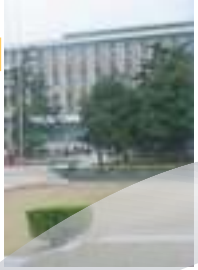
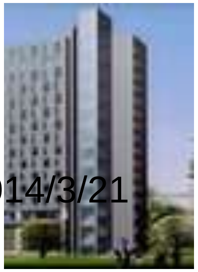
Computer Science and Technology





运 筹 学

中国科学技术大学
1958—2008

对偶理论与灵敏度分析

Chp.1 Duality theory & Sensitivity analysis

3.1 单纯形法的矩阵描述

- 设线性规划原问题问题： $\max z = CX$

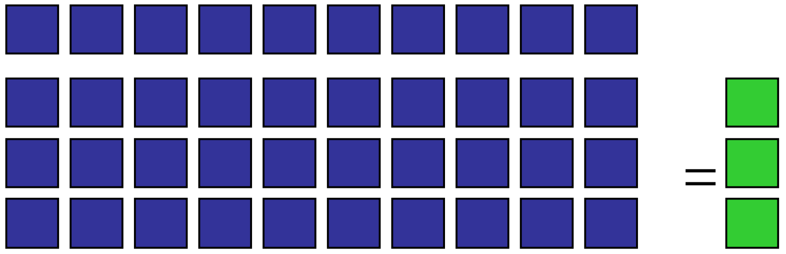
$$\begin{cases} AX \le b \\ X \ge O \end{cases}$$

  - 其中：

$$C = [c_1, c_2, \cdots, c_n]$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

	X	RHS
z	-C	0
	A	b



- 为了得到问题的标准形式，引入松弛变量：

$$X_s = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{约束变为}} [A, I]\begin{bmatrix} X \\ X_s \end{bmatrix} = b, \text{且} \begin{bmatrix} X \\ X_s \end{bmatrix} \geq O$$

其中I为$m \times m$的单位矩阵,零向量O有$m+n$个元素

- 单纯形法的一般方法是为了得到一系列更优的基本可行解直到得到最优解，在上述的扩展形式中：

$$n+m\text{个元素}\begin{bmatrix} X \\ X_s \end{bmatrix}\text{中的}n\text{个非基变量被赋值为}0$$

剩下了含有m个未知数（基变量）的m个方程

3.1 单纯形法的矩阵描述(cont.)

- 由上，将系数矩阵(*A,I*)分为(*B,N*)两块，这里*N*是非基变量的系数矩阵。对应于*B*的变量是基变量，用向量X_B表示。其他的即为非基变量，用向量X_N表示。同时将C也分成两块（C_B,C_N）。C_B是目标函数中X_B的系数行向量，C_N是目标函数中X_N的系数行向量。
- 模型改写为：

$$\max z = [C_B, C_N]\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$$

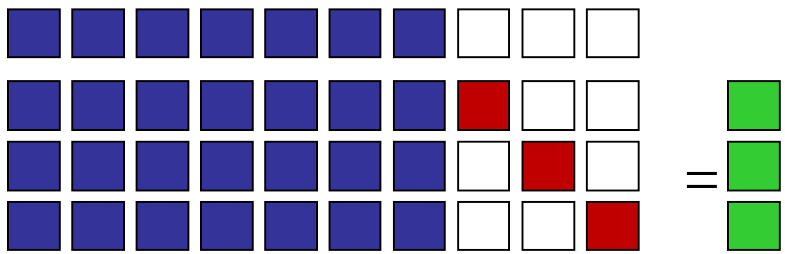
$$\begin{cases} [B, N]\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = b \\ X_B, X_N \geq 0 \end{cases}$$

其中：

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}$$，是从$[A, I]$中消去非基变量对应的系数的列后得到的基矩阵

- 即： $\max z = CX + C_S X_S$

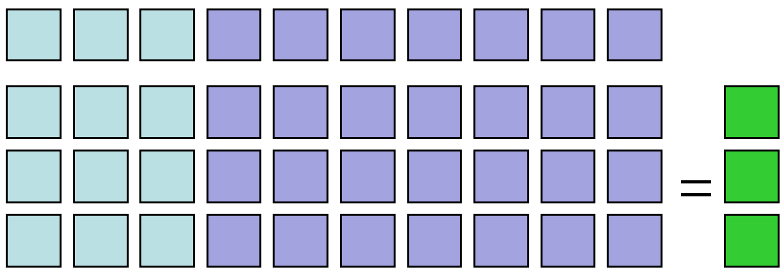
$$\begin{cases} AX + IX_S = b \\ X, X_S \geq 0 \end{cases}$$



	X	X_S	RHS
z	-C	C_S	0
	A	I	b

- $$\max z = C_B X_B + C_N X_N$$

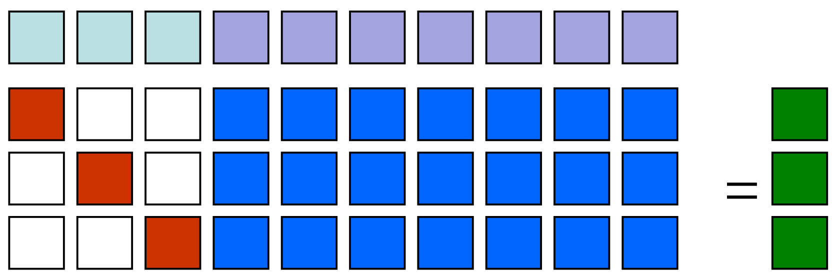
$$\begin{cases} BX_B + NX_N = b \\ X_B, X_N \geq O \end{cases}$$



	X_B	X_N	RHS
z	$-C_B$	$-C_N$	0
	B	N	b

$$\max z = C_B X_B + C_N X_N$$

$$\begin{cases} I X_B = B^{-1}b - B^{-1} N X_N \\ X_B, X_N \geq O \end{cases} \qquad (1)$$



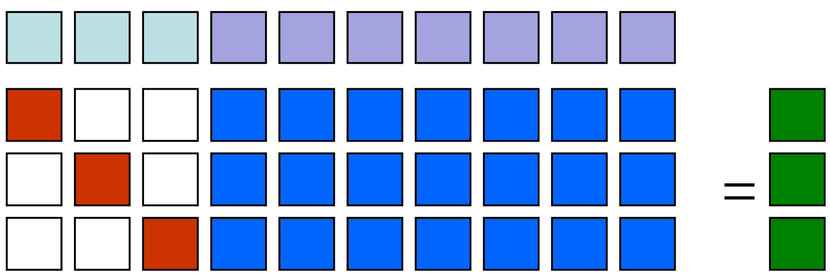
	X_B	X_N	RHS
z	$-C_B$	$-C_N$	0
	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

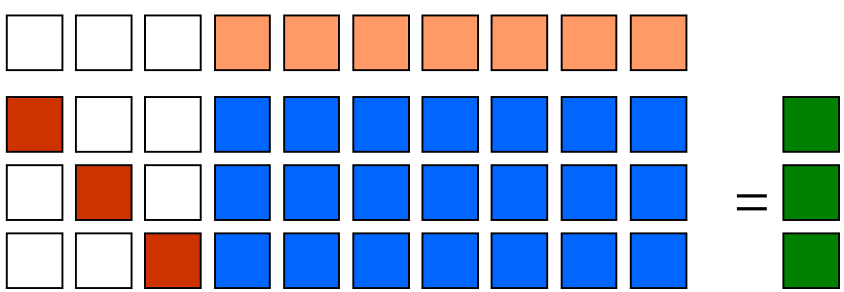
3.1 单纯形法的矩阵描述(cont.)

将上页的(1)式代入目标函数中：

$$\max z = C_B(B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_N X_N = C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N$$

$$\begin{cases} IX_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \\ X_B, X_N \geq O \end{cases}$$





	X_B	X_N	RHS
z	0	$C_B B^{-1}N - C_N$	$C_B B^{-1}b$
X_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

- 最终得到了仅用非基变量表示的目标函数

$$\max z = C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) X_N$$

令非基变量为0，得到一个基可行解：

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ O \end{pmatrix}$$

目标函数值为： $z = C_B B^{-1} b$

从目标函数的表达式可以看出，目标函数的值能否再进一步增大，将完全取决于其中非基变量的系数：

$$C_N - C_B B^{-1} N$$

这也就是上一章中的“检验数”的另外一种表示形式——矩阵形式。

3.1 单纯形法的矩阵描述(cont.)

– 回到标准型

$$\max z = CX + C_S X_S$$

$$\begin{cases} AX + IX_S = b \\ X, X_S \geq 0 \end{cases}$$

	X	X_S	RHS
z	-C	0	0
	A	I	b

- 想从上述的系数矩阵中得到一组基B以及对应的基变量，这组基B单独列在右侧，为了方便得到X_B的值，并将目标函数全部以非基变量表示，做矩阵变换：

	X_B	X	X_S	RHS
z	C_B	-C	0	0
	B	A	I	b

	X_B	X	X_S	RHS
z	0	$C_B B^{-1} A - C$	$-C_B B^{-1}$	$-C_B B^{-1} b$
	I	$B^{-1} A$	B^{-1}	$B^{-1} b$

- 检验数 $C_N - C_B B^{-1} N = (C - C_B) - C_B B^{-1}(A + I - B)$

$$= (C - C_B) - C_B B^{-1} A - C_B B^{-1} + C_B B^{-1} B$$

$$= C - C_B B^{-1} A - C_B B^{-1}$$

- 同上表对应：
  - 非基变量中构造标准型时注入的松弛变量对应的检验数为$-C_B B^{-1}$
  - 非基变量中原问题决策变量对应的检验数为$C - C_B B^{-1} A$

– 用矩阵描述时，θ规则的表达式是：

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_j)_i} \middle| (B^{-1}P_j)_i > 0 \right\} = \frac{(B^{-1}b)_l}{(B^{-1}P_j)_l}$$

$(B^{-1}b)_i$、$(B^{-1}P_j)_i$分别是向量$B^{-1}b$、$B^{-1}P_j$中的第i个元素。

	X_B	X	X_S	x_j	RHS
z	0	$C_B B^{-1} A - C$	$-C_B B^{-1}$		$-C_B B^{-1} b$
	I	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}p_j$	$B^{-1}b$

3.1 单纯形法的矩阵描述(cont.)

- 为了便于在表中找到B^{-1}的位置，将数学模型改写为：

$$-z + C_B X_B + C_{N_1} X_{N_1} + 0X_s = 0，N_1、s为非基变量的编号$$

$$\begin{cases} BX_B + N_1 X_{N_1} + IX_s = b \\ X_B, X_{N_1} \geq 0 \end{cases}$$

- 当确定X_B为基变量时，经过基变换可得到X_B与z的表达式为：

$$X_B + B^{-1}N_1 X_N + B^{-1}X_s = B^{-1}b$$

$$-z + (C_{N_1} - C_B B^{-1} N_1) X_N - C_B B^{-1} X_s = -CB^{-1}b$$

其矩阵形式为：

$$\begin{pmatrix} 0 & I & B^{-1}N_1 & B^{-1} \\ 1 & 0 & C_{N_1} - C_B B^{-1} N_1 & -C_B B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z \\ X_B \\ X_{N_1} \\ X_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ -CB^{-1}b \end{pmatrix}$$

3.1 单纯形法的矩阵描述(cont.)

- 在分块系数矩阵中$(0,1)^T$这一列不参加运算。各部分数字都可以用矩阵运算求得。此外可见，在初始单位矩阵的位置，在各运算表中就是B^{-1}的所在位置。

迭代	BV.	Eq.	参数			右边
			z	原始变量	松弛变量	
0:	z	(0)	1	$-c$	0	0
	x_B	$(1,2,\cdots,m)$	0	A	I	b

表3.1 单纯形表初始矩阵表示

迭代	BV.	Eq.	参数			右边
			z	原始变量	松弛变量	
任意	z	(0)	1	$c_B B^{-1}A-c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$
一次	x_B	$(1,2,\cdots,m)$	0	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$

表3.2 单纯形表任意一次迭代后的矩阵表示

3.2 改进单纯形法

- 改进单纯形法求解线性问题的计算步骤为：

(1)根据给出的线性规划问题，在加入松弛变量或人工变量后，得到初始基变量，求初始基矩阵B的逆矩阵B^{-1}。求出初始解：

$$\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

然后计算单纯形乘子$Y = C_B B^{-1}$；

(2)计算非基变量X_N的检验数，$\sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N$。

若$\sigma_N \le 0$，已得到最优解，可停止计算；

若还存在$\sigma_j > 0, j \in N$，转下一步；

(3)根据$\max\limits_j(\sigma_j | \sigma_j > 0) = \sigma_k$所对应的非基变量$x_k$为换入变量。

计算$B^{-1}P_k$，若$B^{-1}P_k \le 0$，那么问题无解，停止计算；否则进入下一步；

(4)根据θ规则，求出

$$\theta=\min\left\{\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_k)_i}\middle|(B^{-1}P_k)_i>0\right\}=\frac{(B^{-1}b)_l}{(B^{-1}P_k)_l},$$

它对应的基变量x_l为换出变量。于是可以给出一组新的基变量以及新的基矩阵B_1。

(5)计算新的基矩阵的逆矩阵B_1^{-1}，求出$B_1^{-1}b$及$Y=C_{B_1}B_1^{-1}$。重复(2)~(5)。

B_1^{-1}的求得：

(1)单位矩阵$I_m=(e_1,e_2,\cdots,e_m)$，

e_i表示第i个位置的元素为1其他元素均为0的列向量；

(2)设x_k为换入变量，x_l为换出变量，则$B_1^{-1}=EB^{-1}$，其中：

$$E=(e_1,e_2,\cdots,e_{l-1},\xi,e_{l+1},\cdots,e_m),$$

$$\xi=\left[-a_{1k}/a_{lk},-a_{2k}/a_{lk},\cdots,1/a_{lk},\cdots,-a_{mk}/a_{lk}\right]^T$$

3.2 改进单纯形法(cont.)

– 例3.1 用改进单纯形法求解：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,5 \end{cases}$$

– 解：

初始基 $B_0 = (P_3, P_4, P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是单位阵。

基变量 $X_{B_0} = (x_3, x_4, x_5)^T = (1,1,1)^T$。

相应的 $C_{B_0} = (0,0,0)$，$X_{N_0} = (x_1, x_2)^T$，$C_{N_0} = (2,3)$。

计算非基变量检验数 $\sigma_{N_0} = C_{N_0} - C_{B_0} B_0^{-1} N_0 = (2,3)$，

由此可确定 x_2 为换入变量。

3.2 改进单纯形法(cont.)

计算$\theta = \min\left\{ \frac{(B_0^{-1}b)_i}{(B_0^{-1}P_2)_i} \middle| (B_0^{-1}P_2)_i > 0 \right\} = \min\{8/2, -, 12/4\} = 3,$

对应的换出变量为x_5。新的基为$B_1 = (P_3, P_4, P_2), X_{B_1} = (x_3, x_4, x_2)^T$。

$C_{B_1} = (0,0,3),\quad C_{N_1} = (2,0)$。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix};$$

第一步迭代，计算得到 $B_1^{-1} = E_1 B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

非基变量检验数

$$\sigma_{N_1} = C_{N_1} - C_{B_1} B_1^{-1} N_1 = (2,0) - (0,0,3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2, -3/4)$$

3.2 改进单纯形法(cont.)

对应的换入变量为 x_1，计算 $\theta=\min\left\{\dfrac{(B_1^{-1}b)_i}{(B_1^{-1}P_1)_i}\middle|(B_1^{-1}P_1)_i>0\right\}=\min\{2/1,16/4,-\}=2$,

对应的换出变量为 x_3。新的基为 $B_2=(P_1,P_4,P_2), X_{B_2}=(x_1,x_4,x_2)^T$。

$C_{B_2}=(2,0,3)$，$C_{N_2}=(0,0)$。

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & -1/2\\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4\end{bmatrix}\Rightarrow\xi=\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix};$$

第二步迭代，计算得到 $B_2^{-1}=E_2B_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\-4&1&2\\0&0&1/4\end{pmatrix}$

非基变量检验数

$$\sigma_{N_2}=C_{N_2}-C_{B_2}B_2^{-1}N_2=(0,0)-(2,0,3)\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\-4&1&2\\0&0&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}=(-2,1/4)$$

3.2 改进单纯形法(cont.)

对应的换入变量为x_5，计算$\theta=\min\left\{\frac{(B_2^{-1}b)_i}{(B_2^{-1}P_5)_i}\middle|(B_0^{-1}P_5)_i>0\right\}$

$$=\min\left\{-,8/2,\frac{3}{1/4}\right\}=4,$$

对应的换出变量为x_4。新的基为$B_3=(P_1,P_5,P_2),X_{B_3}=(x_1,x_5,x_2)^T$。

$C_{B_3}=(2,0,3)$，$C_{N_3}=(0,0)$。

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&0&-1/2\\0&0&-4&1&\boxed{2}\\0&1&0&0&1/4\end{bmatrix}\Rightarrow\xi=\begin{pmatrix}1/4\\1/2\\-1/8\end{pmatrix};$$

第三步迭代，计算得到

$$\xi=\begin{pmatrix}1/4\\1/2\\-1/8\end{pmatrix};\ B_3^{-1}=E_3B_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&1/4&0\\0&1/2&0\\0&-1/8&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\-4&1&2\\0&0&1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/4&0\\-2&1/2&1\\1/2&-1/8&0\end{pmatrix}$$

3.2 改进单纯形法(cont.)

非基变量检验数

$$\sigma_{N_3} = C_{N_3} - C_{B_3} B_3^{-1} N_3 = (0,0) - (2,0,3)\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (-3/2, -1/8)$$

不存在$\sigma_i > 0$，因此这步是最优解。

$$X^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_2 \end{pmatrix} = B_3^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3.3 对偶问题的提出

- 这里的对偶是指对同一事物（问题）从不同的角度或立场观察，有两种对立的表述，如：
  - 周长一定，面积最大的矩形是正方形；
  - 面积一定，周长最小的矩形是正方形。
- 一个熟悉的例子
  - (chp1.例1)工厂甲在计划期内要安排生产I、II两种产品，生产单位产品所需的设备台时及A、B两种原材料的消耗如下：

	产品I	产品II	资源限制
设备	1	2	8台时
原材料A	4	0	16
原材料B	0	4	12
单位利润	2	3	

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3.3 对偶问题的提出(cont.)

- 换一种角度（立场）
  - 假如工厂甲自己不生产产品，而将现有的资源（机器台时、原材料A和B）出租给工厂乙，设台时和原材料的出租利润如下，那么资源的转让价格是多少才合理?

	产品I	产品II	资源限制	出租利润
设备	1	2	8台时	y_1
原材料A	4	0	16	y_2
原材料B	0	4	12	y_3
自己生产所得利润	2	3		

- 工厂甲出租台时和资源获得的利润，不应少于自己生产产品获得的利润。

$$y_1 + 4y_2 \geq 2$$

$$2y_1 + 4y_3 \geq 3$$

- 出租台时和资源的价格不能太高，否则工厂乙不接受。：

$$\min \omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

3.3 对偶问题的提出(cont.)

– 模型从原问题可衍生为以下形式：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 \qquad \min \omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 4y_2 \ge 2 \\ 2y_1 + 4y_3 \ge 3 \\ y_1、y_2、y_3 \ge 0 \end{cases}$$

– 可以看出，右侧的模型同样是一个线性规划模型，我们称该线性规划问题是原生产计划问题的对偶问题。

原问题的各系数矩阵为：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad C = (2,3); \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 2 \end{bmatrix}$$

对偶问题的各系数矩阵为：

$$A_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = A^T;$$

$$C_\omega = (8,16,2) = b^T; \quad b_\omega = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = C^T$$

- 原问题与对偶问题的关系

原问题：P

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{bmatrix}$$

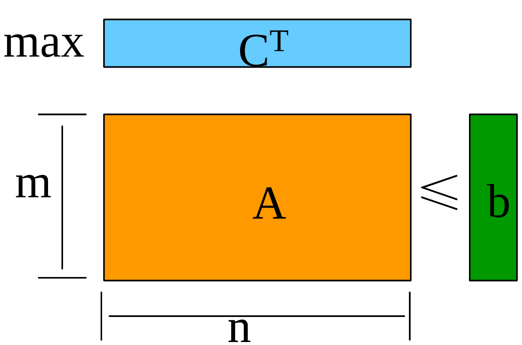
$$x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0$$

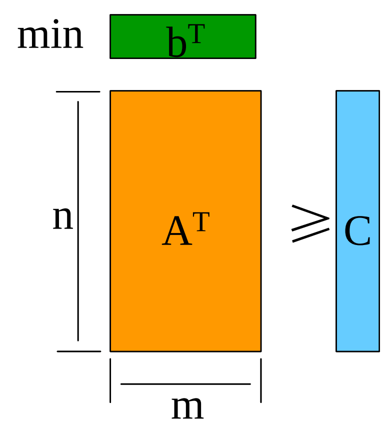
对偶问题：D

$$\min \omega = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$$

$$(y_1, y_2, \cdots, y_m) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \ge (c_1, c_2, \cdots, c_m)$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_m \ge 0$$





– 原问题与对偶问题的关系表：

y_i \ x_j	$x_1, x_2, \cdots, x_n$	原关系	$\min \omega$
y_1	a_{11} a_{12} $\cdots$ a_{1n}	$\le$	b_1
y_2	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	$\le$	b_2
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1} a_{m2} $\cdots$ a_{mn}	$\le$	b_m
对偶关系	$\ge$ $\ge$ $\cdots$ $\ge$		
$\max z$	$c_1, c_2, \cdots, c_n$		

表3.2 原问题与对偶问题的关系表

该表从正面看是原问题，转90度后看是对偶问题

– 对称形式：目标函数求极大值时，所有约束条件为≤号，变量非负；目标函数求极小值时，所有约束条件为≥号，变量非负。对称形式的线性规划的对偶问题亦是对称形式。

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\min \omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

$$y_1 + 4y_2 \ge 2$$

$$2y_1 + 4y_3 \ge 3$$

$$y_i \ge 0, i = 1,2,3$$

例3.2中的原问题与对偶问题都是对称形式

3.4 线性规划对偶理论(cont.)

- 一般线性规划问题中遇到非对称形式时，处理如下：
  - 原问题的约束条件中含有等式约束条件：

1：

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,2,\ldots,m$$
$$x_j\ge 0,\ j=1,2,\ldots,n$$

步骤1：等式约束条件分解为两个不等式约束条件

2：

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\ i=1,2,\ldots,m$$
$$-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le -b_i,\ i=1,2,\ldots,m$$
$$x_j\ge 0,\ j=1,2,\ldots,n$$

步骤2：按对称形式变换关系可写出它的对偶问题

3：

$$\min \omega=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i'+\sum_{i=1}^{m}(-b_iy_i'')$$
$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i'+\sum_{i=1}^{m}(-a_{ij}y_i'')\ge c_j,\ j=1,2,\ldots,n$$
$$y_i',\ y_i''\ge 0,\ i=1,2,\ldots,m$$

步骤3：整理得出对偶问题

4：

设$y_i=y_i'-y_i''$

$$\min \omega=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i$$
$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\ge c_j,\ j=1,2,\ldots,n$$
y_i为无约束$,\ i=1,2,\ldots,m$

- 上述等式类型约束条件的对偶问题也可写成:

$$P: \max z = cx \qquad \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$D: \min \omega = yb \qquad \begin{cases} yA \leq c \\ y\text{无限制} \end{cases}$$

- 综合考虑更通用的情况:

$$P: \max z = cx \qquad \begin{cases} A_1 x \geq b_1 \\ A_2 x = b_2 \\ A_3 x \leq b_3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$P: \max z = cx + 0x_s + 0x_t \qquad \begin{cases} A_1 x - Ix_s = b_1 \cdots\cdots y_1 \\ A_2 x = b_2 \cdots\cdots\cdots\cdots y_2 \\ A_3 x + Ix_t = b_3 \cdots\cdots y_3 \\ x, x_s, x_t \geq 0 \end{cases}$$

$$P: \min \omega = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \qquad \begin{cases} y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 \geq c \\ -Iy_1 \geq 0 \\ Iy_3 \geq 0 \\ y_1, y_2, y_3\text{无限制} \end{cases}$$

$$P: \min \omega = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \qquad \begin{cases} y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 \geq c \\ -Iy_1 \geq 0 \\ Iy_3 \geq 0 \\ y_1 \leq 0, y_2\text{无限制}，\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

3.4 线性规划对偶理论(cont.)

– 综上可得线性规划原问题与对偶问题的关系：

原问题 (对偶问题)	对偶问题 (原问题)
目标函数 max	目标函数 min
变量 n 个 $\geqslant 0$ $\leqslant 0$ 无约束	n 个 约束条件 $\geqslant$ $\leqslant$ $=$
目标函数中变量的系数	约束条件右边
约束条件 m 个 $\leqslant$ $\geqslant$ $=$	m 个 变量 $\geqslant 0$ $\leqslant 0$ 无约束
约束条件右边	目标函数中变量的系数

表3.3 原问题与对偶问题的关系

3.4 线性规划对偶理论(cont.)

– 例3：求下述线性规划问题的对偶问题

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 & (1) \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 \leq 4 & (2) \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 & (3) \\ x_1 \leq 0,\ x_2、x_3 \geq 0,\ x_4\text{无约束} \end{cases}$$

– 解：对应于约束条件(1)、(2)、(3)对偶变量分别为y_1，y_2，y_3；由上表的对应关系（从右变换至左）可得：

$$\max \omega = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$$
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_3 \leq 3 \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 \leq -5 \\ y_1 - y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3\text{无约束} \end{cases}$$

3.4 线性规划对偶理论(cont.)

- 对偶问题的基本性质
  - 1.对称性：对偶问题的对偶是原问题。

证明：

$$P:\max z = cX \quad \begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$$D:\min \omega = Yb \quad \begin{cases} YA \ge c \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

$$\max -\omega = -Yb \quad \begin{cases} -YA \le -c \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

$$\min -z' = -cX' \quad \begin{cases} -AX' \ge -b \\ X' \ge 0 \end{cases}$$

3.4 线性规划对偶理论(cont.)

– 2.弱对偶性：若$\bar{X}$是原问题的可行解，$\bar{Y}$是对偶问题的可行解。则存在：$C\bar{X} \le \bar{Y}b$

更准确的描述：求最大问题的任何可行解的目标函数值总是小于或等于其对偶的求最小值的问题的任何可行解的目标函数值。

- 证明：

设原问题是：$\max z = CX$, $\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$；对偶问题是：$\min \omega = Yb$, $\begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$

原问题的可行解$\bar{X}$满足：$A\bar{X} \le b \Rightarrow \bar{Y}A\bar{X} \le \bar{Y}b$

对偶问题的解$\bar{Y}$满足：$\bar{Y}A \ge C \Rightarrow \bar{Y}A\bar{X} \ge C\bar{X}$

则：$C\bar{X} \le \bar{Y}A\bar{X} \le \bar{Y}b$

- 这一性质说明：求最大问题的目标函数值给出了其对偶的求最小值问题的最优值的下界，而后者的目标函数值是前者最优值的上界。不能简单理解为原问题的目标值不超过对偶问题的目标值。

3.4 线性规划对偶理论(cont.)

- 从弱对偶性可以得出以下结论：若原问题（对偶问题）为无界解，则其对偶问题（原问题）无可行解。
- 证明：假定原问题有无界解，则存在一个可行解有：

$$C\overline{X} = M$$

由于M可以是无穷大（无界），则一定可以找到一个对偶问题的可行解有：

$$\overline{Y}b < M$$

则存在：$C\overline{X} > \overline{Y}b$

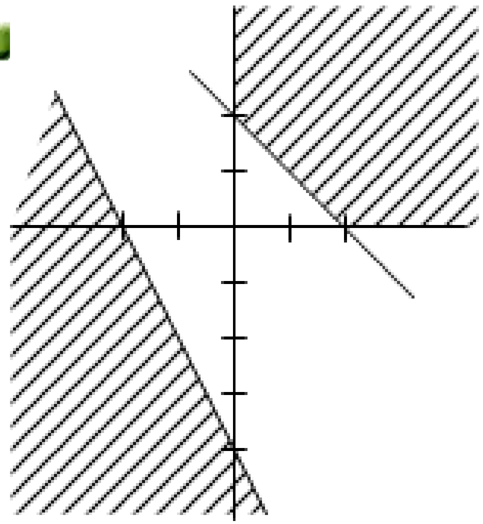
- 这显然与弱对偶性相矛盾，因此当原问题无界解时，对偶问题无可行解。反之亦然。
- 上述结论的逆不一定成立，即：一个问题无可行解时，另一个问题可能有可行解（此时具有无界解），也可能无可行解。
- 例如下述问题无可行解，而其对偶问题有无界解。

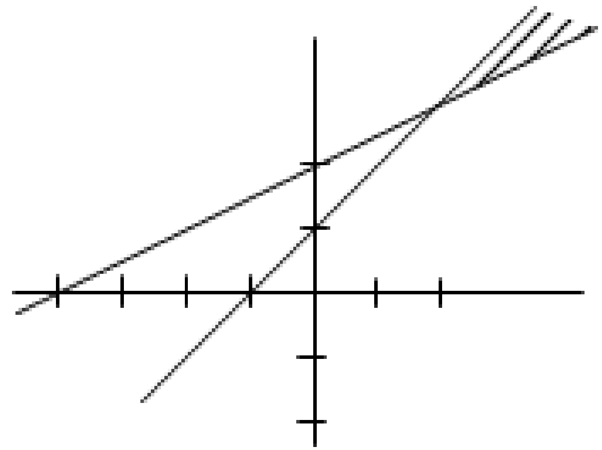
$$\min z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max \omega = 2y_1 + 2y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 \le 1 \\ -\dfrac{1}{2}y_1 + y_2 \le 2 \\ y_1、y_2 \ge 0 \end{cases}$$





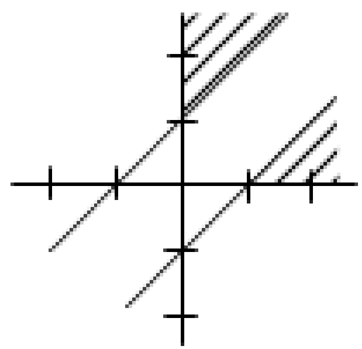
- 下述问题则皆无可行解：

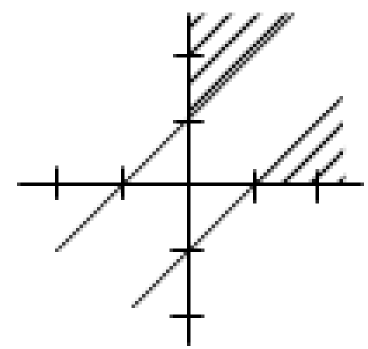
$P(D)$

$$\min \omega = -x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$D(P)$

$$\max z = y_1 + y_2$$
$$\begin{cases} y_1 - y_2 \leq -1 \\ -y_1 + y_2 \leq -1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$





3.4 线性规划对偶理论(cont.)

– 3.可行解是最优解时的性质:

设$\hat{X}$是原问题的可行解，$\hat{Y}$是对偶问题的可行解，当$C\hat{X}=\hat{Y}b$时，$\hat{X}$、$\hat{Y}$是最优解。

- 证明:

若$C\hat{X}=\hat{Y}b$，根据弱对偶性可知:

对偶问题的所有可行解$\bar{Y}\neq\hat{Y}$都存在$\bar{Y}b\geq C\hat{X}=\hat{Y}b$，

可见$\hat{Y}$是使目标函数最小的可行解，因而是最优解。

同理，

原问题的所有可行解$C\bar{X}\leq\hat{Y}b=C\hat{X}$，

可见$\hat{X}$是使目标函数最大的可行解，因而是最优解。

- 4.对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相等。
  - 证明：

设$\hat{X}$是原问题的最优解，有$\hat{X}=B^{-1}b$

它对应的基矩阵B必存在$C-C_BB^{-1}A\le 0$。

有$C_BB^{-1}A\ge C$。令$\hat{Y}=C_BB^{-1}$，则有$\hat{Y}A\ge C$。

可见$\hat{Y}$满足对偶问题的约束条件，是一组可行解。

有：$\omega=\hat{Y}b=C_BB^{-1}b$

又原问题的最优目标函数取值$z=C\hat{X}=C_BB^{-1}b$，由此得到$\hat{Y}b=C\hat{X}$，

根据前面的“可行解是最优解时的性质”可知：

$\hat{Y}$是对偶问题的最优解。

	X_B	X	X_S	RHS
z	0	$C_BB^{-1}A-C$	$-C_BB^{-1}$	$-C_BB^{-1}b$
	I	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$

3.4 线性规划对偶理论(cont.)

– 6.互补松弛性：若$\hat{X}$，$\hat{Y}$分别是原问题和对偶问题的可行解，

那么$\hat{Y}X_s=0$和$Y_s\hat{X}=0$，当且仅当$\hat{X}$，$\hat{Y}$是最优解。

- 证明：原问题　　对偶问题

$$\begin{array}{ll} \max z=CX & \min \omega=Yb \\ AX+X_s=b & YA-Y_s=C \\ X,X_s\geq 0 & Y,Y_s\geq 0 \end{array}$$

将原问题目标函数中的系数向量C用$C=YA-Y_s$代替得：

$z=(YA-Y_s)X=YAX-Y_sX$

将对偶问题目标函数中的系数列向量用$b=AX+X_s$代替得：

$\omega=Y(AX+X_s)=YAX+YX_s$

(1)若$Y_s\hat{X}=0$，$\hat{Y}X_s=0$，则$\hat{Y}b=\hat{Y}A\hat{X}=C\hat{X}$，由性质4可知，

$\hat{X}$，$\hat{Y}$分别是原问题和对偶问题的最优解。

(2)若$\hat{X}$，$\hat{Y}$分别是原问题和对偶问题的最优解，根据性质4有：

$\hat{Y}b=\hat{Y}A\hat{X}=C\hat{X}$，则必有$Y_s\hat{X}=0$，$\hat{Y}X_s=0$。

互补松弛性定理也可这样描述：

最优化时，假如一个问题的某个变量为正数，则相应的对偶问题的约束条件必取等式（即松弛变量为0），或者一个问题的中的约束条件为绝对不等式，则相应的对偶问题中的变量必为零。

- 7.原问题单纯形表的检验数行对应其对偶问题的一个基解，其对应关系如下：

	X_B	X_N	X_S
原问题检验数行	0	$C_NB^{-1}N-C_N$	$-C_BB^{-1}$
	Y_{S1}	$-Y_{S2}$	$-Y$

其中：Y_{S1}对应原问题中基变量X_B的松弛变量；Y_{S2}对应原问题中非基变量X_N的松弛变量。

- 证明:

设B是原问题的一个可行基，于是$A=(B,N)$;

则有 $\max z = C_B X_B + C_N X_N$ $\begin{cases} BX_B + NX_N \le b \\ X_B, X_N \ge 0 \end{cases}$，相应的对偶问题可表示为: $\min \omega = Yb$ $\begin{cases} YB \ge C_B \\ YN \ge C_N \\ Y \ge 0 \end{cases}$，

即 $\min \omega = Yb$ $\begin{cases} YB - Y_{s1} = C_B \\ YN - Y_{s2} = C_N \\ Y, Y_{s1}, Y_{s2} \ge 0 \end{cases}$，其中$Y_{s1}$为对应原问题基变量$X_B$的松弛变量，

Y_{s1}为对应原问题非基变量X_N的松弛变量。

当求得原问题的一个解：$X_B = B^{-1}b$，其相应的检验数为$C_N - C_B B^{-1} N$与$-C_B B^{-1}$。

令$Y = -C_B B^{-1}$，代入对偶问题模型得：$\begin{cases} Y_{s1} = 0 \\ -Y_{s2} = C_N - C_B B^{-1} N \end{cases}$，表中的对应关系得证。

– 例3.3 已知如下线性规划问题，

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

试用对偶理论证明该线性规划问题无最优解。

- 证明：首先该问题存在可行解。上述问题的对偶问题为：

$$\min \omega = 2y_1 + y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 \ge 1 \\ y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1 - y_2 \ge 0 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

由第一约束条件可知对偶问题无可行解，因为无最优解，由此原问题也无最优解。

– 例3.4 已知线性规划问题 $\min z = 2x_1 - x_2 + 2x_3$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \le 6 \\ x_1 \le 0, x_2 \ge 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

其对偶问题的最优解为Y=(0,-2)，求原问题的最优解。

- 解：对偶问题为 $\max w = 4y_1 + 6y_2$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 \ge 2 \\ y_1 + y_2 \le -1 \\ y_1 - y_2 = 2 \\ y_1\text{无约束，} y_2 \le 0 \end{cases}$$

由$y_2 \ne 0$得$x_{s_2} = 0$，由$y_{s_2} = 1$得$x_2 = 0$，原问题的约束条件变为：$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 4 \\ -x_1 - x_3 = 6 \end{cases}$

解此方程得问题的最优解：$X = (-5,0,-1)$，$z = -12$

– 例3.5 已知线性规划问题 $\min \omega = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

其对偶问题的最优解为： $y_1^* = 4/5,\ y_2^* = 3/5;\ \ z = 5$

试用对偶理论找出原问题的最优解。

解：步骤1，写出原问题的对偶问题：

$$\max z = 4y_1 + 3y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 2 \\ y_1 - y_2 \leq 3 \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 5 \\ y_1 + y_2 \leq 2 \\ 3y_1 + 5y_2 \leq 3 \\ y_1、y_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.4 线性规划对偶理论(cont.)

- 步骤2：将对偶问题的解$y_1^*=4/5,\ y_2^*=3/5$代入得到

$$\begin{cases} y_1^*+2y_2^*=2 & (1)\\ y_1^*-y_2^*<3 & (2)\\ 2y_1^*+3y_2^*<5 & (3)\\ y_1^*+y_2^*<2 & (4)\\ 3y_1^*+5y_2^*=3 & (5)\end{cases}$$

- 其中(2)(3)(4)为严格不等式，由互补松弛性可以得到

$$x_2^*=0, x_3^*=0, x_4^*=0$$

- 又由于对偶问题的解不为零，因此可由互补松弛性得到原问题的两个约束条件的松弛变量为零，即应取等式，综合可得：

$$\begin{cases} x_1^*+3x_5^*=4\\ 2x_1^*+x_5^*=3\end{cases} \quad \text{原问题的解为}: x_1^*=1,\ x_2^*=0,\ x_3^*=0,\ x_4^*=0,\ x_5^*=1$$

3.5 对偶单纯形法

- 对偶单纯形法
  - 在单纯形表中进行迭代时，在b列中得到的是原问题的基可行解，而在检验数行得到的是对偶问题的基解。通过逐步迭代，当在检验数行得到对偶问题的解也是基可行解时，可知已得到最优解，即原问题和对偶问题都是最优解。
  - 根据对偶问题的对称性可知：若保持对偶问题的解是基可行解，而原问题在非可行解的基础上通过逐步迭代也达到了基可行解，这样也可以得到最优解。其优点是原问题的初始解不一定要是基可行解，可从非基可行解开始迭代。

3.5 对偶单纯形法(cont.)

设原问题 $\max z = CX, AX = b, X \geq 0$。

又设 B 是一个基，令 $B = (P_1, P_2, \cdots, P_m)$，它对应的变量为 $X_B = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$。

当非基变量都为0时，可以得到 $X_B = B^{-1}b$。若在 $B^{-1}b$ 中至少有一个负分量，

设 $(B^{-1}b)_i < 0$，并且在单纯形表的检验数行中的检验数都为非正，

即对偶问题保持可行解，它的各分量是

1.对应基变量的检验数是 $\sigma_i = c_i - z_i = c_i - C_B B^{-1} P_i = 0, i = 1,2,\ldots,m$

2.对应非基变量的检验数是：$\sigma_j = c_j - z_j = c_j - C_B B^{-1} P_j \leq 0, j = 1,2,\ldots,n$

每次迭代将基变量中的负分量 x_l 取出替换非基变量中的 x_k，经基变换，所有检验数仍保持非正。

从原问题来看，经过每次迭代，原问题由非可行解向可行解靠近。

当原问题得到可行解时，便得到了最优解。

3.5 对偶单纯形法(cont.)

- 对偶单纯形法的计算步骤:

(1) 根据线性规划问题列出初始单纯形表，检查b列数字，若都为非负，检验数都为非正，则得到最优解，停止计算。若检查b列的数字时至少还有一个负分量，检验数保持非正，那么转入步骤（2）；

(2) 按 $\min\limits_{l}\left\{\left(B^{-1}b\right)_i \middle| \left(B^{-1}b\right)_i < 0\right\} = \left(B^{-1}b\right)_l$ 对应的基变量 x_l 确定换出变量

(3) 在表中检查 x_l 所在行的各系数 $a_{lj}(j = 1,2,\ldots,n)$，若所有 $a_{lj} \geq 0$，则无可行解，停止计算；若存在 $a_{lj} < 0(j = 1,2,\ldots,n)$，计算

$\theta = \min\limits_{j}\left\{\dfrac{c_j - z_j}{a_{lj}} \middle| a_{lj} < 0\right\} = \dfrac{c_k - z_k}{a_{lk}}$，按 θ 规则所对应的列的非基变量 x_k 为换入变量。

这样才能保持得到的对偶问题解仍为可行解。

(4) 以 a_{lk} 为主元素，按原单纯形法在表中进行迭代运算，得到新的计算表。

重复（1）～（4）

3.5 对偶单纯形法(cont.)

– 例3.5 用对偶单纯形法求解

$$\min \omega = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 3$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

- 解：先将问题化为如下形式：

$$\max z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$
$$-x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3$$
$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

建立初始 → 单纯形表

$c_j \rightarrow$			-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	$[-2]$	1	-3	0	1
$c_j - z_j$			-2	-3	-4	0	0

可以看出，检验数行对应的对偶问题的解是可行解，因b列数字为负，所以需进行迭代运算。

3.5 对偶单纯形法(cont.)

- 换出变量：按照步骤2计算min(-3,-4)=-4，故x_5为换出变量；
- 换入变量：按照步骤3计算θ=min{-2/-2,—,-4/-3}=-2/-2=1，故x_1为换入变量。换入、换出变量的所在行、列交叉处“2”为主元素，按单纯形法计算步骤进行迭代，得下表：

$c_j \rightarrow$			−2	−3	−4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	−1	0	[−5/2]	1/3	1	−1/2
−2	x_1	2	1	−1/2	3/2	0	−1/2
$c_j - z_j$			0	−4	−1	0	−1

对偶问题仍为可行解，b列中仍有负分量，故重复上述迭代得：

$c_j \rightarrow$			−2	−3	−4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
−3	x_2	2/5	0	1	−1/5	−2/5	1/5
−2	x_1	11/5	1	0	7/5	−1/5	−2/5
$c_j - z_j$			0	0	−3/5	−8/5	−1/5

此时b列数字全为非负，检验数全为非正，故问题最优解为：X*=(11/5,2/5,0,0,0)^T

此时：Y*=(8/5,1/5)

3.5 对偶单纯形法(cont.)

- 对偶单纯形法的优点：
  - 初始解可以是非可行解，当检验数都为负数时，就可以进行基变换，这时不需要加入人工变量，因此可以简化计算。
  - 当变量多于约束条件的线性规划问题，用对偶单纯形法计算可以减少计算工作量，因此对变量较少而约束条件很多的线性规划问题，可先将它变换成对偶问题，然后用对偶单纯形法求解。
  - 在灵敏度分析中，有时需要用对偶单纯形法使问题的处理简化。
- 注意：
  - 对偶单纯形法的换基顺序是先确定换进变量，再确定换基变量，而普通单纯形法则顺序相反；
  - 对偶单纯形法是求解线性规划的一种求解方法，而不是去求对偶问题的最优解；
  - 对大多数线性规划问题，很难找到一个初始可行基，因而这种方法在求解线性规划问题时很少单独使用。

3.6 对偶问题的经济解释：影子价格

- 原始问题是利润最大化的生产计划问题

总利润(元)　单位产品的利润(元/件)　产品产量(件)

单位产品消耗的资源(吨/件)

$$
\begin{aligned}
\max z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s.t.\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} = b_2 \\
& \cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad + x_{n+m} = b_m \\
& x_j \geq 0,\ \ j = 1,\cdots,n+m
\end{aligned}
$$

消耗的资源(吨)　剩余的资源(吨)　资源限量(吨)

原始问题中各个项的经济意义

3.6 对偶问题的经济解释：影子价格(cont.)

– 乘子$Y=C_BB^{-1}$的经济意义：

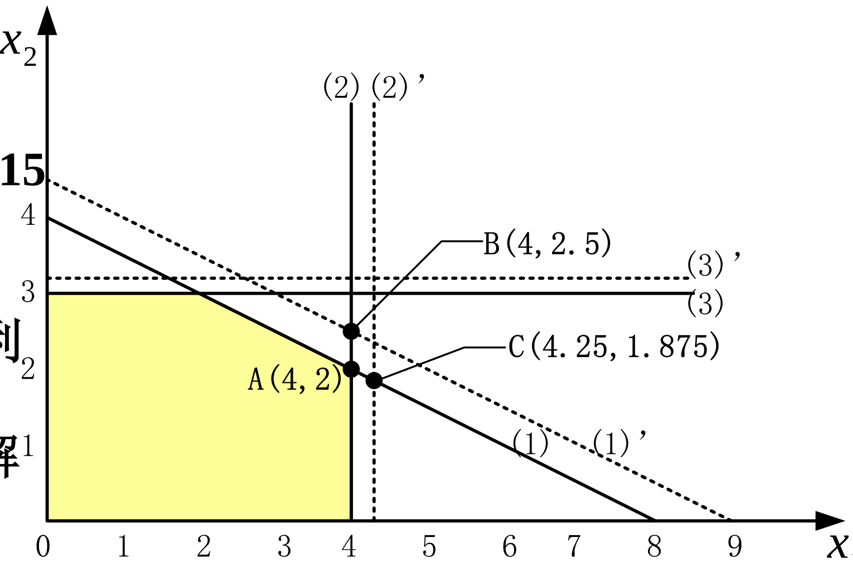
设B是$\{\max z = CX \mid AX \le b, X \ge 0\}$的最优基，则$z^* = C_B B^{-1} b = Y^* b$

由此$\dfrac{\partial z^*}{\partial b} = C_B B^{-1} = Y^*$

所以变量的经济意义是在其它条件不变的情况下，单位资源变化所引起的目标函数的最优值的变化。

– 以例3.1为例：

在其他条件不变的情况下：
设备增加一台，可多获利0.15元；
（直线1移至直线1’）
原材料A增加1kg，可多获利0.125元；（直线2移至2’）
原材料B增加1kg时，最优解不变。（直线3移至3’）



3.6 对偶问题的经济解释：影子价格(cont.)

- 对偶问题中各项的含义：

总消耗(元)　资源限量(吨)　资源价格(元/吨)

$$
\begin{array}{lllllllll}
\min & \omega = & b_1y_1 & +b_2y_2 & \cdots & +b_my_m & & & \\
s.t. & & a_{11}y_1 & +a_{21}y_2 & \cdots & +a_{m1}y_m & -y_{m+1} & & & = c_1 \\
 & & a_{12}y_1 & +a_{22}y_2 & \cdots & +a_{m2}y_m & & -y_{m+2} & & = c_2 \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots \\
 & & a_{1n}y_1 & +a_{2n}y_2 & \cdots & +a_{mn}w_m & & & -y_{m+n} & = c_n \\
 & & y_1 & y_2 & \cdots & y_m & y_{m+1} & y_{m+2} \;\cdots & y_{m+n} & \geq 0
\end{array}
$$

产过程中一种隐含的潜在价值，经济学中称为影子价格，即对偶问题中的决策变量y_i的值。

3.6 对偶问题的经济解释：影子价格(cont.)

- 影子价格越大，说明这种资源越是相对紧缺；影子价格越小，说明这种资源相对不紧缺。
- 如果最优生产计划下某种资源有剩余，这种资源的影子价格一定等于0。
- 企业可利用影子价格调节生产规模。例如，目标函数Z表示利润（或产值），当第 *i* 种资源的影子价格大于零 （或高于市场价格）时，表示有利可图，企业应购进该资源扩大生产规模，当影子价格等于零（或低于市场价格），企业不能增加收益，这时应将资源卖掉或出让，缩小生产规模。应当注意，是在最优基*B*不变的条件下有上述经济含义，当某种资源增加或减少后，最优基*B*可能发生了变化，这时y_i的值也随之变化。

$$y_i = \partial z^* / \partial b$$

3.6 对偶问题的经济解释——影子价格(cont.)

- 产品的机会成本：

增加单位资源可以增加的利润

$$
\begin{array}{llllllllll}
\max & z= & c_1x_1 & +c_2x_2 & \cdots & +c_jx_j & \cdots & +c_nx_n & & \\
\text{s.t.} & & a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1j}x_j & \cdots & +a_{1n}x_n & \le b_1 & y_1 \\
 & & a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & +a_{2j}x_j & \cdots & +a_{2n}x_n & \le b_2 & y_2 \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \cdots & +a_{mj}x_j & \cdots & +a_{mn}x_n & \le b_m & y_m \\
 & & x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_n & \ge 0 &
\end{array}
$$

减少一件产品可以节省的资源

机会成本 $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{ij}y_i + \cdots + a_{mj}y_m$

表示减少一件产品所节省的资源可以增加的利润

3.6 对偶问题的经济解释——影子价格(cont.)

- 产品的**差额成本（Reduced Cost）**

机会成本　差额成本　利润

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min & \omega = & b_1 y_1 & + b_2 y_2 & \cdots & + b_m y_m & & & & \\
s.t. & & a_{11} y_1 & + a_{21} y_2 & \cdots & + a_{m1} y_m & - y_{m+1} & & & = c_1 \\
 & & a_{12} y_1 & + a_{22} y_2 & \cdots & + a_{m2} y_m & & - y_{m+2} & & = c_2 \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots \\
 & & a_{1n} y_1 & + a_{2n} y_2 & \cdots & + a_{mn} y_m & & & - y_{m+n} & = c_n \\
 & & y_1 & y_2 & \cdots & y_m & y_{m+1} & y_{m+2} \ \cdots & y_{m+n} & \geq 0
\end{array}
$$

$$y_{m+j} = (y_1 a_{1j} + y_2 a_{2j} + \cdots + y_m a_{mj}) - c_j = Y^T a_j - c_j$$

差额成本=机会成本 - 利润

3.7 灵敏度分析

- 线性规划的灵敏度分析：
  - 也称为敏感性分析，它是研究和分析参数（c_j，b_i，a_{ij}）的波动对最优解的影响程度，主要研究下面两个方面：
    - 参数在什么范围内变化时，原最优解或最优基不变；
    - 当参数已经变化时，最优解或最优基有何变化。
  - 当模型的参数发生变化后，可以不必对线性规划问题重新求解，而用灵敏度分析方法直接在原线性规划取得的最优结果的基础上进行分析或求解，既可减少计算量，又可事先知道参数的变化范围，及时对原决策作出调整和修正。

原问题	对偶问题	结论或继续计算的步骤
可行解	可行解	表中的解仍为最优解
可行解	非可行解	用单纯形法继续迭代求最优解
非可行解	可行解	用对偶单纯形法继续迭代求最优解
非可行解	非可行解	引进人工变量，编制新的单纯形表，求最优解

- 资源数量b_i的变化分析

资源数量变化是指系数b_r发生变化，即$b_r' = b_r + \Delta b_r$。

并假设其他系数都不变。这样原问题的解变为：

$X_B' = B^{-1}(b+\Delta b)$，其中$\Delta b = (0,\cdots,\Delta b_r,0,\cdots,0)^T$。

只要$X_B' \geq 0$，最终表中检验数不变，则最优基不变，

但最优解的值发生变化，所以X_B'为新的最优解。

  - 新的最优解的值可允许变化范围用以下方法确定:

$$X_B' = B^{-1}b' = B^{-1}(b+\Delta b) = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b = X_B + B^{-1}\Delta b$$

$$= X_B + B^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta b_r \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = X_B + \begin{bmatrix} \bar{a}_{1r}\Delta b_r \\ \vdots \\ \bar{a}_{ir}\Delta b_r \\ \vdots \\ \bar{a}_{mr}\Delta b_r \end{bmatrix} = X_B + \Delta b_r \begin{bmatrix} \bar{a}_{1r} \\ \vdots \\ \bar{a}_{ir} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mr} \end{bmatrix}$$

3.7 灵敏度分析(cont.)

这时在最终表中求得的b列的所有元素有：

$$\bar{a}_{ir}\Delta b_r+\bar{b}_i\ge 0\Rightarrow \bar{a}_{ir}\Delta b_r\ge -\bar{b}_i,\quad i=1,2,\cdots,m$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}\bar{a}_{ir}>0\text{时，}\ \Delta b_r\ge -\bar{b}_i/\bar{a}_{ir}\\ \text{当}\bar{a}_{ir}<0\text{时，}\ \Delta b_r\le -\bar{b}_i/\bar{a}_{ir}\end{array}\right\}\Rightarrow \max\left\{-\bar{b}_i/\bar{a}_{ir}\,\middle|\,\bar{a}_{ir}>0\right\}\le\Delta b_r\le\min_i\left\{-\bar{b}_i/\bar{a}_{ir}\,\middle|\,\bar{a}_{ir}<0\right\}$$

– 例3.6 由下表(例3.1的单纯形表最终表)可知每设备台时的影子价格为1.5元。若该厂又从别处抽出4台用于生产产品I，II，求这时该厂生产产品I，II的最优方案。

2	x_1	4	1	0	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	0	−2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1	1/2	−1/8	0
	$-z$	−14	0	0	0	−1.5	−1/8	0

解：

$$B^{-1}\Delta b=\begin{bmatrix}0 & 0.25 & 0\\ -2 & 0.5 & 1\\ 0.5 & -0.125 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-8\\2\end{bmatrix}$$

3.7 灵敏度分析(cont.)

- 将计算结果反映到表中得：

$c_j \to$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4+0	1	0	0	0.25	0
0	x_5	4−8	0	0	[−2]	0.5	1
3	x_2	2+2	0	1	0.5	−0.125	0
$c_j - z_j$			0	0	−1.5	−0.125	0

b列中还有负数，故用对偶单纯形法求新的最优解，迭代得下表：

$c_j \to$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0
0	x_3	2	0	0	1	−0.25	−0.5
3	x_2	3	0	1	0	0	0.25
$c_j - z_j$			0	0	0	−0.5	−0.75

即该厂生产I产品4件，II产品3件，获利：

$$z^*=4\times2+3\times3=17\text{元}$$

可看出x_3=2，即设备有2小时未利用。

3.7 灵敏度分析(cont.)

- 价值系数c_j的变化分析
  - c_j是非基变量x_j的系数，它在计算表中对应的检验数是：

$$\sigma_j = c_j - C_B B^{-1} P_j \text{或} \sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

当c_j变化Δc_j后，要保证最终表中这个检验数仍≤ 0，即：

$$\sigma_j' = c_j + \Delta c_j - C_B B^{-1} P_j \le 0\text{。那么} c_j + \Delta c_j \le C_B B^{-1} P_j = YP_j \Rightarrow \Delta c_j \le YP_j - c_j$$

  - c_r是基变量x_r的系数，它在计算表中对应的检验数是：

因$c_r \in C_B$，当c_r变化Δc_r时，就引起C_B的变化，这时

$$(C_B + \Delta C_B) B^{-1} A = C_B B^{-1} A + (0, \cdots, \Delta c_r, \cdots, 0) B^{-1} A$$

$$= C_B B^{-1} A + \Delta c_r (a_{r1}, a_{r2}, \cdots, a_{rn})$$

可见c_r变化Δc_r后，最终表的检验数是：

$$\sigma_j' = c_j - C_B B^{-1} A - \Delta c_r \bar{a}_{rj},\quad j = 1, 2, \cdots, n$$

3.7 灵敏度分析(cont.)

若要求原最优解不变,即必须满足$\sigma_j' \le 0$。于是得到:

$$\left.\begin{array}{l} \text{当}\bar{a}_{ir} > 0\text{时},\ \Delta c_r \ge \sigma_j / \bar{a}_{ir} \\ \text{当}\bar{a}_{ir} < 0\text{时},\ \Delta c_r \le \sigma_j / \bar{a}_{ir} \end{array}\right\} \Rightarrow \max_j \left\{ \sigma_j / \bar{a}_{ir} \middle| \bar{a}_{ir} > 0 \right\} \le \Delta c_r \le \min_j \left\{ \sigma_j / \bar{a}_{ir} \middle| \bar{a}_{ir} < 0 \right\}$$

– 例3.7 仍由下表(例3.1的单纯形表最终表)为例，基变量x_2的系数c_2变化Δc_2，求Δc_2的变化范围。
  - 解:

c_2发生变化，变为右表所示。为了保持原最优解不变，x_2的检验数应当为0，经初等变换得下表。

$c_j \to$			2	$3+\Delta c_2$	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0
0	x_5	4	0	0	4	0.5	1
3	x_2	2	0	1	0.5	−0.125	0
$c_j - z_j$			0	Δc_2	−1.5	−0.125	0

3.7 灵敏度分析(cont.)

$c_j \rightarrow$			2	$3+\Delta c_2$	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0
0	x_5	4	0	0	−4	0.5	1
$3+\Delta c_2$	x_2	2	0	1	0.5	−0.125	0
$c_j - z_j$			0	0	$-1.5-\Delta c_2/2$	$\Delta c_2/8-1/8$	0

从上表可以看出：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}-1.5-\Delta c_2/2 \le 0 \\ \Delta c_2/8-1/8 \le 0\end{array}\right\} \Rightarrow -3 \le \Delta c_2 \le 1 \\ c_2 = 3\end{array}\right\} \Rightarrow 0 \le c_2+\Delta c_2 \le 4$$

可见c_2在[0,4]之间变化不会影响原最优解。

3.7 灵敏度分析(cont.)

- 技术系数a_{ij}的变化分析
  - 用具体例子来分两种情况说明:
  - 例3.8 在例3.1中的原计划内是否应该安排新产品III，该产品III每件需消耗A、B各6kg、3kg，使用设备2台时，每件可获利5元。
    - 解：步骤1:

设生产产品III x_3'台，

其技术系数$P_3'=(2,6,3)^T$，

然后计算最终表中对应的检验数：

$$\sigma_3' = c_3' - C_B B^{-1} P_3' = 5-(1.5,0.125,0)(2,6,3)^T = 1.25 \ge 0$$

说明安排生产产品III是有利的。

3.7 灵敏度分析(cont.)

- 步骤2：计算产品III在最终表中对应的列向量并将结果填入最终计算表：

$$B^{-1}P_3' = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 \\ -2 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & -0.125 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	5
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_3'
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0	1.5
0	x_5	4	0	0	−2	0.5	1	[2]
3	x_2	2	0	1	0.5	−0.125	0	0.25
$c_j - z_j$			0	0	−1.5	−0.125	0	1.25

- b列的数字没有变化，原问题的解是可行解。但检验数行中还有正数，说明目标函数值还可以改善。

将x_3'作为换入变量，x_5作为换出变量进行迭代，求出最优解。

3.7 灵敏度分析(cont.)

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	5
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x'_3
2	x_1	1	1	0	1.5	−0.125	−0.75	0
0	x'_3	2	0	0	−1	0.25	0.5	1
3	x_2	1.5	0	1	0.75	−0.1875	−0.125	0
$c_j - z_j$			0	0	−0.25	−0.4375	−0.625	0

此时求得最优解：

$x_1 = 1, x_2 = 1.5, x'_3 = 2$

总的利润为16.5元，

比原计划增加了2.5元。

– 例3.8 在例3.1中的原计划中，生产产品I的工艺发生变化，生产一件产品I需要台时2，原料A、B各5kg、3kg，每件利润为4元，试分析对原最优计划有什么影响。
  - 解：把改进的产品I看作产品I’，设x’$_1$为其产量，计算在最终表中x’$_1$对应的列向量，并以x’$_1$代替x_1。

$$B^{-1}P_1' = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 \\ -2 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & -0.125 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.5 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

同时计算出x_1'的检验数为：$c_1' - C_B B^{-1} P_1' = 4 - (1.5, 0.125, 0)(2,5,2)^T = 0.375$

- 将以上结果填入最终表得到：

$c_j \to$			4	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_1	4	1.25	0	0	0.25	0
0	x_5	4	0.5	0	−2	0.5	1
3	x_2	2	0.375	1	0.5	0.125	0
$c_j - z_j$			0.375	0	−1.5	−0.125	0

迭代 →

$c_j \to$			4	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_1'	3.2	1	0	0	0.2	0
0	x_5	2.4	0	0	−2	0.4	1
3	x_2	0.8	0	1	0.5	−0.2	0
$c_j - z_j$			0	0	−1.5	−0.2	0

可得：应生产产品I’ 3.2单位，产品II 0.8单位，可获利15.2元。

3.7 灵敏度分析(cont.)

– 例3.9 假设上例中生产一件产品I’所需台时变为4，需要原料A、B各为5kg、2kg，每件产品获利4元，则应如何安排最优方案。

- 解：方法同上例，先计算新的检验数：

$$B^{-1}P_1' = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 \\ -2 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & -0.125 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ -3.5 \\ 1.375 \end{bmatrix}$$

同时计算出x_1'的检验数为：

$$c_1' - C_B B^{-1} P_1' = 4 - (1.5, 0.125, 0)(4,5,2)^T = -2.625$$

填入原最终表中可得：

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_1	4	1.25	0	0	0.25	0
0	x_5	4	−3.75	0	−2	0.5	1
3	x_2	2	1.375	1	0.5	0.125	0
$c_j - z_j$			−2.625	0	−1.5	−0.125	0

3.7 灵敏度分析(cont.)

以x’$_1$代替基变量中的x_1可得表：

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_1'	3.2	1	0	0	0.2	0
0	x_5	15.2	0	0	−2	1.2	1
3	x_2	−2.4	0	1	0.5	−0.4	0
$c_j - z_j$			0	0	−1.5	0.4	0

从上表可以看出原问题和对偶问题都是非可行解，引入人工变量x_6，因在表中x_2所在行，用方程表示时为：

$$0x_1' + x_2 + 0.5x_3 - 0.4x_4 + 0x_5 = -2.4$$

引入人工变量后变为：

$$-x_2 - 0.5x_3 + 0.4x_4 + 0x_6 = 2.4$$

3.7 灵敏度分析(cont.)

将x_6作为基变量代替x_2，填表得：

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0	−M
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_1'	3.2	1	0	0	0.2	0	0
0	x_5	15.2	0	0	−2	1.2	1	0
−M	x_6	2.4	0	−1	−0.5	[0.4]	0	1
$c_j - z_j$			0	3−M	−0.5M	−0.8−0.4M	0	0

x_4为换入变量，x_6为换出变量，进行基变换得到新表

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0	−M
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_1'	2	1	0.5	0.25	0	0	0.5
0	x_5	8	0	[3]	−0.5	0	1	−3
0	x_4	6	0	−2.5	−1.25	1	0	2.5
$c_j - z_j$			0	1	−1	0	0	−M+2

3.7 灵敏度分析(cont.)

- 最终得到下表：

$c_j \to$			4	3	0	0	0	$-M$
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_1'	0.667	1	0	0.33	0	-0.33	0
3	x_2	2.667	0	1	-0.167	0	0.33	-1
0	x_4	12.667	0	0	1.667	1	0.83	0
$c_j - z_j$			0	0	-0.83	0	-0.33	$-M+3$

- 此时所有检验数都为非正，得到最优解。
- 生产方案为：生产I’产品0.667单位；
  生产II产品2.667单位；
  可得最大利润10.67元。

本章完

The end

课堂练习

- 有线性规划问题:

$$\min z = 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \geq 6 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

  - 列出对偶问题;
  - 用图解法求出对偶问题的解;
  - 利用互补松弛性和对偶问题的解试给出原问题的解。