二型线面积分复习

一、二型曲线积分

要求掌握：

(1) 引入定义的实际例子;$\int_L \mathbf{V}\cdot\tau dl.\quad \tau dl=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)dl=(dx,dy,dz)$

$$\int_L \mathbf{V}\cdot\tau dl=\int_L Pdx+Qdy+Rdz.$$

(2) 二型曲线积分的计算方法:

$$\begin{cases}\text{1.基本方法:当曲线给出参数方程,化为定积分时,注意积分上下限,}\\ \text{及积分变量满足曲线的方程.}\\ \text{2.公式：}Green\text{公式;}Stokes\text{公式.在使用公式时一定要注意定理的条件.}\\ \text{3.积分与路径无关(求待定函数；重选路径计算二型曲线积分.)}\end{cases}$$

(3) 用二型曲线积分计算平面封闭曲线所围成区域的面积.

$$S=\int_L xdy=-\int_L ydx=\frac{1}{2}\int_L xdy-ydx, L\text{的方向为逆时针.}$$

....

1. (15)(7分) 设a,b,R为已知常数,且$R>0$,计算曲线积分$\oint_C(-ay)\mathrm{d}x+(bx)\mathrm{d}y$,其中积分曲线$C$是圆周$x^2+y^2=R^2$,沿逆时针方向.

2. (15)(8分) 计算曲线积分$\int_C(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$,其中曲线$C$是平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线,从$z$轴正向来看,$C$沿逆时针方向.

3. (14)(10分) 设函数$\varphi(x)$具有连续的导数, 在任意不绕原点且不过原点的简单光滑闭曲线L上, 曲线积分$\oint_L\frac{2xy\,dx+\varphi(x)\,dy}{x^4+y^2}=0$.

   (1) 求函数$\varphi(x)$;

   (2) 设C是围绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求$\oint_C\frac{2xy\,dx+\varphi(x)\,dy}{x^4+y^2}$.

4. (13)(8分) 设$f(x,y),g(x,y)$在单位圆盘$U=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$上有一阶连续偏导数,且$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$,证明在单位圆周上存在一点$(\xi,\eta)$,使得$f(\xi,\eta)\eta=g(\xi,\eta)\xi$.

5. (12)(8分)$\int_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$,其中$L$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$,和平面$x+y+z=0$的交线,$L$的方向与$z$轴正向成右手系.

解:解法一：用S表示L在平面$x+y+z=0$上围出的那块圆盘面。由L的定向，圆盘面的单位法向为平面的外法向，即$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. (4 分)

根据Stokes公式，我们有

$$\begin{aligned}&\int_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz\\ =&\iint\limits_{S+}\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}+\frac{-2}{\sqrt{3}}+\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)dS\\ =&\iint\limits_{S+}-2\sqrt{3}dS=-2\sqrt{3}\pi a^2.\end{aligned}\quad(4分)$$

解法二：本题也可以利用确定出交线的参数方程，直接进行计算。因方法较多，不再具体给出。

6. (12)(8分)设$\overline{D}$是简单光滑闭曲线围成的平面闭区域,设$u(x,y)$在$\overline{D}$内有二阶连续偏导数,且$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

证明(1) $\oint_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}ds=0$,其中$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$是$\overline{D}$内沿简单光滑闭曲线$L$上单位外法线方向上的方向导数.

(2) 若当$(x,y)\in\partial D$时,$u(x,y)=A$(A为常数),证明:$u(x,y)\equiv A,(x,y)\in D$.

7. (11)(10分) 1）证明曲线积分$\int_L (x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$与路径无关

2）求$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$

8. (11)(12分)设曲线L是以$(1,0)$为中心,R为半径的圆周($R>1$)，取逆时针方向,计算积分$\oint_L \frac{-ydx+xdy}{4x^2+y^2}$.

9. (11)(7分)设$\mathbf{V}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$在开区域$D$内处处连续可微,在$D$内任一圆周$L$上,有$\oint_L \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dl=0$,其中$\mathbf{n}$是圆周外法线单位向量,试证在$D$内恒有$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0$.

10. (10)(10分) 设函数 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的导数, 对任一围绕原点且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线 C^+, 曲线积分 $\int_{c^+}\dfrac{ydx+\varphi(x)dy}{x^2+4y^2}$ 的值相同.

(i) 设 C^+ 是一条不围绕原点且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线, 证明:$\int_{c^+}\dfrac{ydx+\varphi(x)dy}{x^2+4y^2}=0$.

(ii) 求函数 $\varphi(x)$.

(iii) 设 C^+ 是围绕原点且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线求 $\int_{c^+}\dfrac{ydx+\varphi(x)dy}{x^2+4y^2}$.

11. (09)(4分) 设L为圆周曲线$x^2+y^2=R^2(R>0)$取逆时针方向,则$\int_L\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=$______

12. (09)(4分) 设曲线积分$\int_L(f(x)-e^x)\sin ydx-f(x)\cos ydy$与路径无关,其中$f(x)$具有一阶连续导数,且$f(0)=0$,则$f(x)=$(　　)

(A) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-1$　(B) $1-\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　(C) $\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}$　(D) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

13. (08)(5分) $\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$与路径无关,其中$\varphi(x)$具有连续的一阶导数,且$\varphi(0)=0$,则$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy$的值为(　　)

(A) 0　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) 1

14. (08)(10分) 设L为抛物线$2x=\pi y^2$自$(0,0)$到$(\dfrac{\pi}{2},1)$的弧段,计算积分$I=\int_L(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$.

15. (07)(4分) 设D是由R^2中一条光滑的$Jordon$曲线L围成的区域,则D的面积(可有多项选择).

(A) $\int_L ydx$　(B) $\int_L xdy$　(C) $\iint\limits_D dxdy$　(D) $\dfrac{1}{2}\int_L xdy-ydx$.

16. (07)(8分) 设L为圆周$x^2+y^2=1$,按逆时针方向,求曲线积分$\int_L\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+2y^2}$.

17. (07)(7分) 已知$f(x)$是正值连续函数,曲线$L:(x-1)^2+(y-1)^2=1$取逆时针方向,证明$\int_L-\dfrac{y}{f(x)}dx+xf(y)dy\geqslant 2\pi$.

18. (06)(4分) $L:x^2+y^2=1$逆时针方向,则$\oint_L(3x^2y-y)dx+x^3dy=$.______

19. (05)(8分) 设L是R^3中圆周$\{x^2+y^2=a^2, z=\frac{a}{2}\}$,取逆时针方向(从$z$轴正向看),求$\int_L xdy+y^2dz+z^3dx$.

20. (04)(16分) 求曲线积分
(i) $\int_L \frac{-ydx+xdy}{4x^2+y^2}$,其中$L$为椭圆$4x^2+y^2=a^2(a>0)$,反时针方向.
(ii) $\int_L \frac{-ydx+xdy}{4x^2+y^2}$,其中$L$为$x^2+y^2=1$,反时针方向.

21. (03)(14分) 求$\int_L -3x^2ydx+(3xy^2+z^3)dy+3yz^2dz$,其中$L$是球面$x^2+y^2+z^2=1$与圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$的交线,从原点看去顺时针方向.

22. (02)(12分) 设曲线积分$\int_L \varphi'(y)\cos xdx-(\varphi(y)-y)\sin xdy=0$,其中$\varphi(y)$有连续二阶导数,$L$为平面上任意一条封闭曲线(i) 若$\varphi(0)=\varphi'(0)=1$,求$\varphi(y)$.(ii) L取抛物线$y=\frac{4}{\pi}x^2$上从$(0,0)$到$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$的一段,求上述曲线积分的值.

二、二型曲面积分

要求掌握:

(1) 引入定义的实际例子$\iint\limits_S \mathbf{v}.\mathbf{n}ds$, $\quad \mathbf{n}ds=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)dS=(dydz,dzdx,dxdy)$

$$\iint\limits_S \mathbf{v}.\mathbf{n}ds=\iint\limits_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

(2) 曲面的方程形式:参数式(向经式);隐函数方程$F(x,y,z)=0$,显示方程$z=f(x,y)$

(3) 二型曲面积分的计算方法:

$$\begin{cases} 1.\text{基本方法——化为二重积分:}\iint\limits_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds=\varepsilon\iint\limits_{D_{uv}}\begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}dudv,(\ \varepsilon=\pm1) \\ =\varepsilon\iint\limits_{D_{xy}}[-P(x,y,f(x,y))f'_x-Q(x,y,f(x,y))f'_y+R(x,y,f(x,y)]dxdy \\ 2.\text{公式}: Gauss\text{公式(注意定理的条件,加辅助曲面使用Gauss公式);} \\ 3.\text{注意对称性.} \end{cases}$$

....

1. (15)(7分) 计算曲面积分$\iint\limits_\Sigma x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中曲面$\Sigma$是由上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$以及$xoy$平面围成的立体的全表面的外侧.

2. (15)(8分) 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{\mathrm{x}\mathrm{d}\mathrm{y}\mathrm{d}\mathrm{z} + \mathrm{y}\mathrm{d}\mathrm{z}\mathrm{d}\mathrm{x} + \mathrm{z}\mathrm{d}\mathrm{x}\mathrm{d}\mathrm{y}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中$\Sigma$是曲面$2x^2+2y^2+z^2=4$的外侧.

3. (14) (10分) $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3+z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$ 是上半球面$x^2+y^2+z^2=1$ $(z \geqslant 0)$, 法线方向朝上.

4. (13)(12分) 计算曲面积分$\iint\limits_{S^+} 2x^3dydz + 2y^3dzdx + 3(z^2-1)dxdy$,其中$S^+$为曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0 \le z \le 1)$的下侧.

5. (12)(10分)计算曲面积分$\iint\limits_{S^+}(x+y)dydz + (y+z)dzdx + (z+1)dxdy$, 其中$S^+$为上半球面$x^2+y^2+z^2=R^2(z \geqslant 0, R>0)$的上侧.

6. (11)(4分)设曲面S为上半球面$x^2+y^2+z^2=1$ $(z \geqslant 0)$的上侧,则下列积分为零的是(　　).

   (A) $\iint\limits_{S} xdydz$;　　(B) $\iint\limits_{S} ydzdx$;　　(C) $\iint\limits_{S} zdxdy$;　　(D) $\iint\limits_{S} zdzdx$.

7. (11)(12分) 设S为上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的下侧,求

$$I=\iint\limits_{S} \frac{x^3dydz + y^3dzdx + (z^3+z^2)dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

8. (10)(10分) 计算第二型的曲面积分$\iint\limits_{S^+} \dfrac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中$S^+$是光滑闭曲面的外侧,并且原点不在曲面$S^+$上.

9. (09)(4分) 设S为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$, S^+为该球面的外侧,则下列式子正确的是(　　)

   (A) $\iint\limits_{S} x^2dS=0, \iint\limits_{S^+} x^2dydz=0$　　(B) $\iint\limits_{S} xdS=0, \iint\limits_{S^+} xdydz=0$

   (C) $\iint\limits_{S} xdS=0, \iint\limits_{S^+} x^2dydz=0$　　(D) $\iint\limits_{S} xydS=0, \iint\limits_{S^+} ydzdx=0$

10. (09)(10分) 设向量场$\overrightarrow{v}(x,y,z)=(yz,zx,2)$,计算$\iint\limits_{\sum^+} \overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}(x,y,z)dS$, 其中$\sum^+$是上半球面$x^2+y^2+z^2=1, (z \geqslant 0)$的上侧,$\overrightarrow{n}$是其上的朝上的单位法向量.

11. (08)(5分) 设S为曲面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧,则曲面积分$\iint\limits_S zdxdy$为(　　)

(A) 0　　(B) $\dfrac{4\pi}{3}$　　(C) 2π　　(D) 4π

12. (08)(10分) 计算向经$\mathbf{r}=(x,y,z)$穿过圆锥曲面$z=1-\sqrt{x^2+y^2}(0<z<1)$侧面的流量.

13. (07)(8分) 计算曲面积分$\iint\limits_S (2x+z)dydz+zdxdy$,其中$S$为有向曲面$z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$,其法向量与$z$轴正向夹角为锐角.

14. (06)(8分) 计算曲面积分$\iint\limits_S (x^3+y^3)dydz+(y^3+z^3)dzdx+(z^3+x^3)dxdy$,其中$S: x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$上侧.

15. (05)(10分) 设V是由半球面$x^2+y^2+z^2=a^2(z>0)$与xy平面围成的区域,S是V的表面,取外侧法向量,求积分$\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$.

16. (03)(14分) 设$f(u)$有连续的导数,S是$x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$的外侧表面,求$I=\iint\limits_S x^3dydz+(y^3+yf(yz))dzdx+(z^3-zf(yz))dxdy$.

17. (02)(12分) 求$\iint\limits_S xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$,其中$S$是曲面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的下侧.

三、势函数、全微分方程

要求掌握:

(1) 求势函数的方法:

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,y,z) &= \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz \\
&= \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz
\end{aligned}
$$

(2) 已知全微分方程求待定的参数:由$rot\,\overrightarrow{v}=0$,建立关于参变量的方程.特:$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$是全微分方程,则$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

……………………………………………………………………

1. (15)(10分) 已知向量场$\vec{v} = (x^2-2yz, y^2-2xz, z^2-2xy), (x,y,z \in \mathbf{R}^3)$,证明$\vec{v}$是有势场,并求全体势函数.

2. (13)(10分) 设$f(x), g(x)$在$(-\infty, +\infty)$上有连续的导函数,$f(0) = g(0) = 1$,且第二型曲线积分$\int_{L_{AB}} yf(x)dx+(f(x)+zg(y))dy+g(y)dz$与路径无关,只与起点$A$和终点$B$有关,求向量场$(yf(x), f(x)+zg(y), g(y))$的势函数.

3. (13)(4分) 设$\mathbf{v}$是区域V中的连续向量场,$\mathbf{v}$在V中的第二型曲线积分与路径无关,则( )

   (A) $\mathbf{v}$是区域V中的无旋场　　(B) $\mathbf{v}$在区域V中不一定是无旋场

   (C) $\mathbf{v}$在区域V中不一定是保守场　　(D) $\mathbf{v}$在区域V中不一定是有势场

4. (12)(10分)设$f(z)$是$(-\infty, +\infty)$的可微函数,$f(0) = 0$, 且向量场$\vec{V} = (2xz, 2yf(z), x^2+2y^2z-1)$是整个空间区域上的保守场,求向量场$\vec{V}$的一个势函数.

5. (10)(10分) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的可微函数,$f(0) = 1$, 且向量场 $\mathbf{F} = (yf(x), f(x)+ze^y, e^y)$ 是整个空间区域上的保守场, 求向量场 $\mathbf{F}$ 的势函数.

6. (09)(4分) 下列结论中错误的是(　　)

   (A) 保守场必是有势场　　(B) 有势场必是保守场

   (C) 保守场必是无旋场　　(D) 无旋场必是保守场.

7. (09)(10分) 设$\mathbf{F} = (1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}, \frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}, -\frac{xy}{z^2})(y>0, z>0)$是否是有势场, 若回答是有势场,请说明你的理由,并求它的一个势函数,若回答不是有势场,请证明之.

8. (07)(4分) 已知$(x^2+2xy-ay^2)dx+(bx^2+2xy-y^2)dy = 0$是全微分方程,则(　　)

   (A) $a=-1, b=1$　　(B) $a=b=1$　　(C) $a=1, b=-1$　　(D) $a=b=-1$

9. (07)(8分) 证明向量场$\mathbf{F} = yz(2x+y+z)\mathbf{i}+zx(x+2y+z)\mathbf{j}+xy(x+y+2z)\mathbf{k}$是有势场,并求势函数.

10. (06)(4分) $(x+ay)dx+(y+bz)dy+(z+cx)dz$是全微分形式,则(　　)

    (A) $(a,b,c) = (1,1,1)$　　(B) $(a,b,c) = (0,0,0)$

    (C) $(a,b,c) = (1,0,1)$　　(D) $(a,b,c) = (0,1,1)$

11. (05)(10分) 设$\mathbf{r} = (x,y,z)$是R^3的位置向量,$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \alpha \in R$,问定义在$R^2-\{原点\}$上的向量场$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{r}}{r^\alpha} = \frac{1}{r^\alpha}(x,y,z)$是否是有势场,若是,求$\mathbf{V}$的一个势函数.

四、方向导数、梯度、散度、旋度

要求掌握：

(1) 方向导数、梯度是研究数量场$u = f(x,y,z)$的结果,在一点处沿某一方向的方向导数是确定的数值,梯度是确定的一个向量.

$$gradf = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}), \qquad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}^\circ} = gradu \cdot \mathbf{l}^\circ$$

(2) 散度、旋度是研究向量场$\mathbf{v} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$的结果,

$$div\mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \qquad rot\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

(3) 运算公式:

1° $gradf(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1gradu_1 + c_2gradu_2$;

2° $gradu_1u_2 = u_1gradu_1 + u_2gradu_1$;

3° $gradf(u) = f'(u)gradu$;

4° $div(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1div\mathbf{v}_1 + c_2div\mathbf{v_2}$;

5° $div(u\mathbf{v}) = udiv\mathbf{v} + gradu \cdot \mathbf{v}$;

6° $rot(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1rot\mathbf{v}_1 + c_2rot\mathbf{v_2}$;

7° $rot(u\mathbf{v}) = urot\mathbf{v} + gradu \times \mathbf{v}$;

....

1. (11)(9分) 设三元函数$u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$,点$M(1,1,1)$和方向$\mathbf{n} = (-3,0,4)$，则$\mathrm{grad}\, u\big|_M =$ ________________, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\big|_M =$ ________________, $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, u)\big|_M =$ ___________.

2. (10)(5分) 设$u = e^{xyz}$,求$div(gradu)$.

3. (09)(4分) 设$u = 3x^2 + xy - y^2$在点$M(1,-1)$沿方向$\overrightarrow{l} = (-3,4)$的方向导数是______.

4. (08)(4分) 置于原点的单位点电荷产生的电位场是$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{r}$,这里$r$是点$(x,y,z)$到原点的距离, 则$\varphi$的梯度在$(2,0,0)$处的值$grad\varphi(2,0,0) =$______.

5. (08)(4分) 设向量场$\mathbf{E}(x,y,z)=\dfrac{\mathbf{r}}{r}$,其中$\mathbf{r}(x,y,z), r=|\mathbf{r}|$, 则$\mathbf{E}$的散度在$(1,0,0)$处的值$div\mathbf{E}(1,0,0)=$______.

6. (08)(4分) 设$\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$是常向量,$\mathbf{r}=(x,y,z)$, 则$\omega\times\mathbf{r}$的旋度$rot(\omega\times\mathbf{r})=$______.

7. (06)(4分) 设$u=e^{x^2+y^2+z^2}, M(1,1,1)$,则$gradu|_M=$______.

8. (05)(5分) 求函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在点$P(1,1,1)$沿方向$(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})$的方向导数.