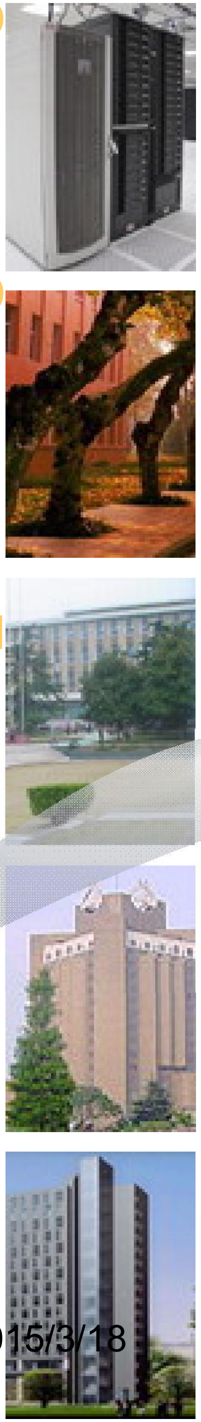
Computer Science and Techno



运 筹 学

中国科学技术大学
1958—2008

线性规划及单纯形法

Chp.1 Linear Programming & Classical Simplex Methods

2.1 线性规划概论

- 康托洛维奇在1939年提出《生产组织与计划中的数学方法》。
- 线性规划（Linear Programming)创始人：
  - 1947年美国人丹捷格（G.B.Dantzig）提出单纯形算法（Simpler）,并被尊称为运筹学领域的奠基人。
  - 1963年Dantzig写成“Linear Programming and Extension”
- 1979年苏联的Khachian提出“椭球法”
- 1984年印度的Karmarkar提出“投影梯度法”
- 线性规划是研究线性不等式组的理论，或者说是研究（高维空间中）凸多面体的理论，是线性代数的应用和发展。

2.2 线性规划问题及其数学模型

- 生产计划问题
  - 如何合理使用有限的人力，物力和资金，使得收到最好的经济效益。
  - 如何合理使用有限的人力，物力和资金，以达到最经济的方式，完成生产计划的要求。

例2.1 胜利家具厂生产桌子和椅子两种家具。桌子售价**50**元**/**个，椅子销售价格**30**元**/**个，生产桌子和椅子要求需要木工和油漆工两种工种。生产一个桌子需要木工**4**小时，油漆工**2**小时。生产一个椅子需要木工**3**小时，油漆工**1**小时。该厂每个月可用木工工时为**120**小时，油漆工工时为**50**小时。问该厂如何组织生产才能使每月的销售收入最大?

2.2 线性规划问题及其数学模型(cont.)

– 解：将一个实际问题转化为线性规划模型有以下几个步骤：

- **1**．确定决策变量：x_1=生产桌子的数量

  x_2=生产椅子的数量

- **2**．确定目标函数：该工厂的目标是获利最大

  $\max z=50x_1+30x_2$

- **3**．确定约束条件：

  $4x_1+3x_2 \le 120$（木工时数限制）

  $2x_1+x_2 \le 50$（漆工时数限制）

- **4**．变量取值限制：一般情况，决策变量只取正值（非负值）

  $x_1 \ge 0$，$x_2 \ge 0$

2.2 线性规划问题及其数学模型(cont.)

- 例2.2 河流1：每天流量500万m^3；河流2：每天流量200万m^3，水质要求：污水含量≤0.2%。工厂1每天排放2万m^3污水，工厂2每天排放1.4万m^3污水，污水从工厂1流向工厂2有20%可以净化。处理污水成本：工厂1是1000元/万m^3；工厂2是800元/万m^3。问两个工厂每天各处理多少污水总成本最少？

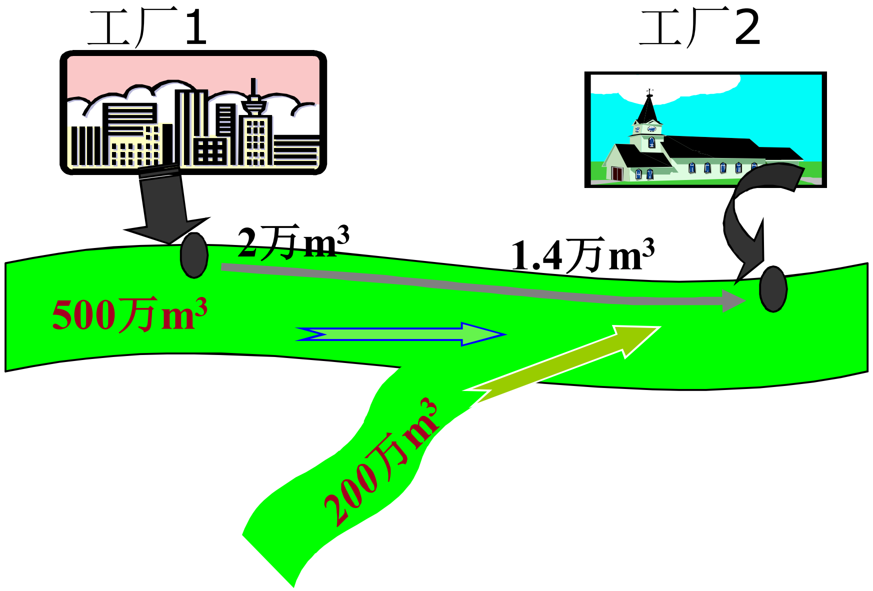


图2.1 例2.2中描述的河流图

解：

决策变量：x_1=工厂1每天处理的污水量

x_2=工厂2每天处理的污水量

目标函数：$\min z=1000x_1+800x_2$

约束条件：

$(2-x_1)/500 \le 0.2\%$

$[(2-x_1)(1-20\%)+(1.4-x_2)]/700 \le 0.2\%$

$x_1 \le 2$

$x_2 \le 1.4$

x_1、$x_2 \ge 0$

2.2 线性规划问题及其数学模型(cont.)

- 线性规划数学模型三要素：
  - 决策变量（**Decision variables**）
  - 约束条件（**Constraints**）
  - 目标函数（**Objective function**）
- 线性规划数学模型的特征：
  - 解决问题的目标函数是多个决策变量的线性函数，通常是求最大值或 最小值；
  - 解决问题的约束条件是一组多个决策变量的线性不等式或等式。
  - 都有一个要求达到的目标，它可用决策变量的线性函数（称为目标函数）来表示，按问题的不同实现最大化或最小化。

2.2 线性规划问题及其数学模型(cont.)

- 其他典型问题:
  - 合理下料问题
  - 运输问题
  - 生产的组织与计划问题
  - 投资证券组合问题
  - 分派问题
  - 生产工艺优化问题
- 用于成功决策的实例:
  - 美国航空公司关于哪架飞机用于哪一航班和哪些机组人员被安排于哪架飞机的决策

2.2 线性规划问题及其数学模型(cont.)

- 美国国防部关于如何从现有的一些基地向海湾运送海湾战争所需要的人员和物资的决策
- **Chessie**道路系统关于购买和修理价值**40**亿美元货运汽车决策
- 魁北克水利部门关于用哪几个水库来满足每天电力需求决策
- 农场信贷系统联邦土地银行关于如何支付到期债券和应发售多少新债券以获取资金（每年共计**60**亿美元）来维持发展决策
- 北美长途运输公司关于每周如何调度数千辆货车的决策
- 埃克森炼油厂关于调节冶炼能力去适应关于无铅燃料生产的法律更改的决策

2.2 线性规划问题及其数学模型(cont.)

- 线性规划的数学模型的一般形式为：
  - 目标函数 max(min) $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$
  - 约束条件 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (\text{或} =, \ge) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (\text{或} =, \ge\ b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (\text{或} =, \ge) b_m \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$
  - 在实际中一般x_j≥0，但有时x_j≤0或x_j无符号限制。

- 线性规划的数学模型的简写形式为：

$$\max(\min) z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\text{或} =, \ge) bi & i=1,2,\cdots,m \\ x_j \ge 0, j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

- 线性规划的数学模型的矩阵形式为：

$$\textbf{max(min)}\ z = CX \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} AX=b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

其中

$$C=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad 0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.2 线性规划问题及其数学模型(cont.)

- 在用单纯法求解线性规划问题时，为了讨论问题方便，需将线性规划模型化为统一的标准形式。
- 线性规划问题的标准型为
  - 目标函数求最大值（有时求最小值）
  - 约束条件都为等式方程
  - 变量x_j为非负
  - 常数b_i都大于或等于零
- 如何将一般问题化为标准型：
  - 若目标函数是求最小值：min S = CX
    - 令 S’=－S，则 max S’=－CX

2.2 线性规划问题及其数学模型(cont.)

– 若约束条件是不等式

- 若约束条件是"≤"不等式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i$$

$y_i \geq 0$是非负的松弛变量

- 若约束条件是"≥"不等式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - z_i = b_i$$

$z_i \geq 0$是非负的松弛变量

- 若约束条件右面的某一常数项$b_i<0$，这时只要在b_i相对应的约束方程两边乘上－1。

– 若变量x_j无非负限制，引进两个非负变量x_j' ，$x_j'' \geq 0$，令$x_j= x_j' - x_j''$ （可正可负）。

- 任何形式的线性规划总可以化成标准型。

2.2 线性规划问题及其数学模型(cont.)

- 例2.3 将例**2.1**的问题化成标准型。
- 解：

例**2.1**的数学模型为： $\max z = 50x_1 + 30x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 120 \\ 2x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases}$$

在各不等式中加入松弛变量$\mathbf{x_3}$、$\mathbf{x_4}$，得到标准型：

$$\max z = 50x_1 + 30x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 120 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 50 \\ x_1、x_2、x_3、x_4 \ge 0 \end{cases}$$

2.2 线性规划问题及其数学模型(cont.)

- 例2.4 将下列问题化成标准型：$\min z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1、x_2 \ge 0，x_3\text{为无约束} \end{cases}$$

- 解：步骤为：

1.用$x_4 - x_5$替换x_3，其中x_4、$x_5 \ge 0$；

2.在第一个、第二个不等式分别使用松弛变量；

3.令**z'=－z**，把求**min z**改为求**max z'**，即可得到标准型：

$$\max z' = x_1 - 2x_2 + 3(x_4 - x_5) + 0x_6 + 0x_7$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (x_4 - x_5) + x_6 = 7 \\ x_1 - x_2 + (x_4 - x_5) - x_7 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2(x_4 - x_5) = 5 \\ x_1、x_2、x_4、x_5、x_6、x_7 \ge 0 \end{cases}$$

2.2 线性规划问题及其数学模型(cont.)

- 线性规划问题隐含的假定：
  - 比例性假定：决策变量变化引起的目标函数的改变量和决策变量的改变量成比例，同样，每个决策变量的变化引起约束方程左端值的改变量和该变量的改变量成比例。
  - 可加性假定：每个决策变量对目标函数和约束方程的影响是独立于其他变量的，目标函数值是每个决策变量对目标函数贡献的总和。
  - 连续性假定：线性规划问题中的决策变量应取连续值。
  - 确定性假定：线性规划问题中的所有参数都是确定的。线性规划问题不包含随机因素。

2.2 线性规划问题及其数学模型(cont.)

- **Dorian汽车公司案例**
  - **Dorian**汽车公司生产豪华汽车和卡车，该公司将客户定位于高收入的男性和女性。为了抓住这些群体，**Dorian**汽车公司实施了两个野心勃勃的电视广告计划，决定在两类节目上购买**1**分钟的商业广告时段：喜剧片和足球比赛。每个喜剧商业广告的观众可以达到**700**万名高收入女性和**200**万名高收入男性，费用是**50000**美元；每个足球商业广告的观众可以达到**1200**万名高收入男性和**200**万名高收入女性，费用是**100000**美元。**Dorian**公司希望这些商业广告能够被至少**2800**万名高收入女性和**2400**万名高收入男性看到。那么**Dorian**公司如何以最小的费用满足它的广告要求?
  - 易列出线性规划的数学模型如下：

$$\min z = 50000x_1 + 100000x_2$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 28 \\ 2x_1 + 12x_2 \geq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 现在我们来看一下实际中的Dorian问题是否符合线性规划的四个假设：
  - 比例性假定：是否每增加一次喜剧广告的播出，就必定正好增加700万女性观众和200万男性观众？显然，这将和经验证据相矛盾，经验证据表明，在某一特征时刻以后，广告的收视率将下降。在播出了一定次数的汽车广告后，大多数人也许已经看过其中的一个广告，因此播出更多次广告的意义并不大。
  - 相加性假定：我们使用观众总人数=喜剧广告观众+足球广告观众，事实上许多情况是同一个人将观看两种广告；
  - 连续性假定：如果只提供1分钟广告，则Dorian公司购买广告的线性规划问题的解（3.6个喜剧广告,1.4个足球广告）就是不合理的；
  - 确定性假定：每种类型的广告将增加多少观众也并不确定。

Dorian问题似乎违反了线性规划的所有假定，尽管存在这些缺点，分析人员还是使用类似的线性规划模型确定了它们的最佳媒体组合，并为公司节省了大笔费用。

可见，在生产、投资等实际应用中，绝大多数情况并不如理想状态下那样可以简单直观的列出线性规划问题模型，作为运筹分析人员需要做的是通过这样的模型和解，为解决实际问题提供参考和依据。

2.3 线性规划问题解的概念

- 图解法
  - 图解法简单直观，平面上作图适于求解二维问题。在用图解法求解线性规划问题时，不必把数学模型化为标准型。
  - 以例**2.1**为例进行图解：

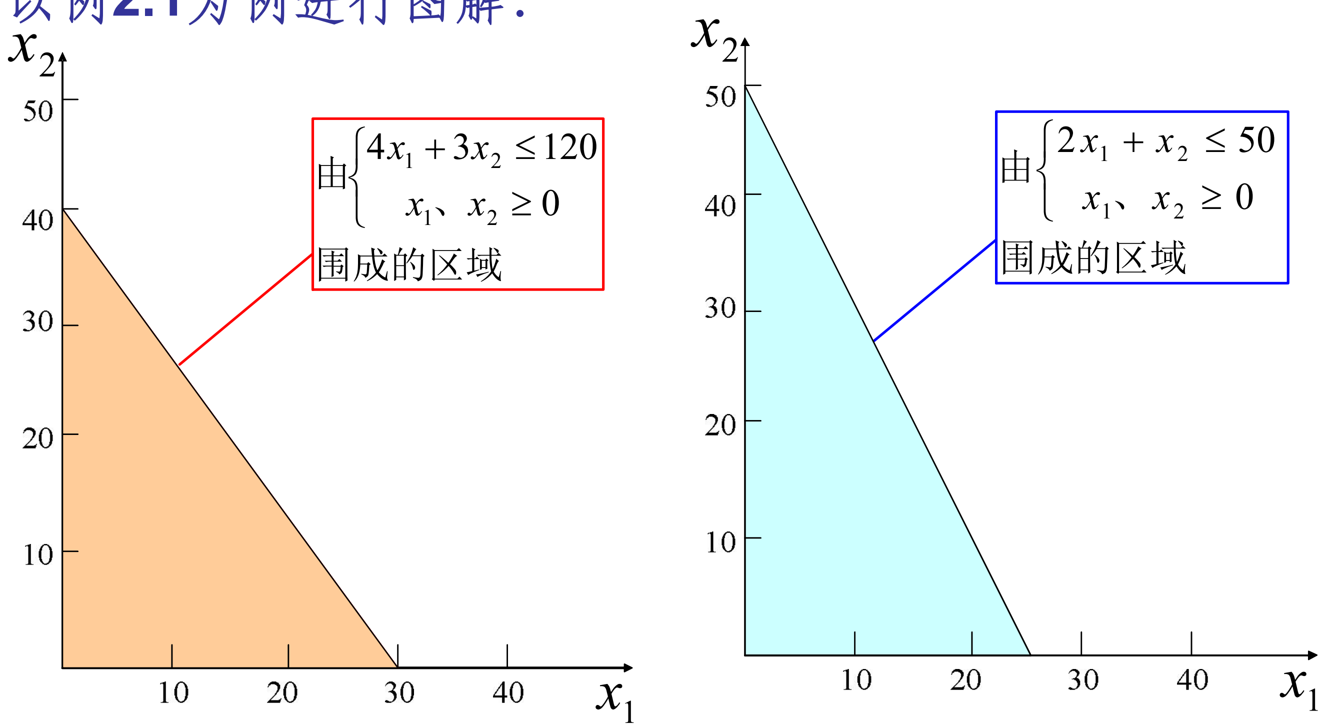
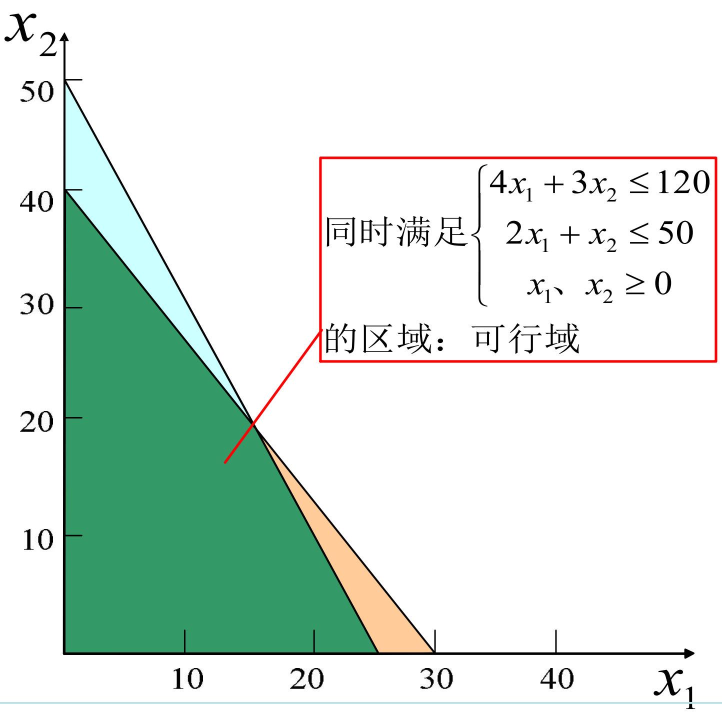
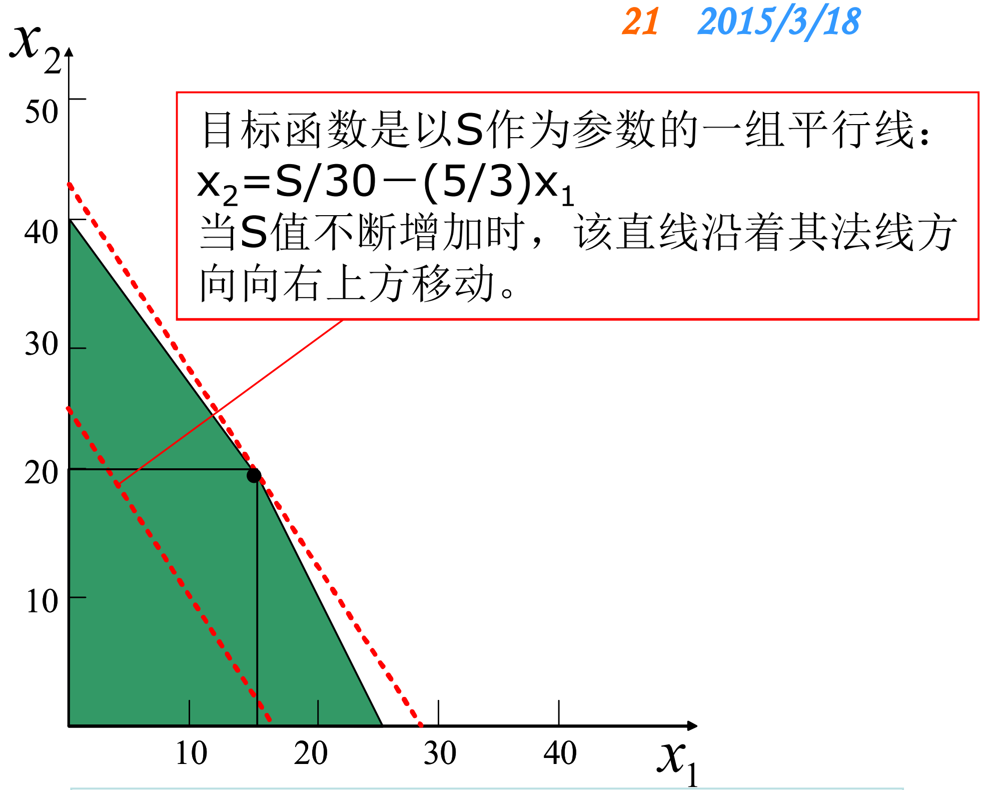


图2.2 例2.1图解法

2.3 线性规划问题解的概念(cont.)



可行域是由约束条件围成的区域（图中绿色区域），该区域内的每一点都是可行解，它的全体组成问题的解集合。



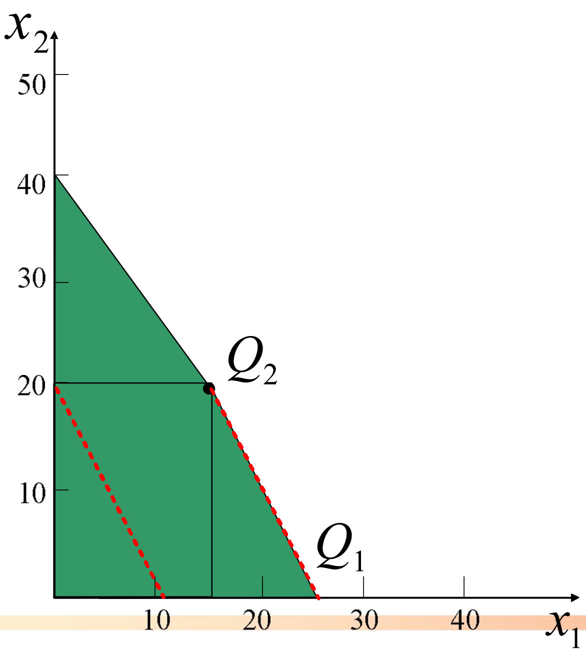
当该直线移到点**(15,20)**时，**S**（目标函数）值达到最大：

Max S=50*15+30*20=1350

此时最优解=（**15**，**20**）

2.3 线性规划问题解的概念(cont.)

- 二个重要结论:
  - 满足约束条件的可行域一般都构成凸多边形。这一事实可以推广到更多变量的场合。
  - 最优解必定能在凸多边形的某一个顶点上取得，这一事实也可以推广到更多变量的场合。
- 一般线性规划问题的求解结果可能出现以下情况:



1.无穷多最优解（多重解）

若将例2.1中的目标函数变为同约束条件平行的直线（如左图），当S值从小变大时，将与线段Q_1Q_2重合，此时该线段上的任意一点都使S取得相同的最大值。

图2.3 无穷多最优解图例

2.3 线性规划问题解的概念(cont.)

2.无界解

- 例**2.5**： $\max S = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 40 \\ x_1 - x_2 \le 20 \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases}$$

用图解法求解如右图，可以看出该问题的目标函数值可以增大到无穷大，称这种情况为无界解或无最优解。

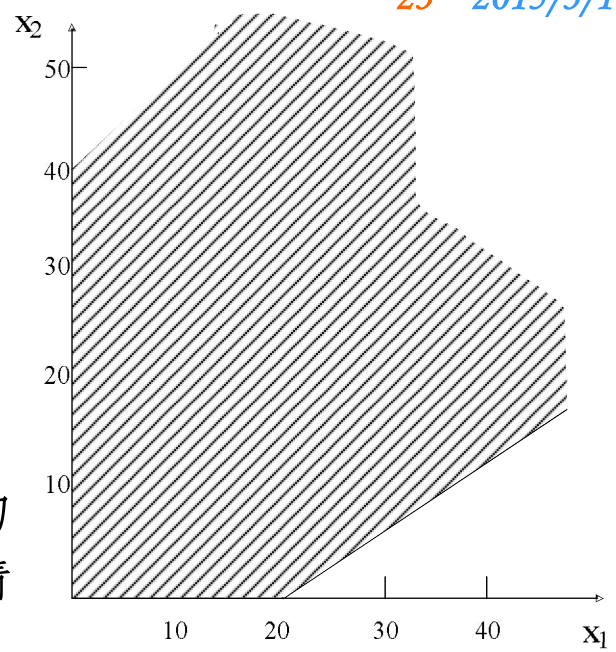


图2.3 无最优解图例

3.无可行解

用图解法求解得到的可行域为空集，即无可行解，也不存在最优解。

4.唯一最优解

求解得到的问题的最优解是唯一的，如例**2.1**。

2.3 线性规划问题解的概念(cont.)

- 线性规划的可行域及最优解的可能结果图示：

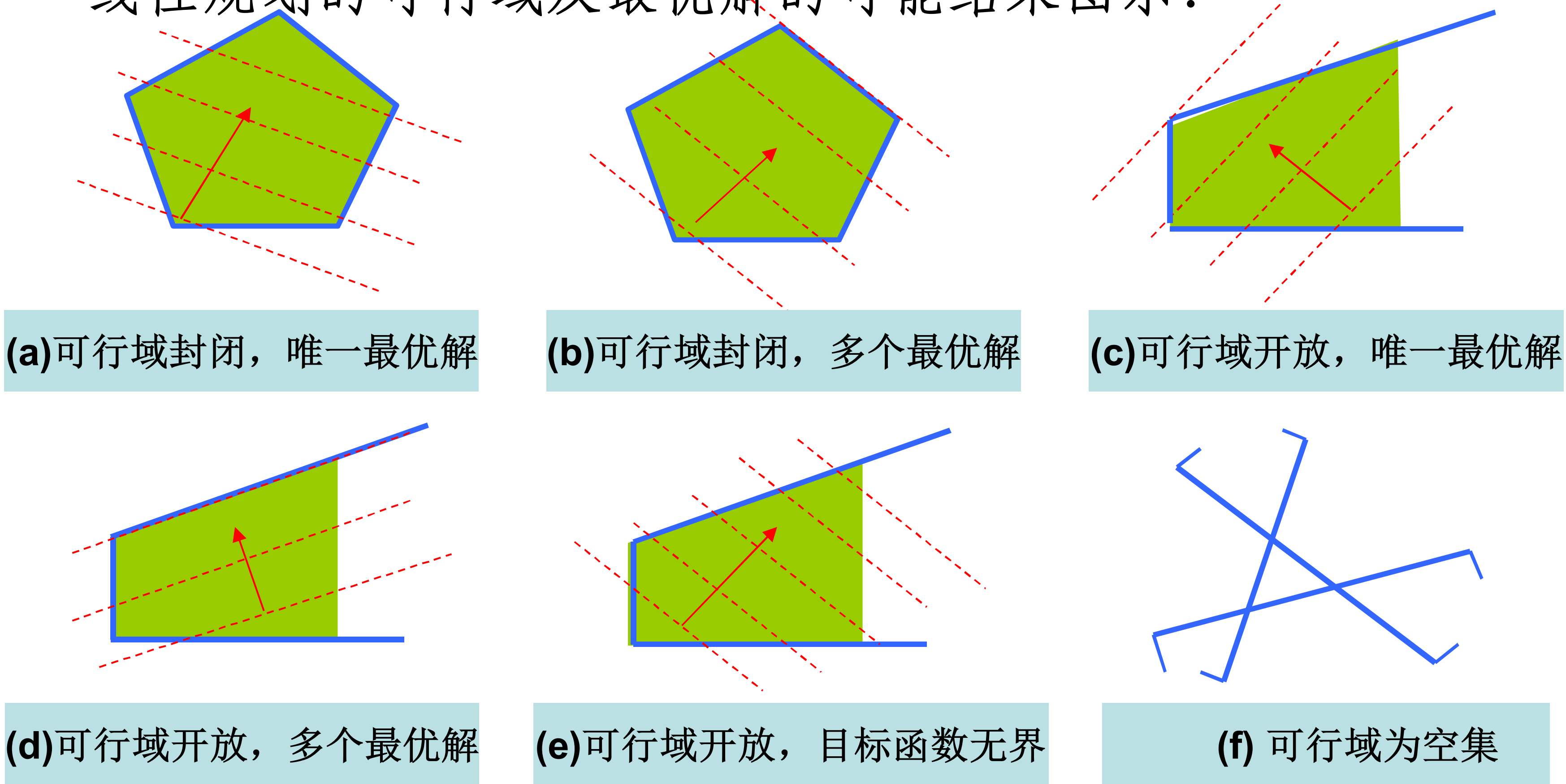


图2.4 可行域与解的种类示意图

2.3 线性规划问题解的概念(cont.)

- 一般线性问题的标准型为：

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \qquad (2.1)$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, i=1,2,\cdots,m \\ x_j\geq 0, j=1,2,\cdots,n\end{cases} \qquad (2.2)$$

– 满足约束条件**(2.2)**的解***X***，称为线性规划问题的可行解。满足条件**(2.1)**的可行解叫最优解。

– 几个概念：

  - 基：设**A**是约束方程组的**m**×**n**维系数矩阵，其秩为**m**。**B**是**A**中**m**×**m**阶非奇异的子矩阵（**|B|≠0**），则称矩阵**B**为线性规划问题的一个基。

2.3 线性规划问题解的概念(cont.)

- 基向量：矩阵B是由m个线性独立的列向量组成，设B=(P_1，P_2⋯.P_m)，称列向量P_j称为对应基B的基向量。
- 基变量：与基向量 P_j 相对应的变量x_j就称为基变量，其余的就称为非基变量。
- 对于某一特定的基B，非基变量取0值得到的解，称为基解。
- 满足非负约束条件的基解，称为基可行解。
- 与基础可行解对应的基，称为可行基。

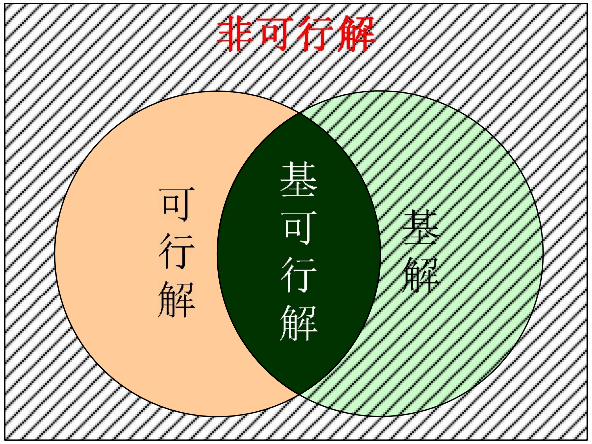


图2.5 几种解之间的关系图

2.3 线性规划问题解的概念(cont.)

- 例2.5:

$$\max S = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow$$

$$\max S = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + x4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x5 = 4 \\ x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 \ge 0 \end{cases}$$

解：满足约束条件**1~3**与坐标系**x1,x2=0**的交点**(**O，A，B，Q1，Q2，Q3，Q4)都是代表基解。

注意：A和B并不满足条件x1，x2 ≥ 0

满足所有约束条件**1**～**4**的交点(O，Q1，Q2，Q3，Q4)都是代表基可行解。点**(**O，Q1，Q2，Q3，Q4)刚好是可行域（暗绿色区域）的顶点。

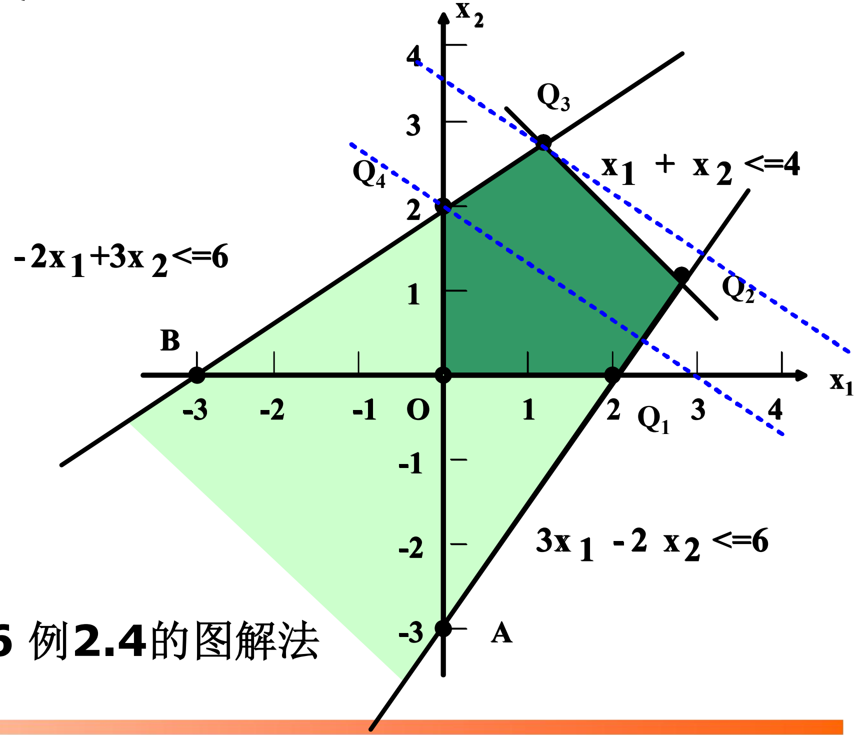


图**2.6** 例**2.4**的图解法

2.4 线性规划问题的几何意义

- 凸集概念：
  - 设**K**是**n**维线性空间R_n的一个点集，若**K**中的任意两点$x^{(1)}$，$x^{(2)}$的连线上的一切点**x**仍在**K**中，则称**K**为凸集。即：若**K**中的任意两点$x^{(1)}$，$x^{(2)}$ $\in K$，对于任意$0 \le \alpha \le 1$使得$x = \alpha x^{(1)} + (1-\alpha) x^{(2)} \in K$，则称**K**为凸集。

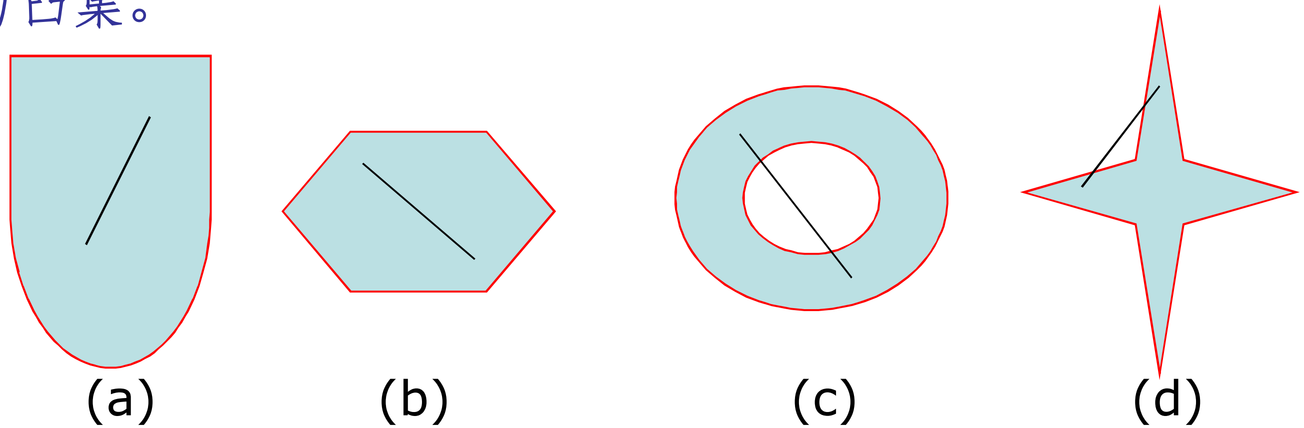


图2.7 (a)(b)是凸集，(c)(d)不是凸集

2.4 线性规划问题的几何意义(cont.)

– 任何两个凸集的交集是凸集。两个凸集的并不一定是凸集。（如图2.7）

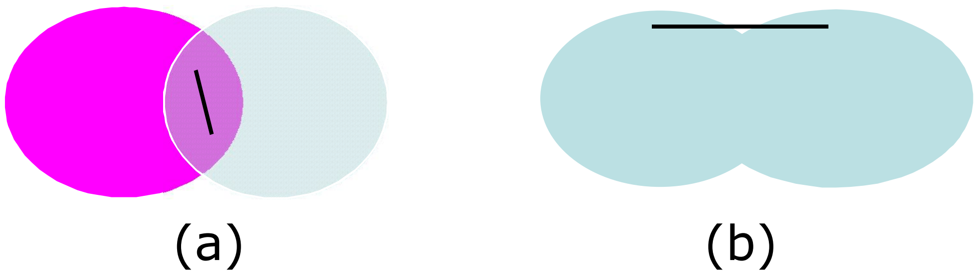


图2.8 凸集的交集与并集

– 凸组合：设$X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$是$n$维线性空间 E^n中的n个点。

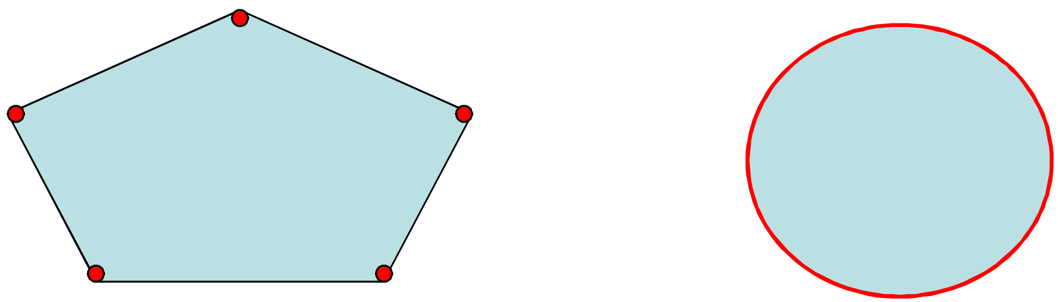
若存在 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$，且 $0 \le \mu_i \le 1$，$i = 1,2,\dots,k$；$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1$，

使$X = \mu_1 X^{(1)} + \mu_2 X^{(2)} + \dots + \mu_k X^{(k)}$，

则称X为$X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$的凸组合。

2.4 线性规划问题的几何意义(cont.)

– 顶点：设K是凸集，$X \in K$；若X不能用不同的两点$X^{(1)}$、$X^{(2)} \in X$的线性组合表示为：$X = aX^{(1)} + (1-a)X^{(2)} (0 \le a \le 1)$
则称X为K的一个顶点（或极点）。



凸多边形上的顶点是凸集的顶点　　圆周上的点都是凸集的顶点

图2.9 多边形与圆形的顶点

2.4 线性规划问题的几何意义(cont.)

- 定理1 若线性规划问题存在可行域，则其可行域

$$D=\left\{X\left|\sum_{j=1}^{n}P_jx_j=b,\ x_j\geq 0\right.\right\}\text{是凸集。}$$

证：设$X^{(1)}=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_n^{(1)})^T$，$X^{(2)}=(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\cdots,x_n^{(2)})^T$是$D$内的任意两点，$X^{(1)}\neq X^{(2)}$。

则有$\sum_{j=1}^{n}P_jx_j^{(1)}=b, x_j^{(1)}\geq 0, j=1,2,\cdots,n$，$\sum_{j=1}^{n}P_jx_j^{(2)}=b, x_j^{(2)}\geq 0, j=1,2,\cdots,n$。

令$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$为$X^{(1)}X^{(2)}$连线上的任意一点，

则：X的每一个分量为$x_j=\alpha x_j^{(1)}+(1-\alpha)x_j^{(2)}$,代入约束条件得到:

$$\sum_{j=1}^{n}P_jx_j=\sum_{j=1}^{n}P_j[\alpha x_j^{(1)}+(1-\alpha)x_j^{(2)}]$$

$$=\alpha\sum_{j=1}^{n}P_jx_j^{(1)}+\sum_{j=1}^{n}P_jx_j^{(2)}-\alpha\sum_{j=1}^{n}P_jx_j^{(2)}=\alpha b+b-\alpha b=b$$

由此可见，$X\in D$，D是凸集。

2.4 线性规划问题的几何意义(cont.)

- 引理1 线性规划问题的可行解$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$为基可行解的充要条件是X的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

证明：

(1) 必要性：因为X是基可行解，故X的正分量就是各个基变量，
而各个基变量对应的系数列向量就是各个基向量。
根据基的定义，它们线性无关。
(2) 充分性：若向量$P_1,P_2,\cdots,P_k$线性独立，则必有$k\le m$；
当$k=m$时；它们恰构成一个基，
从而$X=(x_1,x_2,\cdots,x_k,0\cdots0)$为相应的基可行解。
当$k<m$时，则一定可以从其余的列向量中取出$m-k$个
与$P_1,P_2,\cdots,P_k$构成最大线性独立向量组，
其对应的解恰为X，所以根据定义它是基可行解。

2.4 线性规划问题的几何意义(cont.)

- 定理2 线性规划问题的基可行解X对应于可行域D的顶点。

证明：不失一般性，假设基可行解X的前m个分量为正。故$\sum_{j=1}^{m} P_j x_j = b$ (2.3)。

用反证法：

(1)假设X不是基可行解，则它一定不是可行域D的顶点。

若X不是基可行解，则其正分量所对应的系数列向量$P_1, P_2, \cdots, P_m$线性相关，

即存在一组不全为零的数$\alpha_i, i = 1,2,\cdots,m$使得

$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_m P_m = 0$ (2.4)

用一个数$\mu > 0$乘(2.4)式分别与(2.3)式相加减，得：

$(x_1 - \mu\alpha_1)P_1 + (x_2 - \mu\alpha_2)P_2 + \cdots + (x_m - \mu\alpha_m)P_m = b$

$(x_1 + \mu\alpha_1)P_1 + (x_2 + \mu\alpha_2)P_2 + \cdots + (x_m + \mu\alpha_m)P_m = b$

现取$X^{(1)} = [(x_1 - \mu\alpha_1),(x_2 - \mu\alpha_2),\cdots,(x_m - \mu\alpha_m),0,\cdots,0]$

$X^{(2)} = [(x_1 + \mu\alpha_1),(x_2 + \mu\alpha_2),\cdots,(x_m + \mu\alpha_m),0,\cdots,0]$

由$X^{(1)}$，$X^{(2)}$可以得到$X = \frac{1}{2}X^{(1)} + \frac{1}{2}X^{(2)}$，即$X$是$X^{(1)}$，$X^{(2)}$连线的中点。

2.4 线性规划问题的几何意义(cont.)

当μ充分小时，可保证 $x_i \pm \mu\alpha_i \geq 0, i = 1,2,\cdots,m$

即$X^{(1)}, X^{(2)}$是可行解。所以 X不是可行域 D的顶点。

(2)若X不是可行域 D的顶点,故在可行域 D中可找到不同的两点:

$X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})^T$

$X^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)})^T$

使$X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha) X^{(2)} \quad 0 < \alpha < 1$

设X是基可行解，对应向量 组$P_1, P_2, \cdots, P_m$线性独立。

当$j > m$时，有$x_j = x_j^{(1)} = x_j^{(2)} = 0$，由于$X^{(1)}, X^{(2)}$是可行域的两点。

应满足$\sum_{j=1}^{m} P_j x_j^{(1)} = b$与$\sum_{j=1}^{m} P_j x_j^{(2)} = b$。

将上述两式相减，即得 $\sum_{j=1}^{m} P_j (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) = 0$

因为$X^{(1)} \neq X^{(2)}$，所以上式系数 $(x_j^{(1)} - x_j^{(2)})$不全为零，

故向量组 $P_1, P_2, \cdots, P_m$线性相关，与假设矛盾 。即X不是基可行解。

2.4 线性规划问题的几何意义(cont.)

- 引理2 若K是有界凸集，则任何一点$X \in K$可表示为K的顶点的凸组合。
  - 例2.6 设X是三角形中任意一点，$X^{(1)}$，$X^{(2)}$和$X^{(3)}$是三角形的三个顶点，试用三个顶点的坐标表示X。

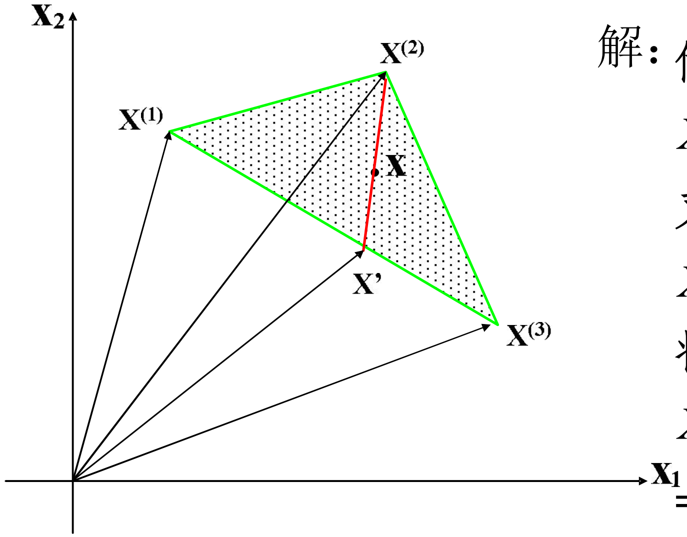


图2.10 例2.6作图说明

解：做连线$XX^{(2)}$，并延长交$X^{(1)}X^{(3)}$于X'，可表示为：

$$X' = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(3)} \quad 0<\alpha<1$$

又因X是$X'X^{(2)}$上的一点，可表示为：

$$X = \mu X' + (1-\mu)X^{(2)} \quad 0<\mu<1$$

将该式代入第一个等式得到：

$$X = \mu[\alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(3)}] + (1-\mu)X^{(2)}$$

$$= \mu\alpha X^{(1)} + (1-\mu)X^{(2)} + \mu(1-\alpha)X^{(3)}$$

因为$0<\alpha<1, 0<\mu<1$，所以$0<\mu\alpha$、$1-\mu$、$\mu(1-\alpha)<1$，

且$\mu\alpha + 1 - \mu + \mu(1-\alpha) = 1$

2.4 线性规划问题的几何意义(cont.)

- 定理3：若可行域有界，线性规划问题的目标函数一定可以在其顶点上达到最优。

证明：设$X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(k)}$是可行域的顶点，若$X^{(0)}$不是顶点，
且目标函数在$X^{(0)}$处达到最优：$z^* = CX^{(0)}$。
因$X^{(0)}$不是顶点，所以可以用D的顶点线性表示为：

$$X^{(0)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^{(i)}, \quad \alpha_i \ge 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

因此 $CX^{(0)} = C\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} C\alpha_i x^{(i)} \qquad (2.5)$

在所有的顶点中必能找 到某个顶点$X^{(m)}$，使$CX^{(m)}$是所有$CX^{(i)}$中的最大者。
并且将$X^{(m)}$代替(2.5)中的所有$X^{(i)}$，得到

$$CX^{(0)} \le C\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^{(m)} = CX^{(m)}$$

根据假设$CX^{(0)}$是最大值，所以只有$CX^{(0)} = CX^{(m)}$，
即目标函数在顶点$X^{(m)}$处也能达到最大值。

2.4 线性规划问题的几何意义(cont.)

- 说明1：若可行解集D无界，则线性规划问题可能有最优解，也可能无最优解。若有最优解，也必在顶点上达到。
- 说明2：有时目标函数也可能在多个顶点上达到最优值。这些顶点的凸组合也是最优值。（有无穷多最优解）

• 推论：可行解集D中的顶点个数是有限的。

2.5 单纯形法

- 单纯形法是目前应用最广泛的求解线性规划算法。其基本思路是：
  - 根据问题的标准形式，从可行域中某个基可行解（一个顶点）开始，转换到另一个基可行解（顶点），并且使目标函数达到最大时，问题就得到了最优解。
  - 例**2.7** 讨论 $\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$ 的求解。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 \geq 0 \end{cases}$$

- 解：约束方程的系数矩阵为：

$$A = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5 单纯形法(cont.)

则容易看出x_3、x_4、x_5 的系数向量是线性独立的。这些向量构成一个基：

$$B=(P_3,P_4,P_5)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

- 对应于**B**的变量x_3、x_4、x_5 为基变量，可得到：

$$\boldsymbol{x_3}\quad=\mathbf{8}-\boldsymbol{x_1}-\mathbf{2}\boldsymbol{x_2}$$
$$\boldsymbol{x_4}\quad=\mathbf{16}-\mathbf{4}\boldsymbol{x_1}$$
$$\boldsymbol{x_5}=\mathbf{12}-\mathbf{4}\boldsymbol{x_2}$$

代入目标函数得到：$z=0+2x_1+3x_2$

- 当令非基变量为**0**时，便得到**z=0**，这时得到一个基可行解：

$$X^{(0)}=(0,0,8,16,12)^T$$

可以看出：$z = 0 + 2x_1 + 3x_2$ 式中的非基变量的系数都是正数，因此将非基变量变换基变量，目标函数值就有可能增大。

- 所以只要在目标函数的表达式中还存在有正系数的非基变量，这表示目标函数值还有增加的可能，就需要将非基变量与基变量进行对换，一般选择正系数最大的那个非基变量为换入变量。

将x_2定为换入变量，$x_1=0$，得到

$$x_3 = 8 - 2x_2 \geq 0$$
$$x_4 = 16 \geq 0$$
$$x_5 = 12 - 4x_2 \geq 0$$

只有选择$x_2=\min(8/2,-,12/4)=3$时，才能成立。此时$x_5=0$，决定用x_2替换x_5。

$$\begin{aligned} x_3 + 2x_2 &= 8 - x_1 \\ x_4 &= 16 - 4x_1 \\ 4x_2 &= 12 - x_5 \end{aligned} \xrightarrow{\text{高斯消元法}} \begin{aligned} x_3 &= 2 - x_1 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_4 &= 16 - 4x_1 \\ x_2 &= 3 - \frac{1}{4}x_5 \end{aligned}$$

2.5 单纯形法(cont.)

再将上式代入目标函数得到 $z = 9 + 2x_1 - \frac{3}{4}x_5 = 9$（非基变量取 0）

并得出另一个基可行解为 $X^{(1)} = (0,3,2,16,0)^T$

根据目标函数表达式可以看出，非基变量x_1的系数是正的，说明目标函数值还有增大的可能，确定x_1为换入变量，设x_5=0，则有

$$
\begin{aligned}
&x_3 = 2 - x_1 \ge 0 \\
&x_4 = 16 - 4x_1 \ge 0 \quad \Rightarrow x_1 = \min\left(\frac{2}{1}, \frac{16}{4}, -\right) = 2 \\
&x_2 = 3 \ge 0
\end{aligned}
$$

此时，x_3=0，用x_1替换x_3，得到：

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &= 8 - x_3 \\
4x_1 + x_4 &= 16 \\
4x_2 &= 12 - x_5
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
x_1 &= 2 - x_3 + \frac{1}{2}x_5 \\
x_4 &= 8 + 4x_3 - 2x_5 \\
x_2 &= 3 - \frac{1}{4}x_5
\end{aligned}
$$

2.5 单纯形法(cont.)

再将上式代入目标函数得到

$$z = 13 - 2x_3 + \frac{1}{4}x_5 = 13\text{（令}x_3\text{、}x_5 = 0\text{）}$$

并得出另一个基可行解为

$$X^{(2)} = (2,3,0,8,0)^T$$

根据目标函数表达式可以看出，非基变量x_5的系数是正的，说明目标函数值还有增大的可能，确定x_5为换入变量，设$x_3=0$，则有

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + \frac{1}{2}x_5 \ge 0 \\ x_4 &= 8 - 2x_5 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x_5 = \min(-, \frac{8}{2}, \frac{3}{1/4}) = 4 \\ x_2 &= 3 - \frac{1}{4}x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

此时，$x_4=0$，用x_5替换x_4，得到：

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 8 - x_3 \\ 4x_1 &= 16 - x_4 \\ 4x_2 + x_5 &= 12 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 4 - \frac{1}{4}2x_4 \\ x_5 &= 4 + 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 &= 2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{8}x_4 \end{aligned}$$

再将上式代入目标函数得到:

$$z = 14 - 1.5x_3 - 0.125x_4 = 14$$

此时目标函数的系数均为负数，没有再增加值的可能，因此

$$X^{(3)} = (4,2,0,0,4)^T$$

是最优解。

2.5 单纯形法(cont.)

- 下面讨论一般线性规划问题的求解：
  - 步骤1：构造初始可行基
    - 引入附加变量，将数学模型变为标准型

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b, i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \quad (2.7)$$

可得方程：

$$\begin{aligned} & x_1 + a_{1,m+1} x_{m+1} + \cdots + a_{1,n} x_n = b_1 \\ & x_2 + a_{2,m+1} x_{m+1} + \cdots + a_{2,n} x_n = b_2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (2.8) \\ & x_m + a_{m,m+1} x_{m+1} + \cdots + a_{m,n} x_n = b_m \\ & x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,n \end{aligned}$$

2.5 单纯形法(cont.)

– 步骤2：求出一个初始基可行解

一般可以直接观察到单位矩阵**B**作为可行基：

$$\boldsymbol{B=(P_1,P_2,\cdots,P_m)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}}$$

将**(2.8)**式移项得

$$\boldsymbol{\begin{aligned} x_1 &= b_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{1,n}x_n \\ x_2 &= b_2 - a_{2,m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{2,n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m &= b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{m,n}x_n \end{aligned}} \qquad \mathbf{(2.9)}$$

令$x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，可得$x_i=b_i(i=1,2,\cdots,\ m)$

因此得到初始基可行解：$X=(x_1,x_2,\cdots,x_m,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-m个})^T=(b_1,b_2,\cdots,b_m,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-m个})^T$

2.5 单纯形法(cont.)

– 步骤3：最优性检验与解的判别

- 设某次迭代后解为 $X(0)=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0,0,\cdots,0)^T$

有$\sum_{i=1}^{m}P_i x_i^0=b$，其中

$$\begin{array}{cccccccccccc}
P_1 & P_2 & \cdots & P_r & \cdots & P_m & P_{m+1} & \cdots & P_k & \cdots & P_n & b \\
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & a_{r,m+1} & \cdots & a_{r,k} & \cdots & a_{r,n} & b_3 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,k} & \cdots & a_{m,n} & b_m
\end{array}$$

其他向量P_j可用基的线性组合表示，有

$$P_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}P_i \rightarrow P_j-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}P_i=0 \xrightarrow{\text{两边同乘一个正数}\theta} \theta(P_j-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}P_i)=0$$

$$\sum_{i=1}^{m} P_i x_i^0 + \theta(P_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} P_i) = b \rightarrow \sum_{i=1}^{m} (x_i^0 - \theta a_{ij}) P_i + \theta P_j = b$$

若满足所有$x_i^0 - \theta a_{ij} \geq 0$，$i = 1, \cdots, m$，则找到满足约束条件的另一个点$X^{(1)}$

$$X^{(1)} = (x_1^0 - \theta a_{1j}, x_2^0 - \theta a_{2j}, \cdots, x_m^0 - \theta a_{mj}, 0, \cdots, \theta, \cdots, 0)^T$$

- 将刚才得到的两个可行解$X^{(0)}$和$X^{(1)}$代入目标函数，得到：

$$z^{(0)} = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^0$$

$$z^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} c_i (x_i^0 - \theta a_{ij}) + \theta c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^0 + \theta(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}) = z^{(0)} + \theta(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij})$$

令$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$，就是对线性规划问题的解进行最优检验的标志

2.5 单纯形法(cont.)

- 最优解判别定理：若对于某个基本可行解，所有检验数$\sigma_j \le 0$，则该基本可行解是最优解。
- 无穷多解判别定理：若对于某个基本可行解，所有检验数$\sigma_j \le 0$，又存在某个非基变量的检验数$\sigma_{m+k}=0$，则该线性规划问题有无穷多最优解。
- 无界解判别定理：若有一个$\sigma_{m+k}>0$，且对于$i=1,2,\cdots,m$有$a_{i,m+k}\le 0$，那么该线性规划问题具有无界解（或称无最优解）。

– 基变换

- 若初始基可行解不是最优解及不能判别无界时，需要从原可行解基中换一个列向量得到一个新的基可行解，这称为基变换。
- 1.换入变量的确定：

当公式 $z=\sum_{i=1}^{m} c_i b'_i + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j$中不止有一个系数大于 0时，选择其中最大者 σ_k对应的x_k为换入变量。

2.5 单纯形法(cont.)

- **2.**换出变量的确定：

假设有基本可行解 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^T$，则$X$必满足约束条件：

$$P_1x_1+P_2x_2+\cdots+P_mx_m=b$$

设系数矩阵如下：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
P_1 & P_2 & \cdots & P_r & \cdots & P_m & P_{m+1} & \cdots & P_k & \cdots & P_n & b \\
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & a_{r,m+1} & \cdots & a_{r,k} & \cdots & a_{r,n} & b_3 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,k} & \cdots & a_{m,n} & b_m
\end{array} \qquad (2.10)$$

设换入向量为 $P_k(m<k<n)$，则P_k可用各单位列向量 $P_1,P_2,\cdots,P_r,\cdots,P_m$线性表示，即有：

$$P_k=\begin{bmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{r,k} \\ \vdots \\ a_{m,k} \end{bmatrix}=P_1a_{1,k}+P_2a_{2,k}+\cdots+P_ra_{r,k}+\cdots+P_ma_{m,k} \qquad (2.11)$$

用(2.10)式减去θ乘以(2.11)式($\theta \geq 0$)有：

$$P_1(x_1-\theta a_{1,k})+P_2(x_2-\theta a_{2,k})+\cdots+P_r(x_r-\theta a_{r,k})+\cdots+P_m(x_m-\theta a_{m,k})+P_k\theta=b$$

当θ取适当值时，就能得到 满足约束条件的一个可 行解，

且使某个$x_i^{(0)}-\theta a_{i,k}=0$，并保证其余分量为非 负。

方法为：比较各比值 $\dfrac{x_i^{(0)}}{a_{i,k}}$ 并选择其中比值最小的 为θ,

将θ代入X中，便得到新的基可行 解。

$X^{(0)}$转换到$X^{(1)}$的各分量转换公式为：

$$x_i^{(1)}=\begin{cases} x_i^{(0)}-\dfrac{x_l^{(0)}}{a_{l,k}}\times a_{i,k} & i\neq l \\ \dfrac{x_l^{(0)}}{a_{l,k}} & i=l \end{cases}$$

2.5 单纯形法(cont.)

– 迭代（旋转运算）

- 考虑以下形式的线性方程组：

$$\begin{aligned} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

- 通过对下面系数矩阵的增广矩阵做初等变换来实现基变换：

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc c} x_1 & x_2 & \cdots & x_l & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & a_{l,m+1} & \cdots & a_{l,k} & \cdots & a_{l,n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,k} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right) \end{array}$$

2.5 单纯形法(cont.)

– 变换步骤:

1.将第l行除以a_{lk}，得到

$$\left(0,\cdots,0,\frac{1}{a_{lk}},0,\cdots,0,\frac{a_{l,m+1}}{a_{lk}},\cdots,1,\cdots,\frac{a_{l,n}}{a_{lk}}\left|\frac{b_l}{a_{lk}}\right.\right) \qquad (2.12)$$

2.将x_k列的各元素，除a_{lk}变换为1以外，其它的都变换为0。

其他行的变换是将(2.12)乘以a_{ik}后，从原第i行减去，得到新的第i行:

$$\left(0,\cdots,0,-\frac{a_{i,k}}{a_{lk}},0,\cdots,0,a_{i,m+1}-\frac{a_{l,m+1}}{a_{lk}}a_{i,k},\cdots,0,\cdots,a_{l,n}-\frac{a_{l,n}}{a_{lk}}a_{i,k}\left|b_i-\frac{b_l}{a_{lk}}a_{i,k}\right.\right)$$

由此得到新的增广矩阵。此时$x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots,x_m$构成新的可行基。

当非基变量为0时就得到一个新的基可行解。

2.5 单纯形法(cont.)

- 单纯形法的计算步骤
  - 单纯形表：为了便于理解设计一种计算表，功能类似于增广矩阵。
    - 将约束条件与目标函数组成**n+1**个变量，**m+1**个方程的方程组。

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
-z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & b
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\
1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_n & 0
\end{array}\right]
$$

    - 将**z**看作不参与基变换的基变量，它与$x_1, x_2, \cdots, x_m$的系数构成一个基，可采用初等变换将$c_1, c_2, \cdots, c_m$变换为零，使其对应的系数矩阵为单位矩阵。根据得到的增广矩阵设计计算表。

2.5 单纯形法(cont.)

表2.1

$c_{j\to}$			c_1	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_n	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n	
c_1	x_1	b_1	1	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	a_{1n}	θ_1
c_2	x_2	b_2	0	$\cdots$	0	$a_{2,m+1}$	$\cdots$	a_{2n}	θ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_m	x_m	b_m	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	a_{mn}	θ_m
	$-z$	$-\sum_{i=1}^{m} c_i b_i$	0	$\cdots$	0	$c_{m+1}-\sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,m+1}$	$\cdots$	$c_n-\sum_{i=1}^{m} c_i a_{in}$	

- 最后一行称为检验行，对应各非基变量的检验数；
- 上表为初始单纯形表，每迭代一步构造一个新单纯形表。

2.5 单纯形法(cont.)

– 计算步骤

- (1)找出初始可行基，确定初始基可行解，建立初始单纯形表；
- (2)检验各非基变量的检验数，若$\sigma_j \le 0$，$j=m+1,\cdots,m+n$，则已得到最优解，停止计算，否则转入步骤(3)；
- (3)在$\sigma_j>0$，$j=m+1,\cdots,m+n$中，若有某个σ_k对应x_k的系数列向量$P_k \le 0$，则此问题是无界，停止计算，否则转入步骤(4)；
- (4)根据$\max(\sigma_j>0)=\sigma_k$，确定换入变量$x_k$，按θ规则计算

$$\theta = \min\left(\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0\right) = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

确定换出变量x_l，转入步骤(5)；

- (5)以a_{lk}为主元素进行迭代，得到新的单纯形表。重复(2)~(5)，直到终止。

2.5 单纯形法(cont.)

– 例2.8 将右边的标准型用单纯形表计算最优解。

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 \geq 0 \end{cases}$$

解：根据标准型取松弛变量为基变量，得到初始基可行解。

$$X^{(0)} = (0,0,8,16,12)^T$$

将数字填入表中，得到初始单纯形表：

表2.2

$c_{j\to}$			2	3	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	8	1	2	1	0	0	4
0	x_4	16	4	0	0	1	0	–
0	x_5	12	0	[4]	0	0	1	3
	$-z$	0	2	3	0	0	0	

2.5 单纯形法(cont.)

表2.3

	$c_j \to$		2	3	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	[1]	0	1	0	$-1/2$	2
0	x_4	16	4	0	0	1	0	4
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$	–
	$-z$	-9	2	0	0	0	$-3/4$	

表2.4

2	x_1	2	1	0	1	0	$-1/2$	–
0	x_4	8	0	0	-4	1	[2]	4
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$	12
	$-z$	-13	0	0	-2	0	$1/4$	

表2.5

2	x_1	4	1	0	0	$1/4$	0	
0	x_5	4	0	0	-2	$1/2$	1	
3	x_2	2	0	1	$1/2$	$-1/8$	0	
	$-z$	-14	0	0	-1.5	$-1/8$	0	

2.6 单纯形法的进一步讨论

- 单纯形法的计算方法是先求出一个初始基可行解，判断它是否最优，然后通过反复迭代而最终得到最优解（或无最优解）的结论。最初，可行基可以通过观察得到，但当变量较多的时候，就不易观察得到了。

解决办法：

通过在约束条件的不等式两边加入松弛变量或减去剩余变量，将不等式变为等式。在上述化为标准型的过程中，方程组的左边多出了一组大小为**m**×**m**的单位矩阵***I***，很显然的，这是一组可行基。这也是最初一个线性规划模型要化为标准型的意义所在。

- 问题：在实际问题中，有些模型的约束条件中含有一个或多个等式条件，在变为标准型之后，仍然无法得到上述的大小为**m**×**m**的单位矩阵***I***。

2.6 单纯形法的进一步讨论(cont.)

- 为了易于得到一组基向量和初始基可行解，在约束条件的等式左端加一组虚拟变量，得到一组基变量。以上这种人为添加的变量称为人工变量，构成的基称为人工基。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

- 人工变量是人工加入的，与决策变量、松弛（剩余）变量有着本质的区别，若线性规划有最优解，人工变量必须为**0**以保证它们对原约束条件无任何影响。为了将人工变量从最终的解中剥离出来，我们引入以下两种方法——大**M**法和两阶段法。

2.6 单纯形法的进一步讨论(cont.)

- 大M法：
  - 当线性规划问题的标准型中约束条件的附加变量的系数为－1或原约束不等式为等式的时候，必须引入用人工变量法以得到初始基可行解。

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad &+ a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1,n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\
x_2 \quad &+ a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2,n}x_n \quad + x_{n+2} &= b_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_m &+ a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{m,n}x_n \quad + x_{n+m} &= b_m \\
x_i \geq 0, i &= 1,2,\cdots,n+m
\end{aligned}
$$

$x_1,x_2,\ldots,x_m$ 为松弛变量

$x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_{n+m}$ 为人工变量

2.6 单纯形法的进一步讨论(cont.)

- 引入人工变量前，约束条件已经变成标准型等式。而等式左边加上人工变量后仍取等式，说明约束条件已经和原始的条件不等价。因此只能在引入人工变量的同时修改目标函数，规定人工变量的系数为大**M**（很大的整数）。这样，只要人工变量**>0**，所求的目标函数最小值就是一个很大的数。
- 上述**M**叫做罚因子，大**M**法也叫做罚函数法。 **M**是一个很大的抽象的数，不需要给出具体的数值，可以理解为它能大于给定的任何一个确定数值。

2.6 单纯形法的进一步讨论(cont.)

– 例2.9 用大M法求解如下线性规划问题。

$$\min\ z = -3x_1 + x_2 + x_3$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11$$
$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3$$
$$-2x_1 + x_3 = 1$$
$$x_1、x_2、x_3 \ge 0$$

解：在上述问题的约束条件中加入松弛变量、剩余变量和约束变量，得到：

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11$$
$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3$$
$$-2x_1 + x_3 + x_7 = 1$$
$$x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6、x_7 \ge 0$$

这里M是个任意大的正数，因本例是求min，所以用所有$\sigma_j \ge 0$来判别目标函数是否实现了最小化。

2.6 单纯形法的进一步讨论(cont.)

– 例**2.9**的单纯形表

表2.6

c_j			-3	1	1	0	0	M	M	θ_i
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
M	x_7	1	-2	0	[1]	0	0	0	1	1
$c_j - z_j$			-3+6M	1-M	1-3M	0	M	0	0	
0	x_4	10	3	-2	0	1	0	0	-1	
M	x_6	1	0	[1]	0	0	-1	1	-2	1
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$			-1	1-M	0	0	M	0	3M-1	
0	x_4	12	[3]	0	0	1	-2	2	-5	4
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$			-1	0	0	0	1	M-1	M+1	
-3	x_1	4	1	0	0	1/3	-2/3	2/3	-5/3	
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
1	x_3	9	0	0	1	2/3	4/3	4/3	-7/3	
$c_j - z_j$		2	0	0	0	1/3	1/3	M-1/3	M-2/3	

2.6 单纯形法的进一步讨论(cont.)

- 两阶段法
  - 第一阶段：不考虑原问题是否存在基可行解；给原线性规划问题加入人工变量，并构造仅含人工变量的目标函数和要求实现最小化。
  - 第二阶段：将第一阶段得到的结果去除人工变量，将目标函数的系数，换原问题的目标函数系数，作为第二阶段的初始表。
- 例**2.10** 将例**2.9**中的线性规划问题用两阶段法求解。

解：构造第一阶段的数学模型 $\min \omega = x_6 + x_7$

$$
\begin{aligned}
& x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\
& -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\
& -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\
& x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6、x_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

用单纯形表易得出第一阶段的最优解：

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 12, x_5 = x_6 = x_7 = 0$$

因此说明原问题存在基可行解，进行第二阶段运算，将第一阶段的最终表中的人工变量取消填入原问题的目标函数的系数，使用单纯形表进行第二阶段的运算。

2.6 单纯形法的进一步讨论(cont.)

- 第一阶段

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	−2	1	1	0	0	0	11
1	x_6	3	−4	1	2	0	−1	1	0	3/2
1	x_7	1	2	0	【1】	0	0	0	1	1
			6	−1	−3	0	1	0	0	
0	x_4	10	3	−2	0	1	0	0	−1	—
1	x_6	1	0	【1】	0	0	−1	1	−2	1
0	x_3	1	−2	0	1	0	0	0	1	—
			0	−1	0	0	1	0	3	
0	x_4	12	3	0	0	1	−2	2	−5	4
0	x_2	1	0	1	0	0	−1	1	−2	—
0	x_3	1	−2	0	1	0	0	0	0	—
			0	0	0	0	0	1	1	

2.6 单纯形法的进一步讨论(cont.)

- 第二阶段：将第一阶段得到的最优解取消人工变量，填入原目标函数的系数。

$c_j \to$			-3	1	1	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_4	12	3	0	0	1	-2	4
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	—
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	—
$c_j - z_j$			-1	0	0	0	1	
-3	x_1	4	1	0	0	1/3	-2/3	
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	
1	x_3	9	0	0	1	2/3	-4/3	
$c_j - z_j$			0	0	0	1/3	1/3	

2.6 单纯形法的进一步讨论(cont.)

- 退化
  - 单纯形法计算中用θ规则确定换出变量时，有时同时存在两个以上相同的最小比值，这样在下一次迭代中就有一个或几个基变量等于0，这就出现退化解，这时迭代后目标函数值不变。
  - 特例：有可能出现计算过程循环，永达不到最优解。
  - Beale例

$$\min\ z = -\left(\frac{3}{4}\right)x_4 + 20x_5 - \left(\frac{1}{2}\right)x_6 + 6x_7$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + \left(\frac{1}{4}\right)x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\ x_2 + \left(\frac{1}{2}\right)x_4 - 12x_5 - \left(\frac{1}{2}\right)x_6 + 3x_7 = 0 \\ x_3 + x_6 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

2.6 单纯形法的进一步讨论(cont.)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
x_1	1	0	0	1/4*	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	1/2	-12	-1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
-z	0	0	0	-3/4	20	-1/2	6	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
x_4	4	0	0	1	-32	-4	36	0
x_2	-2	1	0	0	4*	3/2	-15	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
-z	3	0	0	0	-4	-7/2	33	

– 因每次比值均为**0**，随机选取，经过**6**次迭代后，得到单纯形表同初始表相同：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
x_1	1	0	0	1/4	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	1/2	-12	-1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
-z	0	0	0	-3/4	20	-1/2	6	

2.6 单纯形法的进一步讨论(cont.)

- 上述循环中，所有的表都相应于极点$(0,0,1,0,0,0,0)^T$，但基不同而已，若按同样顺序进行变换，单纯形表将会循环不止，而不触及最优点。
- 1974年勃兰特(Bland)提出规则：
  - 选取$c_j-z_j>0$中下标最小的非基变量x_k为换入变量，即

    $k=min(j| c_j-z_j>0)$
  - 当按θ规则计算存在两个或两个以上最小比值时，选取下标最小的基变量为换出变量。

2.6 单纯形法的进一步讨论(cont.)

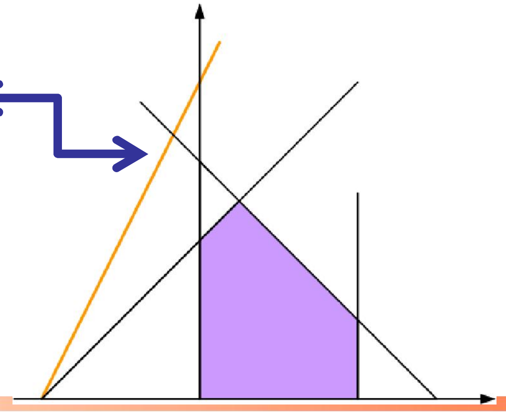
- 多余性
  - 多余性包括多余约束和零变量，其中多余约束包括几何多余和数学多余，它们都可以从问题中剔除而不影响解的结果，这对解大问题具有重要意义。

目前在先进的解大型**LP**问题的软件中，都以其设置的预处理功能，在求解前尽可能的消除多余约束和零变量，以减少计算机内存压力和加快计算速度

  - 几何多余：消除一个约束条件并不改变可行解的解域

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} \boxed{-2x_1 + x_2 \le 4} \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



2.6 单纯形法的进一步讨论(cont.)

– 数学多余：一个约束等式能表示成其他约束等式的线性组合，则该约束式是数学多余的，可以从问题中剔除。

$$\min z = -3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_3 = 6 \\ x_3 \le 2 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

为第四个约束条件引进松弛变量x_4，则矩阵(A,b)变为：

$$(A,b) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- 其中第三行可以表示为第一行和第二行的和，因此矩阵不是满秩的，前三个当中任一个是多余的，可以去掉。

2.6 单纯形法的进一步讨论(cont.)

- 零变量：一个变量都以零值满足约束条件方程的每个解，则该变量称为零变量，该变量的非负条件和在约束方程系数矩阵中的相应的系数列可以从问题中剔除。

$$s.t.\begin{cases} 2x_1-2x_2+4x_3+3x_4=6 & (1) \\ x_1-3x_2+2x_3+x_4=3 & (2) \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0 \end{cases}$$

- (1)-2*(2)得：

$$s.t.\begin{cases} 4x_2+x_4=0 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0 \end{cases}$$

- 因此在任何解中，这两个变量必为零。
- 推广可知，显然若某些（或全部）约束条件方程的一个线性组合使右边向量为零，而左边系数非负，则相应为正系数的变量必为零变量。

2.7 小结

- 检验数的几种表示形式：
  - 要求目标函数最大化和最小化时，其判别标准和标准型都有所不同。目标函数为：

$$z=\sum_{i=1}^{m}c_i b'_i+\sum_{j=m+1}^{n}(c_j-\sum_{i=1}^{m}c_i a'_{ij})x_j$$

$$=z_0+\sum_{j=m+1}^{n}(c_j-z_j)x_j$$

$$=z_0-\sum_{j=m+1}^{n}(z_j-c_j)x_j$$

  - 几种判别情况：

检验数 \ 标准型	$\max z=CX$ $AX=b, X\geq 0$	$\min z=CX$ $AX=b, X\geq 0$
c_j-z_j	≤ 0	≥ 0
z_j-c_j	≥ 0	≤ 0

表2.7

2.7 小结(cont.)

– 根据实际问题给出数学模型，列出初始单纯形表，进行标准化：

表2.7

线性规划模型			化为标准形式
变量		$x_j \geqslant L$	令 $x_j' = x_j - L$
		$x_j \leqslant 0$	令 $x_j' = -x_j$, 则 $x_j' \geqslant 0$
		x_j 无限制	令 $x_j' = x_j' - x_j''$ $(x_j' \geqslant 0, x_j'' \geqslant 0)$
约束条件	右边	$b_i \geqslant 0$	不变
		$b_i < 0$	约束条件两端乘 “-1”
	形式	$\sum a_{ij}x_j \leqslant b_i$	$\sum a_{ij}x_j + x_{si} = b_i$
		$\sum a_{ij}x_j = b_i$	$\sum a_{ij}x_j + x_{ai} = b_i$
		$\sum a_{ij}x_j \geqslant b_i$	$\sum a_{ij}x_j - x_{si} + x_{ai} = b_i$
目标函数	极大	$\max z = \sum c_j x_j$	不变
	极小	$\min z = \sum c_j x_j$	令 $z' = -z$ 化为求 $\max z'$
	x_s 和 x_a 的系数	加松弛变量 x_s 时	$\max z = \sum c_j x_j + 0x_{si}$
		加人工变量 x_a 时	$\max z = \sum c_j x_j - Mx_{ai}$

2.7 小结(cont.)

– 以对目标函数求**max**的线性规划问题为例给出用单纯形法计算步骤的框图。

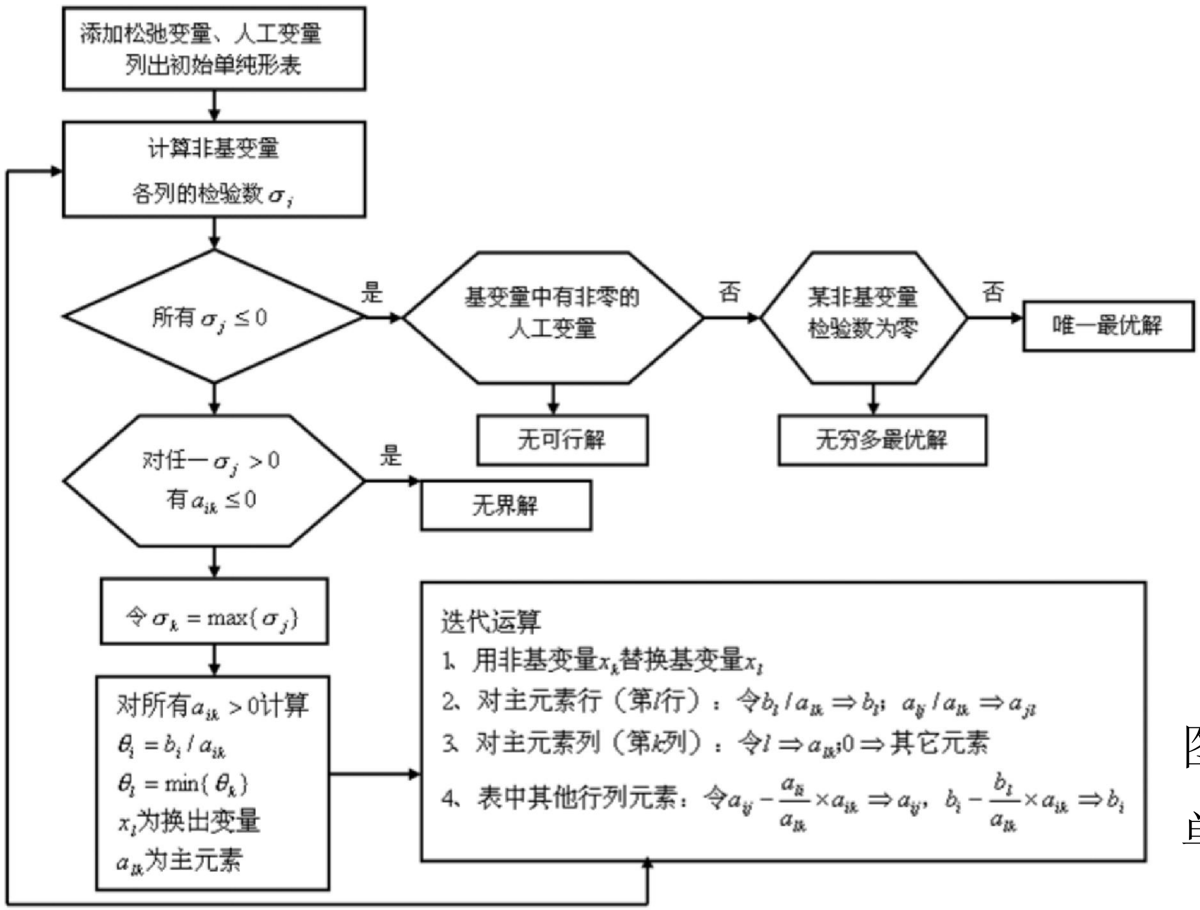


图2.11

单纯形法过程图

2.8 算法延伸

- 单纯形算法
  - 单纯形算法的原理是利用多面体的顶点构造一个可能的解，然后沿着多面体的边走到目标函数值更高的另一个顶点，直至到达最优解为止。虽然这个算法在实际上很有效率，在小心处理可能出现的“循环”的情况下，可以保证找到最优解。
    - 但它在理论上的最坏情况可以很坏：可以构筑一个线性规划问题，单纯形算法需要问题大小的指数倍的运行时间才能将之解出。
    - 事实上，有一段时期内人们曾不能确定线性规划问题是**NP**完全问题还是可以在多项式时间里解出的问题。
- 椭球法
  - 第一个在最坏情况具有多项式时间复杂度的线性规划算法在**1979**年由前苏联数学家 **Leonid Khachiyan**（哈奇杨）提出。
    - 理论上，“椭球法”在最恶劣的情况下所需要的计算量要比“单形法”增长的缓慢，有希望用之解决超大型线性规划问题。

  - 在实际应用上，哈奇杨的算法则令人失望。一般来说，单纯形算法比它更有效率。
  - 哈奇杨算法的重要性在于鼓励了对内点算法的研究。内点算法是针对单形法的“边界趋近”观念而改采“内部逼近”的路线，相对于只沿着可行域的边沿进行移动的单纯形算法，内点算法能够在可行域内移动。

- 投影尺度法
  - 由贝尔实验室印度裔数学家卡马卡（Narendra Karmarkar）在1984年提出。
    - 这是第一个在理论上和实际上都表现良好的算法：它的最坏情况仅为多项式时间，且在实际问题中它比单纯形算法有显著的效率提升。
    - 自此之后，很多内点算法被提出来并进行分析。

单形法沿着边界由一个顶点移动到“相邻”的顶点，内点算法则对每一步的移动考量较为周详，通过“跨过可行解集合的内部”去逼近最佳解。

当今的观点是：对于线性规划的日常应用问题而言，如果算法的实现良好，基于单纯形法和内点法的算法之间的效率没有太大差别，只有在超大型线性规划中，顶点几成天文数字，内点法有机会领先单形法。

2.9 应用举例

- 一般讲，一个经济、管理问题凡满足以下条件时，才能建立线性规划的模型。
  - 要求解问题的目标函数能用数值指标来反映，且为线性函数；
  - 存在着多种方案；
  - 要求达到的目标是在一定约束条件下实现的，这些约束条件可用线性等式或不等式来描述。

例**2.11** 合理利用线材问题。现要做**100**套钢架，每套用长为**2.9m**， **2.1m**和**1.5m**的元钢各一根。已知原料长**7.4m**，问应如何下料，使用的原材料最省。

解：最简单的方法是在每根元钢上各取**2.9m**、**2.1m**、**1.5m**组成一套，这样每根有**0.9m**的残料。**100**套就有**90m**的残料。这种方法不一定是最节省原料的做法，现有有若干种套裁方案，都可以考虑采用，如表**2.8**：

2.9 应用举例(cont.)

表2.8

料型＼方案	1	2	3	4	5
2.9米	1	2	0	1	0
2.1米	0	0	2	2	1
1.5米	3	1	2	0	3
合计	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
残料	0	0.1	0.2	0.3	0.8

设按照1、2、3、4、5方案下料的原材料根数分别为：

x_1、x_2、x_3、x_4、$x_5 \geq 0$

- 混合使用各种下料方案，可列出以下数学模型：

$$\min z = 0x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 100 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 100 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 100 \\ x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 \geq 0 \end{cases}$$

用单纯形表(教材39页表1-12)

计算可得：

最优方案是用1方案下料30根，用2方案下料10根，4方案下料50根，即需90套原料可以做100套钢架。

2.9 应用举例(cont.)

- 例2.12 配料问题。某工厂要用三种原材料C、P、H混合调配出三种规格不同的产品A、B、D。已知产品的规格要求、单价、每天能供应的原材料数以及原材料单价如下表（表2.9，表2.10）。该工厂应如何安排生产，使利润收入为最大？

表2.9

产品名称	规格要求	单价（元/Kg）
A	原材料C不少于50% 原材料P不超过25%	50
B	原材料C不少于25% 原材料P不超过50%	35
D	不限	25

表2.10

原材料名称	每天最多供应量	单价（元/Kg）
C	100	65
P	100	25
H	60	35

2.9 应用举例(cont.)

- 解：用X_Y表示生产产品X使用原料Y的数量。其中X＝A,B,D，所使用的原料总量；Y＝C,P,H。根据表2.9和2.10分别得出：

$$\begin{cases} A_C \ge \frac{1}{2}A, A_P \le \frac{1}{4}A, B_C \ge \frac{1}{4}B, B_P \le \frac{1}{2}B \\ A_C + A_P + A_H = A \\ B_C + B_P + B_H = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}A_C + \frac{1}{2}A_P + \frac{1}{2}A_H \le 0 \\ -\frac{1}{4}A_C + \frac{3}{4}A_P - \frac{1}{4}A_H \le 0 \\ -\frac{3}{4}B_C + \frac{1}{4}B_P + \frac{1}{4}B_H \le 0 \\ -\frac{1}{2}B_C + \frac{1}{2}B_P - \frac{1}{2}B_H \le 0 \end{cases} \qquad (2.13)$$

$$\begin{aligned} A_C + B_C + D_C &\le 100 \\ A_P + B_P + D_P &\le 100 \qquad (2.14) \\ A_H + B_H + D_H &\le 60 \end{aligned}$$

为了叙述方便：设$x_1 = A_C, x_2 = A_P, x_3 = A_H, x_4 = B_C, x_5 = B_P, x_6 = B_H, x_7 = D_C, x_8 = D_P, x_9 = D_H$

目标函数：利润最大

$$\begin{aligned} \max &= 50(x_1 + x_2 + x_3) + 35(x_4 + x_5 + x_6) + 25(x_7 + x_8 + x_9) \\ &- 65(x_1 + x_4 + x_7) - 25(x_2 + x_5 + x_8) - 35(x_3 + x_6 + x_9) \\ &= -15x_1 + 25x_2 + 15x_3 - 30x_4 + 10x_5 - 40x_7 - 10x_9) \end{aligned}$$

产品单价

原材料单价

2.9 应用举例(cont.)

对上述约束条件和目标函数进行标准化，加入松弛变量，得到：

$$\max = -15x_1 + 25x_2 + 15x_3 - 30x_4 + 10x_5 - 40x_7 - 10x_9$$

$$+0\cdot(x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16})$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_{10} = 0 \\ -\frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 + x_{11} = 0 \\ -\frac{3}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{4}x_6 + x_{12} = 0 \\ -\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 + x_{13} = 0 \\ x_1 + x_4 + x_7 + x_{14} = 100 \\ x_2 + x_5 + x_8 + x_{15} = 100 \\ x_3 + x_6 + x_9 + x_{16} = 60 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,16 \end{cases}$$

对左边的数学模型使用单纯形表计算（过程略），计算结果为：

每天只生产产品**A：200kg**。分别需要用原材料**C：100kg，P：50kg；H：50kg**。总的利润为：**500**元**/**天

2.9 应用举例(cont.)

– 例2.13 成批生产企业年度生产计划的按月分配。考虑：
  - 从数量和品种上保证年度计划的完成
  - 成批的产品尽可能在各个月内均衡生产或集中在几个月生产；
  - 由于生产技术准备等方面的原因，某些产品要在某个月后才能投产；
  - 根据合同要求，某些产品要求在年初交货；
  - 批量小的产品尽量集中在一个月或几个月内生产出来，以便减少各个月的品种数量等。
  - 目标：在满足上面条件的基础上使设备负荷均衡且最大负荷。

解：假定工厂有m类设备，用i表示（$i=1,\cdots,m$），

生产n种产品，分别用j表示（$j=1,\cdots,n$）。

这些产品全年计划量用d_i表示。

用a_{ij}表示加工单位j种产品需要的第i类设备的台时数，

b_{ik}表示k月份内第i类设备的生产能力（台时），（$k=1,\cdots,12$）。

x_{jk}表示k月份计划生产j种产品的数量。

2.9 应用举例(cont.)

- 依次对十二个月列出线性规划模型及求解，以一月份为例：

  如第**5**、**8**两种产品下半年投产，第**4**号产品要求二月底前完成全年计划。以一月份内各种设备的生产能力的总和为分母，生产各种产品所需要的各类设备的总台时数为分子，可计算出一月份的平均设备利用系数**z**，以**z**为目标函数，可得线性规划模型：

$$\max z = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{j1}}{\sum_{i=1}^{m} b_{i1}}$$

$$\begin{cases} x_{51} = x_{81} = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{j1} \le b_{i1} (i = 1, \cdots, m) \\ x_{j1} \le d_j (j = 1, \cdots, n) \\ x_{j1} \ge 0 \end{cases}$$

2.9 应用举例(cont.)

- 考虑二月份模型时:

（1）从全年计划中减去一月份已经生产的数量;

（2）对数量小的产品，如一月份已安排较大产量的，二月份可以将剩余部分都安排生产;

（3）保证第四号产品在二月底前完工。可得模型:

$$\max z = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{j2}}{\sum_{i=1}^{m} b_{i2}}$$

$$\begin{cases} x_{52} = x_{82} = 0 \\ x_{42} = d_4 - x_{41} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{j2} \le b_{i2} (i = 1, \cdots, m) \\ x_{j2} \le d_j - x_{j1} (j = 1, \cdots, n) \\ x_{j2} \ge 0 \end{cases}$$

2.9 应用举例(cont.)

- 例**2.14** 连续投资问题。某部门在今后五年内考虑给下列项目投资，已知：项目**A**，从第一年到第四年每年年初需要投资，并于次年末回收本利**115%**；项目**B**，第三年初需要投资，到第五年末回收本利**125%**，但规定最大投资额不超过**4**万元；项目**C**，第二年初需要投资，到第五年末回收本利**140%**，但规定最大投资额不超过**3**万元；项目**D**，五年内每年初可购买公债，于当年末归还，并加利息**6%**。该部门现有资金**10**万元，问应如何确定给这些项目投资才能使得到第五年末拥有的资金本利额最大？
- 解：确定变量：以x_{ij}分别表示第**i**年年初给项目**j**的投资，**j=A,B,C,D**。

$$x_{1A}+x_{1D}=100000$$

$$x_{2A}+x_{2C}+x_{2D}=(1+6\%)x_{1D}$$

$$x_{3A}+x_{3B}+x_{3D}=(1+15\%)x_{1A}+(1+6\%)x_{2D}$$

$$x_{4A}+x_{4D}=(1+15\%)x_{2A}+(1+6\%)x_{3D}$$

$$x_{5D}=(1+15\%)x_{4A}+(1+6\%)x_{4D}$$

$$x_{3B}\le 40000$$

$$x_{2C}\le 30000$$

2.9 应用举例(cont.)

- 数学模型：$\max z = 1.15x_{4A} + 1.40x_{2C} + 1.25x_{3B} + 1.06x_{5D}$

$$\begin{cases} x_{1A} + x_{1D} = 100000 \\ -1.06x_{1D} + x_{2A} + x_{2C} + x_{2D} = 0 \\ -1.15x_{1A} - 1.06x_{2D} + x_{3A} + x_{3B} + x_{3D} = 0 \\ -1.15x_{2A} - 1.06x_{3D} + x_{4A} + x_{4D} = 0 \\ -1.15x_{3A} - 1.06x_{4D} + x_{5D} = 0 \\ x_{3B} \le 40000 \\ x_{2C} \le 30000 \\ x_{ij} \ge 0, i = 1,2,3,4; j = A, B, C, D \end{cases}$$

- 用单纯形法计算得到：

第一年：投资**A=34783**元，投资**B=65217**元；
第二年：投资**A=39310**元，投资**C=30000**元；
第三年：投资**B=40000**元；
第四年：投资**A=45000**元。
第五年末：该部门拥有资金**143750**元，盈利**43.75%**。

本章完

The end

课堂练习

- 列出下述问题的初始单纯形表

$$\max \quad 2x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 16 \\ 2x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$