P135: 2

2 在例 1 的 K 的解释域 N 中，若等词≈改为解释成“有不同的奇偶性”，那么等词公理在 N 中是否都恒真？是否都恒假。
答： 在解释域 N 中，若等词≈改为解释成“有不同的奇偶性”，那么(E1)型等词公理在 N 中恒假，而(E2)与(E3)型等词公理在 N 中既不恒真也不恒假。

P138: 1

1 设项 t、u 都对公式 $p(x_i)$中 x_i 自由，且不含 x_i。求证 $E\cup\{\exists!x_i\ p(x_i), p(t)\}|\!-\ p(u)\text{->}u\approx t$，这里规定$\exists!x_i\ p(x_i)= \exists x_i(p(x_i)\wedge\forall x_j(p(x_j)\text{->}x_i\approx x_j))$其中 x_j 不在 $p(x_i)$中出现。

证明：由于 x_j 不在 $p(x_i)$中出现且项 t、u 都对公式 $p(x_i)$中 x_i 自由，所以
项 t、u 都对公式 $p(x_j)$中 x_j 自由。 (结论一)
（提示：这里涉及 $p(x_i)$之类的表示方法在表示对象变元间替换时的不严谨情况，我会在习题课上具体讲）
以下是 K 中 $u\approx t$ 从 $E\cup\{p(x_i)\wedge\forall x_j(p(x_j)\text{->}x_i\approx x_j), p(t), p(u)\}$的一个“证明”。
(1) $p(x_i)\wedge\forall x_j(p(x_j)\text{->}x_i\approx x_j)$ 假定
(2) $(p(x_i)\wedge\forall x_j(p(x_j)\text{->}x_i\approx x_j))\text{->}\forall x_j(p(x_j)\text{->}x_i\approx x_j)$ 永真式
(3) $\forall x_j(p(x_j)\text{->}x_i\approx x_j)$ (1), (2), MP
(4) $\forall x_j(p(x_j)\text{->}x_i\approx x_j)\text{->}(p(u)\text{->}x_i\approx u)$ (K4) (依据结论一)
(5) $\forall x_j(p(x_j)\text{->}x_i\approx x_j)\text{->}(p(t)\text{->}x_i\approx t)$ (K4) (依据结论一)
(6) $p(u)\text{->}x_i\approx u$ (3), (4), MP
(7) $p(t)\text{->}x_i\approx t$ (3), (5), MP
(8) $p(u)$ 假定
(9) $p(t)$ 假定
(10) $x_i\approx u$ (6), (8), MP
(11) $x_i\approx t$ (7), (9), MP
(12) $x_i\approx u\text{->}(x_i\approx t\text{->}u\approx t)$ (E3)
(13) $x_i\approx t\text{->}u\approx t$ (10), (12), MP
(14) $u\approx t$ (11), (13), MP
在以上“证明”中没有使用任何 Gen 变元。所以根据演绎定理，不需任何 Gen 变元就可得 $E\cup\{p(x_i)\wedge\forall x_j(p(x_j)\text{->}x_i\approx x_j), p(t)\}|\!-\ p(u)\text{->}u\approx t$。 (结论二)
由于项 t、u 都不含 x_i，所以 x_i 不在 $p(u)\text{->}u\approx t$ 中自由出现。 (结论三)
由结论二和结论三，根据$\exists_2$规则可得 $E\cup\{\exists x_i(p(x_i)\wedge\forall x_j(p(x_j)\text{->}x_i\approx x_j)), p(t)\}|\!-\ p(u)\text{->}u\approx t$。由于本题规定$\exists!x_i\ p(x_i)= \exists x_i(p(x_i)\wedge\forall x_j(p(x_j)\text{->}x_i\approx x_j))$，所以有 $E\cup\{\exists!x_i\ p(x_i), p(t)\}|\!-\ p(u)\text{->}u\approx t$。 证毕

P157: 1、4

1 求证当 n=2k 时，N|-$\exists x_i(x_i\times\underline{2}\approx\underline{n})$。

证明：以下是 K_N 中$\exists x_i(x_i\times\underline{2}\approx\underline{n})$从 N 的一个“证明”。

(1) $\underline{k}\times\underline{2}\approx\underline{2k}$　　命题 2
(2) $(\underline{k}\times\underline{2}\approx\underline{2k})\rightarrow\exists x_i(x_i\times\underline{2}\approx\underline{2k})$　　$\exists_1$ 规则（由于 $\underline{k}$ 对 $x\times\underline{2}\approx\underline{2k}$ 中的 x 自由）
(3) $\exists x_i(x_i\times\underline{2}\approx\underline{2k})$　　(1), (2), MP

所以 N|-$\exists x_i(x_i\times\underline{2}\approx\underline{n})$。　　证毕

4 求证 N|- $-(t'_1+t_2\approx t_1)$。

证明：以下是 K_N 中 $t'_2\approx\underline{0}$ 从 N∪{$t'_1+t_2\approx t_1$}的一个“证明”。

(1) $-(t'_2\approx\underline{0})$　　(N1)
(2) $t'_1+t_2\approx t_1$　　假定
(3) $t'_1+t_2\approx(t_1+t_2)'$　　命题 4
(4) $t_1+t'_2\approx(t_1+t_2)'$　　(N4)
(5) $t'_1+t_2\approx t_1+t'_2$　　(3), (4), 等词性质
(6) $t_1+t'_2\approx t'_2+t_1$　　加法交换律
(7) $t'_1+t_2\approx t'_2+t_1$　　(5), (6), 等词性质
(8) $t'_2+t_1\approx t_1$　　(2), (7), 等词性质
(9) $t'_2+t_1\approx t_1\rightarrow t'_2\approx\underline{0}$　　加法消去律
(10) $t'_2\approx\underline{0}$　　(8), (9), MP

由(1)(10)可得 N∪{$t'_1+t_2\approx t_1$}|- $-(t'_2\approx\underline{0})$及 $t'_2\approx\underline{0}$ 且“证明”中所涉及的任何 Gen 变元可以避免出现在 $t'_1+t_2\approx t_1$ 中。所以根据归谬律可得 N|- $-(t'_1+t_2\approx t_1)$。　　证毕

P22: 2.1, 2.2

2.1 给出(x1->x2)->((-x1->-x2)->(x2->x1))的直接证明

解：(1) (-x1->-x2)->(x2->x1) (L3)

(2) ((-x1->-x2)->(x2->x1))->((x1->x2)-> ((-x1->-x2)->(x2->x1))) (L1)

(3) ((x1->x2)-> ((-x1->-x2)->(x2->x1))) (1), (2), MP

2.2 给出((x1->(x2->x3))->(x1->x2))->((x1->(x2-x3))->(x1->x3))的直接证明

解：将(x1->(x2->x3))->((x1->x2)->(x1->x3))、x1->(x2->x3)、(x1->x2)和 (x1->x3) 分别记为公式 p0、p、q 和 r

(1) p0 (L2)

(2) p0->((p->q)->(p->r)) (L2)

(3) (p->q)->(p->r) (1), (2), MP

P22: 3.3, 3.4

3.3 证明{p->q, -(q->r)->-p} |- p->r

证明：以下是 L 中 p->r 从{p->q, -(q->r)->-p}的一个“证明”。

(1) -(q->r)->-p 假定

(2) (-(q->r)->-p)->(p->(q->r)) (L3)

(3) p->(q->r) (1), (2), MP

(4) (p->(q->r))->((p->q)->(p->r)) (L2)

(5) (p->q)->(p->r) (3), (4), MP

(6) p->q 假定

(7) p->r (5), (6), MP 证毕

3.4 证明{p->(q->r)} |- q->(p->r)

证明：以下是 L 中 q->(p->r)从{p->(q->r)}的一个“证明”。

(1) p->(q->r) 假定

(2) (p->(q->r))->((p->q)->(p->r)) (L2)

(3) (p->q)->(p->r) (1), (2), MP

(4) ((p->q)->(p->r))->(q->((p->q)->(p->r))) (L1)

(5) q->((p->q)->(p->r)) (3), (4), MP

(6) (q->((p->q)->(p->r)))->((q->(p->q))->(q->(p->r))) (L2)

(7) (q->(p->q))->(q->(p->r)) (5), (6), MP

(8) q->(p->q) (L1)

(9) q->(p->r) (7), (8), MP 证毕

P22: 分别直接和间接证明 2.3、3.1

2.3 证明|- x1->(x2->(x1->x2))

证明（直接）：以下是 L 中 x1->(x2->(x1->x2))的一个“证明”。

(1) x2->(x1->x2) (L1)

(2) (x2->(x1->x2))->(x1->(x2->(x1->x2))) (L1)

(3) x1->(x2->(x1->x2)) (1), (2), MP 证毕

证明（间接）：根据演绎定理只用证{x1, x2}|- x2

下面是 x2 在 L 中从{x1, x2}的一个“证明”

(1) x2 假定 证毕

3.1 证明{-p}|- p->q

证明（直接）：以下是 L 中 p->q 从{-p}的一个“证明”。

(1) -p 假定

(2) -p->(-q->-p) (L1)

(3) -q->-p (1), (2), MP

(4) (-q->-p)->(p->q) (L3)

(5) p->q (3), (4), MP 证毕

证明（间接）：根据演绎定理只用证{-p, p}|- q

显然地有：

<1> {-p, p, -q}|- -p 以及

<2> {-p, p, -q}|- p

由<1>, <2>根据反证律可得{-p, p}|-q 证毕

P25: 分别直接和间接证明 1

1 证明|-(x1->(x1->x2))->(x1->x2)

证明（直接）：以下是 L 中(x1->(x1->x2))->(x1->x2)的一个“证明”。

(1) (x1->(x1->x2))->((x1->x1)->(x1->x2) (L2)

将上式记为 p0

(2) p0->(((x1->(x1->x2))->(x1->x1))->((x1->(x1->x2))->(x1->x2))) (L2)

(3) ((x1->(x1->x2))->(x1->x1))->((x1->(x1->x2))->(x1->x2)) (1), (2), MP

(4) x1->((x1->x2)->x1) (L1)

(5) (x1->((x1->x2)->x1))->((x1->(x1->x2))->(x1->x1)) (L2)

(6) (x1->(x1->x2))->(x1->x1) (4), (5), MP

(7) (x1->(x1->x2))->(x1->x2) (3), (6), MP 证毕

证明（间接）：根据演绎定理只用证{x1->(x1->x2), x1}|- x2

以下是 L 中 x2 从{x1->(x1->x2), x1}的一个“证明”。

(1) x1 假定

(2) x1->(x1->x2) 假定

(3) x1->x2 (1), (2), MP

(4) x2 (1), (3), MP 证毕

P29: 证明 1.3、1.4、1.5

1.3 证明|- -(p->q)->-q
证明：根据演绎定理只需证{-(p->q)}|--q。
以下是 L 中 p->q 从{-(p->q), q}的一个“证明”。
(1) -(p->q) 假定
(2) q->(p->q) (L1)
(3) q 假定
(4) p->q (2), (3), MP
由(1)和(4)可得{-(p->q), q}|--(p->q)以及{-(p->q), q}|- p->q。
根据归谬律可得{-(p->q)}|- -q 证毕

1.4 证明|- -(p->q)->p
证明：根据演绎定理只需证{-(p->q)}|-p。
以下是 L 中 p->q 从{-(p->q), -p}的一个“证明”。
(1) -(p->q) 假定
(2) -p->(p->q) 否定前件律
(3) -p 假定
(4) p->q (2), (3), MP
由(1)和(4)可得{-(p->q), -p}|--(p->q)以及{-(p->q), -p}|- p->q。
根据反证律可得{-(p->q)}|- p 证毕

1.5 证明|- (p->q)->((-p->q)->q)
证明：根据演绎定理只需证{p->q, -p->q}|-q
以下是 L 中 q 从{p->q, -p->q, -q}的一个“证明”。
(1) –q 假定
(2) -p->q 假定
(3) (-p->q)->(-q->--p) 换位律
(4) -q->--p (2), (3), MP
(5) --p (1), (4), MP
(6) --p->p 双重否定律
(7) p (5), (6), MP
(8) p->q 假定
(9) q (7), (8), MP
由(1)和(9)可得{ p->q, -p->q, -q }|- -q 且{ p->q, -p->q, -q }|- q。
根据反证律可得{p->q, -p->q}|-q 证毕

P32: 证明命题 1.3、命题 2.2、2.3、2.4

1.3 证明|- (p∨q)->(q∨p)

证明：要证|- (p∨q)->(q∨p)，即要证|- (-p->q)->(-q->p)
根据演绎定理只需证{-p->q, -q }|- p
以下是 L 中 q 从{-p->q, -q , -p}的一个“证明”。
(1) -q 假定
(2) -p 假定
(3) -p->q 假定
(4) q (2), (3), MP
由(1), (4)可得{-p->q, -q , -p}|- -q 且{-p->q, -q , -p}|- q
根据反证律可得{-p->q, -q}|- p 证毕

2.2 证明|- (p^q)->q
证明：要证|- (p^q)->q，即要证|- -(p->-q)->q
以下是 L 中-(p->-q)->q 的一个“证明”。
(1) -q->(p->-q) (L1)
(2) (-q->(p->-q))->(-(p->-q)->--q) 换位律
(3) -(p->-q)->--q (1), (2), MP
(4) --q->q 双否律
(5) -(p->-q)->q (3), (4), HS 证毕

2.3 证明|- (p^q)->(q^p)
证明：要证|- (p^q)->(q^p)，即要证|- (-(p->-q))->(-(q->-p))
根据演绎定理只用证{-(p->-q)}|- -(q->-p)
以下是 L 中 p->-q 从{-(p->-q), q->-p}的一个“证明”。
(1) -(p->-q) 假定
(2) q-> -p 假定
(3) (q->-p)->(--p->-q) 换位律
(4) --p->-q (2), (3), MP
(5) p->--p 第二双否律
(6) p->-q (5), (4), HS
由(1), (6)可得{-(p->-q), q->-p }|- -(p->-q)且{-(p->-q), q->-p }|- p->-q
根据归谬律可得{-(p->-q)}|- -(q->-p) 证毕

2.4 证明|- p->(p^p)
证明：要证|- p->(p^p)，即要证|- p->-(p->-p)
根据演绎定理只用证{p}|- -(p->-p)
以下是 L 中-p 从{p, p->-p}的一个“证明”。
(1) p 假定
(2) p->-p 假定
(3) -p (1), (2), MP
由(1), (3)可得{p, p->-p}|-p 且{p, p->-p}|- -p
根据归谬律可得{p}|- -(p->-p) 证毕

P46: 1.7、2.3

1.7 写出(-x1^x2)->(-x2^x3)的真值表

解：

-	X1	^	X2	->	-	X2	^	X3
f	t	f	t	t	f	t	f	t
f	t	f	t	t	f	t	f	f
f	t	f	f	t	t	f	t	t
f	t	f	f	t	t	f	f	f
t	f	t	t	f	f	t	f	t
t	f	t	t	f	f	t	f	f
t	f	f	f	t	t	f	t	t
t	f	f	f	t	t	f	f	f

2.3 证明-x1->(x2∨x3)和-x2->(-x3->x1)有相同的真值函数

证明(一)：写出-x1->(x2∨x3)和-x2->(-x3->x1)的真值表如下

X1	X2	X3	-x1	-x2	-x3	X2∨x3	-x3->x1	-x1->(x2∨x3)	-x2->(-x3->x1)
t	t	t	f	f	f	t	t	t	T
t	t	f	f	f	t	t	t	t	T
t	f	t	f	t	f	t	t	t	T
t	f	f	f	t	t	f	t	t	T
f	t	t	t	f	f	t	t	t	T
f	t	f	t	f	t	t	f	t	T
f	f	t	t	t	f	t	t	t	T
f	f	f	t	t	t	f	f	f	F

有此真值表得出-x1->(x2∨x3)和-x2->(-x3->x1)有相同的真值函数。　　证毕

证明(二)：即证|=(-x1->(x2∨x3))<->(-x2->(-x3->x1))

即证|=((--x1)∨(x2∨x3))<->((--x2)∨ ((--x3)∨x1))

任取一个L(X)的赋值v。

则 v((--x1)∨(x2∨x3))

= (--v(x1))∨v(x2)∨v(x3)

= v(x1)∨v(x2)∨v(x3)

= v(--x2)∨v(--x3)∨v(x1)

= v((--x2)∨((--x3)∨x1))。

所以|=(-x1->(x2∨x3))<->(-x2->(-x3->x1))　　证毕

定理 8: 1、2、3、4

1 Γ⊆Γ′，Γ|=p，则Γ′|=p

证明：任取一个L(X)的赋值v。

由于Γ⊆Γ′，

所以若对任一 $q'\in\Gamma'$有 $v(q')=1$ 则对任一 $q\in\Gamma$ 有 $v(q)=1$ 〈1〉

由于 $\Gamma\models p$，

所以若对任一 $q\in\Gamma$ 有 $v(q)=1$ 则 $v(p)=1$ 〈2〉

结合〈1〉和〈2〉可得：

若对任一 $q'\in\Gamma'$有 $v(q')=1$ 则 $v(p)=1$，既 $\Gamma'\models p$。 证毕

2 $\Gamma\models p$， $\Gamma\models p\to q$，则 $\Gamma\models q$

证明：任取一个使Γ中成员的真值都为 1 的赋值 v。

由于 $\Gamma\models p$ 且 $\Gamma\models p\to q$，

所以 $v(p)=1$ 且 $v(p\to q)=1$

所以必有 $v(q)=1$，既 $\Gamma\models q$。 证毕

3 $\Gamma\cup\{p\}\models q \Leftrightarrow \Gamma\models p\to q$

证明：任取一个使Γ中成员的真值都为 1 的赋值 v。

先证充分性（⇒）

设 $\Gamma\cup\{p\}\models q$。

若 $v(p)=1$ 则根据 $\Gamma\cup\{p\}\models q$ 可得 $v(q)=1$，此时 $v(p\to q)=1\to 1=1$；

若 $v(p)=0$ 则 $v(p\to q)=0\to v(q)=1$。

所以必有 $v(p\to q)=1$，既 $\Gamma\models p\to q$。

再证必要性（⇐）

设 $\Gamma\models p\to q$。

因此 $v(p\to q)=1$。

因此若 $v(p)=1$ 则必有 $v(q)=1$。

所以 $\Gamma\cup\{p\}\models q$。 证毕

4 $\varnothing\models p \Leftrightarrow \models p$

证明：先证充分性（⇒）

设 $\varnothing\models p$。

任取一个 $L(X)$ 的赋值 v。

显然地，对任一 $q\in\varnothing$有 $v(q)=1$。

根据 $\varnothing\models p$ 可得 $v(p)=1$。

所以 $\models p$。

再证必要性（⇐）

设 $\models p$。

任取一个使∅中成员的真值都为 1 的赋值 v。

由于 $\models p$，

所以 $v(p)=1$。

所以 $\varnothing\models p$。 证毕

P55: 1.1

1.1 证明 $p\to q$ 和 $\neg q\to\neg p$ 是等值的

证明(一)：列真值表法，略。

证明(二)：即证|=(p->q)<->(-q->-p)，即证|=(-p∨q)<->((--q)∨-p)

任取一个 L(X)的赋值 v。

则 v((--q)∨-p)= (--v(q))∨-v(p)= (-v(p)) ∨ v(q)=v(-p∨q)。

所以|=(-p∨q)<->((--q)∨-p)　　　　　证毕

P60: 1.3

1.2 求(x1^x2) ∨ (-x2<->x3)的等值主析取范式

解：原公式的成真指派是(0,0,1), (0,1,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)

所以原公式的等值主析取范式是：

(-x1^-x2^x3) ∨ (-x1^x2^-x3) ∨ (x1^-x2^x3) ∨ (x1^x2^-x3) ∨ (x1^x2^x3)

证明判定函数 v 的性质（v 是在证明 L 的完备性时而构造出来的）

证明略，详细可见书

P81: 1, 2, 3

1 下面哪些符号串是谓词演算的公式？有没有闭式？

(1) $R_1^2(f_1^1(x_1), x_1)$,
(2) $f_1^3\ (x_1, x_3, x_4)$,
(3) $R_1^1(x_2)\text{->}\ R_1^3(x_3, c_1)$,
(4) $-\forall x_2\ R_1^2(x_1, x_2)$,
(5) $\forall x_2\ R_1^1(x_1)\text{->-}R_1^1(x_2)$,
(6) $R_1^3(f_2^3(x_1, c_2, x_2))$,
(7) $-\ R_1^1(x_1)\text{->}R_1^1(x_2)$,
(8) $\forall x_1\ R_1^3(c_1, c_2, f_1^1(c_3))$

答：(1), (4), (5), (7), (8)是公式，其中(8)是闭式。
提示：(2)是项，(3)和(6)中有谓词元数与其参数个数不匹配的情况。

2 在以下公式中，哪些 x_1 的出现是自由的？哪些 x_1 的出现是约束的？项 $f_1^2\ (x_1, x_3)$ 对该公式中 x_2 是不是自由的？

(1) $\forall x_2\ (R_1^2(x_1, x_2)\text{->}\ R_2^2(x_2, c_1))$,
(2) $R_1^1(x_3)\text{->-}\forall x_1\forall x_2\ R_1^3(x_1, x_2, c_1)$,
(3) $\forall x_1\ R_1^1(x_1)\text{->}\ \forall x_2\ R_1^2(x_1, x_2)$,
(4) $\forall x_2\ R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1)\text{->}\ \forall x_1\ R_2^2(x_3, f_2^2(x_1, x_2))$

答： (1)中 x_1 自由出现一次，x_1 没有约束出现，项 $f_1^2\ (x_1, x_3)$对 x_2 是自由的。
(2)中 x_1 没有自由出现，x_1 约束出现两次，项 $f_1^2\ (x_1, x_3)$对 x_2 是自由的。
(3)中 x_1 自由出现一次，x_1 约束出现两次，项 $f_1^2\ (x_1, x_3)$对 x_2 是自由的。
(4)中 x_1 自由出现两次，x_1 约束出现两次，项 $f_1^2\ (x_1, x_3)$对 x_2 是不自由的。

3 设 t 是项 $f_1^2(x_1, x_3)$。$p(x_1)$是下面的公式。确定 t 对 $p(x_1)$中的 x_1 是否自由；如果是自由的，写出 p(t)。

(1) $\forall x_1\ R_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2))\text{->}\ R_1^1(x_1)$,
(2) $\forall x_1\forall x_3\ (R_1^1(x_3)\text{->}\ R_1^1(x_1))$,
(3) $\forall x_2\ R_1^1(f_1^1(x_2))\text{->}\ \forall x_3\ R_1^3(x_1, x_2, x_3)$,
(4) $\forall x_2\ R_1^3(x_1, f_1^1(x_1), x_2)\text{->}\ \forall x_3\ R_1^1(f_1^2(x_1, x_3))$。

答：t 对(1)中 x_1 是自由的。$p(t)= \forall x_1\ R_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2))\text{->}\ R_1^1(f_1^2(x_1, x_3))$。
t 对(2)中 x_1 是自由的。$p(t)= p(x_1)$。
t 对(3)中 x_1 是不自由的。
t 对(4)中 x_1 是不自由的。

P88: 2、3.2；P89: 4.1

2 试证对任意公式 p 与 q，有$\vdash \forall x_i (p\to q)\to(\forall x_i\, p\to\forall x_i\, q)$。

证明：以下是 K 中$\forall x_i\, q$ 从$\{\forall x_i (p\to q), \forall x_i\, p\}$的一个“证明”。

(1) $\forall x_i (p\to q)$ 假定

(2) $\forall x_i (p\to q)\to(p\to q)$ (K4)

(3) $p\to q$ (1), (2), MP

(4) $\forall x_i\, p$ 假定

(5) $\forall x_i\, p\to p$ (K4)

(6) p (4), (5), MP

(7) q (3), (6), MP

(8) $\forall x_i\, q$ (7), Gen

在以上过程中，除 x_i 外没有使用别的 Gen 变元。x_i 不在$\forall x_i (p\to q)$和$\forall x_i\, p$ 中自由出现。所以根据演绎定理可得$\vdash \forall x_i (p\to q)\to(\forall x_i\, p\to\forall x_i\, q)$。 证毕

3.2 求证$\{\forall x_1\forall x_2\, R_1^2(x_1, x_2)\}\vdash \forall x_2\forall x_3\, R_1^2(x_2, x_3)$

证明：以下是 K 中$\forall x_2\forall x_3\, R_1^2(x_2, x_3)$从$\{\forall x_1\forall x_2\, R_1^2(x_1, x_2)\}$的一个“证明”。

(1) $\forall x_1\forall x_2\, R_1^2(x_1, x_2)$ 假定

(2) $\forall x_1\forall x_2\, R_1^2(x_1, x_2)\to \forall x_2\, R_1^2(x_1, x_2)$ (K4)

(3) $\forall x_2\, R_1^2(x_1, x_2)$ (1), (2), MP

(4) $\forall x_2\, R_1^2(x_1, x_2)\to R_1^2(x_1, x_3)$ (K4)

(5) $R_1^2(x_1, x_3)$ (3), (4), MP

(6) $\forall x_1\, R_1^2(x_1, x_3)$ (5), Gen

(7) $\forall x_1\, R_1^2(x_1, x_3)\to R_1^2(x_2, x_3)$ (K4)

(8) $R_1^2(x_2, x_3)$ (6), (7), MP

(9) $\forall x_3\, R_1^2(x_2, x_3)$ (8), Gen

(10) $\forall x_2\forall x_3\, R_1^2(x_2, x_3)$ (9), Gen 证毕

4.1 设 x_1 不在 p 中自由出现。求证$\vdash (p\to\forall x_1 q)\to \forall x_1(p\to q)$。

证明：以下是 K 中$\forall x_1(p\to q)$从$\{p\to\forall x_1 q\}$的一个“证明”。

(1) $p\to\forall x_1 q$ 假定

(2) $\forall x_1 q \to q$ (K4)

(3) $p \to q$ (1), (2), HS

(4) $\forall x_1(p\to q)$ (3), Gen

以上“证明”中只使用了 x_1 这一个 Gen 变元。由于 x_1 不在 p 中自由出现，所以 x_1 不在 $p\to\forall x_1 q$ 中自由出现。因此根据演绎定理，不增加新的 Gen 变元就可得$\vdash (p\to\forall x_1 q)\to \forall x_1(p\to q)$。 证毕

P95: 2.1

2.1 设 x_i 不在 q 中自由出现。求证$\vdash (\exists x_i\, p\to q)\to \forall x_i (p\to q)$。

证明：以下是 K 中$\forall x_i (p\to q)$从$\{\exists x_i\, p\to q\}$的一个“证明”。

(1) $p\to\exists x_i\, p$ $\exists_1$规则 (书中关于$\exists_1$规则的证明里不用 Gen 规则)

(2) $\exists x_i\, p\to q$ 假定

(3) $p\to q$ (1), (2), HS

(4) $\forall x_i (p\to q)$ (3), Gen

以上“证明”中只使用了 x_i 这一个 Gen 变元。由于 x_i 不在 q 中自由出现，所以 x_i 不在$\exists x_i\, p\to q$ 中自由出现。因此根据演绎定理，不增加新的 Gen 变元就可得$\vdash (\exists x_i\, p\to q)\to \forall x_i (p\to q)$。 证毕

P100: 1.4

1.4 找出与$\exists x_1 R_1^2(x_1, x_2)\to(R_1^1(x_1)\to- \exists x_3 R_1^2(x_1, x_3))$等价的前束范式。

解：令 $q_1=\exists x_1 R_1^2(x_1, x_2)\to(R_1^1(x_1)\to- \exists x_3 R_1^2(x_1, x_3))$。由 q_1 出发，可得以下等价公式 q_2—q_6:

$q_2=\exists x_1 R_1^2(x_1, x_2)\to(R_1^1(x_1)\to\forall x_3 -R_1^2(x_1, x_3))$ （由命题 2.3）

$q_3=\exists x_1 R_1^2(x_1, x_2)\to\forall x_3 (R_1^1(x_1)\to-R_1^2(x_1,nm\ x_3))$ （由命题 2.2）

$q_4=\forall x_3 (\exists x_1 R_1^2(x_1, x_2)\to (R_1^1(x_1)\to-R_1^2(x_1, x_3)))$ （由命题 2.2）

$q_5=\forall x_3 (\exists x_4 R_1^2(x_4, x_2)\to (R_1^1(x_1)\to-R_1^2(x_1, x_3)))$ （由命题 2.1）

$q_6=\forall x_3\forall x_4 (R_1^2(x_4, x_2)\to (R_1^1(x_1)\to-R_1^2(x_1, x_3)))$ （由命题 2.2）

q_6 即为所求。

P165: 2

1.1 证明 K_N 中的同一公式不能用来表示两个不同的关系。
证明：假设存在着含有 k 个自由变元的公式 $p(x_1,\ldots,x_k)$，它可以表示两个不同的 N 上的 k 元关系 R_1 与 R_2。又假设$|R_1| \geq |R_2|$。
所以必然存在 $n_1,\ldots,n_k \in N$，使得
(1) $(n_1,\ldots,n_k) \in R_1$，且
(2) $(n_1,\ldots,n_k) \notin R_2$。
由于 R_1 与 R_2 用公式 $p(x_1,\ldots,x_k)$在 K_N 中可表示，所以根据(1)和(2)可得：

(3) $\mathrm{N} \vdash p(\underline{n_1},\ldots,\underline{n_k})$，且

(4) $\mathrm{N} \vdash -p(\underline{n_1},\ldots,\underline{n_k})$。

(3)和(4)的同时成立与 N 的无矛盾性相矛盾。所以不存在这样的公式。

证毕

P170: 4

4 二元关系“〉”可以用 K_N 中的什么公式表示？
答：可以用公式来$\forall x_3 - (x_3 + x_1 \approx x_2)$表示。

P117: 1.1、3.4

1.1 证明$\models \exists x_1\forall x_2R_1^2(x_1,x_2)\to\forall x_2\exists x_1R_1^2(x_1,x_2)$
证明：取任意一个 K 的解释域 M，以及任意一个项解释$\varphi\in\Phi_M$。记 $p=\exists x_1\forall x_2R_1^2(x_1,x_2)\to\forall x_2\exists x_1R_1^2(x_1,x_2)$、$p'=\exists x_1\forall x_2R_1^2(x_1,x_2)$、$p''=\forall x_2\exists x_1R_1^2(x_1,x_2)$。

(1) 若$|p'|(\varphi)=0$，则$|p|(\varphi)=|p'|(\varphi)\to|p''|(\varphi)=0\to|p''|(\varphi)=1$。
(2) 若$|p'|(\varphi)=1$，则存在φ的 x_1 变通φ'使得$|\forall x_2R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi')=1$。因此对$\varphi'$的任意 x_2 变通φ_2有$|R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi_2)=1$。
(3) 设$|p'|(\varphi)=1$。取φ的任意一个 x_2 变通φ''，作φ''的 x_1 变通φ_1使$\varphi_1(x_1)=\varphi'(x_1)$。此时$\varphi_1$是$\varphi'$的一个 x_2 变通。根据(2)有$|R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi_1)=1$。而$\varphi_1$是$\varphi''$的一个 x_1 变通，因此有$|\exists x_1R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi'')=1$。又由于$\varphi''$是$\varphi$的任意一个 x_2 变通，因此有$|p''|(\varphi)=1$。所以$|p|(\varphi)=|p'|(\varphi)\to|p''|(\varphi)=1\to1=1$。

由(1)和(3)可知，对任意的解释域 M 以及任意的项解释$\varphi\in\Phi_M$，总有$|p|(\varphi)=1$。所以有$\models p$。　　　　　　　　　证毕

3.4 证明$\forall x_1R_1^2(x_1,x_1)\to\exists x_2\forall x_1R_1^2(x_1,x_2)$不是有效式
证明：取 K 的一个解释域 M=N，且 R_1^2 解释为≤。则有$|\forall x_1R_1^2(x_1,x_1)|_M=1$ 且$|\exists x_2\forall x_1R_1^2(x_1,x_2)|_M=0$。因此$|\forall x_1R_1^2(x_1,x_1)\to\exists x_2\forall x_1R_1^2(x_1,x_2)|_M=1\to0=0$。所以$\forall x_1R_1^2(x_1,x_1)\to\exists x_2\forall x_1R_1^2(x_1,x_2)$不是有效式。　　　　　证毕

额外习题

任给一个 K 的解释域 M，求证以下命题：
1. $|p|_M=1\Leftrightarrow|\forall x\ p|_M=1\Leftrightarrow|\forall p|_M=1$；
2. 若$|p|_M=1$ 且$|p\to q|_M=1$，则$|q|_M=1$；
3. 若$\Gamma\subseteq\Gamma'$且$\Gamma\models p$，则$\Gamma'\models p$。

证明：1. (课本上有具体证明，在此略)
　　　2. (课本上有具体证明，在此略)
　　　3. 任取一个Γ'的模型 M。由于$\Gamma\subseteq\Gamma'$，所以 M 是Γ的一个模型。又由于$\Gamma\models p$，所以有$|p|_M=1$。因此（由 M 的任意性可得）$\Gamma'\models p$。　　　　证毕

求证对 $K^+(Y)$中所有闭式 q 有$\Gamma^*\vdash_{K^+}q\Leftrightarrow|q|_M=1$（其中 $K^+(Y)$、Γ^*和 M 的定义间书中“K 的可靠性”一节）。
证明：（具体证明可参考课本，在此略）