含参变量积分复习

要求掌握：

(1) 广义积分的收敛判定;

(2) 含参变量的常义积分的性质:连续性、可微性、可积性.含参变量的常义积分求极限,求导,及利用对参数的微分或积分的方法计算积分值;

(3) 含参变量的广义积分在一致收敛下的性质:连续性、可微性、可积性.利用含参变量的广义积分求极限,求导,及利用对参数的微分或积分的方法计算积分;

(4) Euler积分性质,并能利用Euler积分求某些积分的值.

....

1. (15)(8分) 设 $g(x)=\int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x} e^{-t^2+xt}\mathrm{dt}$, 求$g'(x)$, $g'(0)$.

2. (14)(10分) 计算含参变量积分$F(u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin^2 x+u^2\cos^2 x)\,dx,\quad (u>0)$.

3. (13)(4分) 设$f(x,y)$在$[a,b]\times[c,d]$上黎曼可积,则(　　)
   - (A) 对固定的$y\in[c,d]$, $f(x,y)$作为x的函数在$[a,b]$上可积
   - (B) $\int_a^b f(x,y)dx$在$[c,d]$上关于y连续
   - (C) 对固定的$y\in[c,d]$, $f(x,y)$作为x的函数在$[a,b]$上不一定可积
   - (D) $\int_a^b f(x,y)dx$在$[c,d]$上关于y不连续

4. (13)(4分) 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上非负,$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$收敛,其中$a>0$,则(　　)
   - (A) $F(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,+\infty)$上是无界函数
   - (B) $\int_a^{+\infty}(\sin x)f(x)dx$条件收敛
   - (C) $\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$发散
   - (D) 当$x\to+\infty$时,$f(x)$不一定有极限

5. (13)(8分) 设$f(u,v)$在整个平面上有连续的偏导数,设$F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} f(x+\alpha,x-\alpha)dx$,求$F'(\alpha)$.

6. (12) (7分)计算$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}dx$,其中$\alpha>0$.

解:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}dx &= \int_0^{\alpha}du\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2u^2)(1+x^2)}dx\\ &= \int_0^{\alpha}\frac{1}{1-u^2}\{\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx-\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+x^2u^2}dx\}\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\alpha}\frac{1-u}{1-u^2}du=\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha).\end{aligned}$$

7. (12)(5 分) 利用$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}$,计算$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

解: 记积分为I.

$$I=-\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}dx(1分)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}d(2x)(2分)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt(1分)=\frac{\pi}{2}.$$
(1分)

8. (12)(4分)积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 的值是$\underline{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

9. (12)(4分)函数 $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ 的连续域是 $\underline{x>0,y>0}$.

10. (12)(4分)令 $I(u)=\int_{\sin u}^{\cos u}e^{x^2+xu}dx$, 则 $I'(0)=\underline{\frac{e-3}{2}}$

11. (12)(4分)下述命题正确的是(D) (请写出所有正确命题的编号):

A. 无穷积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$；

B. 周期函数 $f(x)$ 在任何有限区间上逐段光滑，则其 Fourier 级数收敛于 $f(x)$；

C. 无旋场必是有势场；

D. 设 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续，且含参变量广义积分 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$
在 $[\alpha,\beta]$ 上关于 u 一致收敛，则 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续。

12. (11)(3分) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=$ ________________.

13. (10)(5分) 设$F(\alpha)=\int_0^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$,求$F'(x)$.

14. (10)(5分) 利用Euler积分计算$\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-at} dt$,其中$a > 0$.

15. (09)(4分) 设$F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx$,则$F'(\alpha) =$______.

16. (08)(10分) 计算$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.