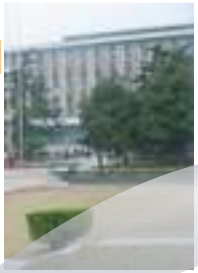
Computer Science and Technology



运 筹 学

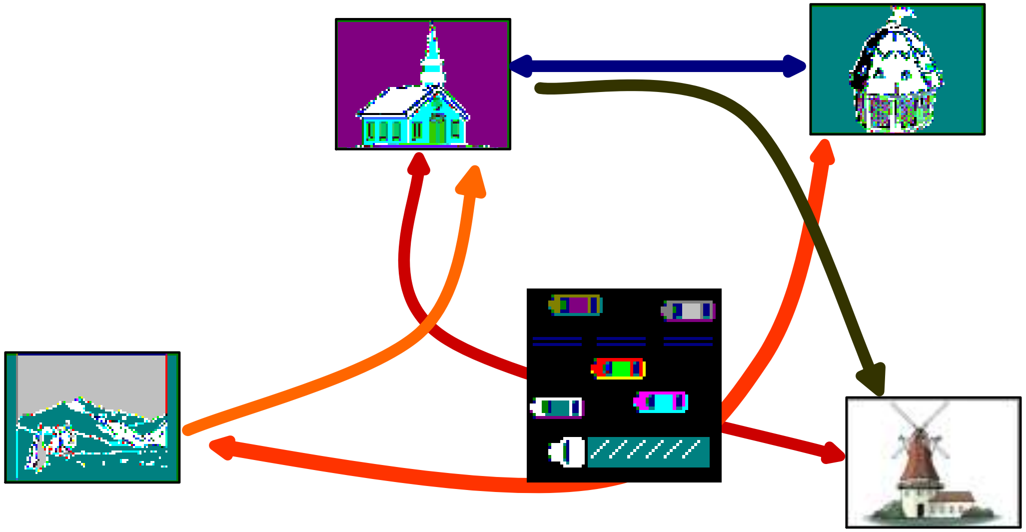
中国科学技术大学
1958—2008

运输问题

Chp.4 Transportation Problem

4.1 运输问题简介

- 运输问题（Transportation Problem）
  - 人们在从事生产活动中，不可避免地要进行物资调运工作。如某时期内将生产基地的煤、钢铁、粮食等各类物资，分别运到需要这些物资的地区，根据各地的生产量和需要量及各地之间的运输费用，如何制定一个运输方案，使总的运输费用最小。这样的问题称为运输问题。



4.1 运输问题简介(cont.)

- 运输问题是一种特殊的线性规划问题，它们的约束方程组的系数矩阵具有特殊的结构，有可能找到比单纯形法更为简便的求解方法。
- 运输问题的特征：
  - 每一个出发地都有一定的供应量（supply）配送到目的地，每一个目的地都有需要一定的需求量（demand），接收从出发地发出的产品。
  - 需求假设（The Requirements Assumption）：
    - 每一个出发地都有一个固定的供应量，所有的供应量都必须配送到目的地。与之相类似，每一个目的地都有一个固定的需求量，整个需求量都必须由出发地满足，即：

总供应量＝总需求量

4.1 运输问题简介(cont.)

- 可行解特性（**The Feasible Solutions Property**）：
  - 当且仅当供应量的总和等于需求量的总和时，运输问题才有可行解。
- 成本假设（**The Cost Assumption**）：
  - 从任何一个出发地到任何一个目的地的货物配送成本和所配送的数量成线性比例关系，因此这个成本就等于配送的单位成本乘以所配送的数量。
- 整数解性质（**Integer Solutions Property**）：
  - 只要它的供应量和需求量都是整数，任何有可行解的运输问题必然有所有决策变量都是整数的最优解。因此，没有必要加上所有变量都是整数的约束条件。

4.2 运输问题的数学模型

- 经典运输问题
  - 例4.1

表4.1

销售商 / 供应商	Boston	Chicago	St. Louis	Lexington	生产能力(吨)
Cleveland	3	2	7	6	5,000
Bedford	7	5	2	3	6,000
York	2	5	4	5	2,500
需求量(吨)	6,000	4,000	2,000	1,500	

每吨运输成本($/吨)

4.2 运输问题的数学模型(cont.)

– 例4.1的网络图表示：

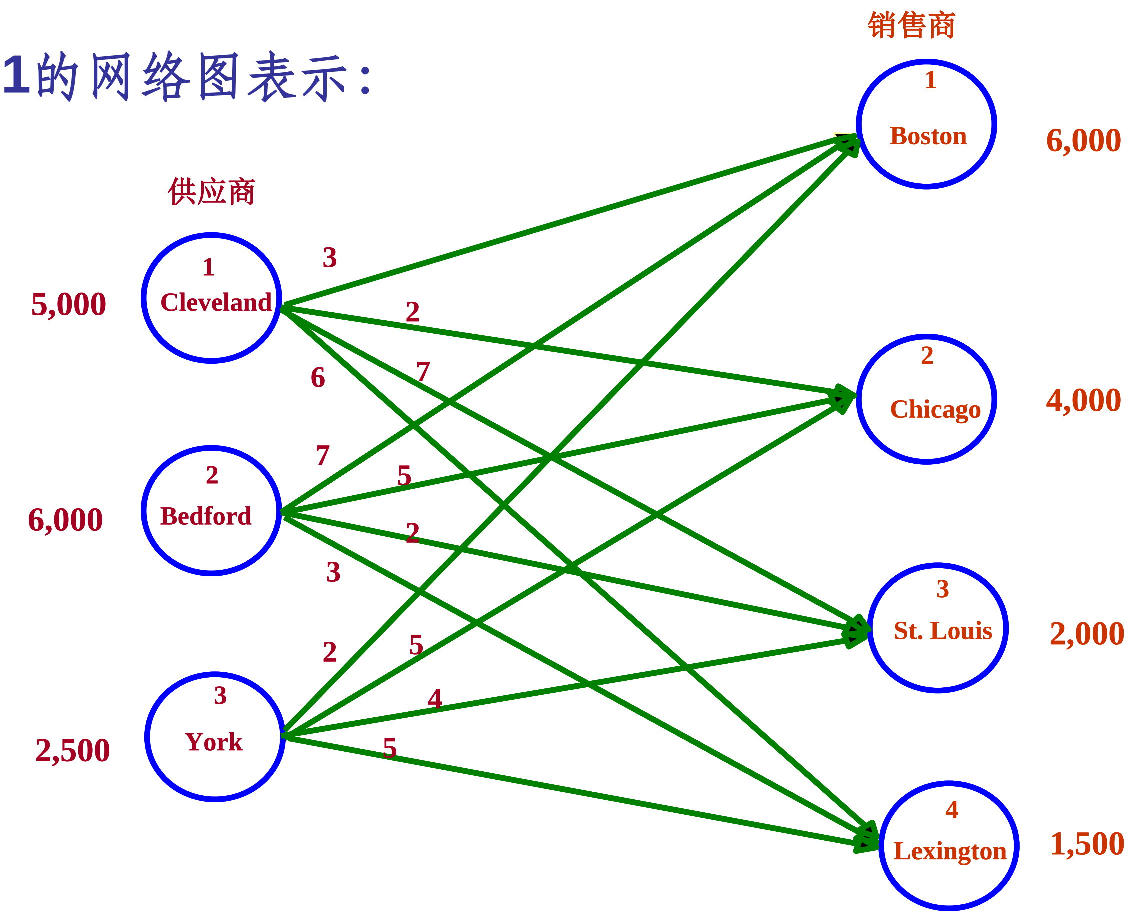


图4.1

4.2 运输问题的数学模型(cont.)

– 例4.1的数学模型

$$\min z = 3x_{11}+2x_{12}+7x_{13}+6x_{14}+7x_{21}+5x_{22}+2x_{13}+3x_{24}+2x_{31}+5x_{32}+4x_{33}+5x_{34}$$

$$\left.\begin{array}{l}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} \le 5000 \\
x_{21}+x_{22}+x_{13}+x_{24} \le 6000 \\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} \le 2500
\end{array}\right\} \text{供应地约束}$$

$$\left.\begin{array}{l}
x_{11}+x_{21}+x_{31} = 6000 \\
x_{12}+x_{22}+x_{32} = 4000 \\
x_{13}+x_{23}+x_{33} = 2000 \\
x_{14}+x_{24}+x_{34} = 1500
\end{array}\right\} \text{需求地约束}$$

$$x_{ij} \ge 0$$

4.2 运输问题的数学模型(cont.)

– 例4.1的表格表示

	1	2	3	4	
1	3 x_{11}	2 x_{12}	7 x_{13}	6 x_{14}	5000
2	7 x_{21}	5 x_{22}	2 x_{23}	3 x_{24}	6000
3	2 x_{31}	5 x_{32}	4 x_{33}	5 x_{34}	2500
	6000	4000	2000	1500	

4.2 运输问题的数学模型(cont.)

- 由上例推广得到运输问题的数学模型：

已知有m个生产地点A_i，$i=1,2,\cdots,m$。可供应某种物资，其供应量（产量）分别为a_i，$i=1,2,\cdots,m$。有n个销地B_j，$j=1,2,\cdots,n$，其需要量分别为b_j，$j=1,2,\cdots,n$。从A_i到B_j运输单位物资的运价（单价）为c_{ij}，见产销平衡表和单位运价表：

表4.2 产销平衡表

产地＼销地	$1,2,\cdots,n$	产量
1		a_1
2		a_2
$\vdots$		$\vdots$
m		a_m
销量	$b_1,b_2,\cdots,b_n$	

表4.3 单位运价表

产地＼销地	$1,2,\cdots,n$			
1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}
2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}

有时可将两表合而为一。

4.2 运输问题的数学模型(cont.)

若用x_{ij}表示从A_i到B_j的运量，那么在产销平衡的条件下，

要求得总运费最小的调运方案，可求解以下数学模型：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,2,\cdots,m$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\begin{array}{cc}
\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{matrix} & \\
\left[\begin{matrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1
\end{matrix}\right] &
\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{m行} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{n行} \end{matrix}
\end{array}$$

– 上式就是运输问题的数学模型。它包含m×n个变量，(m+n)个约束方程。其系数矩阵的结构比较松散且特殊。（见上图）

4.2 运输问题的数学模型(cont.)

- 该系数矩阵中对应于变量x_{ij}的系数向量P_{ij}，其分量中除第i个和第$m+j$个为1以外，其余的都为0。即：

$$P_{ij}=(0\ldots1\ldots1\ldots0)^T=e_i+e_{m+j}$$

- 对产销平衡的运输问题，由于有以下关系式存在：

$$\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{m}a_j$$

所以模型最多只有$m+n-1$个独立约束方程。

即系数矩阵的秩$\le m+n-1$。

4.3 表上作业法——初始解的求法

- 表上作业法是单纯形法在求解运输问题时的一种简化方法，其实质是单纯形法。
- 表上作业法步骤如下：
  - 1)找出初始基可行解——在（m×n）产销平衡表上给出m+n-1个数字格；
  - 2)求各非基变量的检验数——在表上计算空格的检验数，判别是否为最优解，是则停止运算，否则转到下一步；
  - 3)确定换入变量和换出变量，找出新的基可行解——在表上用闭回路法调整；
  - 4)重复上述步骤2)和3)直到得到最优解。

4.3 表上作业法——初始解的求法(cont.)

– 例4.2 某公司的加工厂以及销售点的产销平衡表和单位运价表如下表，问公司应如何调运产品，在满足各销点的需要量的前提下使总运费最少。

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2					4
A_3					9
销量	3	6	5	6	

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

- 解：步骤1：确定初始解可行解。

因：$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = d$

必存在$x_{ij} \geq 0,\ i = 1,2,\cdots,m,\ j = 1,2,\cdots,n$

且$0 \leq x_{ij} \leq \min(a_i, b_j)$

所以产销平衡的运输问题总是存在可行解，且存在最优解。

4.3 表上作业法——初始解的求法(cont.)

- 确定初始基可行解的方法有三种：西北角法，最小元素法和伏格尔（Vogel）法。

在初始解越好，目标值越小的意义下，这三种方法在产生的初始基可行解的“质量”上有所差别。一般来说，Vogel法能够产生最好的初始基可行解，西北角法产生的初始解最差，但同时，西北角法所需要的计算量最少。

- 西北角法*(见附录1)
- 最小元素法：
  - 基本思想：就近供应，即从单位运价表中最小的运价开始确定供销关系，然后次小，一直到给出初始基可行解为止。
  - 上例中，找出运价最小的为1，表示先将A2的产品供应给B1，A2的产量为4，除了供应B1的3吨产品外，还剩余1吨。B1的需求得到满足，将B1列运价表划去，得到：

4.3 表上作业法——初始解的求法(cont.)

产地＼销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1					7
A2	3				1
A3					9
销量	0	6	5	6	

产地＼销地	B1	B2	B3	B4
A1	3	11	3	10
A2	1×	9	2	8
A3	7	4	10	5

- 找出其余运价最小的为2，即将A2的产品供应给B3，A2还剩余1吨产品，B3还需求4吨，A2可供应为0，将A2行划去得下表：

产地＼销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1					7
A2	3		1		0
A3					9
销量	0	6	4	6	

产地＼销地	B1	B2	B3	B4
A1	3	11	3	10
~~A2~~	~~1×~~	~~9~~	~~2×~~	~~8~~
A3	7	4	10	5

4.3 表上作业法——初始解的求法(cont.)

- 运价最小为3，即将A1的产品供应给B3，B3得到满足，将B3列运价表划去，得下表：

产地 销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1			4		3
A2	3		1		0
A3					9
销量	0	6	0	6	

产地 销地	B1	B2	B3	B4
A1	3	11	3×	10
~~A2~~	~~1×~~	~~9~~	~~2×~~	~~8~~
A3	7	4	10	5

- 循环进行计算，直至单位运价表上的元素被划去为止：

产地 销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1			4		3
A2	3		1		0
A3		6			3
销量	0	0	0	6	

产地 销地	B1	B2	B3	B4
A1	3	11	3×	10
~~A2~~	~~1×~~	~~9~~	~~2×~~	~~8~~
A3	7	4×	10	5

4.3 表上作业法——初始解的求法(cont.)

A1 A2 A3	3	6	4 1	3	3 0 0
销量	0	0	0	3	

A1	3	11	3×	10
~~A2~~	~~1×~~	~~9~~	~~2×~~	~~8~~
~~A3~~	~~7~~	~~4×~~	~~10~~	~~5×~~

A1 A2 A3	3	6	4 1	3 3	0 0 0
销量	0	0	0	0	

~~A1~~	~~3~~	~~11~~	~~3×~~	~~10×~~
~~A2~~	~~1×~~	~~9~~	~~2×~~	~~8~~
~~A3~~	~~7~~	~~4×~~	~~10~~	~~5×~~

- 此时得到调运方案：4×3+3×10+3×1+1×2+6×4+3×5=86元

– 注意：
  - 用最小元素法给出初始解时，有可能在产销平衡表上填入一个数字后，在单位运价表上同时划去一行一列，这时就出现退化，将在后面讨论。
  - 最小元素法的缺点是：为了节省一处的费用，有时造成在其它处要多花好几倍的费用。

4.3 表上作业法——初始解的求法(cont.)

– 伏格尔法：
  - 一般来说，伏格尔法是最小费用法的改进版。
  - 一产地的产品假如不能按最小运费就近供应，就考虑次小运费，这就有一个差额（惩罚量）。差额越大，说明不能按最小运费调运时运费增加越多，因而对差额最大处就应当采用最小运费调运。
  - 仍以例4.2说明：先调查各行各列的最小运费和次小运费的差额，从差额中选取最大者对应的最小元素：

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	行差额
A1	3	11	3	10	0
A2	1	9	2	8	1
A3	7	4×	10	5	1
列差额	2	5	1	3	

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1					7
A2					4
A3		6			3
销量	3	0	5	6	

4.3 表上作业法——初始解的求法(cont.)

- 重新计算差额，从行或列差额中选取最大者再次计算：

产地＼销地	B1	B2	B3	B4	行差额
A1	3	11	3	10	0
A2	1	9	2	8	1
A3	7	4×	10	5×	2
列差额	2	5	1	3	

产地＼销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1					7
A2					4
A3		6		3	0
销量	3	0	5	3	

A1	3	11	3	10	0
A2	1×	9	2	8	1
~~A3~~	~~7~~	~~4×~~	~~10~~	~~5×~~	~~2~~
列差额	2	5	1	2	

A1					7
A2	3				1
A3		6		3	0
销量	0	0	5	3	

A1	3	11	3×	10	7
A2	1×	9	2	8	6
~~A3~~	~~7~~	~~4×~~	~~10~~	~~5×~~	~~2~~
列差额	2	5	1	2	

A1			5		2
A2	3				1
A3		6		3	0
销量	0	0	0	3	

4.3 表上作业法——初始解的求法(cont.)

A1	3	11	3×	10	0
A2	1×	9	2	8×	0
~~A3~~	~~7~~	~~4×~~	~~10~~	~~5×~~	~~2~~
列差额	2	5	1	2	

A1			5		2
A2	3			1	0
A3		6		3	0
销量	0	0	0	2	

A1	3	11	3×	10×	0
~~A2~~	~~1×~~	~~9~~	~~2~~	~~8×~~	~~0~~
~~A3~~	~~7~~	~~4×~~	~~10~~	~~5×~~	~~2~~
列差额	2	5	1	2	

A1			5	2	0
A2	3			1	0
A3		6		3	0
销量	0	0	0	0	

- 伏格尔法得到的调运方案为：3×5+10×2+1×3+8×1+4×6+5×3=85
- 本例中伏格尔法给出的初始解即为最优解。
- 伏格尔法同最小元素法的区别在于确定供求关系的原则上不同，其余在计算步骤上相同。伏格尔法给出的初始解比用最小元素法给出的初始解更接近最优解。

4.3 表上作业法——初始解的求法(cont.)

- 用以上介绍的西北角法、最小元素法和伏格尔法给出的初始解都是运输问题的基可行解。
  - 以最小元素法为例，每在产销平衡表上填入一个数字，在运价表上就划去一行或一列。表中共有**m**行**n**列，总共可划**m+n**条直线。但当表中只剩一个元素时，填入这个数字时在运价表上同时划掉该元素对应的行和列，相应的在产销平衡表上填了**m+n-1**个数字，即给出了**m+n-1**个基变量的值。
  - 这**m+n-1**个基变量对应的系数列向量是线性独立的。
    - 证明：

若表中确定的第一个基变量$x_{i_1j_1}$对应的系数列向量为：$P_{i_1j_1}=e_{i_1}+e_{m+j_1}$

当选定$x_{i_1j_1}$的值后，将划去第i_1行或者第j_1列，即其后的系数列向量不再出现e_{i_1}或e_{m+j_1}，

因而$P_{i_1j_1}$不可能用解中的其他向量的线性组合表示。

类似，给出第二个，……，第$m+n-1$个，这$m+n-1$个向量都不可能用解中的其他向量的线性组合表示，因此它们是线性独立的。

4.3 表上作业法(cont.)

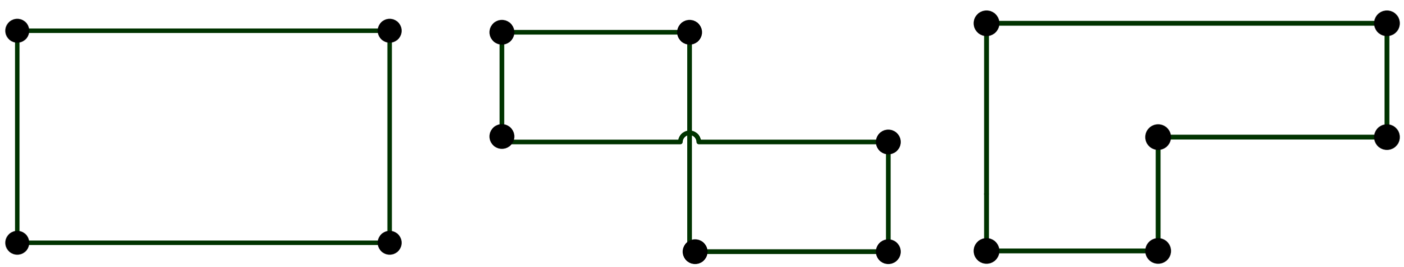
- 最优解的判别
  - 计算空格（非基变量）的检验数$c_{ij}-C_BB^{-1}P_{ij}$，i、$j\in N$。因运输问题的目标函数要求最小化，故当所有$c_{ij}-C_BB^{-1}P_{ij}\geq 0$时为最优解。
  - 求检验数的方法主要包括闭回路法和位势法两种。
- 闭回路法
  - 在初始调运方案表中，从任意空格（即非基变量）出发，沿着纵向或横向行进，遇到适当填有数据的方格90度转弯，继续行进，总能回到原来空格。每个空格一定存在并有唯一的闭回路。
  - m+n-1个数字格（基变量）对应的系数向量是一个基；任一空格（非基变量）对应的系数向量是这个基的线性组合。

4.3 表上作业法(cont.)

- 闭回路法

  称集合$\{x_{i_1j_1}, x_{i_1,j_2}, x_{i_2,j_2}, x_{i_2,j_3}, \cdots, x_{i_s,j_s}, x_{i_s,j_1}\}$ $(i_1, i_2, \cdots, i_s; j_1, j_2, \cdots, j_s)$互不相同为一个闭回路，集合中的变量称为闭回路的顶点，相邻两个变量的连线为闭回路的边。

  – 闭回路的顶点间用水平或垂直线段连接起来，组成一条封闭的回路，闭回路的顶点数一定是偶数。

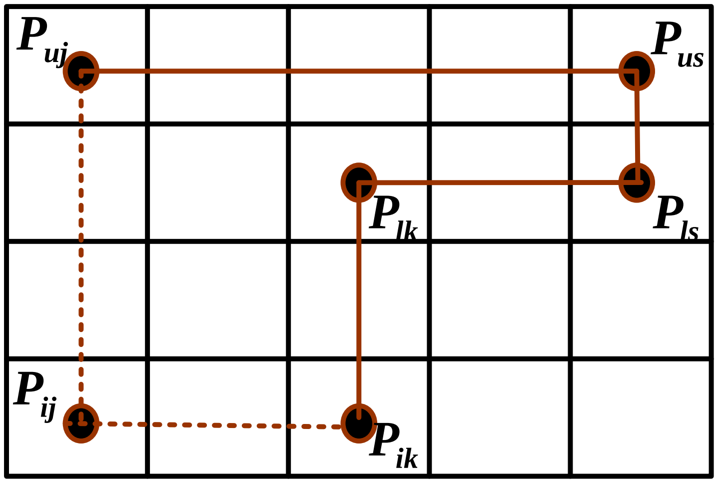


4.3 表上作业法(cont.)

- 若变量组中某一个变量是它所在行或列出现的唯一变量，则称它是关于变量组的孤立点。
  - 变量组A $\{x_{21}, x_{25}, x_{35}, x_{31}, x_{11}, x_{12}\}$
    不能组成一条闭回路，但其中包含闭回路 $\{x_{21}, x_{25}, x_{35}, x_{31}\}$
  - 变量组B $\{x_{33}, x_{32}, x_{12}, x_{11}, x_{21}\}$
    变量数是奇数，不是闭回路，其中也不包含闭回路
  - 变量组C $\{x_{21}, x_{23}, x_{12}, x_{11}, x_{32}, x_{33}\}$
    是一条闭回路，不含有孤立点。
- 显然，若一个变量组不包含任何闭回路，则变量组必有孤立点；一条闭回路中一定没有孤立点；有孤立点的变量组不一定没有闭回路。
- 将闭回路定义中的向量组写成列向量的形式并分别乘以正负号线性组合后等于零，即：

$$P_{i_1 j_1} - P_{i_1, j_2} + P_{i_2, j_2} - \cdots - P_{i_s, j_1} = 0$$

4.3 表上作业法(cont.)



$$P_{ij}=e_i+e_{m+j}=e_i+e_{m+k}-e_{m+k}+e_l-e_l+e_{m+s}-e_{m+s}+e_u-e_u+e_{m+j}$$

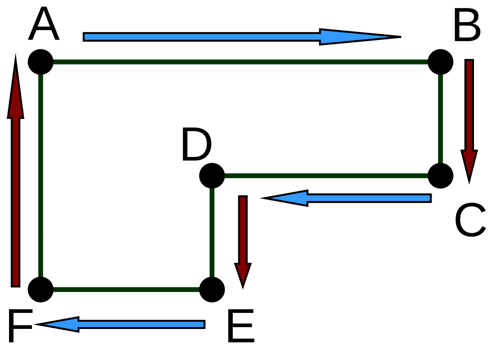
$$=(e_i+e_{m+k})-(e_l+e_{m+k})+(e_l+e_{m+s})-(e_u+e_{m+s})+(e_u+e_{m+j})$$

$$=P_{ik}-P_{lk}+P_{ls}-P_{us}+P_{uj}$$

其中P_{ij}、P_{ik}、P_{lk}、P_{ls}、P_{us}、$P_{uj}\in B$，而这些向量构成了闭回路。

4.3 表上作业法(cont.)

– 上式的直观含义：



$$AB - CD - EF = 0$$

$$BC + DE - FA = 0$$

– 由此可见，闭回路中的这组列向量线性相关。求解运输问题的一组基变量，就是要找到**m+n-1**个变量，使得他们对应的系数列向量线性无关。

4.3 表上作业法(cont.)

– 闭回路法的经济解释：

- 以例4.2中用最小元素法求得的初始解为例：可以从任一空格出发，如（A1,B1），若让A1的产品调运1吨给B1，为了保持产销平衡，就要依次做调整：在（A1,B3）处减少1吨，（A2,B3）处增加1吨，（A2,B1）处减少1吨，即构成了以（A1,B3）空格为起点，其它为数字格的闭回路。

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	(+1)		4(-1)	3	0
A2	3(-1)		1(+1)		0
A3		6		3	0
销量	0	0	0	0	

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

- 这种调整方案使运费增加：(+1)×3+(-1)×3+(+1)×2+(-1)×1=1元；将1填入(A1,B1)格就是检验数。

4.3 表上作业法(cont.)

- 按闭回路法可求得所有空格的检验数：

空格	闭回路	检验数
(11)	(11)→(13) →(23) →(21) →(11)	1
(12)	(12) →(14) →(34) →(32) →(12)	2
(22)	(22) →(23) →(13) →(14) →(34) →(32) →(22)	1
(24)	(24) →(23) →(13) →(14) →(24)	-1
(31)	(31) →(34) →(14) →(13) →(23) →(21) →(31)	10
(33)	(33) →(34) →(14) →(13) →(33)	12

- 一般的，当某个非基变量x_{ij}增加一个单位时，总费用的改变若小于零，则说明增加x_{ij}的值可以降低总费用，当前方案并非最优，需要对运输方案进行调整。

4.3 表上作业法(cont.)

- 位势法
  - 闭回路法的缺点：当产销点很多时，为每个空格找一条闭回路，这种计算很繁杂。位势法是根据对偶理论推导出来的一种方法。

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, j=1,2,\cdots,n\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, i=1,2,\cdots,m\\ x_{ij}\geq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\geq b_j, j=1,2,\cdots,n\\ -\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\geq -b_j, j=1,2,\cdots,n\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}\geq a_i, i=1,2,\cdots,m\\ -\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\geq -a_i, i=1,2,\cdots,m\\ x_{ij}\geq 0\end{cases}$$

设四个约束条件对应的对偶变量分别为u_i', u_i'', v_j', v_j'',

得到原问题的对偶问题：

$$\min \omega = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i' + \sum_{i=1}^{m} (-a_i u_i'') + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j' + \sum_{j=1}^{n} (-b_j v_j'')$$

$$\begin{cases} u_i' - u_i'' + v_j' - v_j'' \le c_{ij}, i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n \\ u_i', u_i'', v_j', v_j'' \ge 0 \end{cases}$$

设$u_i' - u_i'' = u_i, v_j' - v_j'' = v_j$,得到对偶问题的最终形式：

$$\min \omega = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

$$\begin{cases} u_i + v_j \le c_{ij}, i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n \\ u_i, v_j \text{无约束} \end{cases}$$

设$u_1,u_2,\cdots,u_m$；$v_1,v_2,\cdots,v_n$是对应运输问题的$m+n$个约束条件的对偶变量

从线性规划的对偶理论可知：$C_BB^{-1}=(u_1,u_2,\cdots,u_m;\ v_1,v_2,\cdots,v_n)$

而每个决策变量x_{ij}的系数向量$P_{ij}=e_i+e_{m+j}$，

所以$C_BB^{-1}P_{ij}=u_i+v_j$。

于是检验数$\sigma_{ij}=c_{ij}-C_BB^{-1}P_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$

由单纯形法得知所有基变量的检验数为0，即$c_{ij}-(u_i+v_j)=0, i、j\in B$。

上述方程组有$m+n$个未知变量，根据供求平衡的特点，

只有$m+n-1$个方程，其中有一个自由变量。

一般的，令$u_1=0$，就可得到一组解。

求解出u_i、v_j后，即根据$\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$，$i$、$j\in N$求出非基变量的检验数

这里称u_i、v_j为运输问题的对偶解,或称位势。

根据自由变量$u1$取值的不同，可以得到无穷多组解，

但所求得的检验数是唯一的。

4.3 表上作业法(cont.)

- 仍以上例最小元素法求得的初始解为例：

初始解中$x_{24}, x_{34}, x_{21}, x_{32}, x_{13}, x_{14}$是基变量，

这时对应的检验数是：

基变量　　检验数

$$u_1 = 0$$

基变量	检验数	
x_{24}	$c_{24} - (u_2 + v_4) = 0$	$8 - (u_2 + v_4) = 0$
x_{34}	$c_{34} - (u_3 + v_4) = 0$	$5 - (u_3 + v_4) = 0$
x_{21}	$c_{21} - (u_2 + v_1) = 0$	$1 - (u_2 + v_1) = 0$
x_{32}	$c_{32} - (u_3 + v_2) = 0$	$4 - (u_3 + v_2) = 0$
x_{13}	$c_{13} - (u_1 + v_3) = 0$	$3 - (u_1 + v_3) = 0$
x_{14}	$c_{14} - (u_1 + v_4) = 0$	$10 - (u_1 + v_4) = 0$

由以上方程组可求得$u_1 = 0, u_2 = -1, u_3 = -5, v_1 = 2, v_2 = 9, v_3 = 3, v_4 = 10$

根据$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j), i, j \in N$可求得非基变量的检验数。

4.3 表上作业法(cont.)

- 第一步：在最小元素法求得的初始解表格基础上，在初始解对应的位置填入单位运价（蓝色数字），并在其上增加一行一列，填入上面得到的u_i和v_j的值；
- 第二步：计算空格的检验数填入（红色数字）：

产地＼销地	B1		B2		B3		B4		u_i
A1	3	1	11	2	3	0	10	0	0
A2	1	0	9	1	2	0	8	－1	－1
A3	7	10	4	0	10	12	5	0	－5
v_j	2		9		3		10		

- 上表中还有负检验数，说明未得最优解，还可以改进。

4.3 表上作业法(cont.)

- 改进的方法——闭回路调整法
  - 若有两个或两个以上负检验数时，一般选其中最小的负检验数，以它对应的空格为调入格，即以它对应的非基变量为换入变量。
    - 以上例为例：可知（2，4）格为调入格，以此格为起点做闭回路：

产地　销地	B1	B2	B3	B4
A1			4(+1)/3	3(-1)/10
A2	3/1		1(-1)/2	(+1)
A3		6/4		3/5

    - 空格的调入量选择闭回路上具有(-1)的数字格中的最小者，即θ=min(1,3)=1，然后按照闭回路上的正负号，加入和减去此值，得到调整方案，并根据调整后的方案重新计算检验数：

4.3 表上作业法(cont.)

产地＼销地	B1		B2		B3		B4	
A1		0		2	5/3		2/10	
A2	3/1			2		1	1/8	
A3		9	6/4			12	3/5	

- 此时没有负检验数，说明达到最优解，此时总运费为：

  $1\times3+4\times6+3\times5+10\times2+8\times1+5\times3=85$ 元

- 表上作业法计算中的问题
  - 无穷多最优解
    - 是否有无穷多最优解的判别依据与第二章讲述的相同，即某个非基变量的检验数为0时该问题有无穷多最优解。
    - 以上例为例，（1，1）空格处的检验数为0，表明例1有无穷多最优解。

4.3 表上作业法(cont.)

- 以(1,1)为调入格，作闭回路：$(1,1)_+ \rightarrow (1,4)_- \rightarrow (2,4)_+ \rightarrow (2,1)_- \rightarrow (1,1)_+$，确定 θ=min(2,3)=2，经调整以后得到另一最优解：

产地　销地	B1	B2	B3	B4
A1	(+2)		5/3	2(-2)/10
A2	3(-2)/1			1(+2)/8
A3		6/4		3/5

产地　销地	B1	B2	B3	B4
A1	2/3		5/3	
A2	1/1			3/8
A3		6/4		3/5

- 此时调运花费：2×3+1×1+6×4+5×3+3×8+3×5=85元

4.3 表上作业法(cont.)

- 退化
  - 用表上作业法求解运输问题出现退化时，在相应格中一定要填入一个0，以表示此格为数字格。
  - step.1 当确定初始解的各供需关系时，若在（i，j）格填入某个数字后出现A_i处的余量等于B_j处的需量，这时填入数字后需要划去一行一列，为了使表上有m+n-1个数字格，这时需要添加一个0。它的位置可在对应的那行或那列的任一空格处。
  - 例：

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3	11	4	5	7
A2	7	7	3	8	4
A3	1	2	10	6	9
销量	3	6	5	6	

4.3 表上作业法(cont.)

产地＼销地	B1	B2	B3	B4
A1	3	11	4	5
A2	7	7	3	8
A3	1×	2×	10	6

产地＼销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1		[0]			7
A2		[0]			4
A3	3	6	[0]	[0]	0
销量	0	0	5	6	

- 如下图，第一步选择最小运价1，A_3供应给$B_1$3单位货物，剩余6单位；第二步选择最小运价2，A_3可供应给$B_2$6单位货物，B_2恰好需要6单位，因此同时消去一行一列，需要选择该行该列中任意一个空格位置补填0:

– step.2 在用闭回路法调整时，在闭回路上同时出现两个或两个以上的具有（—1）标记的相等的最小值，这时只能选择一个作为调入格，而经调整后得到退化解。这时有一个数字格必须填入一个0，表明它是基变量。当出现这种情况时，可能在某闭回路上有标记为（—1）的取值为0的数字格，这时应取调整量θ=0。

4.4 产销不平衡的运输问题及其求解方法

- 实际问题中产销往往是不平衡的，就需要把产销不平衡的问题化成产销平衡的问题。
  - 当产大于销 $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$ 时，运输问题的数学模型可写成：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i (i = 1,2,\cdots,m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j (j = 1,2,\cdots,n) \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

由于总的产量大于销量，就要考虑多余的物资在哪一个产地就地贮存的问题。

设 $x_{i,n+1}$ 是产地 A_i 的贮存量，有：

4.4 产销不平衡的运输问题及其求解方法(cont.)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i,n+1} = a_i (i = 1,2,\cdots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j (j = 1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1}$$

令$c'_{ij} = c_{ij}$, 当$i = 1,2,\cdots,m$, $j = 1,2,\cdots,n$时；

$c'_{ij} = 0$, 当$i = 1,2,\cdots,m$, $j = n+1$时。

将其代入：

$$\min z' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1} c_{ij'} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij'} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} c'_{i,n+1} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$满足\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

4.4 产销不平衡的运输问题及其求解方法(cont.)

由于这个模型中满足 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j + b_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} b_j$

所以这是一个产销平衡的运输问题。

– 若当产大于销时，只要增加一个假想的销地 $j = n+1$（实际上是贮存）

该销地总需要量为 $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$

而在单位运价表中从各产地到假想销地的单位运价为 $c'_{i,n+1} = 0$，

就转化为一个产销平衡的运输问题。

若当销大于产时，只要增加一个假想的产地 $i = m+1$，

该产地总产量为 $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$

单位运价表中从该假想产地到各销地的单位运价为 $c'_{m+1,j} = M$，

M 为一个任意大的正整数，就转化为一个产销平衡的运输问题。

4.4 产销不平衡的运输问题及其求解方法(cont.)

– 例4.3 设有三个化肥厂供应四个地区的化肥，假定等量的化肥在这些地区使用效果相同。各化肥长年产量、各地区年需要量及运费如下表，求出总的运费最节省的化肥调运方案。

表4.4 产销平衡表（运价：万元/万吨）

产地 \ 销地	I	II	III	IV	产量(万吨)
A	16	13	22	17	50
B	14	13	19	15	60
C	19	20	23	—	50
最低需求(万吨)	30	70	0	10	
最高需求(万吨)	50	70	30	不限	

- 解：从上表可以看出，化肥总产量为160万吨，最高需求为无限，最低需求是110万吨。根据现有产量，地区IV最高可获得10+(160-110)=60万吨的化肥，这样，最高需求则为210万吨，大于总产量160万吨。
- 该问题是产销不平衡问题。

4.4 产销不平衡的运输问题及其求解方法(cont.)

- 假设有假想化肥厂D，其年产量为50万吨。由于各地需求包含两部分：最低需求，最高需求与最低需求的差值。前者不能用D供应，令相应运价为M（任意大正数），后者可以由D供应，相应运价为0。可得运价表为：

产地 \ 销地	I	I'	II	III	IV	IV'	产量(万吨)
A	16	16	13	22	17	17	50
B	14	14	13	19	15	15	60
C	19	19	20	23	M	M	50
D	M	0	M	0	M	0	50
需求(万吨)	30	20	70	30	10	50	

- 根据表上作业法运算，可以求得最优方案如下：

产地 \ 销地	I	I'	II	III	IV	IV'	产量(万吨)
A			50				50
B			20		10	30	60
C	30	20	0				50
D				30		20	50
需求(万吨)	30	20	70	30	10	50	

4.5 应用举例

- 由于在变量个数相等情况下表上作业法比单纯形法简单的多，因此很多实际问题尽可能转化为运输问题的数学模型来解决。
  - 例4.4 某厂按合同规定须于当年每个季度末分别提供10，15，25，20台同一规格的柴油机。已知该厂各季度的生产能力以及成本如下表，又如果生产出来的柴油机当季不交货的，每台每积压一个季度需储存、维护等费用0.15万元。要求在完成合同的情况下，做出使该厂全年生产费用最小的决策。

季度	生产能力（台）	单位成本
I	25	10.8
II	35	11.1
III	30	11.0
IV	10	11.3

4.5 应用举例(cont.)

- 解：由于每个季度生产出来的柴油机不一定当季交货，所以设x_{ij}为第i季度生产的用于第j季度交货的柴油机数。则有：

$$\begin{cases} x_{11}=10 \\ x_{12}+x_{22}=15 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=25 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=20 \end{cases}$$

- 又每个季度生产的用于当季和以后各季交货的柴油机数目不能超过该季度的生产能力，故有：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 25 \\ x_{22}+x_{23}+x_{24}\le 35 \\ x_{33}+x_{34}\le 30 \\ x_{44}\le 10 \end{cases}$$

- 设c_{ij}为第i季度生产的用于第j季度交货的单位生产成本和维护费用，见下表：

4.5 应用举例(cont.)

i \ j	I	II	III	IV
I	10.8	10.95	11.10	11.25
II		11.10	11.25	11.40
III			11.00	11.15
IV				11.30

- 设用**ai**表示该厂第**i**季度的生产能力，**bj**表示第**j**季度的合同供应量，则问题可写成：

$$\min z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} x_{ij} \le a_i \\ \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

显然这是一个产大于销的运输问题模型，在该问题中，当**i>j**时，$x_{ij}=0$，相应的$c_{ij}=M$，再加上一个假想的需求**D**，就可以把问题转化为产销平衡的运输模型。

4.5 应用举例(cont.)

产地＼销地	I	II	III	IV	D	产量
I	10.8	10.95	11.10	11.25	0	25
II	M	11.10	11.25	11.40	0	35
III	M	M	11.00	11.15	0	30
IV	M	M	M	11.30	0	10
销量	10	15	25	20	30	

- 经用表上作业法求解，可得多个最优方案，下表为最优方案之一：

产地＼销地	I	II	III	IV	D	产量
I	10	15	0			25
II			5		30	35
III			20	10		30
IV				10		10
销量	10	15	25	20	30	

按此方案，该厂总费用为773万元。

4.5 应用举例(cont.)

– 例4.5 某航运公司承担六个港口城市A，B，C，D，E，F的四条固定航线的物资运送，已知各航向的起点、终点城市、每天航班数以及各城市之间的航程天数（假定各条航线使用相同型号的船只）如下表。又每条船每次装卸货的时间各需1天，则航运公司至少该配备多少条船，才能满足所有航线的要求?

航线	起点城市	终点城市	每天航班数
1	E	D	3
2	B	C	2
3	A	F	1
4	D	B	1

从　到	A	B	C	D	E	F
A	0	1	2	14	7	7
B	1	0	3	13	8	8
C	2	3	0	15	5	5
D	14	13	15	0	17	20
E	7	8	5	17	0	3
F	7	8	5	20	3	0

4.5 应用举例(cont.)

- 解：该公司所需配备船只分两部分：(1)载货航程需要船只数。如下表：

航线	装货天数	航程天数	卸货天数	小计	航班数	需周转船只数
1	1	17	1	19	3	57
2	1	3	1	5	2	10
3	1	7	1	9	1	9
4	1	13	1	15	1	15

- 各港口间调度所需船只数。即每天到达的船只数与每天出发的船只数之差额：

港口城市	每天到达	每天出发	余缺数
A	0	1	－1
B	1	2	－1
C	2	0	2
D	3	1	2
E	0	3	－3
F	1	0	1

4.5 应用举例(cont.)

- 为了使配备的船只数最少，应做到周转的空船只数为最少。建立以下运输问题表：

	A	B	E	每天多余船只
C D F	2 14 7	3 13 8	5 17 3	2 2 1
每天缺少船只	1	1	3	

- 见上表可知是产销平衡的运输问题，用表上作业法可得最优调度方案：

	A	B	E	每天多余船只
C D F	 1/7	 1/13 	2/5 1/17 	2 2 1
每天缺少船只	1	1	3	

- 需要周转的空船数：1×7+1×13+2×5+1×17=47条，因此该公司总共需要配备91+47=138条船

4.5 应用举例(cont.)

- 例4.6 某糖果公司的加工厂生产以及销售点的产销平衡表如下表4.5。又：
  - 每个工厂生产的糖果不一定直接发运到销售点，可以其中几个产地集中一起运；
  - 运往各销地的糖果可以先运给其中几个销地，再转运给其他销地；
  - 除产、销地以外，中间还可以有几个转运站，在产地之间、销地之间或产销地之间转运。
- 已知各产地、销地、中转站之间每吨糖果的运价如下表4.6，问在考虑到产销地之间直接运输和间接运输的各种可能方案下，公司应如何调运产品，在满足各销点的需要量的前提下使总运费最少。

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2					4
A_3					9
销量	3	6	5	6	

表4.5 例4.6的产销平衡表

4.5 应用举例(cont.)

表4.6 例4.6中的产地、销地、中转站之间的单位运价表

		产地			中间转运站				销地			
		A1	A2	A3	T1	T2	T3	T4	B1	B2	B3	B4
产地	A1		1	3	2	1	4	3	3	11	3	10
	A2	1		—	3	5	—	2	1	9	2	8
	A3	3	—		1	—	2	3	7	4	10	5
中间转运站	T1	2	3	1		1	3	2	2	8	4	6
	T2	1	5	—	1		1	1	4	5	2	7
	T3	4	—	2	3	1		2	1	8	2	4
	T4	3	2	3	2	1	2		1	—	2	6
销地	B1	3	1	7	2	4	1	1		1	4	2
	B2	11	9	4	8	5	8	—	1		2	1
	B3	3	2	10	4	2	2	2	4	2		3
	B4	10	8	5	6	7	4	6	2	1	3	

- 解：由于问题中所有的产地、中间转运站、销地都可以看作产地，又可以看作销地。因此把整个问题当作有11个产地和11个销地的扩大的运输问题。

4.5 应用举例(cont.)

- 在扩大运输问题中，对于不可能运输的方案，在相应的运价上填入M（任意大正数）；
- 所有中转站的产量等于销量，由于运费最少时不可能出现一批物资来回倒运的现象，所以每个转运站的转运数不超过20吨（产量和）。因此可以规定中转站的产量和销量均为20吨。由于实际的转运量

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i、\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j$$

可以在每个约束条件中加入松弛变量x_{ii}， x_{ii}相当一个虚构的转运站，自己运给自己。(20- x_{ii})就是每个转运站的实际转运量， x_{ii}对应的运价c_{ii}为0。

- 扩大的运输问题中原来的产地和销地也有转运站的作用，所以同样在产量和销量上增加20吨，同时也引进x_{ii}为松弛变量。
- 根据上面的分析可以得出扩大的运输问题的产销平衡表与单位运价表:

4.5 应用举例(cont.)

		产地			中间转运站				销地				产量
		A1	A2	A3	T1	T2	T3	T4	B1	B2	B3	B4	
产地	A1	0	1	3	2	1	4	3	3	11	3	10	27
	A2	1	0	M	3	5	M	2	1	9	2	8	24
	A3	3	M	0	1	M	2	3	7	4	10	5	29
中间转运站	T1	2	3	1	0	1	3	2	2	8	4	6	20
	T2	1	5	M	1	0	1	1	4	5	2	7	20
	T3	4	M	2	3	1	0	2	1	8	2	4	20
	T4	3	2	3	2	1	2	0	1	M	2	6	20
销地	B1	3	1	7	2	4	1	1	0	1	4	2	20
	B2	11	9	4	8	5	8	M	1	0	2	1	20
	B3	3	2	10	4	2	2	2	4	2	0	3	20
	B4	10	8	5	6	7	4	6	2	1	3	0	20
销量		20	20	20	20	20	20	20	23	26	25	26	

- 该问题转化为了产销平衡的运输问题，可以用表上作业法求解，过程略。

本 章 完

The end

附录1. 西北角法

- 西北角法从表中西北角的元素开始：
  - step 1. 在表中选择可供应或被需求的最大值，使其相应的行和列都减去相应的选定元素的值；
  - step 2. 删去零供应的行或零需求的列，即表示不可能分配给那一行或那一列；
  - step 3. 如果恰好剩下一行或一列没有被删除，停止。否则，如果列被删除则转移到右边，如果行被删除则转移到下面，然后跳到step1。

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2					4
A_3					9
销量	3	6	5	6	

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3	4			7
A2		2	2		4
A3			3	6	9
销量	3	6	5	6	

– 最后总运价为：3×3+4×11+2×9+2×2+3×10+6×5=133元

返回