

## 《概率论与数理统计》

### 第一章 随机事件与概率

#### 基本概念:

**随机试验 E**——指试验可在相同条件下重复进行, 试验的结果具有多种可能性 (每次试验有且仅有一个结果出现, 且事先知道试验可能出现的一切结果, 但不能预知每次试验的确切结果)

**样本点  $\omega$** ——随机试验 E 的每一个可能出现的结果

**样本空间  $\Omega$** ——随机试验 E 的样本点的全体

**随机事件**——由样本空间中的若干个样本点组成的集合, 即随机事件是样本空间的一个子集

**必然事件**——每次试验中必定发生的事件。 **不可能事件  $\emptyset$** ——每次试验中一定不发生的事件。

事件之间的关系:

- ① **包含关系**: 事件  $A$  发生必然导致  $B$  发生, 记为  $A \subset B$
- ② **相等关系**:  $A \subset B$  且  $B \subset A$ , 记为  $A=B$ 。
- ③ **积事件**: 事件  $A$  与  $B$  同时发生, 记为  $AB$ 。
- ④ **和事件**: 事件  $A$  或  $B$  至少有一个发生, 记为  $A \cup B$
- ⑤ **差事件**: 事件  $A$  发生而  $B$  不发生, 记为  $A-B$ 。
- ⑥ **互斥事件**: 事件  $A$ 、 $B$  不能同时发生, 即  $AB=\emptyset$ , 又称  $A$ 、 $B$  为 **互不相容事件**。
- ⑦ **逆事件**: “ $A$  不发生” 这一事件称为  $A$  的逆事件, 记为  $\bar{A}$ ,  $A$  与  $\bar{A}$  又称为 **对立事件**。

$$A\bar{A}=\emptyset, A \cup \bar{A}=S \Rightarrow \bar{\bar{A}}=S-A$$

⑧  $A, B$  相互独立  $P(AB)=P(A)P(B)$

例 1 事件  $A, B$  互为对立事件等价于 ( D )

A、 $A, B$  互不相容 B、 $A, B$  相互独立 C、 $A \cup B = \Omega$

D、 $A, B$  构成对样本空间的一个剖分

例 2 设  $P(A)=0$ ,  $B$  为任一事件, 则 ( C )

A、 $A=\emptyset$  B、 $A \subset B$  C、 $A$  与  $B$  相互独立 D、 $A$  与  $B$  互不相容

例 3. 设甲乙两人朝同一目标射击, 设  $A$  = “甲命中目标且乙未命中目标”, 则:  $\bar{A}$  = ( D )

- A) 甲未命中目标且乙命中目标      B) 甲乙都没命中目标  
C) 甲未命中目标      D) 甲未命中目标或乙命中目标

#### 事件之间的运算:

事件的交  $AB$  或  $A \cap B$

事件的并  $A \cup B$

事件的差  $A-B$       注意:  $A-B = \bar{A}\bar{B} = A-AB = (A \cup B)-B$

$A_1, A_2, \dots, A_n$  构成  $\Omega$  的一个完备事件组 (或分斥)——指  $A_1, A_2, \dots, A_n$  两两互不相容, 且  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

例 1 设事件  $A, B$  满足  $A \cap \bar{B} = \emptyset$ , 由此推导不出 (D)

A、 $A \subset B$       B、 $\bar{A} \supset \bar{B}$       C、 $A \cup B = B$       D、 $A \cap B = B$

例 2 若事件  $B$  与  $A$  满足  $B - A = B$ , 则一定有 (B)

A、 $A=\emptyset$       B、 $AB=\emptyset$       C、 $A\bar{B}=\emptyset$       D、 $B=\bar{A}$

#### 运算法则:

交换律  $A \cup B = B \cup A$      $A \cap B = B \cap A$

结合律  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$      $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

分配律  $(A \cup B) \cap C = (AC) \cup (BC)$      $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

对偶律  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$      $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

文氏图

### 事件与集合论的对应关系表:

记号	概率论	集合论
$\Omega$	样本空间, 必然事件	全集
$\emptyset$	不可能事件	空集
$\omega$	基本事件	元素
A	事件	全集中的一个子集
$\bar{A}$	A 的对立事件	A 的补集
$A \subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A \cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的并集
$AB$	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生但事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB=\emptyset$	事件 A 与事件 B 互不相容 (互斥)	A 与 B 没有相同的元素

古典概型:

古典概型的前提是  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$ ,  $n$  为有限正整数, 且每个样本点  $\omega_i$  出现的可能性相等。

$$P(A) = \frac{A \text{ 包含样本总个数}}{\text{样本点总数}}$$

例 1 设 3 个球任意投到四个杯中去, 问杯中球的个数最多为 1 个的事件  $A_1$ , 最多为 2 个的事件  $A_2$  的概率。

[解]: 每个球有 4 种放入法, 3 个球共有  $4^3$  种放入法, 所以  $|\Omega| = 4^3 = 64$ 。

(1) 当杯中球的个数最多为 1 个时, 相当于四个杯中取 3 个杯子, 每个杯子恰有一个球, 所以  $|A_1| = C_4^3 3! = 24$ ; 则  $P(A_1) = 24/64 = 3/8$ 。 (2) 当杯中球的个数最多为 2 个时, 相当于四个杯中有 1 个杯子恰有 2 个球 ( $C_4^1 C_3^2$ ), 另有一个杯子恰有 1 个球 ( $C_3^1 C_1^1$ ), 所以  $|A_2| = C_4^1 C_3^2 C_3^1 C_1^1 = 36$ ; 则  $P(A_2) = 36/64 = 9/16$  □

例 2 从 1, 2,  $\dots$ , 9, 这九个数中任取三个数, 求: (1) 三数之和为 10 的概率  $p_1$ ; (2) 三数之积为 21 的倍数的概率  $p_2$ 。

$$[\text{解}]: p_1 = \frac{4}{C_9^3} = \frac{1}{21}, \quad p_2 = \frac{C_3^1 C_5^1 + C_3^2}{C_9^3} = \frac{3}{14}$$

### 古典概型基本性质:

(1) 非负性, 对于任一个事件 A, 有  $P(A) \geq 0$ ;

(2) 规范性:  $P(\Omega) = 1$  或  $P(\emptyset) = 0$ ;

(3) 有限可加性: 对两两互斥事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  有  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

### 概率的公理化定义:

要求函数  $P(A)$  满足以下公理:

(1) 非负性, 有  $P(A) \geq 0$ ;

(2) 规范性:  $P(\Omega) = 1$ ;

(3) 可列可加性: 对两两互斥事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  有  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

## 预备知识：排列、组合

1. **分类计数原理(加法原理)**：设完成一件事有 $k$ 类方法，每类分别有 $m_1, m_2, \dots, m_k$ 种方法，则完成这件事情共有 $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ 种方法。

2. **分步计数原理(乘法原理)**：设完成一件事有 $k$ 个步骤，第一步有 $m_1$ 种方法， $\dots$ ，第 $k$ 步有 $m_k$ 种方法，则完成这件事情共有 $m_1 m_2 \cdots m_k$ 种方法。

3. **排列**：从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素，按一定次序排成一行。

**排列数**：从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素的所有排列的个数记为 $A_n^m$ ， $A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$

○ **注**： $A_n^m = n A_{n-1}^{m-1}$ ， $0! = 1$

4. **组合**：从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素并成一组(与顺序无关)。

**组合数**：从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素的所有组合的个数，记为 $C_n^m$ ，

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

概率公式：

求逆公式  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

加法公式  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

求差公式： $P(A-B) = P(A) - P(AB)$ ；当 $A \supset B$ 时，有 $P(A-B) = P(A) - P(B)$

$$\text{注意： } A-B = \bar{A}B = A-AB = (A \cup B)-B$$

**条件概率公式**： $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ ；( $P(B) > 0$ )

$P(A|B)$ 表示事件 $B$ 发生的条件下，事件 $A$ 发生的概率。

**乘法公式**： $P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$  (其中 $P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$ )

一般有 $P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$  (其中 $P(AB) > 0$ )

**全概率公式**： $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$  其中 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 构成 $\Omega$ 的一个分斥。

○ **注**：全概率公式给出我们一个用来计算在众多原因 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 的作用下事件 $A$ 发生概率的方法。  
(由因得果)

$$\text{贝叶斯公式： } P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)} \quad (\text{由果溯因})$$

例：在一个肿瘤治疗中心，有大量可能患肺癌的可疑病人，这些病人中吸烟的占45%。据以往记录，吸烟的可疑病人中有90%确患有肺癌，在不吸烟的可疑病人中仅有5%确患有肺癌

(1) 在可疑病人中任选一人，求他患有肺癌的概率；

(2) 在可疑病人中选一人，已知他患有肺癌，求他是吸烟者的概率。

解：设 $A = \{\text{患有肺癌}\}$ ,  $B = \{\text{可疑病人吸烟}\}$ ，则由条件得：

$$P(B) = 0.45, P(\bar{B}) = 0.55, P(A|B) = 0.9, P(A|\bar{B}) = 0.05.$$

(1) 由全概率公式得：

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) = 0.68.$$

(2) 由贝叶斯公式得:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{81}{136}.$$

2. 在一个每题有 5 个答案可供选择的测验题中, 假如有 80% 的学生知道指定问题的正确答案, 不知道正确答案的作随机猜测, 求:

1) 任意指定的一个学生能正确回答率; (5 分)

2) 已知指定的问题被正确解答, 求此是靠随机猜测的概率

解 设  $A=\{\text{正确回答}\}$ ,  $B=\{\text{随机猜测}\}$ , 则由条件得:

$$P(B)=0.2, P(\bar{B})=0.8, P(A|B)=1/5, P(A|\bar{B})=1.$$

(1) 由全概率公式得:

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) = 0.84.$$

(2) 由贝叶斯公式得:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{1}{21} \approx 0.0476.$$

3. 某人从甲地到乙地, 乘火车、轮船和飞机来的概率分别为 0.2、0.4、0.4, 乘火车来迟到的概率为 0.5, 乘轮船来迟到的概率为 0.2, 乘飞机来不会迟到. 试求:

(1) 他来迟到的概率是多少? (5 分)

(2) 如果他来乙地迟到了, 则他是乘轮船来的概率是多少? (5 分)

解: 设  $A=\{\text{迟到}\}$ ,  $B_1=\{\text{乘火车}\}$ ,  $B_2=\{\text{乘轮船}\}$ ,  $B_3=\{\text{乘飞机}\}$ , 则由条件得:

$$P(B_1)=0.2, \quad P(B_2)=0.4, \quad P(B_3)=0.4,$$

$$P(A|B_1)=0.5, \quad P(A|B_2)=0.2, \quad P(A|B_3)=0. \quad \dots\dots (3 \text{ 分})$$

(1) 由全概率公式得:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$$

$$= 0.18. \quad \dots\dots (7 \text{ 分})$$

(2) 由贝叶斯公式得:

$$P(B_2|A) = \frac{P(AB_2)}{P(A)} = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)} = \frac{4}{9} \approx 0.44. \quad \dots\dots (10 \text{ 分})$$

4. 将两种信息分别编码为 A 和 B 传递出去, 由于信道存在干扰可能导致收到的信息与发送的不一致。设接收站收到信息时, 信息 A 被误收为 B 的概率是 0.02, 而 B 被误收为 A 的概率是 0.01。整个传送过程中, 信息 A 与 B 传送次数比为 2:1, (1) 求收到信息是 A 的概率; (8 分)

(2) 试求当收到信息是 A 时, 问原发信息也是 A 的概率。(7 分)

一、解 设  $A=\{\text{收到信息是 A}\}$ ,  $B_1=\{\text{发出信息为 A}\}$ ,  $B_2=\{\text{发出信息为 B}\}$ , 则由条件得:

$$P(A|B_1)=0.98, \quad P(A|B_2)=0.01, \quad P(B_1)=2/3, \quad P(B_2)=1/3 \dots\dots (3 \text{ 分})$$

(1) 由全概率公式得:

$$P(A) = 0.98 \times 2/3 + 0.01 \times 1/3 = 0.66 \quad \dots\dots (8 \text{ 分})$$

(2) 由贝叶斯公式得:

$$P(B|A) = \frac{0.98 \times 2/3}{0.66} \quad (3 \text{ 分})$$
$$= \frac{196}{197} \quad (7 \text{ 分})$$

概论的性质:

1. 有限可加性: 有限个两两互斥的事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  则  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$
2.  $\bar{A}$  是  $A$  的对立事件, 则  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
3.  $A \subset B$  则  $P(B - A) = P(B) - P(A)$
4.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ , 当  $A, B$  互斥即  $AB = \phi$  时  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
5.  $P(\phi) = 0, P(S) = 1$
6.  $P(A) \leq 1$
- 推广:  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

应用题:

若事件  $A, B$  相互独立, 且  $P(A) = 0.5, P(B) = 0.25$ , 则  $P(A \cup B) = \underline{\quad 0.625 \quad}$

例 1 设两两相互独立的三个事件  $A, B$  和  $C$  满足条件:  $ABC = \emptyset, P(A) = P(B) = P(C) < 1/2$ , 且已知  $P(A \cup B \cup C) = 9/16$ , 则  $P(A) = \underline{\quad 1/4 \quad}$ 。

[解]:  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - [P(AB) + P(AC) + P(BC)] + P(ABC)$ ,

令  $P(A) = x$ , 则  $3x - 3x^2 = 9/16 \Rightarrow 16x^2 - 16x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1/4$  或  $3/4$  (舍去) 则  $P(A) = 1/4$  □

例 2 某射击队共有 20 个射手, 其中一级射手 4 人, 二级射手 8 人, 三级射手 7 人, 四级射手 1 人, 一、二、三、四级射手能够进入正式比赛的概率分别是 0.9、0.7、0.5 和 0.2, 求任选一名选手能进入正式比赛的概率。

[解]: 设  $A_k$  为选中第  $k$  级选手,  $k=1, 2, 3, 4$ ,  $B$  为进入正式比赛。由已知  $P(A_1) = 1/5, P(A_2) = 2/5, P(A_3) = 7/20, P(A_4) = 1/20$ ;  $P(B|A_1) = 0.9, P(B|A_2) = 0.7, P(B|A_3) = 0.5, P(B|A_4) = 0.2$ .  $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) + P(A_4)P(B|A_4) = 1/5 \times 0.9 + 2/5 \times 0.7 + 7/20 \times 0.5 + 1/20 \times 0.2 = 0.645$  □

例 3 某物品成箱出售, 每箱 20 件, 假设各箱中含 0、1 件次品的概率分别为 0.8 和 0.2, 一顾客在购买时, 他可以开箱, 从箱中任取三件检查, 当这三件都是合格品时, 顾客才买下该箱物品, 否则退货。试求: (1) 顾客买下该箱的概率  $\alpha$ ;

(2) 顾客买下该箱物品, 问该箱确无次品的概率  $\beta$ 。

[解]: 设事件  $A_0$ —一箱中 0 件次品,  $A_1$ —一箱中 1 件次品, 事件  $B$ —买下该箱。由已知  $P(A_0) = 0.8, P(A_1) = 0.2$ ,  $P(B|A_0) = 1, P(B|A_1) = 19/20 \times 18/19 \times 17/18 = 17/20$ ,

(1)  $\alpha = P(B) = P(A_0)P(B|A_0) + P(A_1)P(B|A_1) = 0.8 \times 1 + 0.2 \times 17/20 = 0.97$ ;

(2)  $\beta = P(A_0|B) = P(A_0B)/P(B) = P(A_0)P(B|A_0)/P(B) = 0.8/0.97 = 0.8247$

例 4. 设  $A, B, C$  为三个事件,  $A$  与  $B$  互不相容, 且  $C \subset A$ , 则必有 ( B )

A)  $P(A \cap C) = 0$  B)  $P(B \cap C) = 0$

C)  $P(A \cap C) = 0$  D)  $P(B \cap C) = 0$

例 5. 设一批产品共有 1000 个, 其中 50 个次品, 从中随机地不放回地选取 500 个产品,  $X$  表示抽到次品的个数, 则  $P(X=3) = ( \quad A \quad )$

(A)  $\frac{C_{50}^3 C_{950}^{497}}{C_{1000}^{500}}$

(B)  $\frac{A_{50}^3 A_{950}^{497}}{A_{1000}^{500}}$

$$(C) C_{500}^3 (0.05)^3 (0.95)^{497} \quad (D) \frac{3}{500}$$

例 6. 袋中有 5 个黑球, 3 个白球, 大小相同, 一次随机地摸出 4 个球, 其中恰好有 3 个白球的概率为( D )

$$(A) \frac{3}{8} \quad (B) \left(\frac{3}{8}\right)^5 \frac{1}{8} \quad (C) C_8^4 \left(\frac{3}{8}\right)^3 \frac{1}{8} \quad (D) \frac{5}{C_8^4}$$

### 事件的独立性:

如果事件 A 与事件 B 满足  $P(AB)=P(A)P(B)$ , 则称事件 A 与事件 B 相互独立。

结论: 1. 如果  $P(A)>0$ , 则事件 A 与 B 独立  $\Leftrightarrow$

$$P(A|B)=P(A) \text{ 且 } P(B|A)=P(B), \text{ 则 } P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$$

2. 事件 A 与事件 B 独立  $\Leftrightarrow$  事件 A 与事件  $\bar{B}$  独立

$$\Leftrightarrow \text{事件 } \bar{A} \text{ 与事件 } B \text{ 独立} \Leftrightarrow \text{事件 } \bar{A} \text{ 与事件 } \bar{B} \text{ 独立}$$

○ 独立与互斥的区别:

$$A, B \text{ 相互独立: } P(AB)=P(A)P(B);$$

$$A, B \text{ 互斥: } P(AB)=0.$$

事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立——指任意 k 个事件  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$  满足  $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$

$$=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k}), \text{ 其中 } k=2, 3, \dots, n.$$

例 1 设  $P(A)=1/2, P(B)=1/3, P(A|B)=1/4$ , 则  $P(A+B)=\underline{3/4}$

例 2 已知  $P(A)=0.5, P(B)=0.4, P(A+B)=0.6$ , 则  $P(A|\bar{B})= (D)$

$$(A) 0.2 \quad (B) 0.45 \quad (C) 0.6 \quad (D) 0.75$$

**贝努里概型:** 指在相同条件下进行 n 次试验; 每次试验的结果有且仅有两种 A 与  $\bar{A}$ ; 各次试验是相互独立; 每次试验的结果发生的概率相同  $P(A)=p, P(\bar{A})=1-p$ 。

**二项概率**——在 n 重独立试验中, 事件 A 恰好发生 k 次的概率为  $b(k; n, p)$ , 则

$$b(k; n, p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots, n).$$

## 第二章 随机变量与概率分布

### 随机变量的分布函数:

#### 分布函数定义:

$$F(x) = P\{\xi \leq x\}, \quad -\infty < x < +\infty$$

分布函数  $F(x)$  实质上表示随机事件  $P\{\xi \leq x\}$  发生的概率。

#### 分布函数 $F(x)$ 的性质

$$(1) 0 \leq F(x) \leq 1;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

$$(3) \text{单调非减, 当 } x_1 < x_2 \text{ 时, } F(x_1) \leq F(x_2)$$

$$(4) \text{右连续 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$$

一些概率可用分布函数来表示

$$P\{a < \xi \leq b\} = F(b) - F(a),$$

$$P\{\xi = a\} = F(a) - F(a-0), \quad P\{\xi < a\} = F(a-0),$$

$$P\{\xi > a\} = 1 - F(a),$$

$$P\{\xi \geq a\} = 1 - F(a-0),$$

例 1. 设随机变量  $\xi$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x < \pi/2 \\ 1 & x \geq \pi/2 \end{cases}$ , 则  $P\{\xi \leq \pi/4\} = ( )$  (选 C, 因为

$$P\{\xi \leq \pi/4\} = F(\pi/4) = \sin \pi/4$$

A、0      B、1/2      C、 $\sqrt{2}/2$       D、1

例 2. 设随机变量  $\xi_1$  和  $\xi_2$  的分布函数分别为  $F_1(x)$  和  $F_2(x)$ , 为使  $F(x) = aF_1(x) - bF_2(x)$  是某随机变量的分布函数, 则在下列给定的各组数值中应取 ( )

$$A、a=3/5, b=-2/5 \quad B、a=3/5, b=2/5$$

$$C、a=3/5, b=-3/5 \quad D、a=2/5, b=2/5$$

(选 A, 因为  $F(+\infty) = 1 = aF_1(+\infty) - bF_2(+\infty) = a - b$ )

例 3. 连续型随机变量  $\xi$  的分布函数为  $F(x) = A + B \arctan x$ ,  $-\infty < x < \infty$

求: (1) 常数 A, B; (2)  $\xi$  落入  $(-1, 1)$  的概率。

[解]: 因为  $F(+\infty) = 1$ ,  $F(-\infty) = 0$ , 所以  $A + B\pi/2 = 1$ ,  $A - B\pi/2 = 0$ ,

解得  $A = 1/2$ ,  $B = 1/\pi$ . 即  $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$ .

$\xi$  落入  $(-1, 1)$  的概率为  $P\{-1 < \xi < 1\} = F(1) - F(-1)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(-1) \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

例 4. 设  $X$  是一个连续型随机变量, 其概率密度为  $f(x)$ , 分布函数为  $F(x)$ , 则对于任意  $x$  值有 ( A )

$$(A) \quad P(X=x) = 0$$

$$(B) \quad F'(x) = f(x)$$

$$(C) \quad P(X=x) = f(x)$$

$$(D) \quad P(X=x) = F(x)$$

5. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{1-x^2}} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ .

求 (1) 系数  $A$ ; (2 分) (2)  $X$  的分布函数; (4 分) (3) 概率  $P(|X| < \frac{1}{2})$ .

解 由题意得:

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{+1} \frac{A}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1, \quad A = \frac{1}{\pi}.$$

$$(2) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{1}{\pi} (\arcsin x + \frac{\pi}{2}) & -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(3) \quad P(|X| < \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$$

设随机变量  $X$  具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x < 3, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(1) 确定常数  $k$ ; (2) 求  $X$  的分布函数  $F(x)$ ; (3) 求  $P\{1 < X \leq 3.5\}$ .

### 离散型随机变量:

定义: 随机变量只能取有限个或可数个孤立的值离散型随机变量的概率分布简称为分布列:

$$\begin{bmatrix} X & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & \cdots \\ \text{概率} & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n & \cdots \end{bmatrix} \quad \text{其中每一个 } p_i \geq 0 \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

离散型随机变量的分布函数是非降的阶梯函数。

### 离散型随机变量常见分布:

1) 两点分布  $X \sim (0, 1)$ ;  $X$  的取值只有 0 或 1, 其概率为  $P\{X=0\}=p$ ,  $P\{X=1\}=1-p$

2) 二项分布  $X \sim B(n, p)$ ; 分布律为  $b(k; n, p) = P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$  ( $k=0, 1, 2, 3, \dots, n$ ) 其中  $0 < p < 1$

3) 泊松分布  $X \sim P(\lambda)$ ; 分布律为  $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$  ( $k=0, 1, 2, 3, \dots$ )。

4) 几何分布:  $X \sim Ge(p)$ ; 分布列为  $P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} p$  ( $k=0, 1, 2, 3, \dots$ )。

在伯努利试验序列中, 记每次试验中事件  $A$  发生的概率为  $p$ , 如果  $X$  为事件  $A$  首次出现时的试验次数, 则  $X$  的可能取值为  $1, 2, \dots$ , 称  $X$  服从几何分布。

如果说恰好出现  $K$  次, 则用二项分布  $b(k; n, p) = P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$  ( $k=0, 1, 2, 3, \dots, n$ ) 其中  $0 < p < 1$

5) 超几何分布:  $X \sim h(n, N, M)$ ; 分布列为  $P\{X=k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$  ( $k=0, 1, 2, 3, \dots, r$ , 其中  $r = \min\{M, n\}$ )。

设有  $N$  个产品, 其中有  $M$  个不合格品, 若从中不放回地随机抽取  $n$  个, 则其中含有的不合格品个数  $X$  服从超几何分布。

### 离散型例题:

例 1 设随机变量  $\xi$  的分布列为  $P\{\xi=k\} = \frac{C}{2^k}$ ,  $k=1, 2, \dots$ , 则常数  $C =$  ( )

A、1/4      B、1/2      C、1      D、2

(因为  $\sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi=k\} = 1$ , 即  $\frac{c/2}{1-1/2} = 1$ , 所以  $c=1$ )

例 2 某射手有 5 发子弹, 射一次命中的概率为 0.9, 如果命中了就停止射击, 否则一直射到子弹用尽。求耗用子弹数  $\xi$  的分布列。

[解]:  $\xi$  的分布列为

$\xi$	1	2	3	4	5
概率 $p$	0.9	0.09	0.009	0.0009	0.0001

例 3 设离散型随机变量  $\xi$  的概率分布为

$\xi$	0	1	2
$p$	0.3	0.5	0.2

其分布函数为  $F(x)$ , 则  $F(3) =$  ( )

A、0      B、0.3      C、0.8      D、1

(选 D, 因为  $F(3) = p(0) + p(1) + p(2) = 1$ )



### 连续性随机变量:

定义: 随机变量可能取的值连续地充满一个范围, 如果对于随机变量 $\xi$ 的分布函数 $F(x)$ , 存在非负可积函数 $p(x)$ , 使得对于任意实数 $x$ , 有  $F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du$ , 则称 $\xi$ 为连续型随机变量, 其中 $p(x)$ 为的概率

### 密度函数.

密度函数必须满足条件:

(1)  $p(x) \geq 0, \quad -\infty < x < +\infty$

(2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = F(+\infty) = 1$

### 连续型随机变量的性质:

1. 分布函数是连续函数;

2.  $F'(x) = p(x)$ ;

3.  $P\{\xi=a\}=0$ , 所以  $P\{a < \xi \leq b\} = P\{a \leq \xi \leq b\} = P\{a \leq \xi < b\} = P\{a < \xi < b\} = \int_a^b p(x) dx$

4.  $P\{x < \xi \leq x + \Delta x\} \approx p(x) \Delta x$

### 常见连续型随机变量的分布:

1) 均匀分布 $\xi \sim U[a, b]$ ; 密度函数  $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$  分布函数  $F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$

2) 指数分布 $\xi \sim \exp(\lambda)$ ; 密度函数  $p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$  分布函数  $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

3) 正态分布 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ; 密度函数  $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$

分布函数  $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$

标准正态分布 $N(0, 1)$ , 它的分布函数 $\Phi(x)$ 可查表得到, 一般  $F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ .

结论:  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

### 5. 正态分布转变为标准正态分布

引理 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

### 结论:

I.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则它的分布函数, 可写成:

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\} = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

II.  $P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{\frac{x_1-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x_2-\mu}{\sigma}\}$   
 $= \Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma})$

例: 已知 $\xi \sim N(2, \sigma^2)$ , 且 $P\{2 < \xi < 4\} = 0.3$ , 则 $P\{\xi < 0\} = ( \quad )$

A) 0.8      B) 0.2      C) 0.4      D) 0.5

2、甲在上班路上所需的时间(单位: 分) $X \sim N(50, 100)$ . 已知上班时间为早晨8时, 他每天7时出门, 试求:

(1) 甲迟到的概率;

解:  $P(\text{甲迟到}) = p(x > 60)$

$$= 1 - p(x \leq 60)$$

$$= 1 - p(\frac{x-50}{10} \leq \frac{60-50}{10})$$

$$=1-\Phi(1)=0.1587.$$

**连续型例题：**

例 1 设随机变量  $X$  服从参数为 1 的泊松分布，则  $P\{X=EX^2\}=\underline{\hspace{2cm}}$ .

[解]：因为  $X$  服从参数为 1 的泊松分布，所以  $EX^2=DX+(EX)^2=1+1^2=2$ ,

于是  $P\{X=EX^2\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}e^{-1}$  □

例 2 设一设备开机后无故障工作的时间  $X$  服从指数分布，平均无故障工作的时间  $EX$  为 5 小时。设备定时开机，出现故障时自动关机，而在无故障的情况下工作 2 小时便关机。试求该设备每次开机无故障的时间  $Y$  的分布函数  $F(y)$ 。

[解]： $X\sim E(\lambda)$ ，因为  $EX=1/\lambda=5 \Rightarrow \lambda=1/5$ ，每次开机无故障的时间  $Y=\min\{X, 2\}$ ，

易见当  $y<0$  时， $F(y)=0$ ；当  $y\geq 2$  时， $F(y)=1$ ；

当  $0\leq y<2$  时， $F(y)=P\{Y\leq y\}=P\{\min\{X, 2\}\leq y\}=P\{X\leq y\}=1-e^{-y/5}$ 。

$$\text{所以 } Y \text{ 的分布函数 } F(y)=\begin{cases} 0 & \text{若 } y<0 \\ 1-e^{-y/5} & \text{若 } 0\leq y<2 \\ 1 & \text{若 } y\geq 2 \end{cases}$$

**随机变量的函数的概率分布：**

### 1. 离散型的求法

设离散型随机变量  $X$  的分布律为：
$$\begin{bmatrix} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ P & p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{bmatrix}$$
，则  $X$  的函数  $Y=g(X)$  的分布律为：

$$\begin{bmatrix} Y & g(x_1) & g(x_2) & \cdots & g(x_k) & \cdots \\ P & p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{bmatrix}, \text{ 当 } g(x_j) \text{ 有相同情况时，概率为相应之和。}$$

### 2. 连续型的公式法：

设  $X$  为连续型随机变量，其密度函数为  $f_X(x)$ ，设  $g(x)$  是一严格单调的可导函数，其值域  $[\alpha, \beta]$ ，且  $g'(x)\neq 0$ ，

记  $x=h(y)$  为  $y=g(x)$  的反函数，则  $Y=g(X)$  的密度函数为  $f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)| & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

### 3. 连续型的直接变换法(分布函数法)：

$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{g(X)\leq y\}=P\{X\in S\}$ ，其中  $S=\{x|g(x)\leq y\}$ ，然后再把  $F_Y(y)$  对  $y$  求导，即得  $f_Y(y)$

$$f_Y(y)=\begin{cases} dF_Y(y)/dy & \text{当 } F_Y(y) \text{ 在 } y \text{ 处可导时} \\ 0 & \text{当 } F_Y(y) \text{ 在 } y \text{ 处不可导时} \end{cases}$$

随机变量的函数的概率分布的例题：

例 1 设  $X$  的分布律为：
$$\begin{bmatrix} X & -1 & 0 & 1 & 2 \\ P & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$
，求  $Y=(X-1)^2$  的分布律。

[解]：先由  $X$  的值确定  $Y$  的值，得到
$$\begin{bmatrix} X & -1 & 0 & 1 & 2 \\ Y & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
，将  $Y$  的值相同的  $X$  的概率合在一起，得到  $Y$  的分布律
$$\begin{bmatrix} Y & 4 & 1 & 0 \\ P & 0.2 & 0.7 & 0.1 \end{bmatrix}$$
。□

例 2 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F_X(x)$ ，求随机变量  $Y=3X+2$  的分布函数  $F_Y(y)$ 。

[解]： $F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{3X+2\leq y\}=P\{X\leq \frac{y-2}{3}\}=F_X(\frac{y-2}{3})$

例 3 设随机变量  $X$  的密度函数为  $f_X(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & -1<x<1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ ，求随机变量  $Y=3X+2$  的密度函数  $f_Y(y)$ 。

[解]：用公式法：设  $y=g(x)=3x+2$ ， $y=g(x)$  的反函数为  $x=h(y)=\frac{y-2}{3}$ ， $-1<\frac{y-2}{3}<1 \Rightarrow -1<y<5$ ， $|h'(y)|=\frac{1}{3}$

则  $Y=g(X)$  的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)| & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}=\begin{cases} \frac{3}{2}(\frac{y-2}{3})^2 \times \frac{1}{3} & -1<y<5 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}=\begin{cases} \frac{1}{18}(y-2)^2 & -1<y<5 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad \square$$

例 4 设  $X$  在区间  $[0, 2]$  上服从均匀分布，试求  $Y=X^3$  的概率密度。

[解]：因  $X\sim U[0, 2]$ ，所以  $f_X(x)=\begin{cases} 1/2 & 0\leq x\leq 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 。用分布函数法分段讨论：当  $y<0$  时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X^3\leq y\}=0, \text{ 当 } 0<y<8 \text{ 时，} F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X^3\leq y\}=P\{X\leq \sqrt[3]{y}\}=\int_0^{\sqrt[3]{y}} \frac{1}{2} dx, f_Y(y)=F'_Y(y)=$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3} (y)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{6\sqrt[3]{y^2}}, \text{ 当 } y \geq 8 \text{ 时, } F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^3 \leq y\} = P\{X \leq \sqrt[3]{y}\} = \int_0^{\sqrt[3]{y}} \frac{1}{2} dx = 1, \quad f_Y(y) = F'_Y(y) = 0. \quad f_Y(y) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{6\sqrt[3]{y^2}} & 0 < y < 8 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

5. 已知  $\xi$  的概率密度为  $f(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}$ , 则  $3\xi$  的概率密度函数为\_\_\_\_\_

6. 设  $X \sim U(0, 2)$ , 则随机变量  $Y = X^2$  在  $(0, 4)$  内的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & (0 \leq y \leq 4), \\ 0 & (\text{其他}). \end{cases}$$

7. 设随机变量  $X$  在  $(0, 1)$  服从均匀分布, 则  $f_y(y) = \frac{1}{y}, 1 < y < e$  的概率密度为

### 第三章 多维随机变量及其概率分布

#### 二维随机变量:

二维随机向量  $(\xi, \eta)$  的联合分布函数指  $F(x, y) = P\{\xi \leq x, \eta \leq y\}$

$$0 \leq F(x, y) \leq 1; \quad F(-\infty, +\infty) = F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0; \quad F(+\infty, +\infty) = 1;$$

$$P\{x_1 \leq \xi \leq x_2, y_1 < \eta \leq y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

二维随机向量  $(\xi, \eta)$  的边缘分布函数

$$F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\} = F(x, +\infty), \quad F_\eta(y) = P\{\eta \leq y\} = F(+\infty, y)$$

#### 二维离散随机变量:

#### 二维离散型随机变量及其概率分布

$$P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = p_{ij}, \quad \text{其中 } \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1 \text{ 且 } p_{ij} \geq 0$$

可用一个分布列表或分布列矩阵  $(p_{ij})$  来表示

$$\xi \text{ 的边缘分布列为 } P\{\xi = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = p_{i*}$$

$$\eta \text{ 的边缘分布列为 } P\{\eta = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = p_{*j}$$

例 1 设二维随机向量  $(\xi, \eta)$  的联合分布律为

$\eta \backslash \xi$	1	2
1	1/6	1/3
2	1/4	$\alpha$

则常数  $\alpha =$  ( )

A、1/6      B、1/4      C、1/3      D、1/2

[答案]:  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij}=1$  所以  $\alpha=1/4$ , 选 B.

## 二维连续随机变量:

二维连续型随机向量  $(\xi, \eta)$  的分布函数  $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(u, v) du dv$

$p(x, y)$  称为随机向量  $(\xi, \eta)$  的联合密度函数  $p(x, y) \geq 0$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = 1$ ,  $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = p(x, y)$

利用密度函数求概率  $P\{(\xi, \eta) \in D\} = \iint_D p(x, y) dx dy$

二维连续型随机向量  $(\xi, \eta)$  的边缘分布,  $p_\xi(x)$ ,  $p_\eta(y)$  称为边缘密度函数

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \quad p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx$$

## 条件分布:

离散型: 在条件  $Y=y_j$  下随机变量  $X$  的条件概率分布为

$$P\{X=x_i | Y=y_j\} = \frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{*j}}, \quad i=1, 2, \dots$$

连续型: 在条件  $Y=y$  下随机变量  $X$  的条件分布函数  $F_{X|Y}(x|y)$  与条件概率密度函数  $f_{X|Y}(x|y)$  分别为:

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x \frac{f(u, y)}{f_Y(y)} du \quad f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

例 1: 设随机变量  $X$  在区间  $(0, 1)$  上服从均匀分布, 在  $X=x$  ( $0 < x < 1$ ) 的条件下, 随机变量  $Y$  在区间  $(0, x)$  上服从均匀分布, 求: 随机变量  $X$  和  $Y$  的联合概率密度;

[解]:  $X$  的概率密度为  $f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ , 在  $X=x$  ( $0 < x < 1$ ) 的条件下,

$Y$  的条件概率密度为  $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 1/x & 0 < y < x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

当  $0 < y < x < 1$  时, 随机变量  $X$  和  $Y$  的联合概率密度为  $f(x, y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = 1/x$

在其它点  $(x, y)$  处, 有  $f(x, y) = 0$ , 即  $X$  和  $Y$  的联合概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} 1/x & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

例 2: 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X$  概率分布为  $P\{X=i\}=1/3$  ( $i=-1, 0, 1$ ),

概率密度为  $f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ , 记  $Z=X+Y$ , 求  $P\{Z \leq 1/2 | X=0\}$ 。

[解]: (1)  $P\{Z \leq \frac{1}{2} | X=0\} = P\{X+Y \leq \frac{1}{2} | X=0\} = P\{Y \leq \frac{1}{2}\} = \int_0^{1/2} 1 dy = \frac{1}{2}$ .

## 二元正态分布:

二元正态分布  $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$  的密度函数

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

二元正态分布  $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$  的边缘密度分布仍是正态分布  $\xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $\eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

边缘概率密度为  $f_X(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$ ,  $f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$

## 二元均匀分布:

$(X, Y)$  在区域  $D$  上服从均匀分布—设  $D$  是  $xOy$  面上的有界区域, 其面积为  $A$ 。如果二维随机变量  $(X, Y)$  具有

概率密度  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A} & (x, y) \in D \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ , 则称  $(X, Y)$  在区域  $D$  上服从均匀分布。

例 1: 设  $(X, Y)$  服从区域  $D: \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  上的均匀分布, 求

(1)  $(X, Y)$  的联合概率密度  $p(x, y)$ ; (2)  $X, Y$  的边缘概率密度  $p_X(x)$ ,  $p_Y(y)$ ;

[解]: (1)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)} & a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ ;

$$(2) p_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \quad p_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & c \leq y \leq d \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

例 1 设二维随机变量  $(X, Y)$  的分布函数  $F(x, y) = A(B + \arctan \frac{x}{2})(C + \arctan \frac{y}{3})$ 。试求: (1) 常数  $A, B, C$ ; (2)  $(X, Y)$

的概率密度。[解]: 由分布函数性质, 得到  $F(+\infty, +\infty) = A(B + \frac{\pi}{2})(C + \frac{\pi}{2})$ ,  $F(x, -\infty) = A(B + \arctan \frac{x}{2})(C - \frac{\pi}{2}) = 0$ ,

$$F(-\infty, y) = A(B - \frac{\pi}{2})(C + \arctan \frac{y}{3}) = 0, \text{ 解得 } A = \frac{1}{\pi^2}, \quad B = C = \frac{\pi}{2}. \text{ 即 } F(x, y) = \frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{2})(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y}{3}).$$

$$(2) f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{6}{\pi^2(x^2+9)(y^2+4)}.$$

例 2: 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且均服从区间  $[0, 3]$  上的均匀分布, 求  $P\{\max\{X, Y\} \leq 1\}$ 。

[解]:  $P\{\max\{X, Y\} \leq 1\} = P\{X \leq 1 \text{ 且 } Y \leq 1\}$ , 因为  $X$  与  $Y$  相互独立, 所以

$$P\{X \leq 1 \text{ 且 } Y \leq 1\} = P\{X \leq 1\}P\{Y \leq 1\} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}. \text{ (这里 } P\{X \leq 1\} = \int_0^1 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \text{)} \quad \square$$

例 3: 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

求: (1)  $(X, Y)$  的边缘概率密度  $f_x(x)$ ,  $f_y(y)$ ; (2)  $Z = 2X - Y$  的概率密度  $f_z(z)$ 。

$$[解]: (1) f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{2x} 1 dy = 2x, \text{ 所以边缘概率密度 } f_x(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{y/2}^1 1 dx = 1 - \frac{1}{2}y, \text{ 所以边缘概率密度 } f_y(y) = \begin{cases} 1 - y/2 & 0 < y < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$(2) F_z(z) = P\{2x - y \leq z\} = \iint_{2x-y \leq z} f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} 1 dx dy = 1 - \int_{z/2}^1 1 dx = 1 - \int_{z/2}^1 1 dy = 1 - \int_{z/2}^1 (2x - z) dx = z - \frac{z^2}{4}$$

$$\text{得到 } F_z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ z - z^2/4 & 0 \leq z < 2 \\ 1 & z \geq 2 \end{cases}, \text{ 所以 } Z \text{ 的概率密度 } f_z(z) = F_z'(z) = \begin{cases} 1 - z/2 & 0 \leq z < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

4. 设随机变量  $X$  和  $Y$  具有联合概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 4, & x^2 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}; \text{ 求边缘概率密度 } f_x(x), f_y(y) \text{ 及 } f_{Y|X}(y|x).$$

例 4 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + cxy & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求 (1) 常数  $C$ ; (2)  $P\{X+Y \geq 1\}$ ; (3) 联合分布函数  $F(x, y)$ 。

[解]: (1) 由的概率密度性质得到

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^2 (x^2 + cxy) dx dy = \frac{2}{3} + c \Rightarrow c = \frac{1}{3};$$

(2)

$$P\{X+Y \geq 1\} = \iint_{x+y \geq 1} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{1-x}^2 (x^2 + \frac{xy}{3}) dy = \int_0^1 (\frac{5}{6}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{2}x) dx = \frac{65}{72}$$

(3) 当  $x < 0$  或  $y < 0$  时,

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(u, v) du dv = 0;$$

当  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 2$  时,

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(u, v) du dv = \int_0^x \int_0^y (u^2 + \frac{uv}{3}) du dv = \frac{x^3 y}{3} + \frac{x^2 y^2}{12};$$

当  $0 \leq x \leq 1, y \geq 2$  时,

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(u, v) du dv = \int_0^x \int_0^2 (u^2 + \frac{uv}{3}) du dv = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{3};$$

当  $x \geq 1, 0 \leq y < 2$  时,

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(u, v) du dv = \int_0^1 \int_0^y (u^2 + \frac{uv}{3}) du dv + \int_1^x \int_0^y (u^2 + \frac{uv}{3}) du dv = \frac{y}{3} + \frac{y^2}{12};$$

当  $x \geq 1, y \geq 2$  时,

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(u, v) du dv = 1$$

综上所述

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ 或 } y < 0 \\ \frac{x^3 y}{3} + \frac{x^2 y^2}{12} & 0 \leq x \leq 1 \text{ 及 } 0 \leq y < 2 \\ \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{3} & 0 \leq x \leq 1 \text{ 及 } y \geq 2 \\ \frac{y}{3} + \frac{y^2}{12} & x \geq 1 \text{ 及 } 0 \leq y < 2 \\ 1 & x \geq 1 \text{ 及 } y \geq 2 \end{cases}$$

**独立性:**

若  $F(x, y) = F_x(x)F_y(y)$ , 则称随机变量  $\xi$  与  $\eta$  相互独立。

几个充要条件:

连续型随机变量  $\xi$  与  $\eta$  相互独立  $\Leftrightarrow p(x, y) = p_x(x)p_y(y)$

离散型随机变量  $\xi$  与  $\eta$  相互独立  $\Leftrightarrow p_{ij} = p_i p_j$

二元正态分布  $N(\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2, \rho)$  随机变量  $\xi$  与  $\eta$  相互独立  $\Leftrightarrow \rho = 0$ 。

$X$  与  $Y$  相互独立  $\Rightarrow f(X)$  与  $g(Y)$  也相互独立。

例: 袋中有 2 只白球, 3 只黑球, 现进行无放回地摸球, 定义:

$$\xi = \begin{cases} 1 & \text{第一次摸出白球} \\ 0 & \text{第一次摸出黑球} \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{第二次摸出白球} \\ 0 & \text{第二次摸出黑球} \end{cases}$$

求: (1)  $(\xi, \eta)$  的联合分布;

(2)  $\xi, \eta$  的边际分布;

(3)  $\xi, \eta$  是否相互独立?

[解]:  $(\xi, \eta)$  的联合分布与边际分布为

$\xi \setminus \eta$	0	1	$p_{\xi}$
0	3/10	3/10	6/10
1	3/10	1/10	4/10
$p_{\eta}$	6/10	4/10	

因为

$$p(0, 0) = 3/10 \neq p_{\xi}(0)p_{\eta}(0) = 9/25$$

所以  $\xi$  与  $\eta$  不独立。

例 2: 设  $A, B$  是二随机事件; 随机变量  $X = \begin{cases} 1 & \text{若 } A \text{ 出现} \\ -1 & \text{若 } A \text{ 不出现} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1 & \text{若 } B \text{ 出现} \\ -1 & \text{若 } B \text{ 不出现} \end{cases}$

试证明随机变量  $X$  和  $Y$  不相关的充分必要条件是  $A$  与  $B$  相互独立。

例 3 设  $(X, Y)$  的概率密度为,  $f(x, y) = \begin{cases} 8xy & 0 \leq x \leq 1 \text{ 及 } 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ , 求: 关于  $X$  及关于  $Y$  的边缘概率密度, 并判

断  $X$  与  $Y$  是否相互独立。

[解]: 关于  $X$  的边缘概率密度  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ , 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $f_X(x) = \int_0^x 8xy dy = 4x^3$ , 当  $x < 0$  或  $x > 1$  时,  $f_X(x) = 0$ ; 所以  $f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 。同理当  $0 \leq y \leq 1$  时,  $f_Y(y) = \int_y^1 8xy dx = 4y(1-y^2)$ , 其它情况  $f_Y(y) = 0$ , 所以关于  $Y$  的边缘概率密度  $f_Y(y) = \begin{cases} 4y(1-y^2) & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 。因为当  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  时,  $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ , 所以  $X$  与  $Y$  不独立。

设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度函数为关于

$$2. f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求: (1)  $Y$  关于  $X$  的边缘分布密度函数  $f_{Y|X}(y|x)$ , 并判断  $X$  与  $Y$  是否独立? (6 分)

(2)  $E(XY)$ . (4 分)

解 由条件得:

当  $0 < x < 1$  时, 则  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^x 2 dy = 2x$ , 从而

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

当  $0 < y < 1$  时, 则  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_y^1 2 dx = 2(1-y)$ , 从而

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$(1) f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

因为  $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ ,  $0 < x < 1, 0 < y < x$ , 所以  $X$  与  $Y$  不独立。

$$(2) E(XY) = \int_0^1 \int_0^y xy f(x, y) dx dy = E(XY) = \int_0^1 \int_x^1 2xy dy dx = \int_x^1 (x - x^3) dx = \frac{1}{4}$$

两个随机变量的函数的分布:

几条结论:

1.  $X \sim P(\lambda_1)$ ,  $Y \sim P(\lambda_2)$ , 若  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$ ;
2.  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ ;
3. (卷积公式) 设  $(X, Y)$  是二维连续型随机变量, 其概率密度为  $f(x, y)$ , 关于  $X, Y$  的边缘概率密度分别为  $f_X(x)$ ,  $f_Y(y)$ , 设  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $Z=X+Y$  的概率密度为  $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$  或  $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$ .

例 1: 已知的联合概率分布为  $\begin{bmatrix} X|Y & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1/4 & 1/10 & 3/10 \\ 1 & 3/20 & 3/20 & 1/20 \end{bmatrix}$ , 求 (1)  $X+Y$  的概率分布; (2)  $XY$  的概率分布。

[解]: 令  $Z_1=X+Y$ , 则  $Z_1$  的加法表为  $\begin{bmatrix} X+Y & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ , 令  $Z_2=XY$ , 则  $Z_2$  的乘法表为  $\begin{bmatrix} XY & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,

(1)  $Z_1$  的分布律为  $\begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ P & 1/4 & 3/20+1/10 & 3/20+3/10 & 1/20 \end{bmatrix}$ , 即  $\begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ P & 1/4 & 5/20 & 9/20 & 1/20 \end{bmatrix}$

(2)  $Z_2$  的分布律为  $\begin{bmatrix} Z_2 & 0 & 1 & 2 \\ P & 1/4+3/20+1/10+3/10 & 3/20 & 1/20 \end{bmatrix}$ , 即  $\begin{bmatrix} Z_2 & 0 & 1 & 2 \\ P & 4/5 & 3/20 & 1/20 \end{bmatrix}$  □

例 2: 设随机变量  $X, Y$  相互独立, 且都服从  $[0, 1]$  上的均匀分布, 求  $X+Y$  的概率密度。

[解]:  $X \sim U[0, 1], Y \sim U[0, 1]$ , 所以  $Z=X+Y$  在有效区间  $[0, 2]$  上取值。利用卷积公式得到

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) f_y(z-x) dx. \quad \text{积分变量的有效区域为 } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z-x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq z, z-1 \leq x \leq 1.$$

当  $0 \leq z \leq 1$  时,  $f_z(z) = \int_0^z 1 \times 1 dx = z$ ; 当  $1 < z \leq 2$  时,  $f_z(z) = \int_{z-1}^1 1 \times 1 dx = 2-z$ ; 当其余取值时,  $f_z(z) = 0$ 。

$$\text{所以 } Z \text{ 的概率密度 } f_z(z) = \begin{cases} z & 0 \leq z \leq 1 \\ 2-z & 1 < z \leq 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

### 多维随机变量:

$n$  维随机变量  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的分布函数  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}$

. 如果  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 且每个  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ , 则  $X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \sim N(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2)$

如果  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立,  $X_j$  的分布函数为  $F_{X_j}(x_j)$ ,

则  $M = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  的分布函数为  $F_{\max}(z) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \dots F_{X_n}(x_n)$ ,

则  $m = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  的分布函数为  $F_{\min}(z) = 1 - [(1 - F_{X_1}(x_1))(1 - F_{X_2}(x_2)) \dots (1 - F_{X_n}(x_n))]$

## 第四章 随机变量的数字特征

### 数学期望:

1. 随机变量数学期望的定义—

$$\text{离散型 } E(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \quad E(g(\xi)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$$

$$\text{连续型 } E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \quad E(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) p(x) dx$$

2. 二维随机变量  $(X, Y)$  的数学期望:

$$\text{离散型 } E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_{i\cdot} = \sum_i \sum_j x_i p_{ij}$$

$$E(Y) = \sum_j y_j p_{\cdot j} = \sum_i \sum_j y_j p_{ij}$$

$$\text{连续型 } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy$$

3. 二维随机变量  $X$  的函数  $Y=g(X)$  的数学期望:

$$E[g(X, Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}$$

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$



#### 4. 数学期望的性质

$$E(c) = c, \quad E(a\xi) = aE\xi, \quad E(\xi \pm \eta) = E\xi \pm E\eta \quad E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$

若 $\xi$ 与 $\eta$ 相互独立, 则  $E(\xi\eta) = E\xi E\eta$

**方差:**

1. 随机变量方差的定义——

$$D(X) = E[X - E(X)]^2 = EX^2 - (EX)^2$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$$

**2. 方差性质:**

$$D(c) = 0, \quad D(a\xi) = a^2 D\xi, \quad D(a\xi + b) = a^2 D\xi, \quad D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta \pm 2\text{cov}(\xi, \eta)$$

若 $\xi$ 与 $\eta$ 相互独立, 则  $D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$

**协方差:**

$$1. \xi \text{与} \eta \text{的协方差 } \text{cov}(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] \text{ (或为 } \sigma_{\xi\eta})$$

2. 协方差的性质:

$$\text{cov}(\xi, \xi) = D\xi$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi), \quad \text{cov}(\xi, c) = 0$$

$$\text{cov}(a\xi, b\eta) = ab \text{cov}(\xi, \eta),$$

$$\text{cov}(\xi, \eta \pm \zeta) = \text{cov}(\xi, \eta) \pm \text{cov}(\xi, \zeta)$$

3. 协方差矩阵:

设  $n$  维随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , 记  $c_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$ , 则称阶矩阵  $C = (c_{ij})_{n \times n}$  为  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的协方差矩阵

例 1: 设 $\xi$ 的密度函数

$$p(x) = \begin{cases} c/x^2 & x \in [1, 3] \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad \text{求: } E\xi$$

$$[\text{解}] \because 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx \therefore c = 3/2;$$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx = \int_1^3 x \frac{3}{2x^2} dx = \frac{3}{2} \ln x \Big|_1^3 = \frac{3}{2} \ln 3. \quad \square$$

例 2 设  $x_1, x_2$  是随机变量  $\xi$  的两个任意取值, 证明:  $E[(\xi - \frac{x_1+x_2}{2})^2] \geq D\xi$ 。

$$[\text{证}] : E[(\xi - \frac{x_1+x_2}{2})^2] = E[\xi^2 - \xi(x_1+x_2) + (\frac{x_1+x_2}{2})^2]$$

$$= E\xi^2 - (E\xi)(x_1+x_2) + (\frac{x_1+x_2}{2})^2 - (E\xi)^2 + (E\xi)^2$$

$$= D\xi + (E\xi)^2 - (E\xi)(x_1+x_2) + (\frac{x_1+x_2}{2})^2$$

$$= D\xi + (E\xi - \frac{x_1+x_2}{2})^2 \geq D\xi. \quad \square$$

例 3 设随机变量的概率密度为  $f_x(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ ,

$-\infty < x < +\infty$ , 求  $D(X)$ .

$$[\text{解}] : E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_x(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-|x|} dx = 0$$

(奇函数, 对称区间上的积分)

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \Gamma(3) = 2$$

(偶函数，对称区间上的积分)

所以  $D(X) = EX^2 - (EX)^2 = 2$ .

例 4 设  $(X, Y)$  的协方差矩阵为  $C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ ，求  $X$  与  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY}$ 。

[解]：由协方差矩阵得到：

$$D(X) = \text{cov}(X, X) = 4,$$

$$D(Y) = \text{cov}(Y, Y) = 9, \quad \text{Cov}(X, Y) = -3$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{-3}{2 \times 3} = -\frac{1}{2}$$

例 5. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立，且  $X \sim B\left(16, \frac{1}{2}\right)$ ， $Y$  服从于参数为 9 的泊松分布，则

$$D(X - 2Y + 1) = (\quad C \quad)$$

A. -14

B. -13

C. 40

D. 41

6. 设随机变量  $\xi$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布，且已知  $E[(\xi + 2)(\xi - 1)] = 1$ ，则  $\lambda = 1$

**相关系数：**

$\xi$  与  $\eta$  的相关系数  $\rho_{\xi\eta}$  的定义  $\rho_{\xi\eta} = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$

相关系数  $\rho_{\xi\eta}$  反映了随机变量  $\xi$  与  $\eta$  之间的线性相关的程度。注意  $|\rho_{\xi\eta}| \leq 1$ 。

当  $\rho_{\xi\eta} = 0$ ，则称  $\xi$  与  $\eta$  不相关；

当  $|\rho_{\xi\eta}| = 1$ ，则称  $\xi$  与  $\eta$  完全相关

几个结论： $\rho_{\xi\eta} = 0 \Leftrightarrow \text{cov}(\xi, \eta) = 0$

$$\Leftrightarrow E(\xi\eta) = E\xi E\eta$$

$$\Leftrightarrow D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$$

$$\Leftrightarrow D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta$$

注意随机变量  $\xi$  与  $\eta$  相互独立，则  $\xi$  与  $\eta$  不相关；

反之  $\xi$  与  $\eta$  不相关，不能推出  $\xi$  与  $\eta$  相互独立。

例 5 设  $X$  与  $Y$  相互独立且都服从  $N(0, \sigma^2)$ ，若  $\xi = aX + bY$ ， $\eta = aX - bY$ ，证明： $\xi$  与  $\eta$  的相关系数， $\rho_{\xi\eta} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ 。

[证]： $\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(aX + bY, aX - bY)$

$$= a^2 \text{cov}(X, X) - b^2 \text{cov}(Y, Y) = a^2 DX - b^2 DY$$

$$= (a^2 - b^2) \sigma^2。 \quad \text{又因为}$$

$$D\xi = D(aX + bY) = a^2 DX + b^2 DY = (a^2 + b^2) \sigma^2$$

$$D\eta = D(aX - bY) = a^2 DX + b^2 DY = (a^2 + b^2) \sigma^2$$

$$\text{所以：} \rho_{\xi\eta} = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \frac{(a^2 - b^2) \sigma^2}{(a^2 + b^2) \sigma^2}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

例 6 设随机变量  $(X, Y) \sim N(1, 1; 4, 9; \frac{1}{2})$ ，则  $\text{Cov}(X, Y) = (\quad B \quad)$

(A) 0.5

(B) 3

(C) 18

(D) 36

(注： $(X, Y) \sim N(1, 1; 4, 9; \frac{1}{2})$  其中的  $\frac{1}{2}$  是相关系数)

7. 设随机变量  $X \sim B(4, \frac{1}{2})$ ,  $Y \sim N(2, 16)$ , 又  $E(XY)=6$ , 则  $X$  与  $Y$  的相关系数  $r =$  ( A )

(A) 0.5 (B) -0.16 (C) 0.8 (D) -0.5

其他:

$k$  阶原点矩:  $E(X^k)$   $k=1, 2, \dots$ 。  $k+s$  阶混合原点矩:  $E(X^k Y^s)$   $k, s=1, 2, \dots$

$k$  阶中心矩:  $E[(X-EX)^k]$   $k=1, 2, \dots$ 。  $k+s$  阶混合阶中心矩:  $E[(X-EX)^k (Y-EY)^s]$   $k, s=1, 2, \dots$

协方差矩阵:  $C=(c_{ij})_{n \times n}$  其中  $c_{ij}=E[(X_i-EX_i)(X_j-EX_j)]$

常用分布的期望与方差

分布	分布列和概率密度	数学期望	方差
分布 (0, 1)	$P\{\xi=0\}=p, P\{\xi=1\}=1-p$	$p$	$p(1-p)$
二项分布 $B(n, p)$	$b(k; n, p) = P\{\xi=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ ( $k=0, 1, 2, 3, \dots, n$ )	$np$	$np(1-p)$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P\{\xi=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $k=0, 1, 2, \dots, \lambda > 0$	$\lambda$	$\lambda$
均匀分布 $U[a, b]$	$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
几何分布 $X \sim \text{Ge}(p)$	分布列为 $P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} p$ ( $k=0, 1, 2, 3, \dots$ )	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
超几何分布 $X \sim h(n, N, M)$	$P\{X=k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ $k=0, 1, 2, 3, \dots, \min\{M, n\}$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
指数分布 $\exp(\lambda)$	$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ( $-\infty < x < +\infty$ )	$\mu$	$\sigma^2$
二维正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2, \rho)$	$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$	$E\xi=\mu_1$ $E\eta=\mu_2$	$D\xi=\sigma_1^2$ $D\eta=\sigma_2^2$

## 第五章 大数定律及中心极限定理

切比雪夫不等式:  $P\{|\xi-E\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$ ,  $P\{|\xi-E\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$

例 1: 设随机变量  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , 独立同分布, 且  $\xi_i$  服从参数为  $\lambda$  的指数分布,  $i=1, 2, 3$ , 试根据切比雪夫不等式证明:  $P\{0 < \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 < 6/\lambda\} \geq 2/3$  .

[证]:  $\xi_i \sim \exp(\lambda)$ ,  $E\xi_i = 1/\lambda$ ; 令  $X = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ , 则  $EX = E(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = 3/\lambda$ ,  $DX = D(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = 3/\lambda^2$ .  $P\{0 < \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 < 6/\lambda\} = P\{0 < X < 6/\lambda\} = P\{-3/\lambda < X - 3/\lambda < 3/\lambda\} = P\{|X - 3/\lambda| < 3/\lambda\}$

$$\geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{3/\lambda^2}{(3/\lambda)^2} = 1 - \frac{3}{9} = \frac{2}{3} \quad \square$$

例 2: 已知随机变量  $X$  的期望  $E(X)=100$ , 方差  $D(X)=10$ , 估计  $X$  落在 (80, 120) 内的概率。

[解]:  $P\{80 < X < 120\} = P\{-20 < X - 100 < 20\} = P\{|X - E(X)| < 20\} \geq 1 - \frac{DX}{20^2} = 1 - \frac{10}{400} = 0.975$

例 3. 若  $D(X) = 0.04$ , 利用切比雪夫不等式知  $P(|X - E(X)| \gg 0.2) = \text{—————}$

例 4. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本, 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 样本均值  $\bar{X}$  所满足的切比雪夫不等式为 ( B )

$$\begin{array}{ll} \text{A. } P\left\{|\bar{X} - n\mu| < \varepsilon\right\} \geq \frac{n\sigma^2}{\varepsilon^2} & \text{B. } P\left\{|\bar{X} - \mu| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \\ \text{C. } P\left\{|\bar{X} - \mu| \geq \varepsilon\right\} \leq 1 - \frac{n\sigma^2}{\varepsilon^2} & \text{D. } P\left\{|\bar{X} - n\mu| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{n\sigma^2}{\varepsilon^2} \end{array}$$

例 5. 设随机变量  $X \sim U(0, 1)$ , 用切比雪夫不等式估计  $P\left(|X - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \geq \underline{\quad 0.25 \quad}$

### 大数定律:

切比雪夫大数定理: 设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 分别具有数学期望与方差, 且方差一致有上界, 则

对任意给定正数  $\varepsilon$ , 恒有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1$ 。

伯努利大数定理: 设  $n_A$  是在  $n$  次独立重复试验中事件  $A$  发生的次数,  $p$  是事件  $A$  在每次试验中发生的概率,

则对任意给定正数  $\varepsilon$ , 恒有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$  (或  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$ )

辛钦大数定理: 设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  相互独立, 服从同一分布, 且具有数学期望  $EX_k = \mu$ , 则对任意给

定正数  $\varepsilon$ , 恒有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$

### 中心极限定理:

**棣莫弗(Demoivre)-拉普拉斯(Laplace)定理:** 设随机变量  $Y_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) 服从参数为  $n, p$  的二项分布,

即  $Y_n \sim B(n, p)$ , 则对任意实数  $x$ , 恒有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right\} = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \rightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

这一定理说明, 服从二项分布  $B(n, p)$  的随机变量  $Y_n$  作标准化后的随机变量  $\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}}$  的极限分布是标准正态分布  $N(0, 1)$ 。

**中心极限定理(林德贝格-勒维):** 设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  相互独立, 服从同一分布, 且具有数学期望

$EX_k = \mu$ , 和方差  $D(X_k) = \sigma^2 \neq 0$ , 随机变量  $Y_n = \left(\sum_{k=1}^n X_k - n\mu\right) / \sqrt{n\sigma}$  的分布函数为  $F_n(x)$ , 则对任意实数  $x$ , 恒有  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x)$

$$F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{Y_n \leq x\} = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

这一定理说明,  $\sum_{k=1}^n X_k$  的标准化随机变量  $Y_n = \left(\sum_{k=1}^n X_k - n\mu\right) / \sqrt{n\sigma}$  的极限分布是标准正态分布  $N(0, 1)$

### 中心极限定理的应用:

将一枚均匀硬币连掷 100 次, 则利用中心极限定理可知, 正面出现的次数大于 60 的概率近似为 0.0228. (附:  $\Phi(2) = 0.9772$ )

设随机变量  $X \sim B(100, 0.2)$ , 应用中心极限定理可得  $P\{X \geq 30\} = \underline{\quad 0.0062 \quad}$ . (已知  $\Phi(2.5) = 0.9938$ )

例 1: 某计算机系统由 120 个终端, 每个终端在 1 小时内平均有 3 分钟使用打印机, 假定各终端使用打印机与否是相互独立的, 求至少由 10 个终端同时使用打印机的概率。

[解]: 设  $X$  为同时使用打印机的终端的个数, 则  $X \sim B(120, p)$ , 这里  $p=3/60=0.05$ 。  $E(X)=np=120 \times 0.05=6$ ,  $D(X)=npq=6 \times 0.95=5.7$ 。 则  $P\{X \geq 10\} = 1 - P\{X < 10\} = 1 - P\{X \leq 9\} = 1 - P\{\frac{X-6}{\sqrt{5.7}} < \frac{10-6}{\sqrt{5.7}}\}$  利用中心极限定理上式近似等于  $1 - \Phi(1.6754) = 1 - 0.9621 = 0.0379$ 。 即至少由 10 个终端同时使用打印机的概率为 0.0379

例 2: 在抛硬币的试验中, 至少抛多少次, 才能使正面出现的频率落在 (0.4, 0.6) 区间的概率不小于 0.9?

[解]: 设共进行  $n$  次试验,  $X$  为出现正面的次数, 则  $X \sim B(n, p)$ , 这里  $p=1/2=0.5$ 。  $E(X)=np=0.5n$ ,  $D(X)=npq=0.25n$ 。 所求的为  $P\{0.4 < X/n < 0.6\} \geq 0.9$ 。 将  $X$  标准化  $P\{0.4 < X/n < 0.6\} = P\{0.4n < X < 0.6n\} = P\{\frac{0.4n-EX}{\sqrt{DX}} < \frac{X-EX}{\sqrt{DX}} < \frac{0.6n-EX}{\sqrt{DX}}\} = P\{-0.2\sqrt{n} < \frac{X-EX}{\sqrt{DX}} < 0.2\sqrt{n}\} \approx 2\Phi(0.2\sqrt{n}) - 1 \geq 0.9$   
 $\Rightarrow \Phi(0.2\sqrt{n}) \geq 0.95$ , 查表  $\Phi(1.645)=0.95$ , 则  $0.2\sqrt{n} \geq 1.645 \Rightarrow n \geq 67.65$ , 即至少抛 68 次才能满足要求。

例 3: 设随机变量  $X$  和  $Y$  的数学期望分别为 -2 和 2, 方差分别为 1 和 4, 而相关系数为 -0.5, 则根据切比雪夫不等式  $P\{|X+Y| \geq 6\} \leq \underline{\hspace{2cm}}$ 。 [解]:  $E(X+Y)=EX+EY=-2+2=0$ ,

$$D(X+Y)=DX+DY+2\text{cov}(X, Y)=1+4+2\rho\sqrt{DX}\sqrt{DY}=1+4+2(-0.5) \times 1 \times 2=3,$$

$$\text{则根据切比雪夫不等式 } P\{|X+Y| \geq 6\} = P\{|X+Y - E(X+Y)| \geq 6\} \leq \frac{D(X+Y)}{6^2} = \frac{3}{16} = \frac{1}{12} \quad \square$$

例 4: 生产线生产的产品成箱包装, 每箱的重量是随机的, 假设每箱平均重 50 千克, 标准差为 5 千克。若用最大载重量为 5 吨的汽车承运, 试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱, 才能保障不超载的概率大于 0.977 ( $\Phi(2)=0.977$ , 其中  $\Phi(x)$  是标准正态分布函数)

[解]: 设  $X_i$  为第  $i$  箱重量(千克),  $i=1, 2, \dots, n$ 。 则  $EX_i=EX=50$ ,  $DX_i=50$ 。

$$\text{令 } Z = \sum_{i=1}^n X_i, \text{ 则 } EZ=50n, \quad DZ=25n. \quad \text{要求 } P\{Z \leq 5000\} \geq 0.977,$$

$$\text{利用中心极限定理 } P\{Z \leq 5000\} = P\{\frac{Z-EZ}{\sqrt{DZ}} \leq \frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\} = \Phi(\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}) \geq 0.977$$

$$\text{因为 } \Phi(2) = 0.977, \text{ 所以 } \frac{5000-50n}{5\sqrt{n}} \geq 2 \Rightarrow 25n^2 - 5001n + 250000 \leq 0$$

$$\Rightarrow n \leq 98. \quad \text{每辆车最多可以装 98 箱, 才能保障不超载的概率大于 0.977.} \quad \square$$

例 4: 设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立,  $S_n=X_1+X_2+\dots+X_n$ , 则根据列维-林德伯格中心极限定理, 当  $n$  充分大时,  $S_n$  近似服从正态分布, 只要  $X_1, X_2, \dots, X_n$

- A、有相同的数学期望
- B、有相同的方差
- C、服从同一指数分布
- D、服从同一离散型分布

[解]: 根据列维-林德伯格中心极限定理的条件,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  必须独立同分布, 所以不能选 A, B。又必须具有有限的数学期望和方差, 故 D 不一定能保证此条件, 应选 C。  $\square$

例 4: 设总体  $X$  服从参数为 2 的指数分布,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 则当  $n \rightarrow \infty$  时,  $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$

依概率收敛于  $\underline{\hspace{2cm}}$  【分析】 本题考查大数定律: 一组相互独立且具有有限期望与方差的随机变量

$X_1, X_2, \dots, X_n$ , 当方差一致有界时, 其算术平均值依概率收敛于其数学期望的算术平均值:  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i$

$\sum_{i=1}^n EX_i$  ( $n \rightarrow \infty$ )。【解】 这里  $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2$ , 满足大数定律的条件, 且  $EX_i^2=DX_i+(EX_i)^2=1/4+(1/2)^2=1/2$ ,  $i=1$

$$\text{因此根据大数定律有 } Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \text{ 依概率收敛于 } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i^2 = \frac{1}{2}$$

## 第六章 样本及抽样分布

### (1) 数理统计的基本概念:

总体: 在数理统计中, 常把被考察对象的某一个(或多个)指标的全体称为总体(或母体)。我们总是把总

体看成是一个具有分布的随机变量（或随机向量）。

**个体：**总体中的每一个单元称为样品（或个体）。

**样本：**我们把从总体中抽取的部分样品  $x_1, x_2, \dots, x_n$  称为样本。样本中所含的样品数称为样本容量，一般用  $n$  表示。在一般情况下，总是把样本看成是  $n$  个相互独立的且与总体有相同分布的随机变量，这样的样本称为简单随机样本。在泛指任一次抽取的结果时， $x_1, x_2, \dots, x_n$  表示  $n$  个随机变量（样本）；在具体的一次抽取之后， $x_1, x_2, \dots, x_n$  表示  $n$  个具体的数值（样本值）。我们称之为样本的两重性。

**样本函数和统计量：**

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为总体的一个样本，称

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

为样本函数，其中  $\varphi$  为一个连续函数。如果  $\varphi$  中不包含任何未知参数，则称  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为一个统计量。

**常见统计量及其性质：**

样本均值 
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

样本方差 
$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

样本标准差 
$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

样本  $k$  阶原点矩

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k, k=1, 2, \dots.$$

样本  $k$  阶中心矩

$$M'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k, k=2, 3, \dots.$$

$$E(\bar{X}) = \mu, D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n},$$

$$E(S^2) = \sigma^2, E(S^{*2}) = \frac{n-1}{n} \sigma^2,$$

其中  $S^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ，为二阶中心矩

**(2) 正态总体下的四大分布：**

## 正态分布

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的一个样本, 则样本函数

$$u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

例: 设总体  $\xi \sim N(1, 2^2)$ , 且  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  是取自  $\xi$  的样本, 则 ( D )

A)  $\frac{\bar{\xi} - 1}{2} \sim N(0, 1)$

B)  $\frac{\bar{\xi} - 1}{4} \sim N(0, 1)$

C)  $\frac{(\bar{\xi} - 1)\sqrt{n}}{2} \sim N(0, 1)$

D)  $\frac{\bar{\xi} - 1}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$

## t 分布

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的一个样本, 则样本函数

$$t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

其中  $t(n-1)$  表示自由度为  $n-1$  的  $t$  分布。

$$t_{1-\alpha}(n) = -t_{\alpha}(n)$$

## $\chi^2$ 分布

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的一个样本, 则样本函数

$$w \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

其中  $\chi^2(n-1)$  表示自由度为  $n-1$  的  $\chi^2$  分布

## ■ $\chi^2$ 分布的一些重要性质:

1. 设  $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ , 则有  $E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$
2. 设  $Y_1 \sim \chi^2(n_1), Y_2 \sim \chi^2(n_2)$ , 且  $Y_1, Y_2$  相互独立, 则有  $Y_1 + Y_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$

## ○ F 分布

★ 定义: 设  $U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$ , 且  $U, V$  独立,

则 称随机变量  $\frac{U/n_1}{V/n_2}$  服从自由度  $(n_1, n_2)$  的  $F$  分布, 记为  $F \sim F(n_1, n_2)$

其中 称为第一自由度  $n_1$  称为第二自由度  $n_2$

性质:  $F \sim F(n_1, n_2)$ , 则  $F^{-1} \sim F(n_2, n_1)$

$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = [F_{\alpha}(n_2, n_1)]^{-1}$$

例:已知  $F_{0.1}(7,20)=2.04$ , 则  $F_{0.9}(20,7)=$ \_\_\_\_\_ 0.4902\_\_\_\_\_.

例. 对于给定的正数  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , 设  $u_\alpha$ ,  $\chi_\alpha^2(n)$ ,  $t_\alpha(n)$ ,  $F_\alpha(n_1, n_2)$  分别是  $N(0,1)$ ,  $\chi^2(n)$ ,

$t(n)$ ,  $F(n_1, n_2)$  分布的下  $\alpha$  分位数, 则下面结论中**不正确**的是 ( B )

(A)  $u_\alpha = -u_{1-\alpha}$

(B)  $\chi_{1-\alpha}^2(n) = -\chi_\alpha^2(n)$

(C)  $t_\alpha(n) = -t_{1-\alpha}(n)$

(D)  $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$

2、设  $X, Y$  相互独立, 且都服从标准正态分布, 则  $Z = \frac{X}{\sqrt{Y^2}}$  服从\_\_\_\_\_  $t(1)$  \_\_\_\_\_分布 (同时要写出 分布的参数).

3. 设  $\xi$  和  $\eta$  相互独立且都服从  $N(0,4)$ , 而  $\xi_1, \dots, \xi_4$  和  $\eta_1, \dots, \eta_4$  分别是来自总体  $\xi$  和  $\eta$  的样本,

则统计量  $U = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_4}{\sqrt{\eta_1^2 + \dots + \eta_4^2}}$  服从的分布为\_\_\_\_\_  $t(4)$  \_\_\_\_.

(3) 正态总体下分布的性质:

$\bar{X}$  与  $S^2$  独立。

## 第七章 参数估计

### (1) 点估计

#### 矩估计

设总体  $X$  的分布中包含有未知数  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ , 则其分布函数可以表成  $F(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ . 它的  $k$

阶原点矩  $\nu_k = E(X^k) (k=1, 2, \dots, m)$  中也包含了未知参数  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ , 即

$\nu_k = \nu_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ 。又设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为总体  $X$  的  $n$  个样本值, 其样本的  $k$  阶原点矩为

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k \quad (k=1, 2, \dots, m).$$

这样, 我们按照“当参数等于其估计量时, 总体矩等于相应的样本矩”的原则建立方程, 即有



由上面的  $m$  个方程中，解出的  $m$  个未知参数  $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m)$  即为参数  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$  的矩估计量。

极大似然估计:

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$$

当总体  $X$  为离散型随机变量时, 设其分布律为  $P\{X = x\} = p(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ , 则称

为样本的似然函数。

$$\left. \frac{\partial \ln L_n}{\partial \theta_i} \right|_{\theta_i = \hat{\theta}_i} = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

解 (1) 因  $\mu_1 = E(X) = \lambda$ , 故的矩估计为  $\hat{\lambda} = \bar{X}$

(2) 因似然函数为

$$L = \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} \right) = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

$$\text{从而} \quad \ln L = -n\lambda + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \ln \lambda - \ln \prod_{i=1}^n x_i!$$

$$\text{令 } \frac{d}{d\lambda} \ln L = 0, \text{ 则得到 } \lambda \text{ 的极大似然估计为 } \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{X}$$

2. 设总体  $X$  有概率分布

取值 $\mathbf{X}$	-1	0	1
概率 $\mathbf{P}$	$3\theta$	$\theta$	$1-4\theta$

其中  $\theta$  为待估参数. 现在观察到一个容量为 3 的样本,  $\mathbf{x}_1 = -1, \mathbf{x}_2 = 0, \mathbf{x}_3 = -1$ . 试求: (1)  $\theta$  的矩估计值; (4 分) (2)  $\theta$  的极大似然估计值. (6 分)

解: 令  $\mu_1 = E(X) = 1 - 7\theta$ ,

$$\text{故 } \theta \text{ 的矩估计为 } \hat{\theta} = \frac{1 - \bar{X}}{7},$$

$$\text{从而 } \theta \text{ 的矩估计值为 } \hat{\theta} = \frac{5}{21} \approx 0.238.$$

(2) 因似然函数为  $L(\theta) = p(x_1 = -1)p(x_2 = 0)p(x_3 = -1) = 9\theta^3$ ,

$$\text{令 } \frac{d}{d\theta} L(\theta) = 0, \text{ 则得到 } \theta \text{ 的极大似然估计值为 } \hat{\theta} = 0.$$

3. 设总体  $X$  的密度函数为  $f(x, \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 其中  $\theta$  未知,  $X_1, X_2, \dots, X_n$

是从该总体中抽取的一个样本, 试求: (1)  $\theta$  的矩估计; (4 分) (2)  $\theta$  的极大似然估计. (6 分)

$$\text{解 (1) 令 } \mu_1 = E(X) = \int_0^1 \theta x^\theta dx = \frac{\theta}{\theta+1}, \quad \dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{故 } \theta \text{ 的矩估计为 } \hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1 - \bar{X}}. \quad \dots\dots (4 \text{ 分})$$

(2) 因似然函数为

$$L(\theta) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$$

$$= \theta^n (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\theta-1}, \quad \text{其中 } 0 < x_1, x_2, \dots, x_n < 1.$$

$$\ln L(\theta) = n \ln \theta + (\theta - 1) \ln x_1 x_2 \cdots x_n. \quad \dots\dots (7 \text{ 分})$$

$$\text{令 } \frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = 0, \text{ 则得到 } \theta \text{ 的极大似然估计值为 } \hat{\theta} = \frac{-n}{\ln x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

4. 设总体  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 其中  $\theta$  未知,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是该总体的

一组样本观察值, 试求: (1)  $\theta$  的矩估计; (7 分)

(2)  $\theta$  的最大似然估计. (8 分)

解: (1) 因为  $X$  服从指数分布, 所以  $EX = \frac{1}{\theta}$  (3 分)

$$\text{令 } EX = \bar{X}, \text{ 故 } \theta \text{ 的矩估计为 } \frac{1}{\bar{X}}. \quad (7 \text{ 分})$$

(2) 因似然函数为

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) \\ &= \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} \end{aligned} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\ln L(\theta) = n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^n x_i \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{令 } \frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = 0, \text{ 则得到 } \theta \text{ 的极大似然估计值为 } \hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$$

(2) 估计量的评选标准

**无偏性:** 设  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为未知参数  $\theta$  的估计量. 若  $E(\hat{\theta}) = \theta$ , 则称  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的无偏估计量。

$$E(\bar{X}) = E(X), \quad E(S^2) = D(X)$$

**有效性:** 设  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  和  $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是未知参数  $\theta$  的两个无偏估计量。

若  $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$ , 则称  $\hat{\theta}_1$  比  $\hat{\theta}_2$  有效

**一致性:** 设  $\hat{\theta}_n$  是  $\theta$  的一串估计量, 如果对于任意的正数  $\varepsilon$ , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0,$$

则称  $\hat{\theta}_n$  为  $\theta$  的一致估计量 (或相合估计量)。

若  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的无偏估计, 且  $D(\hat{\theta}) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 则  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的一致估计。

只要总体的  $E(X)$  和  $D(X)$  存在, 一切样本矩和样本矩的连续函数都是相应总体的一致估计量。

例 1. 设  $X_1, X_2, X_3$  为从总体  $X$  中抽取的容量为 3 的样本, 总体均值为  $\theta$ , 总体方差为  $\sigma^2$ . 记

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3, \text{ 分别为未知参数 } \theta \text{ 的估计, 则}$$

\_\_\_\_\_  $\hat{\theta}_2$  \_\_\_\_\_ 为  $\theta$  的无偏估计, 且此两个估计中 \_\_\_\_\_  $\hat{\theta}_2$  \_\_\_\_\_ 较有效.

2. 总体  $X$  具有均值  $\mu$ , 方差  $\sigma^2$ . 从总体中取得容量为  $n$  的样本,  $\bar{X}$  为样本均值,  $S^2$  为样本方

差, 为使  $\hat{\theta} = (\bar{X})^2 - cS^2$  是总体均值的平方  $\mu^2$  的无偏估计量, 则  $c = \underline{\quad \frac{1}{n} \quad}$

(3) 区间估计:

**置信区间和置信度:**

设总体  $X$  含有一个待估的未知参数  $\theta$ . 如果我们从样本  $x_1, x_2, \dots, x_n$  出发, 找出两个统计量

$\theta_1 = \theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  与  $\theta_2 = \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $\theta_1 < \theta_2$ ), 使得区间  $[\theta_1, \theta_2]$  以

$1 - \alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) 的概率包含这个待估参数  $\theta$ , 即

$$P\{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\} = 1 - \alpha,$$

那么称区间  $[\theta_1, \theta_2]$  为  $\theta$  的置信区间,  $1 - \alpha$  为该区间的置信度 (或置信水平)。

单正态总体的期望和方差的区间估计:

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的一个样本, 在置信度为  $1 - \alpha$  下, 我们来确定  $\mu$  和  $\sigma^2$  的置

信区间  $[\theta_1, \theta_2]$ 。具体步骤如下:

(i) 选择样本函数;

(ii) 由置信度  $1 - \alpha$ , 查表找分位数;

(iii) 导出置信区间  $[\theta_1, \theta_2]$ 。

**已知方差, 估计均值**

(i) 选择样本函数

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

(ii) 查表找分位数

$$P\left(-\lambda \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \leq \lambda\right) = 1 - \alpha.$$

(iii) 导出置信区间

$$\left[ \bar{x} - \lambda \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \lambda \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right]$$

未知方差，估计均值

(i) 选择样本函数

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

(ii) 查表找分位数

$$P\left(-\lambda \leq \frac{\bar{x} - \mu}{S / \sqrt{n}} \leq \lambda\right) = 1 - \alpha.$$

(iii) 导出置信区间

$$\left[ \bar{x} - \lambda \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \lambda \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

方差的区间估计

(i) 选择样本函数

$$w = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

(ii) 查表找分位数

$$P\left(\lambda_1 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \lambda_2\right) = 1 - \alpha.$$

(iii) 导出  $\sigma$  的置信区间

$$\left[ \sqrt{\frac{n-1}{\lambda_2}} S, \sqrt{\frac{n-1}{\lambda_1}} S \right]$$

例题：

1. 设某总体  $X$  服从  $N(\mu, \sigma^2)$  分布，已知  $\sigma = 2.1$ ，随机取容量  $n=16$ ，测得 样本均值  $\bar{x} = 12$ ，求  $\mu$  的 0.95 的置信区间为 (10.971, 13.029)。

(标准正态分布函数值  $\Phi(1.96) = 0.975, \Phi(1.645) = 0.95$ )

2. 假定初生婴儿的体重服从正态分布  $N(\mu, 375^2)$ ，随机抽取 12 名新生儿，测得体重 (单位：克) 为 3100, 2520, 3000, 3000, 3600, 3160, 3560, 3320, 2880, 2600, 3400, 2540。试求新生儿平均体重的置信度为 95% 的置信区间。

(附：  $\chi_{0.025}^2(3) = 9.348, \chi_{0.975}^2(3) = 0.216, \chi_{0.025}^2(4) = 11.143, \chi_{0.975}^2(4) = 0.484$ )

解 取检验统计量  $u = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ ，则  $u = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ ，

从而

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha,$$

$$P(\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n} < \mu < \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n}) = 1-\alpha,$$

$$P(2844.49412 < \mu < 3268.84588) = 0.95,$$

所以  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信区间为 (2844.49412, 3268.84588)

3. 设某总体  $X$  服从  $N(\mu, \sigma^2)$  分布, 已知  $\sigma = 2.1$ , 随机取容量  $n=16$ , 测得 样本均值  $\bar{x}=12$ , 求  $\mu$  的 0.95 的置信区间为\_\_ (10.971, 13.029) \_\_\_\_.

(标准正态分布函数值  $\Phi(1.96) = 0.975, \Phi(1.645) = 0.95$ )

4. 设某总体  $\xi$  服从  $N(\mu, \sigma^2)$  分布, 已知  $\sigma = 2$ , 样本容量  $n=16$ , 测得样本均值  $\bar{x}=6$ , 则  $\mu$  的置信概率为 0.95 的置信区间为\_\_ (5.02, 6.98) \_\_

## 第八章 假设检验

### 基本思想:

假设检验的统计思想是, 概率很小的事件在一次试验中可以认为基本上是不会发生的, 即小概率原理。

为了检验一个假设  $H_0$  是否成立。我们先假定  $H_0$  是成立的。如果根据这个假定导致了一个不合理的事件发生, 那就表明原来的假定  $H_0$  是不正确的, 我们拒绝接受  $H_0$ ; 如果由此没有导出不合理的现象, 则不能拒绝接受  $H_0$ , 我们称  $H_0$  是相容的。与  $H_0$  相对的假设称为备择假设, 用  $H_1$  表示。

这里所说的小概率事件就是事件  $\{K \in R_\alpha\}$ , 其概率就是检验水平  $\alpha$ , 通常我们取  $\alpha=0.05$ , 有时也取 0.01 或 0.10。

### 基本步骤:

假设检验的基本步骤如下:

- (i) 提出零假设  $H_0$ ;
- (ii) 选择统计量  $K$ ;
- (iii) 对于检验水平  $\alpha$  查表找分位数  $\lambda$ ;
- (iv) 由样本值  $x_1, x_2, \dots, x_n$  计算统计量之值  $K$ ;

将  $\hat{K}$  与  $\lambda$  进行比较, 作出判断: 当  $|\hat{K}| > \lambda$  (或  $\hat{K} > \lambda$ ) 时否定  $H_0$ , 否则认为  $H_0$  相容。

### 两类错误:

**第一类错误:** 当  $H_0$  为真时, 而样本值却落入了否定域, 按照我们规定的检验法则, 应当否定  $H_0$ 。这时, 我们把客观上  $H_0$  成立判为  $H_0$  为不成立 (即否定了真实的假设), 称这种错误为“以真当假”的错误或第一类错误, 记  $\alpha$  为犯此类错误的概率, 即

$$P\{\text{否定 } H_0 | H_0 \text{ 为真}\} = \alpha;$$

此处的  $\alpha$  恰好为检验水平。

**第二类错误:** 当  $H_0$  为真时, 而样本值却落入了相容域, 按照我们规定的检验法则, 应当接受  $H_0$ 。这时, 我们把客观上  $H_0$  不成立判为  $H_0$  成立 (即接受了不真实的假设), 称这种错误为“以假当真”的错误或第二类

错误，记  $\beta$  为犯此类错误的概率，即

$P\{\text{接受 } H_0 | H_0 \text{ 为真}\} = \beta。$

两类错误的关系：

人们当然希望犯两类错误的概率同时都很小。但是，当容量  $n$  一定时， $\alpha$  变小，则  $\beta$  变大；相反地， $\beta$  变小，则  $\alpha$  变大。取定  $\alpha$  要想使  $\beta$  变小，则必须增加样本容量。

在实际使用时，通常人们只能控制犯第一类错误的概率，即给定显著性水平  $\alpha$ 。 $\alpha$  大小的选取应根据实际情况而定。当我们宁可“以假为真”、而不愿“以真当假”时，则应把  $\alpha$  取得很小，如 0.01，甚至 0.001。反之，则应把  $\alpha$  取得大些。

例：原假设  $H_0$  不真时，作出接受  $H_0$  的决策，称为犯第 II 类错误，原假设  $H_0$  为真时，作出拒绝  $H_0$  的决策，称为犯第 I 类错误。

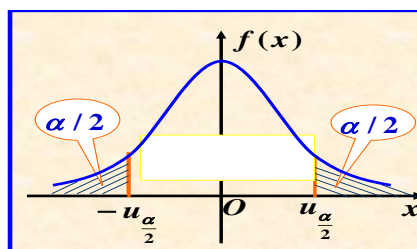
单正态总体均值和方差的假设检验

条件	零假设	统计量	对应样本函数分布	否定域(拒绝域)
已知 $\sigma^2$	$H_0 : \mu = \mu_0$	$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$	$N(0, 1)$	$ u  > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
	$H_0 : \mu \leq \mu_0$			$u > u_{1-\alpha}$
	$H_0 : \mu \geq \mu_0$			$u < -u_{1-\alpha}$
未知 $\sigma^2$	$H_0 : \mu = \mu_0$	$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$ t  > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
	$H_0 : \mu \leq \mu_0$			$t > t_{1-\alpha}(n-1)$
	$H_0 : \mu \geq \mu_0$			$t < -t_{1-\alpha}(n-1)$

### 8.2.1 已知方差 $\sigma^2$ , 检验 $H_0: \mu = \mu_0$

#### 步骤

- ① 提出假设:  $H_0: \mu = \mu_0$
- ② 找统计量:  $u = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$
- ③ 求临界值:  $P\{|u| > u_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$  查表得  $u_{\frac{\alpha}{2}}$
- ④ 求观察值:  $u_1 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$
- ⑤ 作出判断: 若  $|u_1| > u_{\frac{\alpha}{2}}$ , 则拒绝  $H_0$ ;  
若  $|u_1| < u_{\frac{\alpha}{2}}$ , 则接受  $H_0$ .

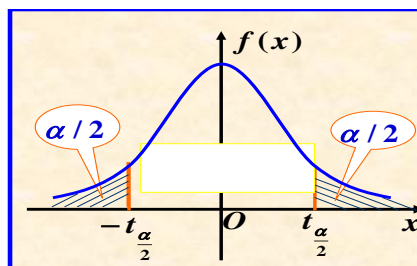


广东工业大学

### 8.2.2 未知方差 $\sigma^2$ , 检验 $H_0: \mu = \mu_0$

#### 步骤

- ① 提出假设:  $H_0: \mu = \mu_0$
- ② 找统计量:  $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$
- ③ 求临界值:  $P\{|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$  查表得  $t_{\frac{\alpha}{2}}$
- ④ 求观察值:  $t_1 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$
- ⑤ 作出判断: 若  $|t_1| > t_{\frac{\alpha}{2}}$ , 则拒绝  $H_0$ ;  
若  $|t_1| < t_{\frac{\alpha}{2}}$ , 则接受  $H_0$ .



广东工业大学

例题:

设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 且  $\mu$  已知, 检验方差  $\sigma^2 = \sigma_0^2$  是否成立需要利用(C )

- A 标准正态分布                      B 自由度为 n-1 的 t 分布  
C 自由度为 n 的  $\chi^2$  分布              D 自由度为 n-1 的  $\chi^2$  分布

设服用某种药物一定份量使病人每分钟脉搏增加的次数 X 近似服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 均值  $\mu$ 、方差  $\sigma^2$  均未知, 今抽查 9 个病人, 测得每分钟增加脉搏的次数样本均值为 13.20, 样本标准差为 4.0

- (1) 试取  $\alpha = 0.05$ , 检验假设  $H_0: \mu = 10$   $H_1: \mu \neq 10$ ;



(2) 求  $\sigma$  的置信度为 0.95 的置信区间.

备用数据:  $\chi^2$  分布、 $t$  分布的上侧  $\alpha$  分位数

$$\chi_{0.05}^2(8)=15.507 \quad \chi_{0.025}^2(8)=17.535 \quad \chi_{0.975}^2(8)=2.180 \quad t_{0.025}(8)=2.3060 \quad t_{0.05}(8)=1.8595$$

$$t_{0.025}(9)=1.8331$$

解 (1) 取检验统计量  $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$ , 则它服从  $t(n-1)$ ,

所以此检验问题的拒绝域为  $\frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 。

由条件得到  $n=9$ ,  $\bar{x}=13.2$ ,  $s=4.0$ ,

$$t = \frac{\bar{x} - 10}{s / \sqrt{n}} = 2.4 > t_{0.025}(8) = 2.3060$$

(2) 取检验统计量  $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ , 则  $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ , 从而

$$P\{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\} = 1 - \alpha$$

$$P\{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}\} = 1 - \alpha$$

所以  $\sigma$  的置信度为 0.95 的置信区间为 (2.701793, 7.66261)。

2、从一批灯泡中抽取 16 个灯泡的随机样本, 算得样本均值  $\bar{x}=1900$  小时, 样本标准差  $s=490$

小时, 以  $\alpha = 1\%$  的水平, 检验整批灯泡的平均使用寿命是否为 2000 小时?

(附:  $t_{0.05}(15)=2.131$ ,  $t_{0.01}(15)=2.947$ ,  $t_{0.01}(16)=2.921$ ,  $t_{0.05}(16)=2.120$ )

解 假设  $H_0: \mu = \mu_0 = 2000$ ,  $H_1: \mu \neq \mu_0 = 2000$ ,

取检验统计量  $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$ ,  $s=490$ , 则  $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$ ,

所以此检验问题的拒绝域为  $\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \right| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 。

由条件  $n=16$ ,  $\bar{x}=1900$ ,  $s=490$ , 得到

$$|t_1| = \left| \frac{\bar{x} - 10}{s / \sqrt{n}} \right| = 0.0816 < t_{0.01}(15) = 2.947,$$

所以接受  $H_0$ ，即整批灯泡的平均使用寿命为 2000 小时.