d}f(x_0)$.

所以有

$$\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\Delta x.\tag{3.3}$$

特别的对于函数 $f(x)=x$ 有 $\mathrm{d}x=(x)'\Delta x=\Delta x$.

这样一来，式 (3.3) 可以改写为

$$\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\mathrm{d}x.\tag{3.4}$$

1. $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$;
2. $\mathrm{d}(fg) = g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g$;
3. $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\,\mathrm{d}f - f\,\mathrm{d}g}{g^2}$, 其中 $g \neq 0$.

- $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$;
- $\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(f'(x)\mathrm{d}x) = (f''(x)\mathrm{d}x)\mathrm{d}x = f''(x)\mathrm{d}x^2$;
- $\mathrm{d}^n y = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$;
- $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f^{(n)}(x)$.

Taylor 定理

定义 3.2

设函数 f 在点 x_0 处有直到 n 阶的导数，这里 n 是任意给定的正整数．令

$$T_n(f, x_0; x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

称它为 f 在 x_0 处的 n 次 *Taylor(泰勒)* 多项式．

定理 3.1

设函数 f 在点 x_0 处有直到 n 阶的导数，则有

$$f(x) = T_n(f, x_0; x) + o((x - x_0)^n) \quad (x \to x_0). \tag{3.5}$$

令

$$R_n(x) = f(x) - T_n(f, x_0; x) \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

称它为**余项**. 当前，对余项 R_n 只有定性的刻画：

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

这种余项我们称为 Peano(佩亚诺) 余项.

称多项式

$$T_n(f,0;x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

为 f 的 n 次 Maclaurin(麦克劳林) 多项式. 相应地,

$$f(x)=T_n(f,0;x)+o(x^n)$$

就称为带有 Peano 余项的 Maclaurin 定理.

1. $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n);$
2. $\sin x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} + o(x^{2n});$
3. $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1});$
4. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n);$
5. $(1+x)^\lambda = \sum_{k=0}^{n} \binom{\lambda}{k} x^k + o(x^n);$
6. $\arctan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}).$

定理 3.2 (Taylor)

设函数 f 在开区间 (a, b) 上有直到 $n+1$ 阶的导数，x_0，x 是 (a, b) 中任意两点，那么 $f(x) = T_n(f, x_0; x) + R_n(x)$，
其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{3.6}$$

或者

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - \xi)^n(x - x_0), \tag{3.7}$$

这里 ξ 是位于 x_0 与 x 之间的一个数. 一般来说，式 *(3.6)* 和 *(3.7)* 中的 ξ 是不相等的. 式 *(3.6)* 和 *(3.7)* 分别称为 *Lagrange* 余项和 *Cauchy* 余项.

Outline I

Outline II

Outline III

原函数的概念

如果两个函数 F 与 f 满足关系

$$F'(x) = f(x), \tag{4.1}$$

这里 x 在某一区间上变化，那么 F 称为 f 在该区间上的一个**原函数**.

如果用某种手段找到了 f 的一个原函数 F，那么函数族 $\{F + c : c \in R\}$ 是由 f 的全体原函数组成的. 这个集合常记为

$$\int f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

其中 $\int$ 称为**积分号**，f 称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**. 而式 (4.2) 又称为**不定积分**.

当我们求得 f 的任何一个原函数 F 之后，就可以这样书写：

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c.$$

- $\int 0\mathrm{d}x = c,$
- $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + c,$
- $\int x^\lambda \mathrm{d}x = \frac{1}{1+\lambda}x^{\lambda+1} + c(\lambda \neq -1),$
- $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + c,$
- $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + c,$

- $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c,$
- $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c,$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + c,$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + c,$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + c,$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + c,$

一些性质：

1. $$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x);$$
2. $$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + c \Leftrightarrow \int \mathrm{d}F(x) = F(x) + c;$$
3. $$\int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x;$$
4. $$\int cf(x)\mathrm{d}x = c\int f(x)\mathrm{d}x \quad (c \neq 0).$$

分部积分法

已知

$$(uv)' = u'v + uv'$$

等式两边求不定积分，得到

$$uv = \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

所以，我们有

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = uv - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x. \tag{4.3}$$

也可以写成

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u. \tag{4.4}$$

换元法

设被积函数可以分解成两个因式的乘积，第一个因式是某一个可导函数 $\varphi(x)$ 的函数 $f(\varphi(x))$，而第二部分正是 $\varphi(x)$ 的导函数 $\varphi'(x)$，那么便有

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u \tag{4.5}$$

一旦求出式 (4.5) 右边的一个原函数，就应当利用 $u = \varphi(x)$ 换回成 x 的函数. 交换上式左右两边：

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(x(t))x'(t)\mathrm{d}t \tag{4.6}$$

Outline I

Outline II

Outline III

积分的概念

定义 5.1

设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有定义. 如果实数 I 使得对任意给定的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 只要 $[a,b]$ 的分割 π 满足 $||\pi||<\delta$, 而不管 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i](1\le i\le n)$ 如何选择选择, 都有

$$|I-\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i|<\epsilon$$

成立, 则称 f 在 $[a,b]$ 上 ***Riemann(黎曼)* 可积**, 称 I 是 f 在 $[a,b]$ 上的 ***Riemann* 积分**. 函数 f 的积分通常用符号

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{5.1}$$

定理 5.1 (Newton(牛顿)-Leibniz 公式)

设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，且在 (a,b) 上有原函数 F. 如果 F 在 $[a,b]$ 上连续，那么必有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{5.2}$$

引入记号

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b \tag{5.3}$$

注意到

$$\mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_a^b \mathrm{d}F(x) = F(x)\Big|_a^b \tag{5.4}$$

可积函数的性质

定理 5.2 (积分的可加性)

设 $c \in (a, b)$，f 在 $[a, c]$，$[c, b]$ 上可积，那么 f 在 $[a, b]$ 上也可积，并且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.5}$$

定理 5.3 (积分平均值定理)

设函数 f 与 g 在 $[a, b]$ 上连续，g 在 $[a, b]$ 上不改变符号，则存在 $\xi \in [a, b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

微积分基本定理

定理 5.4 (微积分基本定理)

设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续，那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

分部积分和换元

对等式

$$u\,\mathrm{d}v = d(uv) - v\,\mathrm{d}u.$$

的两边作积分，得到

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

即为积分的分部积分公式.

定理 5.5 (Taylor 公式的积分余项)

设函数 f 在 (a,b) 上有直到 $n+1$ 阶的连续导函数，那么对任意固定的 $x_0\in(a,b)$，有

$$f(x)=T_n(f,x_0;x)+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\quad(a<x<b)$$

定理 5.6 (积分的换元公式)

设函数 f 在区间 I 上连续，$a, b \in I$，函数 φ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的导函数，$\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$，且 $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$，那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

反常积分

反常积分可以分为两大类，第一类是指积分区间无界，简称为“无穷积分”；第二类反常积分，乃是无界函数的“积分”，称为**瑕积分**.

设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，对任何 $b>a$，f 在 $[a,b]$ 上可积. 这时带变动上限 b 的积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

就定义了 $[a,+\infty)$ 上的一个函数.

如果极限

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在且有限，那么就把这个极限记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{5.6}$$

并称上述积分**收敛**. 如果上面的极限不存在，同样也使用符号 (5.6)，不过这时它不代表任何数值，我们称无穷积分 (5.6) 是**发散的**. 在积分 (5.6) 收敛的场合，我们称函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上**可积**. 类似地，可以定义无穷积分

$$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$$

的收敛和发散.

设函数 f 在全数轴上有定义，并且在任何有界区间上都是可积的，任取 $a\in\mathbb{R}$，如果无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，那么称无穷积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

收敛，并且规定

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

我们也就说 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积.

瑕积分

设 f 在 $(a,b]$ 上有定义，且

$$\lim_{\epsilon \to a^+} f(x) = \infty,$$

但对任何 $\epsilon \in (0, b-a)$，函数 f 在 $[a+\epsilon, b]$ 上可积. 如果极限

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x) \mathrm{d}x$$

存在且有限，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并把上述极限定义为瑕积分的值：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

数值积分

有大量被积函数找不到用初等函数表示的原函数，所以我们只好使用数值积分来估计.

1. 插值型
2. Newton–Cotes(柯特斯) 公式
3. 梯形公式和 Simpson(辛普森) 公式
4. 复化梯形公式和复化 Simpson 公式
5. 自适应 Simpson

procedure $\textsc{Simpson}(f, a, b)$

$c \leftarrow \frac{a+b}{2}$

return $\frac{f(a)+4f(c)+f(b)}{6}(b-a)$

end procedure

procedure $\textsc{AdaptiveSimpsonsAux}(f, a, b, \epsilon)$

$c \leftarrow \frac{a+b}{2}$

$S \leftarrow \textsc{Simpson}(f, a, b)$

$Sleft \leftarrow \textsc{Simpson}(f, a, c)$, $Sright \leftarrow \textsc{Simpson}(f, c, b)$

$S' \leftarrow Sleft + Sright$

if $|S' - S| \leq 15\epsilon$ **then**

return S'

end if

return $\textsc{AdaptiveSimpsonsAux}(f, a, c, \frac{\epsilon}{2}) + \textsc{AdaptiveSimpsonsAux}(f, c, b, \frac{\epsilon}{2})$

end procedure

Outline I

Outline II

Outline III

- 微积分基本定理
- 分部积分和换元
- 反常积分
- 数值积分

6 积分学的应用

- 积分学在几何中的应用
- 物理应用举例
- 面积原理
- Wallis 公式和 Stirling 公式

积分学在几何中的应用

介于直线 $x=a$，$x=b$，$y=0$ 和曲线 $y=f(x)\geq 0$ 之间的曲边梯形的面积可以表示为

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

平面图形的面积

如果曲线的方程是由极坐标表示的，如何计算由它围成的图形的面积？设曲线 Γ 由极坐标方程

$$\Gamma : r = r(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

表示，我们要计算由此曲线和射线

$$\theta = \alpha, \ \theta = \beta$$

所围成的区域的面积.

先看最简单的情形 $r = a$(a 是一常数), 即这段曲线是一个圆弧. 此时，显然有

$$S = \frac{1}{2}a^2(\beta - \alpha).$$

对于一般情况可得

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

空间曲线的弧长

设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$y = \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

，或用向量表示为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t),$$

其中 $x(t), y(t), z(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的导数.

它的弧长公式为

$$s(\Gamma)=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\mathrm{d}t. \tag{6.1}$$

如果 Γ 是平面曲线，那么它的弧长公式为

$$S(\Gamma)=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t. \tag{6.2}$$

如果平面曲线是由显式方程

$$y=f(x)\quad(a\leq x\leq b)$$

给出的，那么由公式 (6.2)，即可得

$$S(\Gamma)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

如果平面曲线是由极坐标方程

$$r = r(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

给出的，那么因为

$$x = r(\theta)\cos\theta,\ y = r(\theta)\sin\theta \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta),$$

由公式 (6.2)，可得其弧长公式为

$$S(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta. \tag{6.3}$$

空间区域的体积

设 Ω 是介于平面 $x=a$ 和 $x=b$ 之间的一个空间区域. 如果用坐标为 $x(a<x<b)$ 的平面去截 Ω，得截面的面积为 $g(x)$. 假定 g 是 $[a,b]$ 上的可积函数，那么 Ω 的体积

$$V=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{6.4}$$

设 $y = f(x) \geq 0$ 是区间 $[a, b]$ 上一条连续曲线，让这条曲线绕 x 轴旋转一周，得一旋转体. 容易得到，横坐标为 $x(a \leq x \leq b)$ 的平面截此旋转体的截面面积

$$g(x) = \pi f^2(x).$$

因而由公式 (6.4)，立即得到此旋转体的体积为

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

旋转曲面的面积

设曲线 Γ 的参数方程

$$x = x(t),\ y = y(t) \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

设其在上半平面且不自交，让这条曲线绕 Ox 轴旋转一周，生成一张旋转曲面，其面积公式为

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

如果曲线的方程为 $y = f(x)(a \le x \le b)$，那么旋转曲面的面积为

$$S = 2\pi \int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

物理应用举例

第二宇宙速度

面积原理

用积分估计和式：

定理 6.1

若 $x \geq m \in \mathbb{N}^*$ 时，f 是一个非负的递增函数，则当 $\xi \geq m$ 时，有

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq f(\xi).$$

定理 6.2

若 $x \geq m \in \mathbb{N}^*$ 时，f 是一个非负的递减函数，则极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^n f(x)\mathrm{d}x\right) = \alpha$$

存在，且 $0 \leq \alpha \leq f(m)$. 更进一步，如果 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$，那么

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)\mathrm{d}x - \alpha\right| \leq f(\xi - 1),$$

这里 $\xi \geq m + 1$.

Wallis 公式和 Stirling 公式

Wallis(沃利斯) 公式：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

Stirling(斯特林) 公式：

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n\to\infty)$$