2015-2016学年第一学期考试试卷和答案 [复制链接]

一、单项选择填空题 (每题3分,共30分,答题请写在试卷上):

1. 考虑 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 的一个随机排列，与原来位置序号相同的数字个数记为N (比如排列513246与原来位置序号只有数字3和6是相同的，所以$N=2$)，则 $EN=$________________

2. 设$X\sim N(1,9), Y\sim N(1,16)$, 且$X$与$Y$的相关系数为$\rho_{XY}=-1/2$，设$Z=\frac{X}{2}+\frac{Y}{3}$，则$X$和$Z$的相关系数$\rho_{XZ}=$________________

3. 下列哪些函数不是概率密度或者分布律？________________

(A) $f(x)=\frac{1}{2}I\{a-3/2\le x\le a\}+\frac{1}{4}I\{a-1\le x\le a\}, a\in\mathbb{R}$

(B) $f(x)=\frac{5}{6}I\{a-3/2\le x\le a\}-\frac{1}{4}I\{a-1\le x\le a\}, a\in\mathbb{R}$

(C) $P(X=k)=\frac{1}{2^k}, k=0,1,2,\ldots$

(D) $f(x)=\lambda\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}I\{x>0\}, \lambda>0, \alpha>0$

4. 若两随机事件A,B相互独立，下列哪些说法不正确？________________

(A) $P(A|B)=P(A|B^c)$ (B) $P(A|B)=P(A^c|B)$

(C) $P(B|A)=P(B|A^c)$ (D) $P(B^c|A)=P(B^c|A^c)$

5. 假设盒子中有一个不知颜色是黑色还是白色的球，现在给盒子里再放一个白球，然后从中随机拿出一个球，发现是白色的。则此时盒中剩余的球是白色的概率为________________

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$

6. 下述对正态总体均值的置信区间的表述错误的 ________________

(A) 置信度愈高，则可靠性愈高

(B) 置信度愈高，则置信区间愈宽

(C) 置信区间的大小与测量次数的平方根成正比

(D) 置信区间的位置取决于测量的平均值

7. 设随机变量X和Y都服从标准正态分布，则下述正确的是________________

(A) $X+Y$服从正态分布 (B) X^2+Y^2服从χ^2分布

(C) X^2和Y^2都服从χ^2分布 (D) $\frac{X^2}{Y^2}$服从F分布

8. 下述对一个检验方法的第二类错误描述错误的是____________

(A) 在给定样本量下，第二类错误的概率不可能任意小

(B) 在对立假设空间的子集下控制第二类错误的概率，可以用来确定样本量大小

(C) 在有限样本量下，第二类错误是不可以避免的

(D) 在一个检验结果是拒绝零假设时候，我们会有很大的风险犯第二类错误

9. 下述检验正态性假设的方法中错误的是____________

(A) 直方图方法 \qquad (B) 拟合优度检验方法

(C) 使用偏度系数和峰度系数 \qquad (D) t检验

10. 若一个总体的期望和方差分别为μ和σ^2，设$X_1,\dots,X_n$为来自该总体的一组简单样本，则总体变异系数$\frac{\sigma}{\mu}$的相合估计为____________

二、(15分) 假设$Y\sim U(0,\theta),\theta>1$，若随机变量

$$X=\begin{cases}Y, & Y\geq 1\\ 0, & Y<1\end{cases}$$

。试求

(1)X的分布函数。(2) 期望EX。

三、(15分) 设某生产线上组装每件产品的时间服从指数分布, 平均需要10分钟,且各产品的组装时间是相互独立的。

(1) 试求组装100件产品需要15小时至20小时的概率。

(2) 保证有95\%的可能性, 问16小时内最多可以组装多少件产品。

四、(15分) 称随机变量$X\sim Exp(a,b)$，如果X的概率密度函数为$f(x)=\frac{1}{b}\,e^{-(x-a)/b}I(x>a)$，其中$a\in\mathbb{R},b>0$为参数。现从总体$Exp(a,1)$中抽取简单样本$X_1,\dots,X_n$，从总体$Exp(a,2)$中抽取简单样本$Y_1,\dots,Y_m$， 且两组样本相互独立。试

(1) 求a的矩估计和最大似然估计。

(2) 是否都为无偏估计？若不是，请修正为无偏估计，并比较修正后的估计何者最优。

五、 (15分) StreetInsider.com报道了2002年一些著名公司的每股收益的数据.在2002年之前，财务分析家就预测了这些公司2002年的每股收益.利用下面数据评论实际的和预测的每股收益的差异.

公司	实际每股收益	预测每股收益	公司	实际每股收益	预测每股收益
$AT\&T$	1.29	0.38	埃克森 — 美孚	2.72	2.19
美国运通	2.01	2.31	通用电气	1.51	1.71
花旗银行	2.59	3.43	强生	2.28	2.18
可口可乐	1.60	1.78	麦当劳	0.77	1.55
杜邦	1.84	2.18	沃尔玛	1.81	1.74

试

(1) 在显著性水平0.05下，检验实际的和预测的每股平均收益之间是否存在差异，你的结论是什么？

(2) 两均值之差的点估计是多少？分析家是低估还是高估了每股的收益？

(3) 给出两均值之差的95%置信区间，并据此对(1)的检验问题作出结论并解释。

六、(10分) 用甲、乙、丙、丁四种棉纱织成坯布，其中用甲纱织成的18匹坯布中17匹为上等品，乙纱织成的15匹坯布中11匹为上等品，丙纱织成的15匹坯布中8匹为上等品，丁纱织成的13匹坯布中11匹为上等品，问这四种棉纱的质量有无显著差异？（显著性水平为0.05)

#在这里快速回复#

收藏 14

回复 举报

stat

82 主题 | 175 帖子 | 1063 积分

超级版主

积分 1063

发消息

楼主 | 发表于 2016-1-13 14:19:49 | 只看该作者 推荐

本帖隐藏的内容

一、 1. 1; 2. $\frac{5}{\sqrt{73}}$; 3. C; 4. B; 5. C; 6. C; 7. C; 8. D; 9. D; 10. $\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}{\sqrt{n}\overline{X}}$ (答案不唯一).

二、

1.

$$F_X(x) = P(Y \le x | Y \ge 1)P(Y \ge 1) + P(0 \le x | Y < 1)P(Y < 1) \quad (1)$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\theta}, & 0 \le x \le 1; \\ \frac{x}{\theta}, & x > 1. \end{cases} \quad (2)$$

2.

$$E[X] = E[X|Y \ge 1]P(Y \ge 1) + E[X|Y < 1]P(Y < 1) = E[Y|Y \ge 1]P(Y \ge 1) + E[0|Y < 1$$

$$= \frac{\theta - 1}{\theta}\frac{1+\theta}{2} = \frac{\theta^2 - 1}{2\theta}.$$

三、

1. $X_1, \ldots, X_{100}$ i.i.d $\sim Exp(6)$.

$$P(15 \le \sum_{i=1}^{100} X_i \le 20) = P(\frac{15 - 50/3}{10/6} \le \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100/6}{\sqrt{100 * 1/6}} \le \frac{20 - 50/3}{10/6}) \quad (5)$$

$$\approx \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - 1 + \Phi(1). \quad (6)$$

2.

$$P(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 16) \quad = P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n/6}{\sqrt{n}/6} \leq \frac{16 - n/6}{\sqrt{n}/6}) \approx \Phi(\frac{96-n}{\sqrt{n}}) = 0.95.$$

$$\frac{96-n}{\sqrt{n}} = 1.645$$

$$n = 81.19.$$

最多可以组装~81个。

四、
1.

$$E[X] \quad = a+1, E[Y] = a+2.$$

所以a 的矩估计为

$$\hat{a}_1 = \quad 2\overline{X} - \overline{Y}$$

其中 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} Y_i.$ (a的矩估计不唯一，比如另一估计为$\hat{a}_1 = (\overline{X} + \overline{Y} - 3)/2$)

由于似然函数为

$$L = exp\{-\sum_{i=1}^{n}(X_i - a) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - a)\}1_{\{X(1)>a, Y(1)>a\}}.$$

易见似然函数在 $a < \min\{X_{(1)}, Y_{(1)}\}$ 时 是关于 a 单调递增的。从而得到 a的极大似然估计为

$$\hat{a}_2 = \min\{X_{(1)}, Y_{(1)}\}.$$

2.

$$E[\hat{a}_1] \quad = \quad E[\overline{X} - \overline{Y}] = a.$$

对 $x > a$,

$$P(\min\{X_{(1)}, Y_{(1)}\} \leq x) = 1 - P(\min\{X_{(1)}, Y_{(1)}\} > x) \quad = 1 - \prod_{i=1}^{n} e^{-(x-a)} \prod_{i=1}^{m} e^{-\frac{x-a}{2}} = 1 -$$

则 $\min\{X_{(1)}, Y_{(1)}\}$ 的密度函数为

$$f(x) \quad = \frac{2n+m}{2} e^{-\frac{(2n+m)(x-a)}{2}} 1_{\{x>a\}}.$$

即$\hat{a}_2 \sim Exp(a, \frac{2}{2n+m})$。从而

$$E[X] \quad = \int_a^{\infty} x \quad \frac{2n+m}{2} e^{-\frac{(2n+m)(x-a)}{2}} dx = a + \frac{2}{2n+m}$$

所以基于最大似然估计$\hat{a}_2$的修正后的无偏估计为

$$\hat{a}_2^* = \hat{a}_2 - \frac{2}{2n+m}$$

容易得到

$$Var(\hat{a}_1) = 4\,\frac{n+m}{nm}$$

以及

$$Var(\hat{a}_2^*) = Var(\hat{a}_2) = \frac{4}{(2n+m)^2}$$

因此，显然$\hat{a}_2^*$更有效。

五、

1. 此数据为成对数据， 利用一样本t检验：

$Z_i = X_i - Y_i, i = 1, \ldots, 10$，iid $\sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$H_0 : \mu = 0 \longleftrightarrow H_1 : \mu \neq 0.$$

$$T = \frac{\sqrt{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i - Y_i)}{S_{X-Y}}|_{H_0} \quad \sim t_9.$$

代入样本数据有

$$t = -0.6048 > -t_9(0.025) = -2.262.$$

因此，我们不拒绝原假设，即在显著性水平 $\alpha = 0.05$下，实际与预测的平均收益不存在差异。

2. 实际的每股平均收益-预测的每股平均收益

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{10}(X_i - Y_i)}{10} = -0.103 < 0$$

, 说明从点估计角度来说，分析家是高估了每股的收益。

3. 两个均值之差的 95% 的置信区间为

$$\left[-0.103 - \frac{S}{\sqrt{n}}t_9(0.025), -0.103 + \frac{S}{\sqrt{n}}t_9(0.025)\right] = [-0.488, 0.282]$$

此置信区间为检验问题（1）的接受域。 包含了 0 点， 因此检验问题的结论是接受原假设， 即可以认为实际的和预测的每股平均收益没有差异。

六、 这是齐一性检验，计算

$$\begin{aligned}\chi^2 = &\frac{(17-18*47/61)^2}{18*47/61} + \frac{(11-15*47/61)^2}{15*47/61} + \frac{(8-15*47/61)^2}{15*47/61} \\ &+ \frac{(11-13*47/61)^2}{13*47/61} + \frac{(1-18*14/61)^2}{18*14/61} + \frac{(4-15*14/61)^2}{15*14/61} + \frac{(7-15*14/61)^2}{15*14/61} \\ &+ \frac{(2-13*14/61)^2}{13*14/61} = 8.389 > 7.815 = \chi_3(0.05).\end{aligned}$$

在显著性水平 $\alpha = 0.05$下，四种棉纱的质量有显著性差异。

点评 回复 支持 1 反对 0 举报

chunk

发表于 2016-1-13 14:34:29 | 只看该作者 板凳

kankandaan

0 主题 | 3 帖子 | 58 积分

注册会员

积分 58

发消息

点评 回复 支持 反对 举报

zxcvbnm

发表于 2016-1-13 22:21:09 来自手机 | 只看该作者 地板

kankandaan

0 主题 | 5 帖子 | 16 积分

新手上路

积分 16

发消息

点评 回复 支持 反对 举报

pineconesu

发表于 2016-1-14 10:28:25 | 只看该作者 5#

chakandaan

0 主题 | 4 帖子 | 16 积分

新手上路

积分 16

发消息

点评 回复 支持 反对 举报