重积分、一型线面积分复习

一、二重积分

要求掌握：

(1) 直角坐标系下的累次积分;

(2) 累次积分的顺序的交换;

(3) 极坐标变换.

(4) 注意积分区域的对称性及被积函数关于某积分变量的奇偶性.

....

1. (15)(4分) 交换累次积分的顺序$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx =$ ________________________________.

2. (15)(10分) 计算二重积分$\iint\limits_D (\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2)\ xy$, 其中区域$D$： $x^2+y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$.

3. (15)(8分)已知函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$f(1,y) = 0,\ \ f(x,1) = 0$, $\iint\limits_D f(x,y)\ \sigma = a$, 其中区域$D = \{(x,y)|\ 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, 计算二重积分

4. (14)(3分) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x =$ ___________.

5. (14)(8分) 计算二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} \left(3x^2+5y^2\right) dxdy$.

6. (13)(6分) 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,且满足$f(x) = 1+\alpha \int_x^1 f(y)f(y-x)dy$,证明：$\alpha \leq \frac{1}{2}$.

7. (13) (10分)计算二重积分$\iint\limits_D xydxdy$,其中积分区域D是第一象限中由x轴和上半圆周$x^2+y^2-2x=0$所围成.

8. (12)(5分)计算$\int_0^1 dx \int_x^1 e^{y^2} dy$.

解:

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2}dy &= \int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx\\ &= \int_0^1 ye^{y^2}dy = \frac{e-1}{2}.\end{aligned}$$

9. (11)(4分) 设$I_1 = \iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma, I_2 = \iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma, I_3 = \iint\limits_{D_3} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma$, 其中

$D_1: x^2+y^2 \leqslant R^2; D_2: x^2+y^2 \leqslant 2R^2; D_3: |x| \leqslant R$且$|y| \leqslant R$,则有(　　)

(A) $I_1 < I_2 < I_3$;　　(B) $I_1 < I_3 < I_2$;　　(C) $I_2 < I_1 < I_3$;　　(D) $I_3 < I_2 < I_1$.

10. (11)(4分) 设区域$D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant 2x, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$,则$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy =$ ______________.

11. (11)(10分) 设$F(t) = \int_1^t dy\int_y^t e^{-x^2}dx\ (t > 1)$,求$F'(2)$.

12. (10)(10分) 含参变量积分$I(x) = \int_x^1 e^{y^2}dy$,求$\int_0^1 I(x)dx$.

13. (09)(4分) 改变累次积分次序$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^2 dx\int_0^{1-\sqrt{1-(x-2)^2}} f(x,y)dy =$____.

14. (09)(4分) 设$f(x,y)$为连续函数,则$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$　(　　)

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

15. (09)(10分) 计算二重积分$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$,其中$D$为双纽线$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$　$(a > 0)$所围的区域.

16. (07)(7分) 设函数$f(x,y)$在区域$D: x^2+y^2 \leqslant 1$上有二阶连续偏导数,且$f''_{xx} + f''_{yy} = e^{-(x^2+y^2)}$, 求证$\iint\limits_D (xf'_x + yf'_y)dxdy = \frac{\pi}{2e}$.

17. (06)(8分) (1)设$f(r,\theta)=0$,确定r是θ在$[\alpha,\beta]$上的正值可微函数,平面区域D在极坐标下由$\theta=\alpha,\theta=\beta,f(r,\theta)=0,f(2r,\theta)=0$, 围成,求证

$$\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{x^2+y^2}=(\beta-\alpha)\ln 2$$

.

(2) 求$\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{xy(\ln^2 x+\ln^2 y)}$,其中$D$由$x^2+y^2=1$和$x+y=1$围成$(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$.

18. (05)(8分) 设平面区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant y\}$,求$\iint\limits_{D}\sqrt{y}dxdy$.

19. (04)(8分) 求$\iint\limits_{D}x^2e^{xy}dxdy$,$D$由$x=2,y=1$和$xy=1$围成.

20. (03)(10分) 设$f(u)$在$[0,\infty)$连续,$t>0$时,记$F(t)=\iint\limits_{[0,t]^2}f(xy)dxdy$,求证:当$t>0$时,$F'(t)=\frac{2}{t}\int_0^{t^2}f(s)ds$.

21. (02)(9分) 求$\int_1^2 ydy\int_y^2\frac{\sin x}{x^2-1}dx$.

练习题

1. 设$D=\{(x,y)|y\le x\le\sqrt{y},0\le y\le 1\}$,计算$\iint\limits_{D}e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}\sigma$.

2. 计算$\int_{1/4}^{1/2}dy\int_{1/2}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{1/2}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx$.

二、三重积分

要求掌握:

(1) 直角坐标系下的累次积分;

(2) 球坐标、柱坐标变换.

(3) 注意积分区域的对称性及被积函数关于某积分变量的奇偶性.

……………………………………………………………………………………………

1. (15)(10分) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z(x^2+y^2+y)\ V$, 其中$\Omega$ 由$z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$ 和$1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$ 确定.

2. (14)(3分) 设Ω : $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$, $(z \leqslant 0)$ 则 $\Delta \iiint\limits_{\Omega} 2x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ __________.

3. (13)(10分) 计算三重积分$\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)dxdydz$,其中积分区域$V$是由曲面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$与平面$z=8$所围成.

4. (12)(6分)$\iiint\limits_{V}(x+y+z)dxdydz$,其中$V$是由平面$z=0$和椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的上半部分围成的区域,$a,b,c>0$.

解: 解法一：利用对称性，$\iiint\limits_{V} xdxdydz = \iiint\limits_{V} ydxdydz = 0$，对$\iiint\limits_{V} zdxdydz$先对$x$, y进行二重积分。注意到截面是

$$D_z : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1-\frac{z^2}{c^2},$$

其面积为$\pi ab(1-z^2/c^2)$. (1分)

所以

$$\iiint\limits_{V} zdxdydz = \int_0^c zdz \iint\limits_{D_z} dxdy = \pi ab\int_0^c z(1-z^2/c^2)dz = \frac{\pi abc^2}{4}. \quad (4分)$$

从而所求的积分值为$\frac{\pi abc^2}{4}$. (1分)

解法二：采用椭球换元:

$$x = ar\sin\theta\cos\phi, y = br\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta, (\theta,\phi) \in [0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi],$$

则Jacobian为$abcr^2\sin\theta$. (2分)

所以积分为

$$abc\int_0^1 r^3dr \iint\limits_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]} (a\sin^2\theta\cos\phi + b\sin^2\theta\sin\phi + c\cos\theta\sin\theta)d\phi d\theta.$$

记内部二重积分为I, 则原积分等于$\dfrac{1}{4}abcI$. (1分)

为了计算I的值，对各求和项分别进行计算，可得结果。 (3分)

5. (11)(4分) 设Ω为单位球：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，则三重积分$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{5}+z^2y\right)dV$的值为(　　).

(A) $\frac{1}{15}\pi$;　　(B) $\frac{2}{15}\pi$;　　(C) $\frac{4}{15}\pi$;　　(D) $\frac{8}{15}\pi$.

6. (10)(15分) 求由曲面$z=x^2+y^2$和$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体的体积和表面积.

7. (10)(10分) 计算三重积分$\iiint\limits_{V}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$,其中$V$是由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和球面$x^2+y^2+z^2=R^2$所围区域.

8. (09)(10分) 计算三重积分$\iiint\limits_{V}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$,其中$V$是由球面$x^2+y^2+z^2=z$所围区域.

9. (06)(8分) 求积分$I=\iiint\limits_{V}(x+y+z)dxdydz$,其中$V$由$z=\sqrt{x^2+y^2}$和$z=\sqrt{1-x^2-y^2}(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$围成.

10. (04)(8分) 求积分$I=\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$, 其中$V: x+y+z\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$.

11. (03)(12分) 求积分$I=\iiint\limits_{V}(x+y+z)dxdydz$,其中$V$由$x=0,y=0,z=0$和$x+y+z=1$围成.

12. (02)(9分) 求积分$I=\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$, 其中$V$是由$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$和$z^2=x^2+y^2$围成.

三、一型曲线、曲面积分

要求掌握：

(1) 引入定义的实际例子;

(2) 一型曲线积分的计算方法:注意对称性

$$\begin{cases} 1.\text{曲线的方程形式:参数式(向经式);隐函数组；平面曲线显示方程}y=f(x), \\ 2.dl=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^(t)}dt,\ dl=\sqrt{1+y'^2(x)}dx,\ dl=\sqrt{r^2\theta+r'^2(\theta)}d\theta, \\ 3.\int_L f(x,y,z)dl=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^(t)}dt, \end{cases}$$

(3) 一型曲面积分的计算方法:注意对称性

$$\begin{cases} 1.\text{曲面的方程形式:参数式(向经式);隐函数方程;显示曲面方程} z=f(x,y). \\ 2.dS=|r'_u\times r'_v|dudv=\sqrt{EG-F^2}dudv=\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}dxdy. \\ 3.\text{球面:}x^2+y^2+z^2=R^2, dS=R^2\sin\theta d\theta d\varphi;\text{柱面:}x^2+y^2=R^2, dS=Rd\theta dz. \\ 4.\iint\limits_S f(x,y,z)=\iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv=\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}dxdy. \end{cases}$$

....

1. (15) (9分) 计算第一型曲线积分$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\ ds$, L 为连接点$A(-2,1)$ 与原点O 的线段和圆周$x^2+y^2=-2y$ 第四象限的部分.

2. (15) (9分) 计算第一型曲面积分$\iint\limits_S \dfrac{y+z}{x^2+y^2+z^2}\ dS$, 其中$S$ 为柱面$x^2+y^2=1$ 在$z=0$, $z=2$ 之间的部分.

3. (14) (8分) $\int\limits_L (2x+y)^5\,ds$, 其中$L$ 是连接$(0,0),(1,0)$ 和$(0,1)$ 的三角形.

4. (14) (8分) $\iint\limits_S x^2y^3z\,dS$, 其中$S$ 是平面$x+y+z=1$ 在第一卦限的部分.

5. (13) (10分) 设S为椭圆$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分,求曲面积分$\iint\limits_s z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}dS$.

6. (12)(6分)计算$\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}dS$,其中$S$为锥面$x^2+y^2=z^2$中满足$0\leqslant z\leqslant a(a>0)$的那部分.

解:利用锥面的函数表示

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\quad x^2+y^2\leqslant a^2,$$

我们有

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy,$$

所以

$$\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}dS=\sqrt{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\sqrt{2}\int_0^a\int_0^{2\pi} r^2drd\theta=\frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}.$$

7. (12)(4分)设f为连续函数,则$\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=r^2} f(x,y,z)dS = \underline{4f(0,0,0)}$.

8. (11)(4分) 设L为$x^2+y^2=R^2$ $(R>0)$,则$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l = (\quad)$.

(A) $\int_0^{2\pi} r^2 dr$;　(B) $2\pi R^2$;　(C) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr$;　(D) πR^3.

9. (11)(3分) 设球面$S: x^2+y^2+z^2=R^2$, $f(t)$是定义在$(-\infty, +\infty)$上的连续正值函数,a, b为实常数, 则曲面积分$\iint\limits_S \dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dS =$ ____________.

10. (10)(10分) 计算第一型曲线积分$\int_L (x^2+x\cos x)dl$, 其中 L 是单位圆 $x^2+y^2=1$.

11. (09)(10分) 设函数 $f(x,y)$ 是整个平面上具有二阶连续偏导数的二次齐次函数, 即对任意 x,y,t 有 $f(tx,ty)=t^2 f(x,y)$ 成立.

(1) 证明:$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=2f(x,y)$;

(2) 设 D 是由圆周 $L: x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域, 证明 $\int_L f(x,y)dl = \iint\limits_D (\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2})dxdy$

12. (07)(4分) 圆周 $L: x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$, 则 $\int_L (x^2+y^2)^n dl =$________.

13. (06)(8分) 设 $L: x=t, y=t\cos t, z=t\sin t, (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, 求 $I=\int_L \dfrac{dl}{\sqrt{2+y^2+z^2}}$