密 封 线 内 不 要 答 题

中国科学技术大学数学科学学院

2016 ～ 2017学年 第 1 学期期末考试试卷

■A卷　　　□B卷

课程名称 ＿＿＿计算方法(B)＿＿＿　课程编号 ＿＿＿001511＿＿＿

考试时间 ＿＿＿2017年1月12日＿＿＿　考试形式 ＿＿＿闭卷＿＿＿

姓 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿　学 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　学 院 ＿＿＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	总计
得分								
评卷人								

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
2. 本试卷共 7 道试题， 满分 100 分，考试时间 120 分钟。
3. 计算结果保留4位小数。

一、 (30分)填空

(1) (9分) 用规范的幂法求矩阵A的特征值。若A的按模最大特征值只有一个，则序列表现为

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

若A的按模最大特征值是互为反号的两个实数，则序列表现为

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) (6分) 解非线性方程$f(x)=0$的Newton迭代格式为＿＿＿＿＿＿＿＿

若已知方程的根是3重根，则格式应该改为＿＿＿＿＿＿＿＿，

才能保证格式具有2阶收敛速度。

(3) (3分) 6个点的数值积分公式至多可以到＿＿＿＿阶代数精度。

(4) (6分) 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$，则$\|A\|_1=$＿＿＿＿，$\|A\|_\infty=$＿＿＿＿

(5) (6分) 已知$f(1)=0.12, f(2)=0.25, f(3)=0.20$，则用Simpson公式得到的函数$f(x)$在$[1,3]$上的数值积分为＿＿＿＿，差商$f[1,2,3]=$＿＿＿＿

二、（10分）用Courant分解求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -12 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -54 \end{cases}$$

提示：$A = LU$，其中U为单位上三角阵，L为下三角阵，称为A的Courant分解。

三、（12分）按下列数据，用最小二乘法做出$f(x) = a + bx^2$形式的拟合函数。

x_i	-1	0	0.5	2	2.5
y_i	0.60	0.71	0.75	0.8	1.0

四、（12分）确定下面求积分公式中的待定参数A, 使其代数精度尽可能高，写出公式并指出该求积公式所具有的代数精度：

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(0)+f(h)) + Ah^2(f'(0)-f'(h))$$

五、（12分）给定线性方程组$Ax=b$，其中 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$， $b=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$。若使用迭代公式

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha(b-Ax^{(k)}),\alpha\in\mathbb{R}$$

求解方程。

1. 写出迭代公式的迭代矩阵；
2. 求出α的取值范围，使得迭代收敛，并指出α取何值时迭代收敛速度最快。

六、（12分）函数$f(x)$足够光滑，以点$2.0, 4.0, 6.0, 8.0$为节点构造的Lagrange插值多项式为$l_1(x)$；以$4.0, 6.0, 8.0, 10.0$为插值节点的插值多项式为$l_2(x)$，若$l_1(7.0) = 0.325$，$l_2(7.0) = 0.315$，

1. 用事后估计方法，估计$l_1(7.0)$处的误差；
2. $l(x)$是以$2.0, 4.0, 6.0, 8.0, 10.0$为节点的插值多项式，试计算$l(7.0)$的值。给出计算公式，并证明。

七、（12分）对常微分方程$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = b \end{cases}$， 在等距节点下构造如下的线性多步格式

$$y_{n+1} + (\alpha - 1)y_n - \alpha y_{n-1} = \frac{h}{4}[(\alpha+3)f_{n+1} + (3\alpha+1)f_{n-1}]$$

假定节点间距为h

1. 证明$\alpha \neq -1$时格式是二阶精度的（即格式的局部截断误差为$O(h^3)$），当$\alpha = -1$时格式是三阶精度的。
2. 当$\alpha = -1$时，说明格式是几步几阶显式还是隐式格式。

答案

1. 序列会收敛到一个向量（当特征值>0），或奇、偶序列收敛到互为反号的两个向量（特征值<0）（6分）

   奇、偶序列会收敛到两个向量，这两个向量不是互为反号的（3分）

2. $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ （3分）

   $x_{k+1} = x_k - 3\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ （3分）

3. 11（3分）

4. 16（3分），14（3分）

5. 0.22（3分），-0.09（3分）

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -13 & 0 \\ 3 & -19 & \frac{48}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Ly = b,$

$$y = \begin{pmatrix} 13 \\ \frac{51}{13} \\ \frac{97}{4} \end{pmatrix}$$

$Ux = y$

$$x = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 5.0 & 11.5 \\ 11.5 & 56.125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.86 \\ 10.2375 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6666 \\ 0.045813 \end{pmatrix}$$

4.

$$\int_0^h 1dx = h = \frac{h}{2}(1+1) + Ah^2(0-0)$$
$$\int_0^h xdx = \frac{h^2}{2} = \frac{h}{2}(0+h) + Ah^2(1-1)$$
$$\int_0^h x^2dx = \frac{h^3}{3} = \frac{h}{2}(0+h^2) + Ah^2(0-2h)$$

则$A = \dfrac{h}{12}$ （8分）

又

$\int_0^h x^3dx = \dfrac{h^4}{4} = \dfrac{h}{2}(0+h^3) + \dfrac{h}{12}h^2(0-3h^2)$

$\int_0^h x^4dx = \dfrac{h^5}{5} \neq \dfrac{h}{2}(0+h^4) + \dfrac{h}{12}h^2(0-4h^3) = \dfrac{h^5}{6}$

所以代数精度为3（4分）

5. 1). 迭代矩阵

$$I - \alpha A = \begin{pmatrix} 1-3\alpha & -2\alpha \\ -\alpha & 1-2\alpha \end{pmatrix}$$

（6分）

2). 谱半径

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-1+3\alpha & 2\alpha \\ \alpha & \lambda-1+2\alpha \end{pmatrix} = (\lambda-1+4\alpha)(\lambda-1+\alpha)$$

谱半径为 $\min(|4\alpha-1|, |\alpha-1|)$（2分）

分析可得$0 < \alpha < \frac{1}{2}$（2分）

$\alpha = \frac{2}{5}$收敛最快（2分）

6. 1).

$$\frac{f(7.0)-l_1(7.0)}{f(7.0)-l_2(7.0)} \approx \frac{7.0-2.0}{7.0-10.0}$$

$$f(7.0) \approx \frac{5l_2(7.0)+3.0l_1(7.0)}{8.0} = 0.31875$$

$$f(7.0) - l_1(7.0) \approx 0.31875 - 0.325 = -0.00625$$

2).

$$=$$

7. 1).

2). 2阶Runge-Kutta格式（2分）