Rains Over Atlantis题解

唐适之

算法1

最简单的方法是模拟，每天先算出每个格子的水平面：从低到高枚举水平面，再FloodFill整个地图看有哪些区域的水不能流出去；然后扫描每个格子求出其被侵蚀的高度，建出下一天的地图，重复执行。最多只有maxHeight天。时间复杂度$O(maxHeight \cdot (HW)^2)$，空间复杂度$O(HW)$，期望得分20分。

算法2

依然是模拟，算水平面可以用Dijkstra算法，即从海面出发到某点路径最高点的最小值即该点的水平面。不建议使用SPFA，因为它在网格图上表现不好。时间复杂度$O(maxHeight \cdot HW \cdot \log_2(HW))$，空间复杂度$O(HW)$，期望得分40分。

算法3

海拔高度很大而M很小时直接模拟就不能解决问题了，所以我们需要同时计算多天的侵蚀。当下列条件同时满足，就可以同时计算多天：

- 所有未被淹没的格子都以最大速度被侵蚀。
- 所有的水面都在以最大速度下降。
- 未出现被淹没的格子露出水面的过程。

像下面这样同时计算多天：

1. 计算每个格子的水平面。
2. 判断每个未被淹没的格子是否以M的速度被侵蚀，如果不是就只计算一天。**注意我们可以让格子的海拔降到负数**，即假定地图外的海拔是无穷小，这样不会改变结果，并会大大简化问题。
3. 如果每个未被淹没的格子都是以M的速度被侵蚀，那么每个“湖”的水平面也会以M的速度下降。因为一个“湖”是由至少一个在湖边上未被淹没的格子决定高度的，而这个格子的高度正以M的速度下降。所以某些被淹没的格子露出水面之前的侵蚀都可以一起计算。

4. 由此我们找出被淹没格子水深的最小值，就可以算出有多少天可以一起计算。

5. 如果没有任何一个格子在水下，就还剩$\lceil$最高海拔$/M\rceil$天就侵蚀完了。

注意每次同时计算后都会有一个被淹没的格子露出水面，而显然露出水面的格子不会再被淹没，所以最多执行HW次同时计算。（事实上这个数字会更小，因为地图边缘的格子不会被淹没）

现在我们就要算出最多要经过多少次普通的一天一天地计算后，才能进行同时计算。定义一个辅助的图来进行说明：每个未被淹没的格子对应图上的一个节点，每个“湖”的所有格子对应图上的一个高度为“湖”的水平面的节点。节点S和节点T间有连边当且仅当S对应的任意一个格子与T对应的任何一个格子有公共边。称一个节点的父节点为与其相邻的高度最低的节点。这样我们就有了一棵根在外海中的树。我们定义一条向海拔高的方向走的的树上路径为确定路径，当且仅当这条路径上每条边的高度差都为M。我们能证明每天过后都能发生如下的事件之一：

- 有被淹没的区域露出水面了（这样执行同时计算的次数就会减少）
- 确定路径上节点增多了
- 所有的节点都在确定路径上了

原因如下：考虑任意一条确定路径。假设节点的分布维持不变（即陆地还是陆地，湖还是湖），这条路径在一天后还是确定路径，因为其上的每个节点都在以M的速度降低。考虑任意一个不在确定路径上但它父节点在确定路径上的节点（注意前面为了方便把海平面定义为无穷低，海平面在确定路径上，如果不存在这样的节点，那么所有节点都在确定路径上了），一天后此节点的高度降到了它父节点的高度，而它父节点的高度下降了M，所以现在它和它父节点的高差也变成了M，它也加入了确定路径。

如果所有的节点都在确定路径上，我们就能进行同时计算了。每次同时计算前最多有HW次路径上节点的增多，这样每一个被淹没的格子露出水面前最多有HW次普通计算和一次同时计算，总计$(HW)^2$次普通计算和HW次同时计算，总时间复杂度为$O((HW)^3\log_2(HW))$，空间复杂度$O(HW)$，期望得分100分。

注：可以像下图这样，在M=*2*时，通过一条曲折、不自交、长度为$O(WH)$的路径达到算法的时间上界：

X	X	X	X	X	X	X
P	P	P	P	P	P	X
X	X	X	X	X	P	X
X	P	P	P	P	P	X
X	P	X	X	X	X	X
X	P	P	P	P	P	X
X	X	X	X	X	X	X

其中X表示非常大的数，P表示这条路径。这样在整个算法的过程中，上面提到的树一直仅是这条路径。

这条路径取如下海拔：*A, A-2L-1, A+1, A-4L-1, A+1, A-6L-1, A+1, A-8L-1,* 等，其中L是这条路径的长度。不难发现，确定路径要一个湖一个湖地向下形成，而每次同时计算后湖的数量只会减少一个，确定路径却要重新形成。