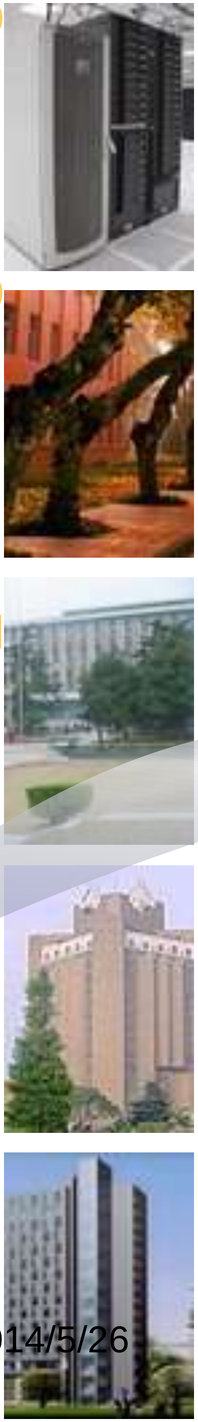


Computer Science and Technology

运 筹 学

对策论

The Game Theory

14.1 引言

- 现代系统博弈理论的初步形成
  - 1944年，冯·诺依曼与摩根思恩特《博弈论与经济行为》的出版。
  - 书中提出的标准型、扩展型和合作型博弈模型解的概念和分析方法奠定了对策论的理论基础，成为使用严谨的数学模型研究冲突对抗条件下最优决策问题的理论。
  - 过于抽象，应用范围受到很大限制。
- 博弈新时代的开始
  - 20世纪50年代，纳什（Nash）建立了非合作博弈的“纳什均衡”理论。“纳什均衡理论”在非合作博弈理论中起着核心作用。
  - 非合作对策中所有对策人都根据各自的信息选择策略，力图使自己的目标函数达到最大的一种平衡解，由经济学家J.纳什提出。非合作对策又称纳什对策，其前提是对策人之间不能预先作任何约定或结盟。

14.1 引言(cont.)

- 囚徒困境问题
  - 甲、乙两名卷入同一案件的囚犯被隔离审讯，并被告知以下政策：
    - 若他们都能招供罪行，则各判5年刑；
    - 若一人顽抗、一人招供，则立功者立即释放而顽抗者判刑十年；
    - 若两人都不招供，则由于缺乏证据，对两人均处以囚禁一年的轻刑。
  - 在以上囚徒困境问题中存在惟一的纳什均衡点，即两个囚犯均选择“招认”，这是惟一稳定的结果。

亚当·斯密在《国富论》中说：通过追求自身利益，他常常会比其实际上想做的那样更有效的促进社会利益。

而“纳什均衡”提出的囚徒悖论则说明：从利己目的出发，结果损人不利己，既不利己，也不利他。

从这个意义上说，纳什均衡实际上动摇了西方经济学的基石。

14.1 引言(cont.)

- 对策行为和对策论
  - 对策论（The Game Theory）：也称竞赛论或博弈论，是研究具有竞争、对抗、利益分配等方面的数量化方法，并提供寻求最优策略的途径。
    - 1944年以来，对策论在投资分析、价格制定、费用分摊、财政转移支付、投标与拍卖、对抗与追踪、国际冲突、双边贸易谈判、劳资关系以及动物行为进化等领域得到广泛应用。
  - 具有竞争或对抗性质的行为称为对策行为。
    - 在这类行为中，参加竞争的各方各自具有不同的目标和利益。为了达到各自的目标和利益，各方必须考虑对手的各种可能的行动方案，并力图选取对自己最为有利或最为合理的方案。
  - 对策论就是研究对策行为中斗争各方是否存在着最合理的行动方案，以及如何找到这个合理的行动方案的数学理论和方法。

– 案例分析1：俾斯麦海的海空对抗

- 1943年2月，第二次世界大战中的日本，在太平洋战区已经处于劣势。为扭转局势，日本统帅山本五十六大将统率下的一支舰队策划了一次军事行动：由集结地——南太平洋的新不列颠群岛的蜡包尔出发，穿过俾斯麦海，开往新几内亚的莱城，支援困守在那里的日军。
- 当盟军获悉此情报后，盟军统帅麦克阿瑟命令太平洋战区空军司令肯尼将军组织空中打击。日本统帅山本五十六大将心里很明白：在日本舰队穿过俾斯麦海的三天航行中，不可能躲开盟军的空中打击，他要策划的是尽可能减少损失。
- 日美双方的指挥官及参谋人员都进行了冷静的思考与全面的谋划。
- 自然条件对于双方都是已知的。基本情况如下：从蜡包尔出发开往莱城的海上航线有南北两条。通过时间均为3天。气象预报表明：未来3天中，北线阴雨，能见度差；而南线天气晴好，能见度好。肯尼将军的轰炸机布置在南线的机场，侦察机全天候进行侦察，但有一定的搜索半径。

14.1 引言(cont.)

- 经测算，双方均可得到如下估计：
  - 局势1：盟军的侦察机重点搜索北线，日本舰队也恰好走北线。由于气候恶劣，能见度差，盟军只能实施两天的轰炸。
  - 局势2：盟军的侦察机重点搜索北线，日本舰队走南线。由于发现晚，尽管盟军的轰炸机群在南线，但有效轰炸也只有两天。
  - 局势3：盟军的侦察机重点搜索南线，而日本舰队走北线。由于发现晚、盟军的轰炸机群在南线，以及北线气候恶劣，故有效轰炸只有一天。
  - 局势4：盟军的侦察机重点搜索南线，日本舰队也恰好走南线。此时日本舰队迅速被发现，盟军的轰炸机群所需航程很短，加上天气晴好，有效轰炸时间三天。
- 这场海空遭遇与对抗一定会发生，双方的统帅如何决策呢？历史的实际情况是：局势1成为现实。肯尼将军命令盟军的侦察机重点搜索北线；而山本五十六大将命令日本舰队取道北线航行。由于气候恶劣，能见度差，盟军飞机在一天后发现了日本舰队，基地在南线的盟军轰炸机群远程航行，实施了两天的有效轰炸，重创了日本舰队，但未能全歼。

14.1 引言(cont.)

- 案例分析2：田忌赛马
  - 齐王要与大臣田忌赛马，双方各出上、中、下马各一匹，对局三次，每次胜负1000金。在同等级的马中，田忌的马不如齐王的马，而如果田忌的马比齐王的马高一个等级，则田忌的马会取胜。田忌在好友、著名的军事谋略家孙膑的指导下，以以下安排：

齐王	上	中	下
田忌	下	上	中

  - 最终净胜一局，赢得1000金。

- 对策行为的三个基本要素
  - 以下称具有对策行为的模型为对策模型，或对策。对策模型必须包括如下三个基本要素：
    - 局中人

14.1 引言(cont.)

在一个对策行为（或一局对策）中，有权决定自己行为方案的对局参加者称为局中人。通常用I表示局中人的集合。若有n个局中人，则I={1,2,…,n}。上面的案例1中，美日双方的决策者为局中人。当对局中局中人只有两人时，称为二人对策。

在对策中，总是假定每一个局中人都是“理智的”决策者，即对任一局中人来讲，不存在利用其他局中人决策的失误来扩大自身利益的可能性或相反。

- 策略集

一局对策中，可供局中人选择的一个实际可行的完整的行动方案称为一个策略。参加对策的每一局中人i，i∈I，都有自己的策略集S_i。一般每一局中人的策略集中至少应包括两个策略。案例2中，局中人齐王和田忌各自都有六个策略：（上，中，下）、（上，下、中）、（中，上，下）、（中，下、上）、（下、中，上）、（下、上、中）。

- 赢得函数（支付函数）

在一局对策中，各局中人所选定的策略形成的策略组称为一个局势，即若s_i是第i个局中人的一个策略，则n个局中人的策略组$s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$就是一个局势。

14.1 引言(cont.)

全体局势的集合S可用各局中人策略集的笛卡尔积表示，即$S=S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$。

在确定了所采取的策略后，他们就会获得相应的收益或损失，此收益或损失的值称为赢得（支付）。也就是说，对任一局势s∈S，局中人i可以得到一个赢得$H_i(s)$。显然$H_i(s)$是局势s的函数，称之为第i个局中人的赢得（支付）函数。

以案例2为例：

局中人集合$I=\{1,2\}$

齐王的策略集$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}$

田忌的策略集$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6\}$

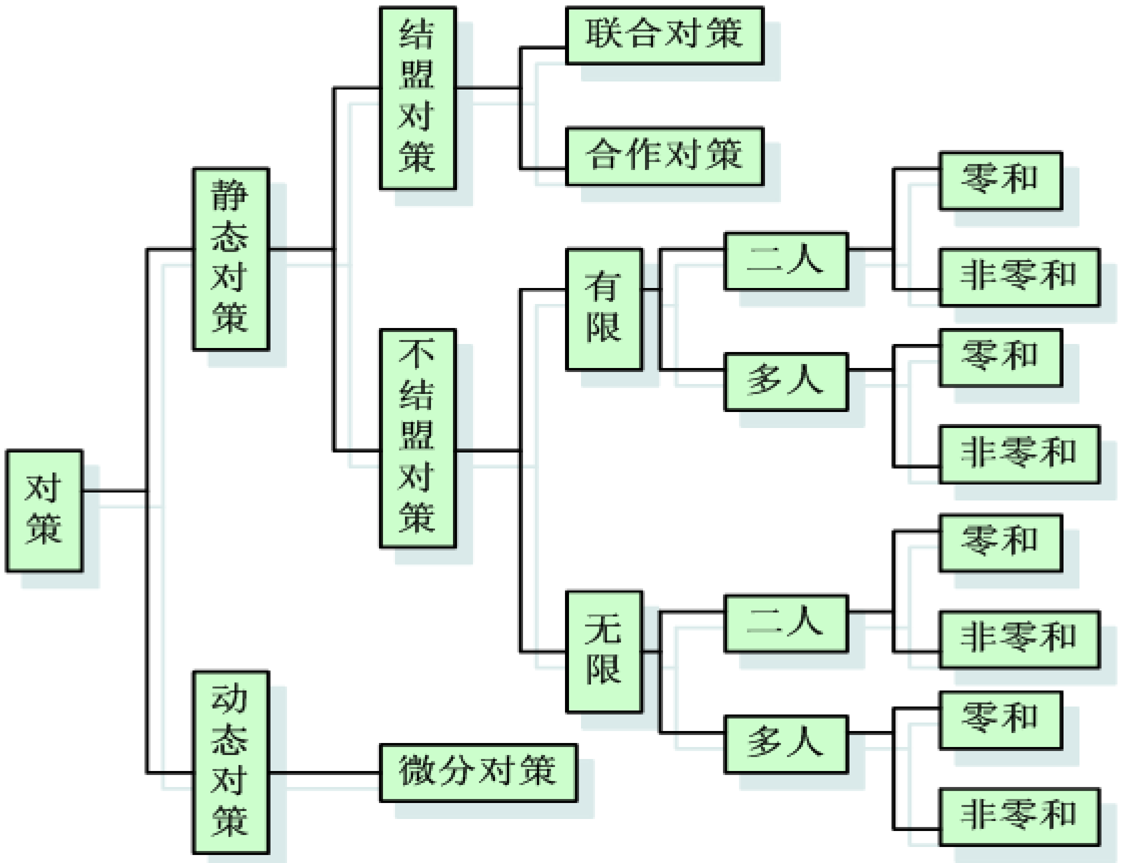
齐王的任一策略α_i和田忌的任一策略β_j决定了一个局势s_{ij}。

如果$\alpha_1=$(上、中、下)，$\beta_1=$(上、中、下)，

则在局势s_{11}下齐王的赢得值为$H_1(s_{11})=3$，田忌的赢得值为$H_2(s_{11})=-3$。

14.1 引言(cont.)

- 对策的分类



14.1 引言(cont.)

- 根据参加对策的局中人的数目可分为二人对策和多人对策;
- 根据局中人策略集中策略的有限或无限可分为有限对策和无限对策;
- 根据各局中人赢得函数值的代数和（赢者为正，输者为负）是否为零可分为零和对策和非零和对策;
- 根据策略与时间的关系可分为静态对策和动态对策;
- 根据对策的数学模型的类型可分为矩阵对策、阵地对策、随机对策等。
- 根据局中人是否允许合作分为合作对策和非合作对策。

– 在众多对策模型中，矩阵对策即二人有限零和对策(finite two-person zero-sum game)占有重要地位。

14.2 矩阵对策的基本定理

- 矩阵对策的数学模型
  - 矩阵对策
    - 就是二人有限零和对策。指只有两个参加对策的局中人，每个局中人都只有有限个策略可供选择。在任一局势下，两个局中人的赢得之和总是等于零，即双方得利益是激烈对抗的。
    - 例：在“田忌赛马”中，齐王和田忌各有六个策略，一局对策结束后，齐王的所得必为田忌的所失，反之亦然。
  - 数学模型

一般用I、II分别表示两个局中人,并设

局中人I有m个纯策略$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$可供选择，

局中人II共有n个纯策略$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$可供选择，

则局中人I、II的策略集分别是：

$$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$$

$$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$$

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

- 当局中人选定纯策略α_i和局中人II选定纯策略β_j后，就形成了一个纯局势(α_i,β_j)。
  可见，这样的纯局势有$m\cdot n$个。
  对任一纯局势(α_i,β_j)，记局中人I的赢得值为a_{ij}，并称

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

  为局中人I的赢得矩阵，或局中人II的支付矩阵。
  由于假定对策为零和,故局中人II的赢得矩阵为$-A$。
  当局中人I、II和策略集S_1、S_2及局中人I的赢得矩阵A确定后，一个矩阵对策就给定了。
  通常将矩阵对策记成：
  $G=\{I,II;S_1,S_2;A\}$或$G=\{S_1,S_2;A\}$

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

– 例：田忌赛马

齐王的赢得		田忌的策略					
		β_1 (上中下)	β_2 (上下中)	β_3 (中上下)	β_4 (中下上)	β_5 (下中上)	β_6 (下上中)
齐王的策略	α_1 (上中下)	3	1	1	1	1	-1
	α_2 (上下中)	1	3	1	1	-1	1
	α_3 (中上下)	1	-1	3	1	1	1
	α_4 (中下上)	-1	1	1	3	1	1
	α_5 (下中上)	1	1	-1	1	3	1
	α_6 (下上中)	1	1	1	-1	1	3

- 赢得矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

- 矩阵模型给定后，各局中人面临的问题是：如何选取对自己最为有利的纯策略以谋取最大的赢得（或最少损失）。
  - 例：设有一矩阵对策$G=\{S_1,S_2;A\}$，其中$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，

$$A=\begin{bmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

  - 分析：由**A**可看出，局中人**I**的最大赢得是**9**，要想得到这个赢得，他就得选择纯策略α_3，由于假定局中人**II**也是理智的，他考虑到局中人**I**打算出α_3的心理，于是便选择纯策略β_3应对，使局中人**I**不但得不到**9**反而失去**10**。局中人**I**当然也会猜到局中人**II**的这一心理，故想选择α_4来应对，使局中人**II**得不到**10**反而失掉**6**，……所以，如果双方都不想冒险，都不存在侥幸心理，而是考虑到对方必然会设法使自己的所得最少这一点，就应该从各自可能出现的最不利的情形中选择一种最为有利的情形作为决策的依据。

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

- 这就是所谓的“理智行为”，也是对策双方实际上都能接受的一种稳妥的方法。
- 在上例中，局中人I分析出纯策略α_1，α_2，α_3，α_4可能带来的最少赢得（矩阵A中每行的最小元素）分别为：-8，2，-10，-3。在这些最少赢得（最不利的情形）中最好的结果是赢得为2，因此局中人I只要以α_2参加对策，无论局中人II选取什么样的纯策略，都能保证局中人I的赢得不会少于2。
- 同理，局中人II在对策中各纯策略带来的最不利的结果（矩阵A中每列最大的元素）：9，2，6。在这些最不利的结果中最好的结果是2，即局中人II只要选择纯策略β_2参加对策，都能保证自己的支付不会多于2。
- 局中人I、II的“理智行为”分别是选取纯策略α_2和β_2，这时局中人I的赢得和局中人II的支出的绝对值相等（都是2）。
- 局中人I是按最大最小原则，局中人II则是按照最小最大原则选择各自的纯策略。这对双方来说都是一种最稳妥的行为。
- 因此：α_2和β_2分别是局中人I、II的最优纯策略。

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

– 定义1

设$G=\{S_1,S_2;A\}$为矩阵对策，其中，$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$。$A=(a_{ij})_{m\times n}$。若等式

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}=a_{i^*j^*} \quad (14.1)$$

成立，记$V_G=a_{i^*j^*}$。则称V_G为对策G的值，

称使上式成立的纯局势$(\alpha_{i^*},\beta_{j^*})$为$G$在纯策略下的解（或平衡局势），

α_{i^*}与β_{j^*}分别称为局中人I、II的最优纯策略。

- 例： 求解矩阵对策$G=\{S_1,S_2;A\}$，其中$A=\begin{bmatrix}-7 & 1 & -8\\ 3 & 2 & 4\\ 16 & -1 & -3\\ -3 & 0 & 5\end{bmatrix}$
- 解：根据矩阵A有：

每行最小值 $\begin{bmatrix}-7 & 1 & -8\\ 3 & 2 & 4\\ 16 & -1 & -3\\ -3 & 0 & 5\end{bmatrix}$ 每列最大值 $\begin{bmatrix}-7 & 1 & -8\\ 3 & 2 & 4\\ 16 & -1 & -3\\ -3 & 0 & 5\end{bmatrix}$

- 因此 $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = a_{22} = 2$
- 由定义1可知，$V_G=2$，G的解为(α_2,β_2)，α_2和β_2分别是局中人I和II的最优纯策略。

– 定理1

矩阵对策$G=\{S_1,S_2;A\}$在纯策略意义下有解的充要条件是：存在纯局势(α_i^*,β_j^*)使得对一切$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$，均有$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$ (14.2)

证明：充分性。

$$\because \forall i,j,\ \ a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j} \Rightarrow \max_i a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le \min_j a_{i^*j}$$

$$\left.\begin{aligned} \min_j \max_i a_{ij} \le \max_i a_{ij^*} \\ \min_j a_{i^*j} \le \max_i \min_j a_{ij} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \min_j \max_i a_{ij} \le a_{i^*j^*} \le \max_i \min_j a_{ij} \quad (14.3)$$

$$\because \forall i,j, \min_j a_{ij} \le a_{ij} \le \max_i a_{ij} \Rightarrow \max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij} \quad (14.4)$$

$$\Rightarrow \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*}$$

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

- 必要性。

  设有i^*, j^*使得

  $$\min_j a_{i^*j} = \max_i \min_j a_{ij}$$

  $$\max_i a_{ij^*} = \min_j \max_i a_{ij}$$

  则$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} \Rightarrow$

  $$\max_i a_{ij^*} = \min_j a_{i^*j} \le a_{i^*j^*} \le \max_i a_{ij^*} = \min_j a_{i^*j}$$

  $$\therefore \forall i, j, a_{i^*j} \le \max_i a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le \min_j a_{i^*j} \le a_{i^*j}$$

– 定义2

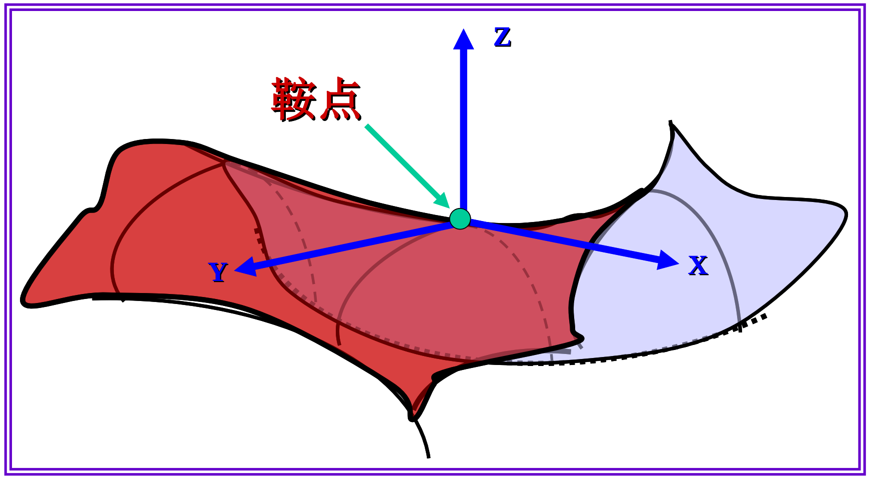
  设$f(x,y)$为一个定义在$x \in A$及$y \in B$上的实值函数，如果存在$x^* \in A$，$y^* \in B$，使得对一切$x \in A$和$y \in B$，有

  $$f(x,y^*) \le f(x^*,y^*) \le f(x^*,y) \quad (14.5)$$

  则称(x^*,y^*)为函数的一个鞍点。

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

- 马鞍面z=f(x,y)



可知：矩阵对策G在纯策略意义下有解，且$V_G=a_{i^*j^*}$的充要条件是：$a_{i^*j^*}$是矩阵A的一个鞍点。在对策论中，矩阵A的鞍点也称为对策的鞍点。

- 定理1中(14.2)式的直观解释是：如果$a_{i^*j^*}$既是矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$中第i*行的最小值，又是A中第j*列的最大值，则$a_{i^*j^*}$即为对策的值，且$(\alpha_{i^*},\beta_{j^*})$就是对策的解。其对策意义是：一个平衡局势$(\alpha_{i^*},\beta_{j^*})$应具有这样的性质，当局中人I选取了纯策略$\alpha_{i^*}$后，局中人II为了使其所失最少，只有选择纯策略$\beta_{j^*}$，否则就可能失去的更多；反之当局中人II选择了纯策略β_{j^*}后，局中人I为了得到最大的赢得，也只能选取纯策略α_{i^*}，否则就会赢得更少。双方的竞争在局势$(\alpha_{i^*},\beta_{j^*})$下达到了一个平衡状态。

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

- 例：设有一矩阵对策$G=\{S_1,S_2;A\}$，其中$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$，

$$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}，赢得矩阵A=\begin{bmatrix}6&5&6&5\\1&4&2&-1\\8&5&7&5\\0&2&6&2\end{bmatrix}$$

- 解：直接计算：

$$\begin{array}{c|cccc|c} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \min \\ \hline \alpha_1 & 6 & 5 & 6 & 5 & 5^* \\ \alpha_2 & 1 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ \alpha_3 & 8 & 5 & 6 & 5 & 5^* \\ \alpha_4 & 0 & 2 & 7 & 2 & 0 \\ \hline \max & 8 & 5^* & 7 & 5^* & \end{array}$$

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*} = 5$$

其中$i^*=1,3$，$j^*=2,4$

故$(\alpha_1,\beta_2),(\alpha_1,\beta_4),(\alpha_3,\beta_2),(\alpha_3,\beta_4)$四个局势都是对策的解 且$V_G=5$。

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

- 当矩阵对策的解不唯一时，解之间的关系具有以下性质：
  - 性质1：无差别性。

    即若$(\alpha_{i_1},\beta_{j_1})$和$(\alpha_{i_2},\beta_{j_2})$是对策$G$的两个解，则$a_{i_1 j_1}=a_{i_2 j_2}$
  - 性质2：可交换性。

    即若$(\alpha_{i_1},\beta_{j_1})$和$(\alpha_{i_2},\beta_{j_2})$是对策$G$的两个解，则$(\alpha_{i_1},\beta_{j_2})$和$(\alpha_{i_2},\beta_{j_1})$也是解。
- 实际应用举例
  - 例：某单位采购员在秋天时要决定冬天取暖用煤的采购量。已知在正常气温条件下需要用煤**15**吨，在较暖和较冷气温条件下需要用煤**10**吨和**20**吨。假定冬季的煤价随着天气寒冷的程度而变化，在较暖、正常、较冷气温条件下每吨煤价为**100**元、**150**元、**200**元。又秋季每吨煤价为**100**元。在没有关于当年冬季气温情况下，秋季应购多少吨煤，能使总支出最少？
  - 解：局中人**I**（采购员）有三个策略：

    策略α_1：**10**吨，策略α_2：**15**吨，策略α_3：**20**吨。

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

- 局中人II（环境）：策略β_1较暖，策略β_2正常，策略β_3较冷。
- 现把该单位冬天取暖用煤全部费用（秋季购煤费用与冬天不够时再补购煤费用）作为采购员的赢得矩阵。

$$\begin{array}{c} \\ \alpha_1(10\text{吨}) \\ \alpha_2(15\text{吨}) \\ \alpha_3(20\text{吨}) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \beta_1(\text{较暖}) & \beta_2(\text{正常}) & \beta_4(\text{较冷}) \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1000 & -1750 & -3000 \\ -1500 & -1500 & -2500 \\ -2000 & -2000 & -2000 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{33} = -200$$

故对策的解是(α_3, β_3)，即秋季贮煤20吨合理。

- 矩阵对策的混合策略
  - 混合策略的提出：
    - 对矩阵对策$G = \{S_1, S_2; A\}$来说：

      局中人I有把握的至少赢得是：$v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$

      局中人II有把握的至多损失是：$v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

- 一般，局中人I的赢得值不会多于局中人II的所失值，即总有$v_1 \le v_2$，当$v_1 = v_2$时，矩阵对策G即存在纯策略意义下的解，且$V_G = v_1 = v_2$。然而，一般情形不总是如此。
- 例：有两个局中人A和B玩掷硬币的游戏，每个局中人在不知道对方情况下，可选正面或反面。这两个局中人同时公布他们的选择。如果结果相同，则A从B那里赢得1元；否则A输给B一元。

	B正	B反	行最小值
A正	1	-1	-1
A反	-1	1	-1
列最大值	1	1	

- 该对策的极大化极小值和极小化极大值分别是-1和1，由于这两个值不相等，因此无纯策略解。如果A选正，B将会选反，从而A又换成反。上述这种转向另外一种对策的不断诱惑表明，一个纯策略的解是不可接受的。反之，这两个局中人都可以随机把他们各自的纯策略混合起来，在这种情况下，这一对策的最优值会在对策的极大化极小值和极小化极大值之间的某个中间值取得。
  - 这种情况下，提出局中人按照某种概率分布选取策略的想法，该策略是局中人基于策略集的一个概率分布，称为混合策略。

– 定义3

设有矩阵对策$G=\{S_1,S_2;A\}$，其中，$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$。$A=(a_{ij})_{m\times n}$。记

$$S_1^*=\left\{x\in E^m \middle| x_i\geq 0, i=1,\cdots,m, \sum_{i=1}^m x_i=1\right\}$$

$$S_2^*=\left\{y\in E^n \middle| y_j\geq 0, j=1,\cdots,n, \sum_{j=1}^n y_j=1\right\}$$

则S_1^*和S_2^*分别称为局中人I和II的混合策略集（或策略集）；

$x\in S_1^*$和$y\in S_2^*$分别称为局中人I和II的混合策略（或策略）;

对$x\in S_1^*$和$y\in S_2^*$，称(x,y)为一个混合局势（或局势）。

局中人I的赢得函数记为：$E(x,y)=x^TAy=\sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_j$ (14.6)

这样得到的一个新的对策记成$G^*=\{S_1^*,S_2^*;E\}$，称G^*为对策G的混合扩充。

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

- 可见，纯策略是混合策略的特例。

  例如局中人I的纯策略α_k等价于混合策略$x=(x_1,\cdots,x_m)^T\in S_1^*$，其中

  $$x_i=\begin{cases}1 & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases}$$

- 当两个局中人多次重复进行对策G时：

  混合策略$x=(x_1,\cdots,x_m)^T$可设想成局中人I分别采取纯策略$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的频率。

  当两个局中人只进行一次对策G时：

  混合策略$x=(x_1,\cdots,x_m)^T$可设想成局中人I对各纯策略的偏爱程度

– 矩阵对策G在混合策略意义下的求解：

- 设两个局中人仍进行有理智对策：

  局中人I应选取混合策略$x\in S_1^*$，使得自己的赢利期望值不少于

  $$v_1=\max_{x\in S_1^*}\min_{y\in S_2^*}E(x,y)\quad(14.7)$$

  局中人II应选取混合策略$y\in S_2^*$，使得自己的支付期望值至多是

  $$v_2=\min_{y\in S_2^*}\max_{x\in S_1^*}E(x,y)\quad(14.8)$$

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

- 局中人I的赢得函数$E(x,y)$是欧氏空间E^{m+n}内一个有界闭集

$$D=\left\{(x,y)\middle| x_i\ge 0, y_i\ge 0, i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,n, \sum_i x_i=1, \sum_j y_j=1\right\}$$

上的连续函数。

因此对于固定的x，$E(x,y)$是S_2^*上的连续函数，故$\min\limits_{y\in S_2^*}E(x,y)$存在，

而且$\min\limits_{y\in S_2^*}E(x,y)$也是$S_1^*$上的连续函数，故$\max\limits_{x\in S_1^*}\min\limits_{y\in S_2^*}E(x,y)$存在。

同样可说明$\min\limits_{y\in S_2^*}\max\limits_{x\in S_1^*}E(x,y)$存在。

设$\max\limits_{x\in S_1^*}\min\limits_{y\in S_2^*}E(x,y)=\min\limits_{y}E(x^*,y)$

$\min\limits_{y\in S_2^*}\max\limits_{x\in S_1^*}E(x,y)=\max\limits_{x}E(x,y^*)$

又有$v_1\le v_2$，于是

$$v_1=\min_{y\in S_2^*}E(x^*,y)\le E(x^*,y^*)\le \max_{x\in S_1^*}E(x,y^*)=v_2$$

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

– 定义4

设矩阵对策$G^*=\{S_1^*,S_2^*;E\}$是矩阵对策$G=\{S_1,S_2;A\}$的混合扩充，如果

$$\max_{x\in S_1^*}\min_{y\in S_2^*}E(x,y)=\min_{y\in S_2^*}\max_{x\in S_1^*}E(x,y)\quad(14.9)$$

记其值为V_G，则称V_G为对策G^*的值。

称使上式成立的混合局势(x^*,y^*)为G在混合策略意义下的解，

x^*和y^*分别称为局中人I和II的最优混合策略（或简称最优策略）。

- 约定：以下对$G=\{S_1,S_2;A\}$及其混合扩充$G^*=\{S_1^*,S_2^*;E\}$一般不加以区分，通常用$G=\{S_1,S_2;A\}$表示。当G在纯策略意义下解不存在时，自动认为讨论的是混合策略意义下的解，相应局中人I的赢得函数为$E(x,y)$。

– 定理2：矩阵对策$G=\{S_1,S_2;A\}$在混合策略意义下有解的充要条件是：

存在$x^*\in S_1^*$，$y^*\in S_2^*$，使(x^*,y^*)为函数的一个鞍点，即

对一切$x\in S_1^*$，$y\in S_2^*$有：

$$E(x,y^*)\le E(x^*,y^*)\le E(x^*,y)\quad(14.10)$$

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

- 例：考虑矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;A\}$，$A=\begin{bmatrix}3 & 6\\5 & 4\end{bmatrix}$
- 分析：

显然，G在纯策略意义下解不存在。

设$x=(x_1,x_2)$为局中人I的混合策略，$y=(y_1,y_2)$为局中人II的混合策略

则$S_1^*=\{(x_1,x_2)|x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_1+x_2=1\}$

$S_2^*=\{(y_1,y_2)|y_1\geq 0, y_2\geq 0, y_1+y_2=1\}$

局中人I的赢得期望是：

$E(x,y)=3x_1y_1+6x_1y_2+5x_2y_1+4x_2y_2$

$=3x_1y_1+6x_1(1-y_1)+5(1-x_1)y_1+4(1-x_1)(1-y_1)$

$=-4(x_1-1/4)(y_1-1/2)+9/2$

取$x^*=(1/4,3/4)$，$y^*=(1/2,1/2)$，则$E(x^*,y^*)=9/2$，

$E(x^*,y)=E(x,y^*)=9/2$，即有

$E(x,y^*)\leq E(x^*,y^*)\leq E(x^*,y)$

故$x^*=(1/4,3/4)$，$y^*=(1/2,1/2)$分别为局中人I、II的最优策略。

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

- 矩阵对策的基本定理
  - 预先约定的记号：

当局中人I取纯策略α_i时，记其相应的赢得函数为$E(i,y)$，于是

$$E(i,y)=\sum_j a_{ij}y_j \quad (14.11)$$

当局中人II取纯策略β_j时，记其相应的赢得函数为$E(x,j)$，于是

$$E(x,j)=\sum_i a_{ij}x_i \quad (14.12)$$

因此有

$$E(x,y)=\sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_j=\sum_i\left(\sum_j a_{ij}y_j\right)x_i=\sum_i E(i,y)x_i \quad (14.13)$$

和

$$E(x,y)=\sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_j=\sum_j\left(\sum_i a_{ij}x_i\right)y_j=\sum_j E(x,j)y_j \quad (14.14)$$

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

– 定理3：设$x^* \in S_1^*$，$y^* \in S_2^*$，则(x^*, y^*)是G的解的充要条件是
对任意$i = 1, \cdots, m$，$j = 1, \cdots, n$有：
$E(i, y^*) \le E(x^*, y^*) \le E(x^*, j)$ (14.15)

- 证明：(1)设(x^*, y^*)是G的解，则由定理2可知$E(x, y^*) \le E(x^*, y^*) \le E(x^*, y)$成立。
  由于纯策略是混合策略的特例，因此$E(i, y^*) \le E(x^*, y^*) \le E(x^*, j)$。
  (2)设$E(i, y^*) \le E(x^*, y^*) \le E(x^*, j)$成立，则由
  $$E(x, y^*) = \sum_i E(i, y^*) x_i \le E(x^*, y^*) \cdot \sum_i x_i = E(x^*, y^*)$$
  $$E(x^*, j) = \sum_j E(x^*, j) y_j \ge E(x^*, y^*) \cdot \sum_j y_j = E(x^*, y^*)$$
  可得$E(x, y^*) \le E(x^*, y^*) \le E(x^*, y)$成立，由定理2可得$(x^*, y^*)$是$G$的解。
- 定理3的意义：在验证(x*,y*)是否为对策G的解时，(14.15)式把需要对无限个不等式进行验证的问题转化为只要对有限个不等式(mn个)进行验证的问题，简化了研究。

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

– 定理4：设$x^* \in S_1^*$，$y^* \in S_2^*$，则(x^*, y^*)是G的解的充要条件是存在数v，使得x^*和y^*分别是不等式组

$$(I)\begin{cases}\sum_i a_{ij}x_i \ge v & j=1,\cdots,n\\ \sum_i x_i = 1 & \\ x_i \ge 0 & i=1,\cdots,m\end{cases} \quad (14.16) \text{和} (II)\begin{cases}\sum_j a_{ij}y_j \le v & i=1,\cdots,m\\ \sum_j y_j = 1 & \\ y_j \ge 0 & j=1,\cdots,n\end{cases} \quad (14.17)$$

的解，且$v = V_G$。

– 定理5：对任一矩阵对策G={S$_1$,S$_2$;A}，一定存在混合策略意义下的解。

- 证明：只要证明存在x*∈S$_1$*，y*∈S$_2$*，使得(14.15)成立。为此考虑如下两个线性规划问题：

$$(P)\begin{cases}\max w\\ \sum_i a_{ij}x_i \ge w & j=1,\cdots,n\\ \sum_i x_i = 1 & \\ x_i \ge 0 & i=1,\cdots,m\end{cases} \text{和} (D)\begin{cases}\min v\\ \sum_j a_{ij}y_j \le v & i=1,\cdots,m\\ \sum_j y_j = 1 & \\ y_j \ge 0 & j=1,\cdots,n\end{cases}$$

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

- 显然(P)和(D)是互为对偶的线性规划问题，而且
  $x=(1,0,\cdots,0)^T\in E^m, w=\min_j a_{1j}$ 是问题(P)的一个可行解；
  $y=(1,0,\cdots,0)^T\in E^n, v=\max_i a_{i1}$ 是问题(D)的一个可行解。
- 由线性规划的对偶理论可知，问题(P)和(D)分别存在最优解(x*,w*)和(y*,v*)，且v*=w*。即存在x*∈S_1*，y*∈S_2*和数v*，使得对任意i=1,⋯,m，j=1,⋯,n，有

$$\sum_j a_{ij}y_j^* \le v^* \le \sum_i a_{ij}x_i^* \quad (14.18)$$

$$E(i,y^*)\le v^* \le E(x^*,j) \quad (14.19)$$

- 又由

$$E(x^*,y^*)=\sum_i E(i,y^*)x_i \le v^*\cdot\sum_i x_i^* = v^*$$

$$E(x^*,y^*)=\sum_j E(x^*,j)y_j \ge v^*\cdot\sum_j y_j = v^*$$

得到v*=E(x*,y*)，故由(14.19)式知(14.15)式成立。
- 问题得证。

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

– 定理6：设(x*,y*)是矩阵对策G的解，v=V$_G$，则

$$(1) x_i^* > 0 \Rightarrow \sum_j a_{ij} y_j^* = v$$

$$(2) y_j^* > 0 \Rightarrow \sum_i a_{ij} x_i^* = v$$

$$(3) \sum_j a_{ij} y_j^* < v \Rightarrow x_i^* = 0$$

$$(4) \sum_i a_{ij} x_i^* > v \Rightarrow y_j^* = 0$$

- 证明：按定义有：

$v = \max_{x \in S_1^*} E(x, y^*)$。故$v - \sum_j a_{ij} y_j^* = \max_{x \in S_1^*} E(x, y^*) - E(i, y^*) \geq 0$

又因$\sum_i x_i^* (v - \sum_j a_{ij} y_j^*) = v - \sum_i \sum_j a_{ij} x_i^* y_j^* = 0$

$x_i^* \geq 0, i = 1, \cdots, m$

所以，当$x_i^* > 0$时，必有$\sum_j a_{ij} y_j^* = v$；当$\sum_j a_{ij} y_j^* < v$时，必有$x_i^* = 0$。

(1)、(3)得证，同理可证(2)、(4)。

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

- 记矩阵对策G的解集为T(G):
- 定理7：设有两个矩阵对策

  $G_1=\{S_1,S_2;A_1\}$, $A_1=(a_{ij})$; $G_2=\{S_1,S_2;A_2\}$, $A_2=(a_{ij}+L)$。

  L为任一常数。则：

  $(1)V_{G_2}=V_{G_1}+L$;$(2)T(G_1)=T(G_2)$

- 定理8：设有两个矩阵对策

  $G_1=\{S_1,S_2;A\}$; $G_2=\{S_1,S_2;\alpha A\}$。$\alpha>0$为任一常数。则

  $(1)V_{G_2}=\alpha V_{G_1}$;$(2)T(G_1)=T(G_2)$

- 定理9：设

  $G=\{S_1,S_2;A\}$为一矩阵对策，且$A=-A^T$为斜对称矩阵，

  亦称这种对策为对称对策。则：

  $(1)V_G=0$;$(2)T_1(G)=T_2(G)$

  其中$T_1(G)$和$T_2(G)$分别为局中人I和局中人II的最优策略集。

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

– 定义5

设有矩阵对策$G=\{S_1,S_2;A\}$，其中，$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$。

$A=(a_{ij})_{m\times n}$。若对一切$j=1,\cdots,n$，都有$a_{i^0j}\ge a_{k^0j}$

即矩阵A的第i^0行元均不小于第k^0行的对应元，则称局中人I的纯策略α_{i^0}优超于α_{k^0}；

若对一切$i=1,\cdots,m$，都有$a_{ij^0}\ge a_{il^0}$

即矩阵A的第j^0列元均不小于第l^0列的对应元，则称局中人II的纯策略β_{j^0}优超于β_{l^0}。

– 定理10

设有矩阵对策$G=\{S_1,S_2;A\}$，其中，$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$。

$A=(a_{ij})_{m\times n}$。如果纯策略α_1被其余纯策略$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中之一所优超，

由G可得到一个新的矩阵对策G'：$G'=\{S_1',S_2;A'\}$

其中$S_1'=\{\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$，$A'=(a_{ij}')_{(m-1)\times n}$，$a_{ij}'=a_{ij}$，$i=2,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$

于是有(1)$V_{G'}=V_G$

(2)G'中局中人II的最有策略就是其在G中的最优策略；

(3)若$(x_2^*,\cdots,x_m^*)^T$是G'中局中人I的最优策略，

则$x=(0,x_2^*,\cdots,x_m^*)^T$便是其在$G$中的最优策略。

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

- 证明：

不妨设α_2优超于α_1，即$a_{2j} \geq a_{1j}$，$j = 1, \cdots, n$ (14.20)

因$x'^* = (x_2^*, \cdots, x_m^*)^T$和$y^* = (y_1^*, \cdots, y_m^*)^T$是$G'$的解，由定理3可得：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq V_{G'} \leq \sum_{i=2}^{m} a_{ij} x_i^*, \quad i = 2, \cdots, m; \quad j = 1, \cdots, n \qquad (14.21)$$

因α_2优超于α_1，由(14.20)可得：$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j^* \leq \sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_j^* \leq V_{G'}$ (14.22)

合并(14.21)(14.22)，得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq V_{G'} \leq \sum_{i=2}^{m} a_{ij} x_i^* + a_{1j} \cdot 0, \quad i = 1, \cdots, m; \quad j = 1, \cdots, n$$

或$E(i, y^*) \leq V_{G'} \leq E(x^*, j)$，$i = 1, \cdots, m$；$j = 1, \cdots, n$

由定理4可知，(x^*, y^*)是G的解，其中$x^* = (0, x_2^*, \cdots, x_m^*)^T$，且$V_{G'} = V_G$。证毕。

- 推论：若α_1不是为纯策略$\alpha_2, \cdots, \alpha_m$中之一所优超，而是为$\alpha_2, \cdots, \alpha_m$的某个凸线性组合所优超，定理的结论仍然成立。

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

- 例：设赢得矩阵如下所示，求解这个矩阵对策。

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0 & 3 & 0\\ 5 & 0 & 2 & 5 & 9\\ 7 & 3 & 9 & 5 & 9\\ 4 & 6 & 8 & 7 & 5.5\\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3\end{bmatrix}$$

- 解：由于第4行优超于第1行，第3行优超于第2行，故可划去第1行和第2行，得到新的赢得矩阵：

$$A_1=\begin{bmatrix}7 & 3 & 9 & 5 & 9\\ 4 & 6 & 8 & 7 & 5.5\\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3\end{bmatrix}$$

对于A_1，第1列优超于第3列，第2列优超于第4列，1/3×(第一列)+2/3×(第2列）优超于第5列，因此划去第3、4、5列，得到：

$$A_2=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 4 & 6\\ 6 & 0\end{bmatrix}$$

14.2 矩阵对策的基本定理(cont.)

对于A$_2$，第1行优超于第3行，故划去第3行，得：

$$A_3=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 4 & 6\end{bmatrix}$$

对于A$_3$，易知无鞍点存在，应用定理4，求解不等式组：

$$(I)\begin{cases}7x_3+4x_4\geq v\\ 3x_3+6x_4\geq v\\ x_3+x_4=1\\ x_3,x_4\geq 0\end{cases}\qquad (II)\begin{cases}7y_1+4y_2\leq v\\ 3y_1+6y_2\leq v\\ y_1+y_2=1\\ y_1,y_2\geq 0\end{cases}$$

首先考虑满足 $\begin{cases}7x_3+4x_4=v\\ 3x_3+6x_4=v\\ x_3+x_4=1\end{cases}$ $\begin{cases}7y_1+4y_2=v\\ 3y_1+6y_2=v\\ y_1+y_2=1\end{cases}$ 的非负解，为：

$$x_3^*=1/3,x_4^*=2/3;y_1^*=1/2,y_2^*=1/2;v=5$$

于是原矩阵对策的一个解就是：

$$x^*=(0,0,1/3,2/3,0)^T;y^*=(1/2,1/2,0,0,0)^T;V_G=5$$

14.3 矩阵对策的解法

- 图解法、迭代法及其它方法
  - 2×2对策的公式法
    - 所谓2×2对策是指局中人I的赢得矩阵是2×2阶的，即，

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

    - 如果A有鞍点，则很快就可求出各局中人的最优纯策略；若A没有鞍点，则可证明局中人最优混合策略中的x_i^*,y_j^*均大于零。于是由定理6可知，为求最优混合策略可求下列等式组：

$$(I)\ \begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2=v \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2=v \quad (14.23) \\ x_1+x_2=1 \end{cases} \qquad (II)\ \begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2=v \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2=v \quad (14.24) \\ y_1+y_2=1 \end{cases}$$

    - 当矩阵A不存在鞍点时，上面等式组一定有严格非负解

$$x^*=(x_1^*,x_2^*),\ y^*=(y_1^*,y_2^*)$$

14.3 矩阵对策的解法(cont.)

$$x_1^* = \frac{a_{22}-a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})} \quad (14.25),\quad x_2^* = \frac{a_{11}-a_{12}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})} \quad (14.26)$$

$$y_1^* = \frac{a_{22}-a_{12}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})} \quad (14.27),\quad y_2^* = \frac{a_{11}-a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})} \quad (14.28)$$

$$V_G = \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})} \quad (14.29)$$

- 例：求解矩阵对策G={S_1,S_2;A}，其中 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$
- 解：显然A没有鞍点。

由通解公式(14.25)~(14.29)计算得到：

$$x^* = (1/2, 1/2)^T;$$

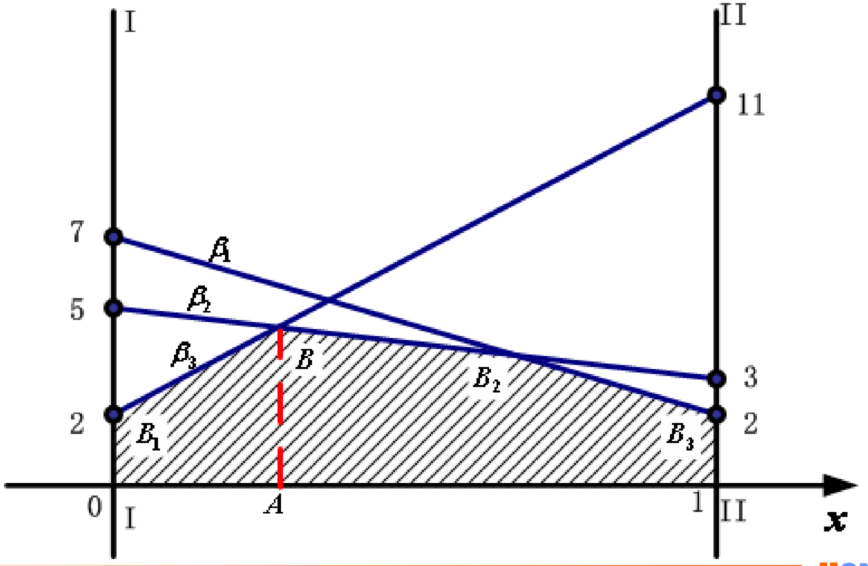
$$y^* = (1/4, 3/4)^T;$$

$$V_G = 5/2$$

14.3 矩阵对策的解法(cont.)

– 图解法

- 一般用于赢得矩阵为2×n或m×2阶的对策上特别方便，也可以用于3×n或m×3对策上。但对m和n均大于3的矩阵对策不适用。
- 例：考虑矩阵对策G={S_1,S_2;A}，其中 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$
- 解：设局中人I的混合策略为$(x,1-x)^T$，x∈[0,1]。过数轴上坐标为O和1的两点分别做两条垂线I-I和II-II，垂线上点的纵坐标值分别表示局中人I采取纯策略α_1和α_2时，局中人II采取各纯策略时的赢得值。



14.3 矩阵对策的解法(cont.)

如上图所示，当局中人选择每一策略$(x,1-x)^T$时，他的最少可能的收入为由局中人II选择β_1，β_2，β_3时所确定的三条直线$2x+7(1-x)=V$、$3x+5(1-x)=V$、$11x+2(1-x)=V$在x处的纵坐标中的最小者，即折线$B_1BB_2B_3$所示。所以对于局中人I来说，他的最优选择是确定x使他的收入尽可能的多，从上图可以看出，按最小最大原则应选择x=OA，AB即为对策值。

联立经过B点的两条线段β_2，β_3的方程组，

$$\begin{cases} 3x+5(1-x)=V_G \\ 11x+2(1-x)=V_G \end{cases}$$

易得x=3/11，V_G=49/11。局中人I的最优策略为$x^*=(3/11,8/11)^T$。

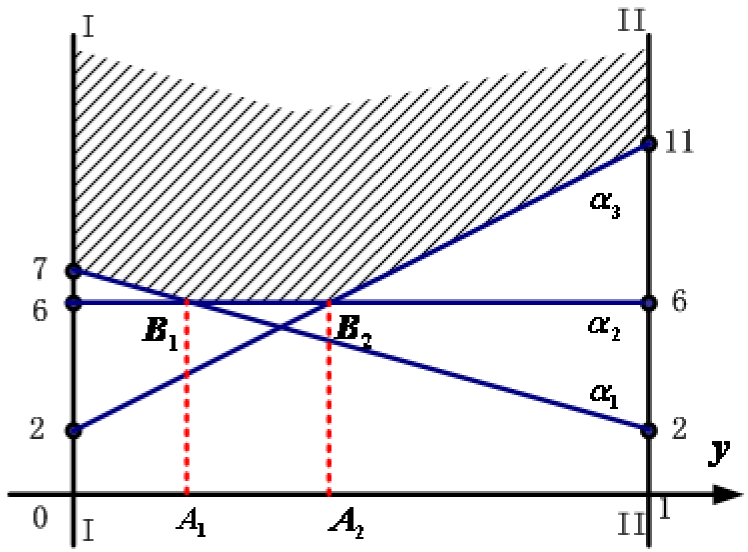
从图中还可以看出，局中人II的最优混合策略只由β_2，β_3组成。根据定理6，可由方程组

$$\begin{cases} 3y_2+11y_3=49/11 \\ 5y_2+2y_3=49/11 \\ y_2+y_3=1 \end{cases}$$

求得，局中人II的最优混合策略为$y^*=(0,9/11,2/11)^T$。

14.3 矩阵对策的解法(cont.)

- 例：用图解法求解矩阵对策G={S_1,S_2;A}，其中 $A=\begin{bmatrix}2 & 7\\ 6 & 6\\ 11 & 2\end{bmatrix}$
- 解：用图解法，设局中人II的混合策略为$(y,1-y)^T$。



根据最不利的情况中选取最有利的原则，局中人II的最优选择就是使三个纵坐标值中的最大值尽可能的小。由左图可见，应选择：$OA_1 \le y \le OA_2$

且对策的值显然为6。由下面方程求得：

$$\begin{cases} 2y+7(1-y)=6 \\ 11y+2(1-y)=6 \end{cases}$$

$OA_1=1/5$，$OA_2=4/9$。故局中人II的最优混合策略是$y^*=(y,1-y)^T$，其中$1/5\le y\le 4/9$，而局中人I的最优策略显然只能是$(0,1,0)^T$，即取纯策略α_2。

14.3 矩阵对策的解法(cont.)

- 例：求解赢得矩阵 $A=\begin{bmatrix} 4 & 8/3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ 的矩阵对策。
- 解：

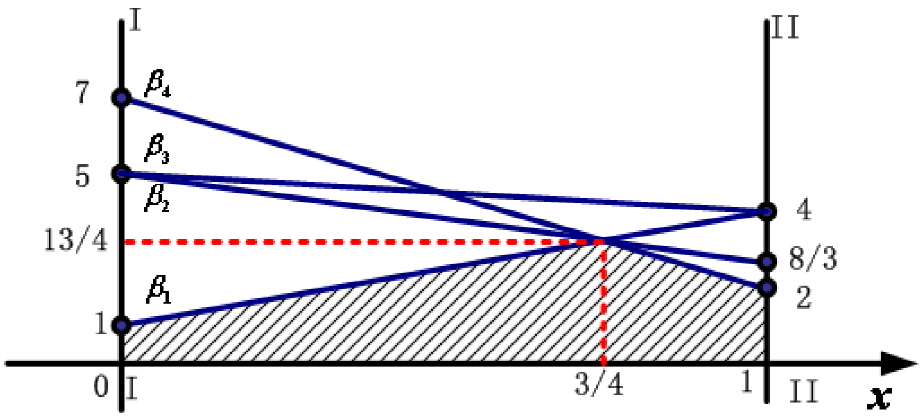
首先利用优超原则，第2列优超于第3列，故可划去第3列，又因2/3×(第4列)+1/3×(第1列)=第2列，故可划去第2列，故赢得矩阵化为：

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

此时可根据公式法求解，得原对策地一个解为：

$$x^*=(3/4,1/4)^T, y^*=(5/8,0,0,3/8)^T, V_G=13/4$$

若用图解法，则：可见局中人I的最优策略为$x^*=(3/4,1/4)^T$，且显然局中人II的最优混合策略只由β_1，β_2，β_4组成。



14.3 矩阵对策的解法(cont.)

由以下联立方程得：$\begin{cases} 4y_1 + 8/3y_2 + 2y_4 = 13/4 \\ y_1 + 5y_2 + 7y_4 = 13/4 \\ y_1 + y_2 + y_4 = 1 \end{cases}$

- 满足该方程的解有无穷多个，故局中人II有无穷多个最优混合策略。
- 本例说明，利用优超原则化简赢得矩阵时，有可能将原矩阵对策的解也划去一些。这种情况在m和n均大于3时仍然可能发生。

– 线性方程组法

- 根据定理4，求解矩阵对策解的问题等价于求解不等式组

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij}x_i \geq v & j = 1,\cdots,n \\ \sum_i x_i = 1 \\ x_i \geq 0 & i = 1,\cdots,m \end{cases} \quad 和 \begin{cases} \sum_j a_{ij}y_j \leq v & i = 1,\cdots,m \\ \sum_j y_j = 1 \\ y_j \geq 0 & j = 1,\cdots,n \end{cases}$$

- 又根据定理5和6，如果假设最优策略中的x_i^*和y_i^*均不为零，即可将上述两个不等式组的求解转化为求解下面两个方程组的问题：

14.3 矩阵对策的解法(cont.)

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij}x_i = v & j=1,\cdots,n \\ \sum_i x_i = 1 \end{cases} \qquad (14.30)$$

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij}y_j = v & i=1,\cdots,m \\ \sum_j y_j = 1 \end{cases} \qquad (14.31)$$

- 如果上面方程组存在非负解x*和y*，则便求得了对策的一个解(x*,y*)。如果由上述方程组求出的解x*和y*中有负分量，则可视情况将上述两个方程组中的某些等式改为不等式，继续试算求解，直至求出对策的解。
- 例：求解矩阵对策“田忌赛马”。
- 解：已知齐王的赢得矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

易知，A没有鞍点，即对齐王和田忌来说都不存在最优纯策略。设齐王和田忌的最优混合策略为：

$x^*=(x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*,x_5^*,x_6^*)$

$y^*=(y_1^*,y_2^*,y_3^*,y_4^*,y_5^*,y_6^*)$

从矩阵A的元素来看每个局中人选取每个纯策略的可能性都是存在的，故可事先假定：$x_i^*>0$， $y_j^*>0$，i=1,…,6，j=1,…,6。

14.3 矩阵对策的解法(cont.)

求解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-x_4+x_5+x_6=v \\ x_1+3x_2-x_3+x_4+x_5+x_6=v \\ x_1+x_2+3x_3+x_4-x_5+x_6=v \\ x_1+x_2+x_3+3x_4+x_5-x_6=v \\ x_1-x_2+x_3+x_4+3x_5+x_6=v \\ -x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+3x_6=v \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=1 \end{cases} \quad (14.32)\text{和} \begin{cases} 3y_1+y_2+y_3+y_4+y_5-y_6=v \\ y_1+3y_2+y_3+y_4-y_5+y_6=v \\ y_1-y_2+3y_3+y_4+y_5+y_6=v \\ -y_1+y_2+y_3+3y_4+y_5+y_6=v \\ y_1+y_2-y_3+y_4+3y_5+y_6=v \\ y_1+y_2+y_3-y_4+y_5+3y_6=v \\ y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6=1 \end{cases} \quad (14.33)$$

得到：x_i=1/6，i=1,⋯,6；y_j=1/6，j=1,⋯,6；v=1。

- 可见双方都以1/6的概率选取每个纯策略，或者说每个纯策略被选取的机会是均等的。总的结局应该是：齐王有5/6的机会赢田忌，赢得的期望值是1千金。但是，如果齐王在每出一批马前将自己的选择告诉了对方，这实际上等于公开了自己的策略(例如出马顺序为：上中下)，则田忌可以根据谋士孙膑的意见(下上中)应对，结果田忌反而赢得1千金。
- 因此在矩阵对策不存在鞍点时，竞争的双方在开局前均应对自己的策略（实际上是纯策略）加以保密，否则不保密的一方是要吃亏的。

14.3 矩阵对策的解法(cont.)

- 例：某厂用三种不同的设备α_1，α_2，α_3加工三种不同的产品 β_1，β_2，β_3。已知三种设备分别加工三种产品时，单位时间内创造的价值由下表给出，出现负值是由于设备的消耗大于创造出的价值。试求出一个合理的加工方案。

		被加工产品		
		β_1	β_2	β_3
使用设备	α_1	3	-2	4
	α_2	-1	4	2
	α_3	2	2	6

- 解：此问题可以看作一个矩阵对策问题，并易知没有鞍点。

赢得矩阵为：$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ 根据定理7化简可得：$A'=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

求A’的矩阵对策G’，为此求解以下等式组：

14.3 矩阵对策的解法(cont.)

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = v' \\ -4x_1 + 2x_2 = v' \\ 2x_1 + 4x_3 = v' \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad (14.34)\text{和} \begin{cases} y_1 - 4y_2 + 2y_3 = v' \\ -3y_1 + 2y_2 = v' \\ 4y_3 = v' \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases} \quad (14.35)$$

根据试算，上述等式组不存在非负解，将(14.34)中第3式取为不等式，将(14.35)中第1式取为不等式，转而求解：

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = v' \\ -4x_1 + 2x_2 = v' \\ 2x_1 + 4x_3 > v' \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad (14.36)\text{和} \begin{cases} y_1 - 4y_2 + 2y_3 < v' \\ -3y_1 + 2y_2 = v' \\ 4y_3 = v' \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases} \quad (14.37)$$

由定理6， (14.36)和(14.37)的解x*及y*中的分量$x_1^*=0$，$y_3^*=0$。将此结果代回上面两组不等式，得到$x_2^*=0$， $x_3^*=1$； $y_1^*=2/5$， $y_2^*=3/5$；v’ =0。

即原对策最优解为：$x^*=(0,0,1)^T$，$y^*=(2/5,3/5,0)^T$；对策值V_G=v’ +2=2。

- 线性规划方法
  - 由定理5已知，任一矩阵对策G={S_1,S_2;A}的求解均等价于一对互为对偶的线性规划问题，而定理4表明，对策G的解x*和y*等价于下面两个不等式组的解：

$$(I)\begin{cases}\sum_i a_{ij}x_i \geq v & j=1,\cdots,n \\ \sum_i x_i = 1 \\ x_i \geq 0 & i=1,\cdots,m\end{cases} \quad (14.42)\text{和}(II)\begin{cases}\sum_j a_{ij}y_j \leq v & i=1,\cdots,m \\ \sum_j y_j = 1 \\ y_j \geq 0 & j=1,\cdots,n\end{cases} \quad (14.43)$$

其中 $v=\max_{x\in S_1^*}\min_{y\in S_2^*}E(x,y)=\min_{y\in S_2^*}\max_{x\in S_1^*}E(x,y) \quad (14.44)$

就是对策的值V_G。

  - 定理11

设矩阵对策$G=\{S_1,S_2;A\}$的值为V_G，则

$$V_G=\max_{x\in S_1^*}\min_{1\leq j\leq n}E(x,j)=\min_{y\in S_2^*}\max_{1\leq i\leq m}E(i,y) \quad (14.45)$$

14.3 矩阵对策的解法(cont.)

- 证明：

因V_G是对策的值，故$V_G = \max\limits_{x \in S_1^*} \min\limits_{y \in S_2^*} E(x,y) = \min\limits_{y \in S_2^*} \max\limits_{x \in S_1^*} E(x,y)$ (14.46)

一方面，任给$x \in S_1^*$，有$\min\limits_{1 \le j \le n} E(x,j) \ge \min\limits_{y \in S_2^*} E(x,y)$

故$\max\limits_{x \in S_1^*} \min\limits_{1 \le j \le n} E(x,j) \ge \max\limits_{x \in S_1^*} \min\limits_{y \in S_2^*} E(x,y)$ (14.47)

另一方面，任给$x \in S_1^*$，$y \in S_2^*$，有

$$E(x,y) = \sum_{j=1}^{n} E(x,j) \cdot y_j \ge \min_{1 \le j \le n} E(x,j)$$

故$\min\limits_{y \in S_2^*} E(x,y) \ge \min\limits_{1 \le j \le n} E(x,j)$

$\max\limits_{x \in S_1^*} \min\limits_{y \in S_2^*} E(x,y) \ge \max\limits_{x \in S_1^*} \min\limits_{1 \le j \le n} E(x,j)$ (14.48)

由(14.47)和(14.48)得：$V_G = \max\limits_{x \in S_1^*} \min\limits_{1 \le j \le n} E(x,j)$

同理可证$V_G = \min\limits_{y \in S_2^*} \max\limits_{1 \le i \le m} E(i,y)$。证毕。

14.3 矩阵对策的解法(cont.)

- 求解矩阵对策得线性规划方法:
  - 根据定理7作变换： $x_i' = x_i / v \quad i = 1, \cdots, m$，设$v > 0 \quad (14.49)$
  - 则不等式组(14.42)变为：

$$(I)\begin{cases}\sum_i a_{ij} x_i \geq v & j = 1, \cdots, n \\ \sum_i x_i = 1 & \\ x_i \geq 0 & i = 1, \cdots, m\end{cases} \quad (14.42) \Rightarrow (I') \begin{cases}\sum_i a_{ij} x_i' \geq 1 & j = 1, \cdots, n \\ \sum_i x_i' = 1/v & \\ x_i' \geq 0 & i = 1, \cdots, m\end{cases} \quad (14.50)$$

  - 根据定理11: $v = \max_{x \in S_1^*} \min_{1 \leq j \leq n} \cdot \sum_i a_{ij} x_i$
  - 则不等式组(I’)等价于线性规划问题:

$$(P) \begin{cases}\min z = \sum_i x_i' \\ \sum_i a_{ij} x_i' \geq 1 \quad j = 1, \cdots, n \quad (14.51) \\ x_i' \geq 0\end{cases}$$

14.3 矩阵对策的解法(cont.)

- 同理，作变换 $y_j' = y_j / v \quad j = 1, \cdots, n \quad (14.52)$
- 则不等式组(14.43)变为：

$$(II)\begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j \le v & i = 1, \cdots, m \\ \sum_j y_j = 1 & \\ y_j \ge 0 & j = 1, \cdots, n \end{cases} \qquad (14.43) \Rightarrow (II') \begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j' \le 1 & i = 1, \cdots, m \\ \sum_j y_j' = 1/v & \\ y_j' \ge 0 & j = 1, \cdots, n \end{cases} \qquad (14.53)$$

- 由定理11得 $v = \min_{y \in S_2^*} \max_{1 \le i \le m} \sum_j a_{ij} y_j$
- 则不等式组(II’)等价于线性规划问题

$$(D) \begin{cases} \max w = \sum_j y_j' & \\ \sum_j a_{ij} y_j' \le 1 & i = 1, \cdots, m \quad (14.54) \\ y_j' \ge 0 & j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

14.3 矩阵对策的解法(cont.)

- 显然，问题(P)和(D)是互为对偶的线性规划，故可利用单纯形或对偶单纯形法求解。
- 在求解时一般先求问题(D)的解，因为这样容易在迭代的第一步就找到第一个基本可行解，而问题(P)的解从问题(D)的最后一个单纯形表上即可得到。当求得问题(D)和(P)的解后，利用变换(14.49)和(14.52)即可求出原对策问题的解及对策的值。
- 例：利用线性规划方法求解赢得矩阵为 $A'=\begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{bmatrix}$ 的矩阵对策。(该矩阵即为前面迭代法举例中的赢得矩阵)
- 解：问题可化为以下两个互为对偶的线性规划问题。

$$(P)\begin{cases} \min(x_1+x_2+x_3) \\ 7x_1+2x_2+9x_3 \geq 1 \\ 2x_1+9x_2 \qquad \geq 1 \\ 9x_1 \qquad +11x_3 \geq 1 \\ x_1,x_2,x_3 \geq 0 \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} \max(y_1+y_2+y_3) \\ 7y_1+2y_2+9y_3 \leq 1 \\ 2y_1+9y_2 \qquad \leq 1 \\ 9y_1 \qquad +11y_3 \leq 1 \\ y_1,y_2,y_3 \geq 0 \end{cases}$$

- 利用单纯形方法求解问题(D):

14.3 矩阵对策的解法(cont.)

- 问题(D)的解为：$\begin{cases} y = (1/20, 1/10, 4/80)^T = (1/20, 1/10, 1/20)^T \\ w = 16/80 \end{cases}$
- 最后一个单纯形表可得问题(P)得解：

$$\begin{cases} x = (4/80, 8/80, 4/80)^T = (1/20, 1/10, 1/20)^T \\ z = 16/80 \end{cases}$$

- 于是

$$V_{G'} = 80/16 = 5$$

$$x^* = V_{G'} \cdot (1/20, 1/10, 1/20)^T = (1/4, 1/2, 1/4)^T$$

$$y^* = V_{G'} \cdot (1/20, 1/20, 1/20)^T = (1/4, 1/2, 1/4)^T$$

- 可将该结果同迭代法获得的近似结果进行对比。

迭代法*

– 迭代法

- 迭代法是求解矩阵对策的一种近似方法。
- 基本思想是：假设两个局中人反复对策多次，在每一局中各局中人都从自己的策略集中选取一个使对方获得最不利结果的纯策略，即第**k**局对策纯策略的选择欲使对手在前**k-1**局中的累计所得**(**所失**)**最少**(**最多**)**。
- 具体做法是：

  第一局，从两个局中人中任选一个，例如**I**，让他采取任意一个纯策略例如α_i。然后局中人**II**随之采取某纯策略β_j，使采取了α_i的局中人**I**的所得为最少；

  第二局，局中人**I**认为局中人**II**还将采取β_j，故采取某一策略α_l使局中人**II**的所失最多。然后局中人**II**采取某一策略，使局中人**I**在这两局中的累计赢得为最少；

  第三局，局中人**I**采取某一策略使局中人**II**在前两局中累计所失最多。然后局中人**II**采取某一策略，使局中人**I**在这三局中的累计赢得为最少；

  反复迭代，直至结果达到某一满意程度。迭代结束时，用局中人各纯策略在已进行的**N**局对策中出现的频率分布作为最优混合策略中概率分布的一个近似。

14.3 矩阵对策的解法(cont.)

- 例：两个局中人对策，规则是二人互相独立的各自从1、2、3这三个数中任意选写一个数字。如果二人所写数字之和是偶数，则局中人II付给局中人I以数量为此和数的报酬；如果二人所写数字之和是奇数，则局中人I付给局中人II以数量为此和数的报酬。试求出此对策的解。
- 解：局中人I的赢得矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ -3 & 4 & -5\\ 4 & -5 & 6\end{bmatrix}$$

为了求解方便，将A的各元素都+5，得到新的对策矩阵

$$A'=\begin{bmatrix}7 & 2 & 9\\ 2 & 9 & 0\\ 9 & 0 & 11\end{bmatrix}$$

假设局中人I在第1局中先取策略α_3，则赢得情况为：

局数1	局中人I	β_1	β_2	β_3
1	α_3	9	0	11
累计所得		9	$\underline{0}$	11

其中以0为最少，故局中人II选择策略β_2

局数1	局中人II	α_1	α_2	α_3
1	β_2	2	9	0
累计所失		2	$\overline{9}$	0

14.3 矩阵对策的解法(cont.)

其中9为最多，故局中人I在第2局将出策略α_2:

局数1	局中人I	β_1	β_2	β_3
1	α_3	9	0	11
2	α_2	2	9	0
累计所得		11	$\underline{9}$	11

其中9为最少，故局中人II在第2局将选择策略β_2:

局数1	局中人II	α_1	α_2	α_3
1	β_2	2	9	0
2	β_2	2	9	0
累计所失		4	$\overline{18}$	0

其中以18最多，故局中人I在下一局选择策略α_2，以下各局的计算相同，主要是要计算出以往对策得失的累计值，做为下一步选取策略的依据。计算到第N局时，可以在局中人I的累计赢得值中最小值上划下划线；在局中人II的累计损失值中最大值上划上划线。如果有两个以上的最小值（最大值），则可以在其中任一值上划线；当仅有两个相同时，一般应在不同于最近一次出过的策略所对应的最小值下面划线。

14.3 矩阵对策的解法(cont.)

- 局中人I的前N局累计所得中最小值除以对策局数N，用$\underline{V}_N$表示。设在前N局中，局中人I取α_1，α_2，α_3的次数分别为k_1，k_2，k_3，则

$$\underline{V}_N=\left(\min_{1\le j\le 3}\sum_{i=1}^{3}a_{ij}k_i\right)/N \quad (14.38)$$

局中人II的前N局累计所失中最大值除以对策局数N，用$\overline{V}_N$表示。设在前N局中，局中人II取β_1，β_2，β_3的次数分别为l_1，l_2，l_3，则

$$\overline{V}_N=\left(\max_{1\le i\le 3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}l_j\right)/N \quad (14.39)$$

记$V_N=\dfrac{\underline{V}_N+\overline{V}_N}{2}$，称为对策的平衡赢得，即可作为对策的近似值。

本例中，$N=30$，局中人I取α_1，α_2，α_3的次数分别为8,15,7，

局中人II取β_1，β_2，β_3的次数分别为6,15,9，则

$$x^*=(8/30,15/30,7/30)^T\approx(0.267,0.500,0.233)^T$$

$$y^*=(6/30,15/30,9/30)^T\approx(0.200,0.500,0.300)^T$$

新对策的值约为5.04，故原对策的值近似为零。

14.3 矩阵对策的解法(cont.)

- 若记对策的值为V_G，则对任意的N，有

$$\underline{V}_N \le V_G \le \overline{V}_N \quad (14.41)$$

- 理论上已经证明：如果上述迭代过程不断进行下去，则平均赢得V_N将趋于对策的值V_G，各策略的频率分布将趋于最优策略的概率分布。即：

若记在N局对策中局中人I出$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$的次数分别为$k_1,\cdots,k_m$，局中人II取$\beta_1,\cdots,\beta_n$的次数分别为$l_1,\cdots,l_n$，

$$x_N=(k_1/N,\cdots,k_m/N)^T,\ y_N=(l_1/N,\cdots,l_n/N)^T$$

则$\{x_N\}$的每一收敛子列都收敛于局中人I的一个最优策略，$\{y_N\}$的每一收敛子列都收敛于局中人II的一个最优策略。

本章完