首先求一个大小为 $n$ 的无向联通图中，边数为偶数的方案数减去边数为奇数的方案数的值。设边数为偶数的方案数为 $f(n)$，边数奇数的方案数为 $g(n)$，那么对于 $n>1$，可以写出递推式：

$$\begin{aligned} f(n) &= 2^{C_n^2-1}-\sum_{i=1}^{n-2}(f(i)+g(i))\times 2^{C_{n-i}^2-1}\times C_{n-1}^{i-1}-f(n-1)\times C_{n-1}^{n-2} \\ g(n) &= 2^{C_n^2-1}-\sum_{i=1}^{n-2}(f(i)+g(i))\times 2^{C_{n-i}^2-1}\times C_{n-1}^{i-1}-g(n-1)\times C_{n-1}^{n-2} \end{aligned}$$

两式相减有

$$f(n)-g(n) \quad = \quad -(n-1)(f(n-1)-g(n-1))$$

又因为 $f(1)-g(1)=1$，所以 $f(n)-g(n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$。

然后再来考虑题目所表明的表达式。令 $rank(S)$ 表示 $S$ 形成的联通块个数。

$$ans=\sum_S(-1)^{|S|}m^{rank(S)}$$

考虑枚举 $rank(S)$，重写答案表达式

$$ans=\sum_{k=1}^n m^k\sum_{rank(S)=k}(-1)^{|S|}$$

重点在于求 $\sum_{rank(S)=k}(-1)^{|S|}$，记为 $cnt_k$。我们换一个思路考虑，若有两个联通块，一个大小为 $a$ 一个大小为 $b$，那么两者合起来的 $f-g$ 方案数就是

$$f(a)f(b)+g(a)g(b)-f(a)g(b)-f(b)g(a)=(f(a)-g(a))(f(b)-g(b))$$

即，是可以乘起来的！而且这个可以推广到任意多个联通块。于是有

$$cnt_k=\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_k=n}(-1)^{n-k}\prod_{i=1}^k(s_i-1)!$$

我们发现，这其实是第一类 Stirling 数，所以

$$cnt_k=s(n,k)$$

于是可以代回去化简答案表达式

$$\begin{aligned} ans &= \sum_{k=1}^n m^k\sum_{rank(S)=k}(-1)^{|S|} \\ &= \sum_{k=1}^n m^k s(n,k) \\ &= (m)_n \\ &= \prod_{i=1}^n(m-i+1) \end{aligned}$$