多元函数微分学复习

要求掌握：

(1) 多元函数的连续，偏导存在，可微之间的关系.

(2) 熟练掌握复合函数，隐函数，向量值函数的微分法，一阶全微分形式不变性.

(3) 掌握非条件极值和条件极值的求法。

(4) 掌握空间曲线的切线和法平面方程求法，空间曲面的切平面和法线的方程求法。

一、多元函数的连续、偏导存在性、可微

1. (14)(4分) 二元函数$f(x,y)$在$O(0,0)$处可微的一个充分条件是(　　).

   (A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

   (B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

   (C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

   (D) $\lim\limits_{x\to 0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$且$\lim\limits_{y\to 0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$.

2. (14)(8分) 设函数$f(x,y)=\varphi(|xy|)$,其中函数$\varphi(0)=0$,在$u=0$的某邻域满足

   $|\varphi(u)|\le u^2$. 证明$f(x,y)$在$(0,0)$点可微.

3. (13)(4分) 设二元函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 则$f(x,y)$在原点处(　　)

   (A) 偏导数不存在　　　　(B) 偏导数存在但不可微

   (C) 可微但偏导数不连续　　　　(D) 偏导数连续

4. (12)(4分) 下列4个选项中,**不正确的**是(　　).

   (A) 函数$f(x,y)$在区域D中可微的必要条件是$f(x,y)$在D中连续.

   (B) 函数$f(x,y)$在区域D中可微的充分条件是它的两个一阶偏导在D中连续.

(C) 函数$f(x,y)$在区域D中可微的充分条件是$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\triangle z-f'_x(M_0)\triangle x-f'_y(M_0)\triangle y}{\rho}=0$,其中$\triangle z=f(x_0+\triangle x,y_0+\triangle y)-f(x_0,y_0),\rho=\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}$.

(D) 函数$f(x,y)$在区域D中可微的必要条件是它在D中两个一阶偏导存在且连续.

5. (11)(4分) 下列二元函数在原点连续的有(　　)个。

i) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x-y}, & x\neq y \\ 0, & x=y \end{cases}$　ii) $\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$　iii) $\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(A) 0;　(B) 1;　(C) 2;　(D) 3

6. (11)(12分) 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} (a\sqrt{|x|}+x^2+y^2+b)\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

(1) 当a,b取何值时,函数$f(x,y)$在原点连续?

(2) 当a,b取何值时,函数$f(x,y)$在原点可微?

二、多元函数的偏微商

1. (15)(4分) 设由方程$\displaystyle\int_{y^2}^{x}e^t\,dt-\int_1^{\frac{1}{z}}\frac{1}{t}\,dt=0$ 确定的隐函数$z=z(x,y)$ 的全微分$dz=$____________________.

2. (15)(15分) 证明: 方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$ 在变换$u=\dfrac{x+y}{2}$, $v=\dfrac{x-y}{2}$, $w=ze^y$ 下化为函数$w=w(u,v)$ 的方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=2w,$$

其中函数$z(x,y)$, $w(u,v)$ 都具有二阶连续偏导数.

3. (15)(4分) 设$z=f(\dfrac{x}{g(y)},y)$,其中可微函数$g(y)\neq 0$, 则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____________.

4. (14)(4分)设$f(x,y)$有连续的偏导数,且$f(x,x^2)=x^2e^{-x}$,$f'_x(x,x^2)=-x^2e^{-x}$,若$x\neq 0$,则$f'_y(x,x^2)$等于(　　)

(A) $2xe^{-x}$　(B) $(-x^2+2x)e^{-x}$　(C) e^{-x}　(D) $(2x-1)e^{-x}$

5. (14)(8分) 设$z=f(t,x), t=\varphi(x+y)$, 其中φ, f分别有连续的二阶导数和二阶偏导数, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

6. (14)(8分)设$z=f(u), u=\varphi(u)+\int_{x-y}^{x+y}P(t)dt$,其中$f(u)$可微,$\varphi'(u)$连续,且
$\varphi'(u)\neq 1, P(t)$连续,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

7. (13)(8分)设函数$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$ 求出$f(x,y)$在原点$O(0,0)$处的所有的二阶导数.

8. (13)(8分) 设f为可微函数，$u=f(x^2+y^2+z^2)$，函数$z=z(x,y)$为由方程$3x+2y^2+z^3=6xyz$在$P_0(1,1,1)$附近确定的隐函数，试求$\dfrac{\partial u}{\partial x}|_{P_0}$.

9. (12)(8分) 设函数$w=f(x+y+z,xyz)$具有二阶连续偏导数,求$\dfrac{\partial w}{\partial x}$及$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

10. (12)(8分) 设函数$z=f(x,y)$由方程$x^2+y^2+z^2-4z=0$所确定,求微分dz以及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

11. (12)(8分) 设函数$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$,其中函数$\varphi$具有二阶导数,函数$\psi$具有一阶导数,证明$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

12. (12)(8分) 若函数$u=f(x,y,z)$在凸的开区域Ω内可微(开区域Ω中任意两点的连线在Ω中),并且存在正数$M>0$,使$\sqrt{f_x'^2+f_y'^2+f_z'^2}\leq M$, 证明对$\Omega$ 中任意两点A,B 都有$|f(A)-f(B)|\leq M\cdot\rho(A,B)$,其中$\rho(A,B)$是$A,B$两点间距离.

13. (11)(8分) 设$u=f(x,y,z)$有连续的一阶偏导数，又函数$y=y(x)$和$z=z(x)$分别由下列两式确定:$e^{xy}-xy=2,\ e^x=\displaystyle\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$,求$\dfrac{du}{dt}$.

14. (11)(8分) 设函数$u=xye^{x+y}$,求$\dfrac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}$,其中$p,q$为正数.

三、多元函数的极值

1. (15)(15 分)；第(1)小题5分; 第(2)小题10分)

已知可微函数$z=f(x,y)$ 的全微分$z=2x\ x-\varphi(y)\ y$, 且$f(1,y)=3-y^2$.
(1) 求$f(x,y)$ 及$\varphi(y)$ 的表达式;

(2) 求$z=f(x,y)$ 在闭区域$D=\{(x,y)|\ x^2+\dfrac{1}{4}y^2\leqslant 1\}$ 上的最大、最小值, 并说明函数在区域D 内的极值情况.

2. (15)(4分) 设$f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$,则其极值点为____________.

3. (14)(8分) 设$z=z(x,y)$是由方程$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$所确定的函数,求$z=z(x,y)$的极值点与极值.

4. (13)(12分) 在三维空间中给定n个点$M_i(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,2,\cdots,n$,在单位球面S : $x^2+y^2+z^2=1$上求一点P,使得P到$M_i(i=1,2,\cdots n)$的距离平方和最小。

5. (12)(4分) 下列4个选项中,**正确的**是(　　).

   (A) 可微函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$有极值的必要条件是M_0为$f(x,y)$的一个驻点.

   (B) 函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处有极值的充分条件是M_0为$f(x,y)$的一个驻点.

   (C) 函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处有极值的充要条件是M_0为$f(x,y)$的一个驻点.

   (D) 具有二阶连续偏导的函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处有极小值的充分条件是M_0为$f(x,y)$的一个驻点,且$A=f''_{xx}(M_0)>0,\ AC-B^2\geq 0$,其中$B=f''_{xy}(M_0),\ C=f''_{yy}(M_0)$.

6. (12)(8分) 求函数$z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$的所有极值.

7. (12)(8分) 抛物面$z=x^2+y^2$被平面$x+y+z=1$截成一椭圆,求原点到这椭圆的最长与最短距离.

8. (11)(12分) 求函数$z=(2x+3y-6)^2$在椭圆$x^2+4y^2\leq 4$中的最大值和最小值.

四、空间曲线的切向量，法平面、空间曲面的切平面，法线

1. (15)(4分) $z=4-x^2-y^2$上点P处的切平面平行于$2x+2y+z-1=0$,则P点的坐标是____________.

2. (15)(4分) 设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$附件有定义,且$f'_x(0,0)=2, f'_y(0,0)=3$,则曲线$\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0, \end{cases}$ 在点$(0,0,f(0,0))$处的切线方程是____________.

3. (14)(8分) 设函数$f(x,y,z)$有一阶连续偏导，$P_0(x_0,y_0,z_0)$是$f(x,y,z)$在空间光滑曲线$\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 上的极值点, $(f'_x,f'_y,f'_z)|_{P_0}\neq\overrightarrow{0}$, $\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)\neq\overrightarrow{0}$,证明:等值面$f(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)$与曲线$\Gamma$在$P_0$相切.

4. (13)(8分)求曲线$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}$ 在点$M(0,-1,0)$处的切线方程和法平面方程.

5. (13)(10分) 求常数λ的值，使得曲面$xyz=\lambda$与椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$在第一卦限内相切，并求出切点处两曲面的公共切平面.

6. (13)(4分) 在曲线$\Gamma: x=t, y=-t^3, z=t^3$的所有切线中，与平面$x+2y+z=4$平行的切线(　　)

(A) 只有1条　　(B) 只有2条　　(C) 至少有3条　　(D) 不存在.

7. (12)(4分) 下列4个选项中,**不正确的**是(　　).

(A) 可微二元函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处的偏导数$f'_x(x_0,y_0)$的几何意义是空间曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 在点(x_0,y_0,z_0)处的切线对x轴的斜率.

(B) 函数$F(x,y,z)$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处可微,且$F(x_0,y_0,z_0)=0$,则非零向量$\mathbf{n}=(F'_x(M_0),F'_y(M_0),F'_z(M_0))$ 是空间曲面$F(x,y,z)=0$在点M_0处的切平面的法向量.

(C) 可微函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处的微分$dz=f'_x(M_0)\triangle x+f'_y(M_0)\triangle y$的几何意义是曲面$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0,z_0)$处的切平面关于$z$值的增量.

(D) 球面$x^2+y^2+z^2=14$上,点$M_0(1,2,3)$处的纬线Γ在该点处的切线方程是: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{0}$.

8. (12)(4分) 设函数$f(u,v)$可微,证明曲面$f\left(\dfrac{y-b}{x-a},\dfrac{z-c}{x-a}\right)=0$的所有切平面都通过同一个定点.

9. (11)(4分) 设二元函数$f(x,y)$在$(0,0)$附近有定义，且$f'_x(0,0)=3, f'_y(0,0)=1$,则下列结论**正确**的有(　　)个。

　i) $\mathrm{d}f|_{(0,0)}=3dx+dy$;

　ii) 曲面$z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$处的法向量为$(3,1,1)$；

　iii) 曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点$(0,0,f(0,0))$处的切向量为$(1,0,3)$.

　(A) 0;　　(B) 1;　　(C) 2;　　(D) 3

10. (11)(4分) 曲面$z-e^z+2xy=3$在点$(1,2,0)$处的切平面方程为___________.

11. (11)(4分) 设曲线$C: x=t, y=t^2, z=t^3$在第一卦限中点P处的切线平行于平面$3x+4y-z=4$,则P的坐标为____________.