浅谈容斥原理

王 迪

成都七中

2013 年 4 月

Problem

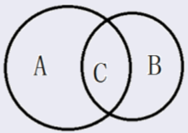
某班有 a 个人擅长唱歌，b 个人擅长画画，c 个人既擅长唱歌也擅长画画，问多少人至少有一种特长？

Problem

某班有 a 个人擅长唱歌，b 个人擅长画画，c 个人既擅长唱歌也擅长画画，问多少人至少有一种特长？

Solution

让我们利用文氏图来分析:



圆 A 表示擅长唱歌的，圆 B 表示擅长画画的，它们的相交区域 C 表示既擅长唱歌也擅长画画的，容易算出答案是 $a+b-c$。

论文内容

1. 容斥原理——组合计数中的常用方法
2. 例题——硬币购物（HAOI 2008）
3. 例题——游戏
4. 容斥原理在数论和概率论中的推广
5. 容斥原理的一般化
6. 例题——有标号 DAG 计数

论文内容

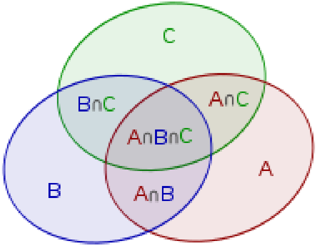
1. 容斥原理——组合计数中的常用方法
2. 例题——硬币购物（HAOI 2008）
3. 例题——游戏
4. 容斥原理在数论和概率论中的推广
5. 容斥原理的一般化
6. 例题——有标号 DAG 计数

设有限集合 U，用 P_1, P_2 两种性质描述集合中的元素，设满足 P_1 性质的元素组成集合 S_1，满足 P_2 性质的元素组成集合 S_2，那么至少满足一个性质的元素组成的集合可以用 $S_1 \cup S_2$ 表示，满足所有性质的元素组成的集合可以用 $S_1 \cap S_2$ 表示，则有：

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|$$

其中，$|S|$ 表示集合 S 中的元素个数。

考虑用三种性质描述集合中的元素，类似地，我们利用文氏图分析，有：



$$
\begin{aligned}
|S_1 \cup S_2 \cup S_3| &= |S_1| + |S_2| + |S_3| - |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - |S_2 \cap S_3| + \\
&\quad + |S_1 \cap S_2 \cap S_3|
\end{aligned}
$$

一般地，我们用 n 种性质 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 描述集合 U 中的元素，且满足 P_i 性质的元素组成集合 S_i，那么

Theorem

至少满足 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 中一个性质的元素的个数是:

$$\begin{aligned} |S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n| &= \sum_i |S_i| - \sum_{i<j} |S_i \cap S_j| + \sum_{i<j<k} |S_i \cap S_j \cap S_k| - \cdots \\ &\cdots + (-1)^{n-1} |S_1 \cap S_2 \cap \cdots S_n| \end{aligned}$$

一般方法

1. 从集合的角度分析问题；
2. 找出全集 U 和若干描述元素的性质 P_i；
3. 利用容斥原理转化和分解问题，分别求解；
4. 合并答案。

一般方法

1. 从集合的角度分析问题；
2. 找出全集 U 和若干描述元素的性质 P_i；
3. 利用容斥原理转化和分解问题，分别求解；
4. 合并答案。

时间复杂度

一般来说，容斥原理的时间复杂度对于集合个数 n 是指数级的。
但是，如果若干集合的交集的大小只与集合个数有关，就可以线性枚举集合的个数，通过组合数来计算。

Problem

有 4 种面值的硬币，第 i 种硬币的面值是 c_i。有 n 次询问，每个询问中第 i 种硬币的数目是 d_i，以及一个购物款 s，回答付款方法的数目。数据规模 $n \leq 10^3, s \leq 10^5$。

Problem

有 4 种面值的硬币，第 i 种硬币的面值是 c_i。有 n 次询问，每个询问中第 i 种硬币的数目是 d_i，以及一个购物款 s，回答付款方法的数目。数据规模 $n \leq 10^3, s \leq 10^5$。

Solution

考虑一次询问，第 i 种硬币使用的数目是 x_i，那么需要满足

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 = s \text{ 且 } x_i \leq d_i$$

我们发现，这是一个经典的多重背包问题，但是动态规划是会超时的。

Solution

我们进行一步补集转化，求至少一个 x_i 不满足条件的解的个数。

令 S_i 表示满足 $x_i \geq d_i + 1$ 的解集，那么我们要求的就是 $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4|$，利用容斥原理可以把问题转化为求若干集合交集大小的问题。

Solution

我们进行一步补集转化，求至少一个 x_i 不满足条件的解的个数。
令 S_i 表示满足 $x_i \geq d_i + 1$ 的解集，那么我们要求的就是 $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4|$，利用容斥原理可以把问题转化为求若干集合交集大小的问题。

Solution

我们以 $|S_1 \cap S_2|$ 为例。它要求 $x_1 \geq d_1 + 1, x_2 \geq d_2 + 1$。

Solution

我们进行一步补集转化，求至少一个 x_i 不满足条件的解的个数。
令 S_i 表示满足 $x_i \geq d_i + 1$ 的解集，那么我们要求的就是 $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4|$，利用容斥原理可以把问题转化为求若干集合交集大小的问题。

Solution

我们以 $|S_1 \cap S_2|$ 为例。它要求 $x_1 \geq d_1 + 1, x_2 \geq d_2 + 1$。
我们令 $y_1 = x_1 - (d_1 + 1)$，$y_2 = x_2 - (d_2 + 1)$，$y_3 = x_3$，$y_4 = x_4$，那么考虑

$$s' = s - (d_1 + 1) - (d_2 + 1)$$

我们的问题就变成了求 $c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4 = s'$ 的非负整数解数目，这个就是经典的无限背包问题了。

Solution

我们进行一步补集转化，求至少一个 x_i 不满足条件的解的个数。
令 S_i 表示满足 $x_i \geq d_i + 1$ 的解集，那么我们要求的就是 $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4|$，利用容斥原理可以把问题转化为求若干集合交集大小的问题。

Solution

我们以 $|S_1 \cap S_2|$ 为例。它要求 $x_1 \geq d_1 + 1, x_2 \geq d_2 + 1$。
我们令 $y_1 = x_1 - (d_1 + 1)$，$y_2 = x_2 - (d_2 + 1)$，$y_3 = x_3$，$y_4 = x_4$，那么考虑

$$s' = s - (d_1 + 1) - (d_2 + 1)$$

我们的问题就变成了求 $c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4 = s'$ 的非负整数解数目，这个就是经典的无限背包问题了。
我们只需要做一遍背包预处理 $O(4m)$，m 是询问中 s 的最大值，然后利用容斥原理就能做到每组询问 $O(2^4)$。

Problem

- *Alice* 和 *Bob* 在玩游戏。
- 他们有一个 n 个点的无向完全图，设所有的边组成了集合 E。
- 他们想取遍 E 的非空子集，对每个集合进行估价，S 的估价记为 $f(S)$。
- 考虑 n 个点与 S 中的边组成的图，用 m 种颜色对所有点染色。
- 同一个联通块的点必须染成一种颜色，$f(S)$ 等于这个图的染色方案数。
- 当 $|S|$ 为奇数时，*Alice* 的分值加上 $f(S)$，否则 *Bob* 的分值加上 $f(S)$。
- 求最后 *Alice* 的分值减去 *Bob* 的分值的值模 10^9+7 的结果。
- 数据规模 $n, m \leq 10^6$。时间限制 1 秒。

Problem

- Alice 和 Bob 在玩游戏。
- 他们有一个 n 个点的无向完全图，设所有的边组成了集合 E。
- 他们想取遍 E 的非空子集，对每个集合进行估价，S 的估价记为 $f(S)$。
- 考虑 n 个点与 S 中的边组成的图，用 m 种颜色对所有点染色。
- 同一个联通块的点必须染成一种颜色，$f(S)$ 等于这个图的染色方案数。
- 当 $|S|$ 为奇数时，*Alice* 的分值加上 $f(S)$，否则 *Bob* 的分值加上 $f(S)$。
- 求最后 *Alice* 的分值减去 *Bob* 的分值的值模 10^9+7 的结果。
- 数据规模 $n, m \le 10^6$。时间限制 1 秒。

Problem

- *Alice* 和 *Bob* 在玩游戏。
- 他们有一个 n 个点的无向完全图，设所有的边组成了集合 E。
- 他们想取遍 E 的非空子集，对每个集合进行估价，S 的估价记为 $f(S)$。
- 考虑 n 个点与 S 中的边组成的图，用 m 种颜色对所有点染色。
- 同一个联通块的点必须染成一种颜色，$f(S)$ 等于这个图的染色方案数。
- 当 $|S|$ 为奇数时，*Alice* 的分值加上 $f(S)$，否则 *Bob* 的分值加上 $f(S)$。
- 求最后 *Alice* 的分值减去 *Bob* 的分值的值模 10^9+7 的结果。
- 数据规模 $n, m \leq 10^6$。时间限制 1 秒。

Problem

- *Alice* 和 *Bob* 在玩游戏。
- 他们有一个 n 个点的无向完全图，设所有的边组成了集合 E。
- 他们想取遍 E 的非空子集，对每个集合进行估价，S 的估价记为 $f(S)$。
- 考虑 n 个点与 S 中的边组成的图，用 m 种颜色对所有点染色。
- 同一个联通块的点必须染成一种颜色，$f(S)$ 等于这个图的染色方案数。
- 当 $|S|$ 为奇数时，*Alice* 的分值加上 $f(S)$，否则 *Bob* 的分值加上 $f(S)$。
- 求最后 *Alice* 的分值减去 *Bob* 的分值的值模 10^9+7 的结果。
- 数据规模 $n,m \le 10^6$。时间限制 1 秒。

Problem

- *Alice* 和 *Bob* 在玩游戏。
- 他们有一个 n 个点的无向完全图，设所有的边组成了集合 E。
- 他们想取遍 E 的非空子集，对每个集合进行估价，S 的估价记为 $f(S)$。
- 考虑 n 个点与 S 中的边组成的图，用 m 种颜色对所有点染色。
- 同一个联通块的点必须染成一种颜色，$f(S)$ 等于这个图的染色方案数。
- 当 $|S|$ 为奇数时，*Alice* 的分值加上 $f(S)$，否则 *Bob* 的分值加上 $f(S)$。
- 求最后 *Alice* 的分值减去 *Bob* 的分值的值模 $10^9 + 7$ 的结果。
- 数据规模 $n, m \leq 10^6$。时间限制 1 秒。

Problem

- *Alice* 和 *Bob* 在玩游戏。
- 他们有一个 n 个点的无向完全图，设所有的边组成了集合 E。
- 他们想取遍 E 的非空子集，对每个集合进行估价，S 的估价记为 $f(S)$。
- 考虑 n 个点与 S 中的边组成的图，用 m 种颜色对所有点染色。
- 同一个联通块的点必须染成一种颜色，$f(S)$ 等于这个图的染色方案数。
- 当 $|S|$ 为奇数时，*Alice* 的分值加上 $f(S)$，否则 *Bob* 的分值加上 $f(S)$。
- 求最后 *Alice* 的分值减去 *Bob* 的分值的值模 10^9+7 的结果。
- 数据规模 $n, m \le 10^6$。时间限制 1 秒。

例题——游戏

Problem

- *Alice* 和 *Bob* 在玩游戏。
- 他们有一个 n 个点的无向完全图，设所有的边组成了集合 E。
- 他们想取遍 E 的非空子集，对每个集合进行估价，S 的估价记为 $f(S)$。
- 考虑 n 个点与 S 中的边组成的图，用 m 种颜色对所有点染色。
- 同一个联通块的点必须染成一种颜色，$f(S)$ 等于这个图的染色方案数。
- 当 $|S|$ 为奇数时，*Alice* 的分值加上 $f(S)$，否则 *Bob* 的分值加上 $f(S)$。
- 求最后 *Alice* 的分值减去 *Bob* 的分值的值模 10^9+7 的结果。
- 数据规模 $n, m \le 10^6$。时间限制 1 秒。

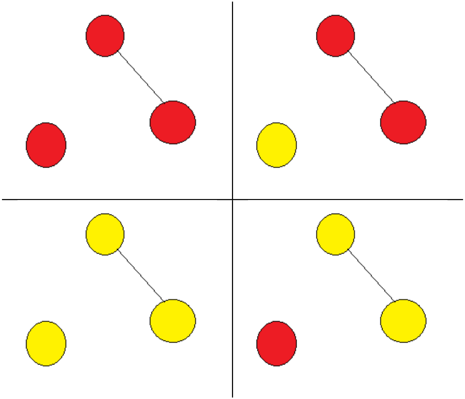
Problem

- *Alice* 和 *Bob* 在玩游戏。
- 他们有一个 n 个点的无向完全图，设所有的边组成了集合 E。
- 他们想取遍 E 的非空子集，对每个集合进行估价，S 的估价记为 $f(S)$。
- 考虑 n 个点与 S 中的边组成的图，用 m 种颜色对所有点染色。
- 同一个联通块的点必须染成一种颜色，$f(S)$ 等于这个图的染色方案数。
- 当 $|S|$ 为奇数时，*Alice* 的分值加上 $f(S)$，否则 *Bob* 的分值加上 $f(S)$。
- 求最后 *Alice* 的分值减去 *Bob* 的分值的值模 10^9+7 的结果。
- 数据规模 $n,m \le 10^6$。时间限制 1 秒。

Problem

- *Alice* 和 *Bob* 在玩游戏。
- 他们有一个 n 个点的无向完全图，设所有的边组成了集合 E。
- 他们想取遍 E 的非空子集，对每个集合进行估价，S 的估价记为 $f(S)$。
- 考虑 n 个点与 S 中的边组成的图，用 m 种颜色对所有点染色。
- 同一个联通块的点必须染成一种颜色，$f(S)$ 等于这个图的染色方案数。
- 当 $|S|$ 为奇数时，*Alice* 的分值加上 $f(S)$，否则 *Bob* 的分值加上 $f(S)$。
- 求最后 *Alice* 的分值减去 *Bob* 的分值的值模 10^9+7 的结果。
- 数据规模 $n,m \le 10^6$。时间限制 1 秒。

例如，$n=3, m=2$，集合中只有一条边时，有如下四种染色方式：



例题——游戏

此题有一个强推式子的办法，如下图：

首先求一个大小为 n 的无向联通图中，边数为偶数的方案数减去边数为奇数的方案数的值。设边数为偶数的方案数为 $f(n)$，边数奇数的方案数为 $g(n)$，那么对于 $n > 1$，可以写出递推式：

$$\begin{aligned}
f(n) &= 2^{C_n^2-1} - \sum_{i=1}^{n-2}(f(i)+g(i)) \times 2^{C_{n-i}^2-1} \times C_{n-1}^{i-1} - f(n-1) \times C_{n-1}^{n-2} \\
g(n) &= 2^{C_n^2-1} - \sum_{i=1}^{n-2}(f(i)+g(i)) \times 2^{C_{n-i}^2-1} \times C_{n-1}^{i-1} - g(n-1) \times C_{n-1}^{n-2}
\end{aligned}$$

两式相减有

$$f(n) - g(n) = -(n-1)(f(n-1) - g(n-1))$$

又因为 $f(1) - g(1) = 1$，所以 $f(n) - g(n) = (-1)^{n-1}(n-1)!$。

然后再来考虑题目所表明的表达式。令 $rank(S)$ 表示 S 形成的联通块个数。

$$ans = \sum_S (-1)^{|S|} m^{rank(S)}$$

考虑枚举 $rank(S)$，重写答案表达式

$$ans = \sum_{k=1}^{n} m^k \sum_{rank(S)=k} (-1)^{|S|}$$

重点在于求 $\sum_{rank(S)=k}(-1)^{|S|}$，记为 cnt_k。我们换一个思路考虑，若有两个联通块，一个大小为 a 一个大小为 b，那么两者合起来的 $f-g$ 方案数就是

$$f(a)f(b) + g(a)g(b) - f(a)g(b) - f(b)g(a) = (f(a) - g(a))(f(b) - g(b))$$

即，是可以乘起来的！而且这个可以推广到任意多个联通块。于是有

$$cnt_k = \sum_{s_1+s_2+\cdots+s_k=n} (-1)^{n-k} \prod_{i=1}^{k}(s_i - 1)!$$

我们发现，这其实是第一类 Stirling 数，所以

$$cnt_k = s(n,k)$$

于是可以代回去化简答案表达式

$$\begin{aligned}
ans &= \sum_{k=1}^{n} m^k \sum_{rank(S)=k} (-1)^{|S|} \\
&= \sum_{k=1}^{n} m^k s(n,k) \\
&= (m)_n \\
&= \prod_{i=1}^{n}(m-i+1)
\end{aligned}$$

繁琐！

初步分析

- 一方面，我们无法枚举边集 E 的所有子集；
- 另一方面，对于边数相同的不同集合，图中的联通块数不一定一样。

当我们无法从表面寻找突破口时，应写出问题的数学形式，再进行分析。

初步分析

- 一方面，我们无法枚举边集 E 的所有子集；
- 另一方面，对于边数相同的不同集合，图中的联通块数不一定一样。

当我们无法从表面寻找突破口时，应写出问题的数学形式，再进行分析。

进一步分析

同一个联通块的点染成一种颜色 $\Longleftrightarrow$ 一条边连接的两个点染成一种颜色

设 x_i 表示第 i 个点的颜色，则一条边 (i,j) 就表示一个条件 $[x_i = x_j]$。令 $F(C)$ 表示，需要满足的条件组成的集合是 C 时，这个图的染色方案数。
记 Alice 的得分为 $scoreA$，Bob 的得分为 $scoreB$。

例题——游戏

数学形式

$$
\begin{aligned}
scoreA &= \sum_{\varnothing \neq S \subseteq E, |S|\text{是奇数}} F\Big([x_i = x_j] | (i,j) \in S\Big) \\
scoreB &= \sum_{\varnothing \neq S \subseteq E, |S|\text{是偶数}} F\Big([x_i = x_j] | (i,j) \in S\Big)
\end{aligned}
$$

数学形式

$$\begin{aligned} scoreA &= \sum_{\varnothing \neq S \subseteq E, |S|\text{是奇数}} F\left([x_i = x_j] | (i,j) \in S \right) \\ scoreB &= \sum_{\varnothing \neq S \subseteq E, |S|\text{是偶数}} F\left([x_i = x_j] | (i,j) \in S \right) \end{aligned}$$

数学形式

$$ans = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq E} (-1)^{|S|-1} F\left([x_i = x_j] | (i,j) \in S \right)$$

数学形式

考虑 $F\left([x_i = x_j] | (i,j) \in S\right)$ 的含义。
满足 S 中所有边对应条件时，图的染色方案数。

数学形式

考虑 $F\left([x_i = x_j] | (i,j) \in S\right)$ 的含义。

满足 S 中所有边对应条件时，图的染色方案数。

数学形式

令 T_e 表示满足 e 这条边对应条件，所有图的染色方案的集合。

则 $F\left([x_i = x_j] | (i,j) \in S\right) = |\bigcap_{e \in S} T_e|$。

数学形式

设 E 的大小即总边数为 Q，我们给边集 E 中所有的边从 1 到 Q 编号，则

$$\begin{aligned} ans &= \sum_{|S|=1} F(S) - \sum_{|S|=2} F(S) + \cdots + (-1)^{Q-1} F(E) \\ &= \sum_{i} |T_i| - \sum_{i<j} |T_i \cap T_j| + \cdots + (-1)^{Q-1} |T_1 \cap T_2 \cap \cdots \cap T_Q| \end{aligned}$$

数学形式

设 E 的大小即总边数为 Q，我们给边集 E 中所有的边从 1 到 Q 编号，则

$$\begin{aligned} ans &= \sum_{|S|=1} F(S) - \sum_{|S|=2} F(S) + \cdots + (-1)^{Q-1} F(E) \\ &= \sum_{i} |T_i| - \sum_{i<j} |T_i \cap T_j| + \cdots + (-1)^{Q-1} |T_1 \cap T_2 \cap \cdots \cap T_Q| \end{aligned}$$

上式右边与容斥原理的形式相同，尝试逆向分析出 ans 的含义，即

数学形式

设 E 的大小即总边数为 Q，我们给边集 E 中所有的边从 1 到 Q 编号，则

$$\begin{aligned} ans &= \sum_{|S|=1} F(S) - \sum_{|S|=2} F(S) + \cdots + (-1)^{Q-1} F(E) \\ &= \sum_{i} |T_i| - \sum_{i<j} |T_i \cap T_j| + \cdots + (-1)^{Q-1} |T_1 \cap T_2 \cap \cdots \cap T_Q| \end{aligned}$$

上式右边与容斥原理的形式相同，尝试逆向分析出 ans 的含义，即

$$ans = |T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_Q|$$

即至少一条边对应的条件满足！

Solution

我们问题变成了：n 个点，m 种颜色，至少两个点颜色相同，求染色方案数。进行一步补集转化，求点两两颜色不同的染色方案数，这个显然是

$$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$$

所以答案就是

$$m^n-\prod_{i=1}^{n}(m-i+1)$$

总结

1. 写出问题的数学形式，用各种技巧化简；
2. 逆向使用容斥原理，分析答案表达式的真正含义；
3. 用一种可行的方式计算答案。

总结

思想

1. 隔离法
2. 整体法

总结

思想

1. 隔离法
2. 整体法
3. $\Rightarrow$ 转化！

感谢

- 感谢父母对我的养育
- 感谢我的教练成都七中的张君亮老师，以及其他所有给予我支持的老师
- 感谢罗雨屏、李凌霄、钟皓曦等同学的帮助
- 感谢 CCF 给我一个展示自己的机会
- 感谢各位的认真听讲

欢迎大家批评指正！

Proof.

考虑一个元素 x，它属于 m 个集合，我们重标号为 $T_1, T_2, \cdots, T_m$，那么因为上式右边我们计算的都是若干集合的交集，所以只用考虑这 m 个集合的组合，又因为这 m 个集合都包含 x，所以对于任意多个集合，它们的交集中都有 x，只有计数的符号不同，即

$$
\begin{aligned}
cnt &= \sum_{i} 1 - \sum_{i<j} 1 + \sum_{i<j<k} 1 - \cdots + (-1)^{m-1} \cdot 1 \\
&= C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \cdots + (-1)^{m-1} C_m^m \\
&= C_m^0 - \left(C_m^0 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \cdots + (-1)^m C_m^m\right) \\
&= 1 - (1-1)^m \\
&= 1
\end{aligned}
$$

其中 C_n^m 表示组合数，证明中结合了二项式定理。 □