Fourier分析复习

要求掌握：

(1) 周期为$2\pi, 2L$的函数Fourier级数展开;

(2) 函数在有限区间$[-L, L]$上的Fourier展开;函数在有限区间$[0, L]$展成正弦级数、余项级数;

(3) Dirichlet收敛定理;

(4) Fourier积分与Fourier变换公式.

....

1. (15)(20分) 设$f(x)$是以2π为周期的周期函数，在$[-\pi, \pi)$上的表达式为
$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ \pi - x, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$
(1) 将$f(x)$展成傅里叶级数，并指出该傅里叶级数的收敛性;
(2) 写出相应的Parseval等式；
(3) 根据$f(x)$的傅里叶级数，分别求出数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 的和;
(4) 根据上述的Parseval等式分别求出数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^4}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$的和.

2. (14)(3分) 设函数$f(x) = x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, $-\infty < x < +\infty$, 其中$b_n = 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x \mathrm{d}x$, $n = 1, 2, \cdots$, 则$S\left(-\dfrac{1}{2}\right) =$ __________; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2 =$ __________.

3. (14)(15分) 设$f(x)$ 是以2π 为周期的函数且$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi \leqslant x < 0, \\ \pi - x, & 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$ 求$f(x)$ 的Fourier 级数, 讨论其收敛性并利用所得结果计算
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \quad 及 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

4. (14)(10分) 求函数$f(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & x \geqslant 0 \\ e^{2x}, & x < 0 \end{cases}$ 的Fourier 变换.

5. (14)(6分) 设$f(x)$ 是以2π 为周期的函数且满足α $(0<\alpha<1)$ 阶$Lipschitz$ 条件:

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|^{\alpha}.$$

记a_0, a_n, b_n $(n=1,2,\cdots)$ 是$f(x)$ 的Fourier 系数. 求证:

$$|a_n| \leqslant \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}, \quad |b_n| \leqslant \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}.$$

6. (13)(4分) 设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上是可积并平方可积函数,且$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上导出相同的Fourier级数,则(　　)

   (A) 在$[a,b]$上,$f(x)\equiv g(x)$

   (B) 在$[a,b]$上,$f(x)$不一定恒等于$g(x)$

   (C) 在$[a,b]$上,$f(x)\equiv g(x)+c$,其中c是某个常数

   (D) 选项(A),(B),(C)都不正确

7. (13)(10分) 将$[0,\pi]$上的函数$f(x)=1-x^2$展成以2π为周期的余弦级数(须讨论其收敛性), 并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$的和.

8. (12)(4分) $f(x)=x^2$,利用$f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$上的定义,以2π为周期计算出的相应的Fourier级数,记为$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$,则$\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\underline{\dfrac{2\pi^4}{5}}$.

9. (12)(4分)设$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\pi,\pi],\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$,则$f(x)$的Fourier变换为$\underline{\dfrac{e^{i\pi\lambda}-e^{-i\pi\lambda}}{i\lambda}=\dfrac{2\sin\lambda\pi}{\lambda}}$

10. (12)(7分) 将$[0,\pi]$上的函数$f(x)=x^2$展开成余项级数(须讨论其收敛性).

    解:根据Fourier系数的展开公式得

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2dx = \frac{2\pi^3}{3}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nxdx \\ &= \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx = \frac{4(-1)^n}{n^2}. \end{aligned} \qquad (3分)$$

所以对应的Fourier级数为

$$\frac{\pi^3}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx. \qquad (1分)$$

由Dirichlet收敛定理，$\frac{\pi^3}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$一致收敛于$x^2$. (2 分)

11. (11)(12分)设函数$f(x)$是以2为周期的周期函数，其在区间$[1,3]$上的取值为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 1<x\leqslant 2,\\ 3-x, & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

1）试画出$f(x)$在区间$[-3,3]$上的草图，并将$f(x)$展开为傅里叶级数；

2）试画出$f(x)$傅里叶级数的和函数$S(x)$在区间$[-3,3]$上的草图；

3）试求数项级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}$与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$的和。

解 (1)

$$a_0=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 dx+\int_2^3(3-x)dx=3/2,$$

$$a_n=\int_1^3 f(x)\cos n\pi x dx=\int_1^2\cos n\pi x dx+\int_2^3(3-x)\cos n\pi x dx=\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi^2},$$

$$b_n=\int_1^3 f(x)\sin n\pi x dx=\int_1^2\sin n\pi x dx+\int_2^3(3-x)\sin n\pi x dx=\frac{(-1)^n}{n\pi}.$$

$$\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x\right)=\begin{cases}f(x), x\neq 2k+1 & k=0,\pm1,\pm2\cdots,\\ \dfrac{1}{2}, \quad x=2k+1, & k=0,\pm1,\pm2\cdots,\end{cases}$$

....6分

(2)

....8分

(3) 令$x=2$

由$\dfrac{3}{4}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi^2}=1,$ 　　得$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}.$

由$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n)^2},$ 　　得$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$...............12分

12. (11)(3分)已知在$[-\pi,\pi]$上,有$\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx$, 则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(4n^2-1)^2}=$ $\underline{\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}}$.

13. (10)(10分) 将函数$f(x)=x, x\in(0,\pi)$展开为以2π为周期的余弦级数,并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$的和.

14. (09,08)(4分) 设$f(x)=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$,而$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\pi x),-\infty<x<+\infty$,其中$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx,n=1,2,3\cdots$,则$S(-\frac{1}{2})$为(　　)

(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $-\frac{1}{4}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $-\frac{1}{2}$

15. (09,07)(10分,8分) 设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0, & \frac{\pi}{2}\leqslant|x|\leqslant\pi.\end{cases}$ 试将$f(x)$展成以2π为周期的Fourier级数,并求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$和$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$的和.

16. (08)(10分) 设$f(x)=x,(0\leqslant x\leqslant 1)$,

(i) 将$f(x)$展成以2为周期的Fourier余项级数;

(ii) 利用(i)求$\int_0^2\frac{1}{x}\ln\frac{2+x}{2-x}dx$;

(iii) 利用(i)求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

17. (06)(4分) 设$f(x)$以2π为周期,在$[-\pi,\pi]$上$f(x)=x+\sin x$, $F(x)$是$f(x)$的Fourier级数,则$F(\pi)=$______

(A) $-\pi$　　(B) π　　(C) 0　　(D) $\pi/2$

18. (06)(12分) 设$f(x)$以2π为周期,在$[-\pi,\pi]$上$f(x)=\cos\frac{x}{2}$,求$f(x)$的Fourier级数,并求出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

19. (05)(15分) 设$f(x)$是定义在R上周期为2π的奇函数,且在$[0,\pi]$上$f(x)=x^2$,

(i) 画出$f(x)$在一个周期上的图像;

(ii) 求$f(x)$的Fourier级数;

(iii) 利用(ii)的结论和等式$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$,$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}$

计算$\frac{\pi^6}{1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\cdots}$.

20. (04)(14分) 设a不是整数,把$f(x)=\cos ax$在$[-\pi,\pi]$上展成Fourier级数,并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$

21. (03)(14分) 设周期函数$f(x)$的周期为2π,$f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi+x}{2}, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \frac{\pi-x}{2}, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$ 把$f(x)$展成周期2π的Fourier级数,并由此求出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的值.

22. (02)(10分) 将$f(x)=\pi-2x,(0\leqslant x\leqslant \pi)$展成余项级数,并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^4}$.