Gráficas Flip

Geometría Computacional

Ailyn Rebollar Pérez

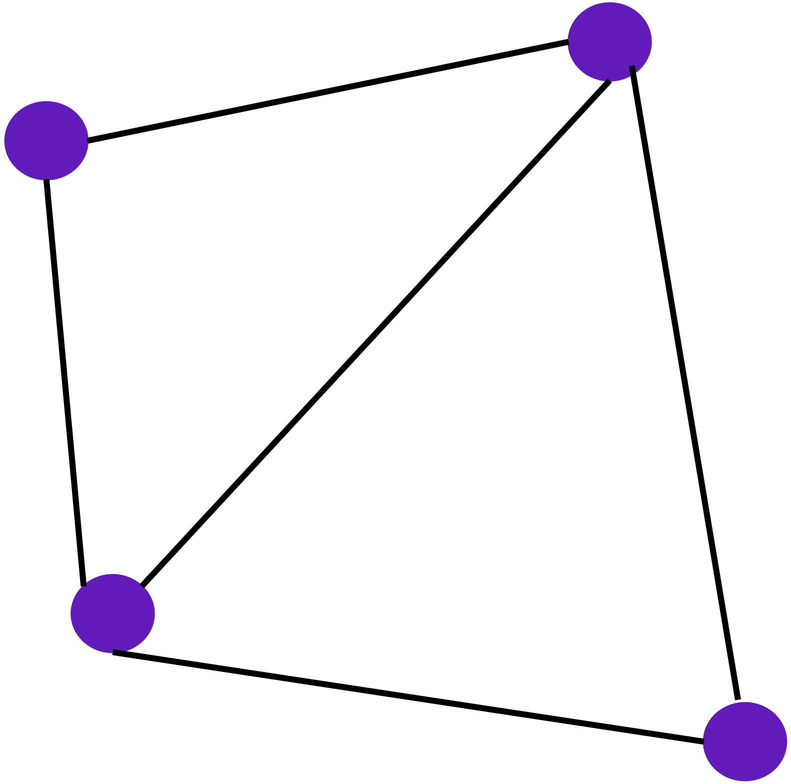
Preguntas sobre la gráfica flip

- ¿Qué serán los nodos de la gráfica flip?
- ¿Cómo le haremos para conectar dos nodos?
- ¿Será siempre conexa?

Definiciones

- Triangulación

- Diagonal



Recordemos que...

- No siempre las triangulaciones son únicas.
- Una triangulación a lo más puede tener n-2 triángulos.
- Una triangulación a lo más puede tener n-3 diagonales.

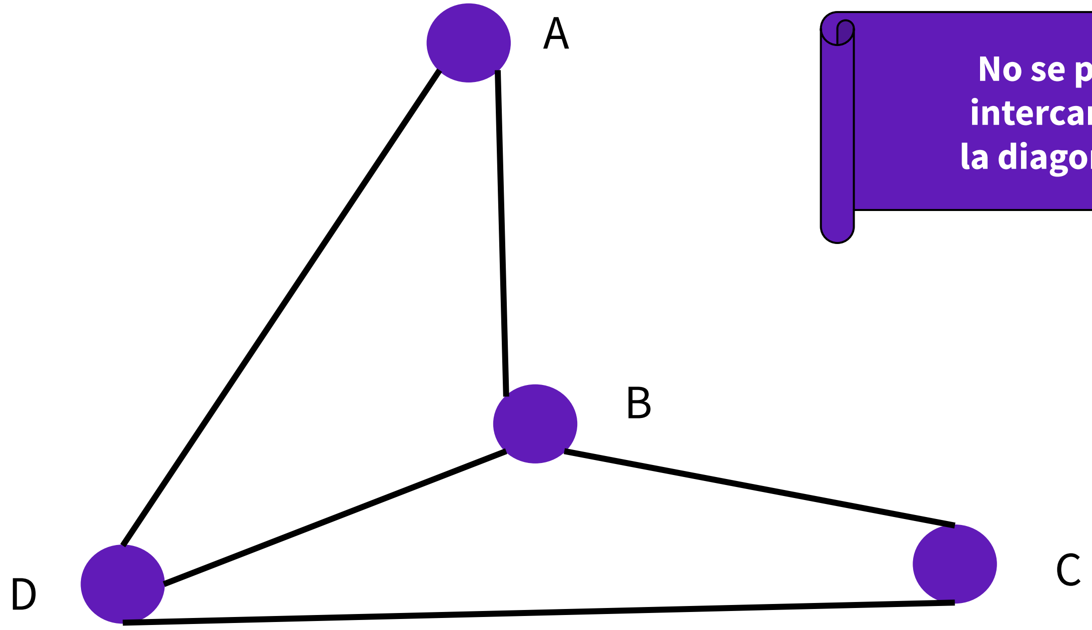
Definición de la gráfica flip

- Para un conjunto de puntos S, la **gráfica flip** de S, es una gráfica donde sus nodos son conjuntos de triangulaciones de S.

- Dos nodos T_1 y T_2 de la gráfica flip están conectados por un **arco** si una diagonal de T_1 puede ser intercambiada(flip) para obtener a T_2.

Observación

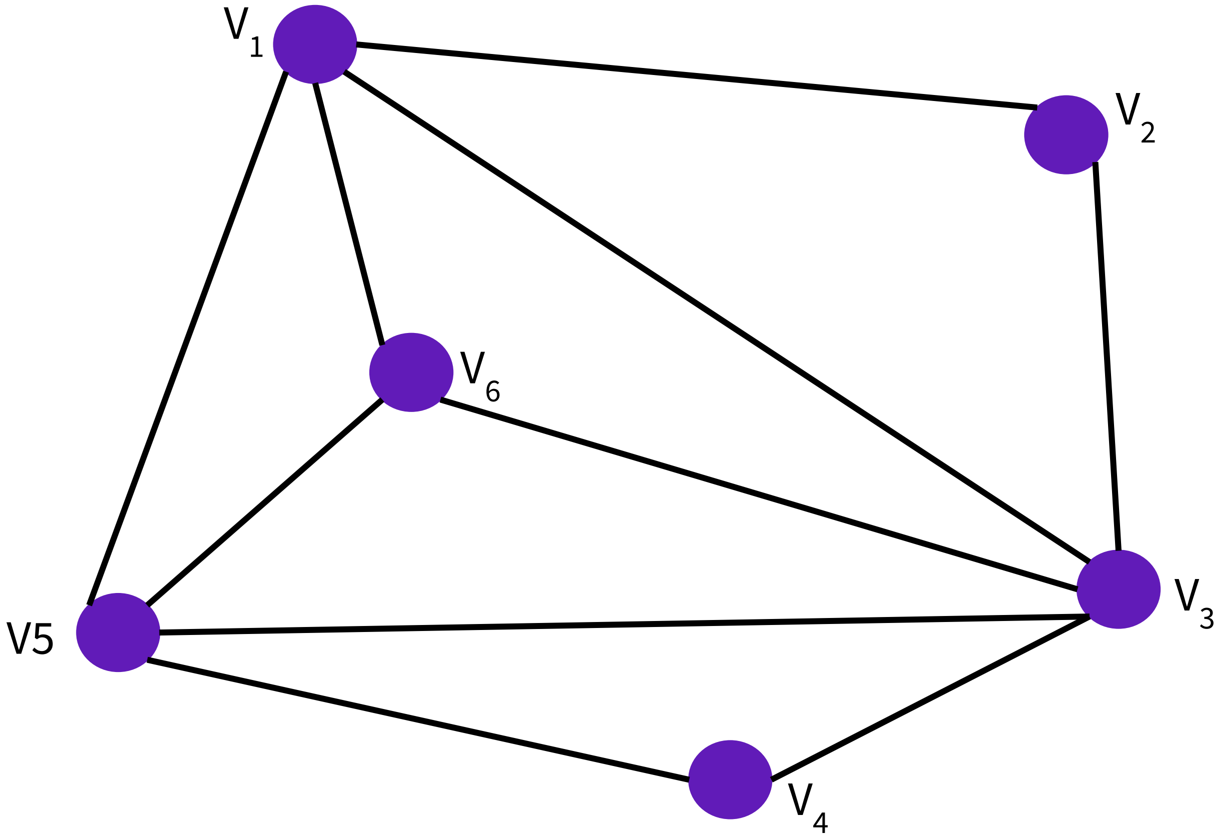
- Los flips (intercambios/giros de diagonales) no son posibles para cuadriláteros no convexos.



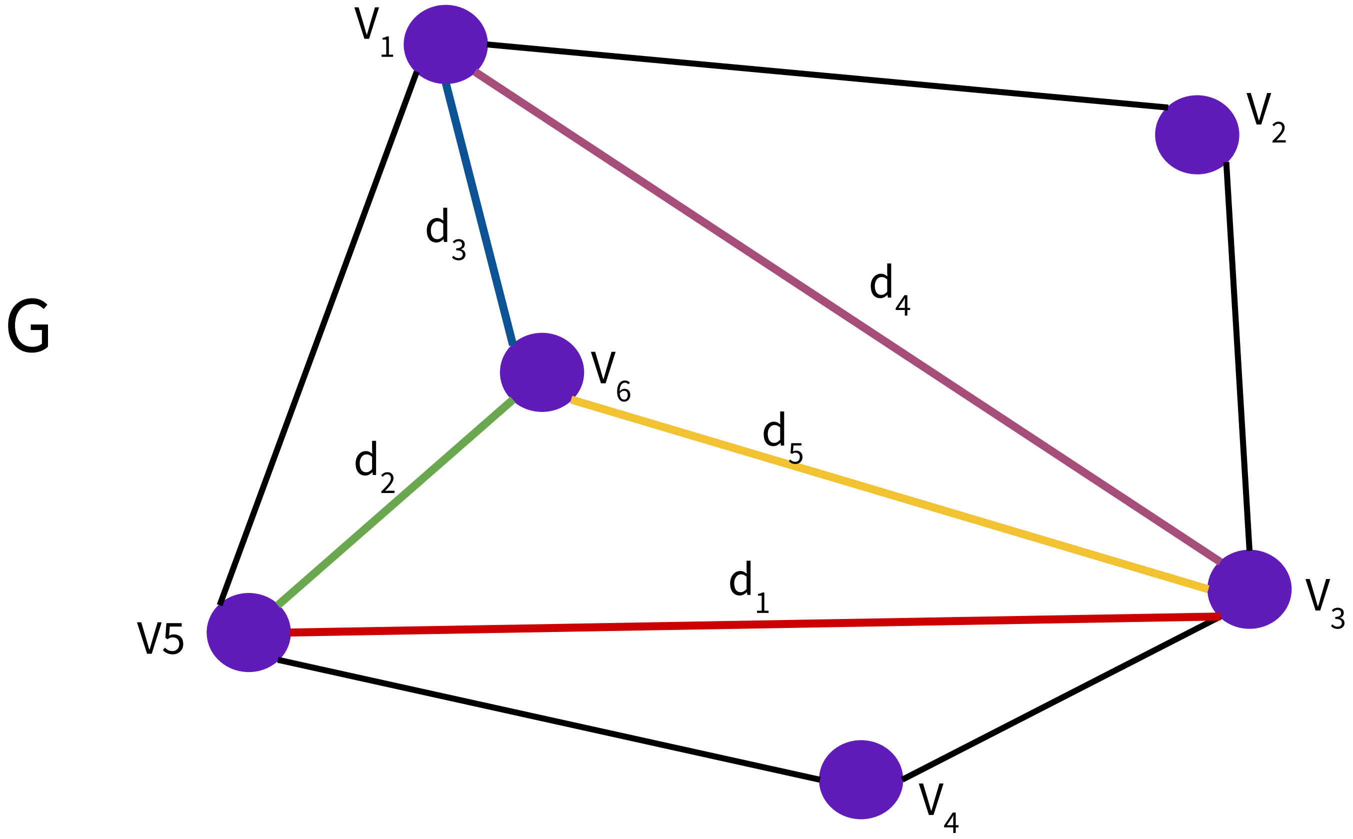
No se puede intercambiar la diagonal BD

Construcción de una gráfica flip

G

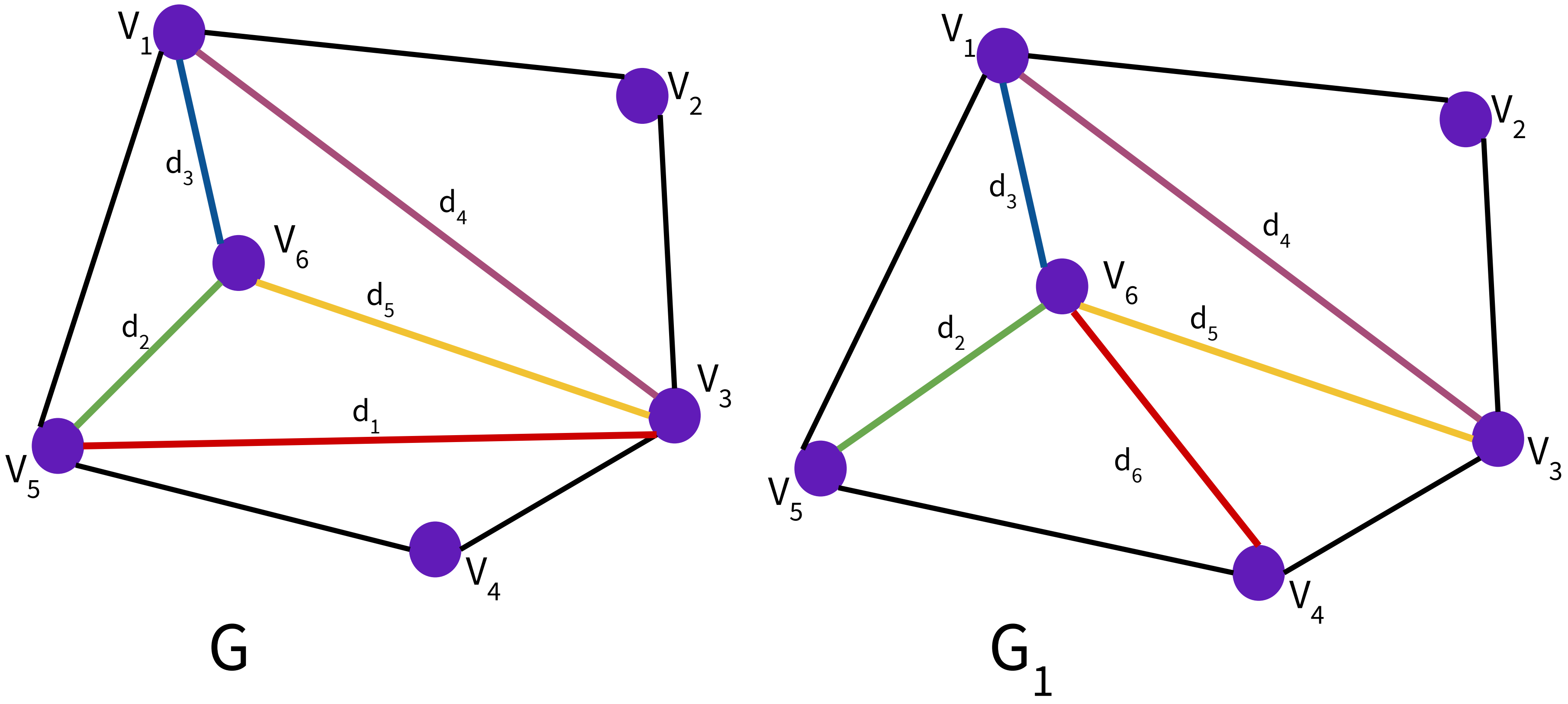


Construcción de una gráfica flip



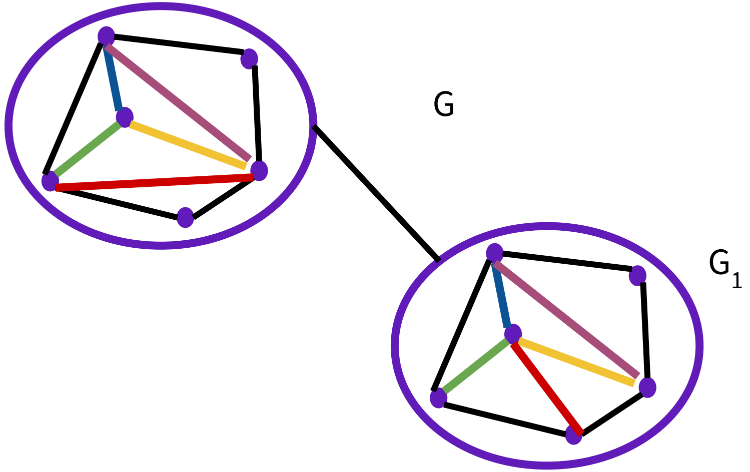
Construcción de una gráfica flip

Difieren en una diagonal



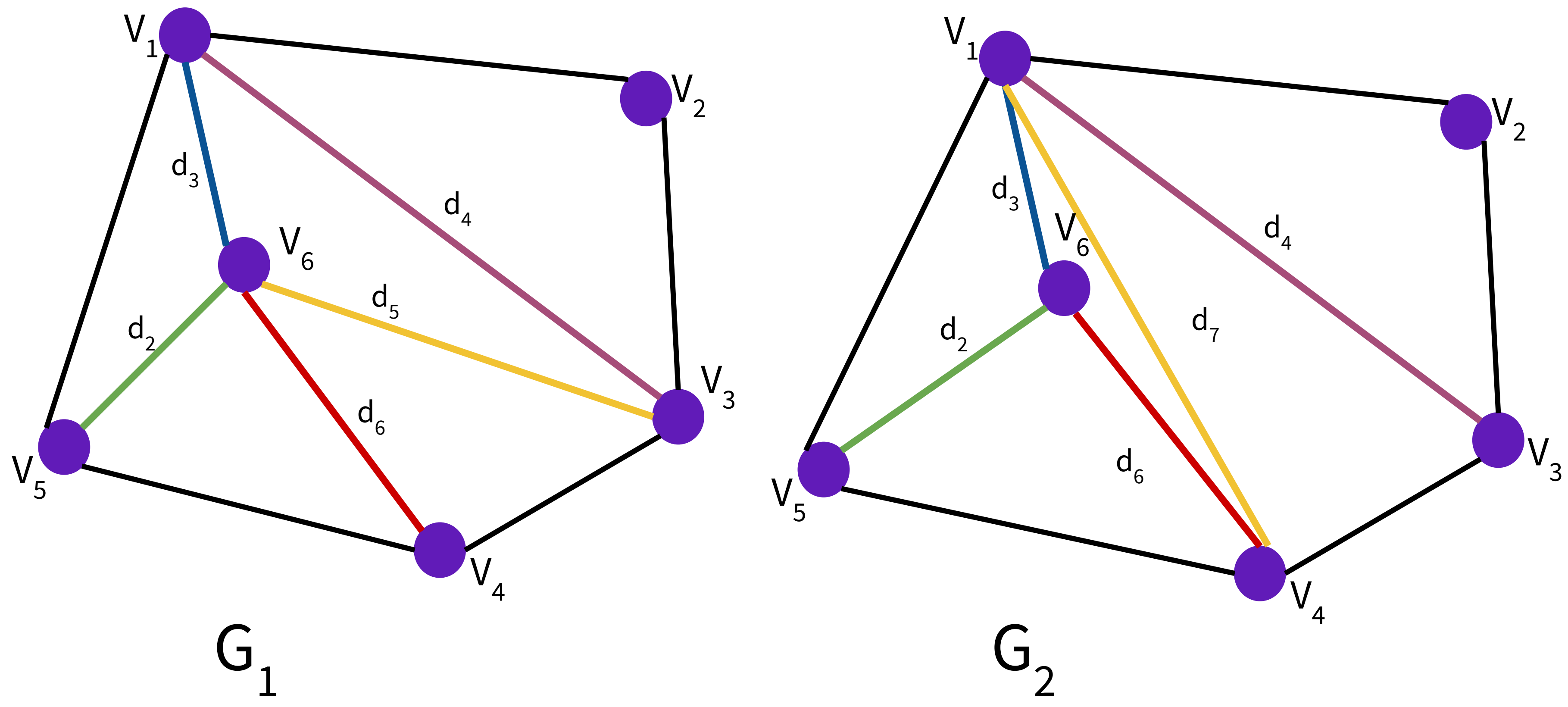
G y G_1 difieren en una diagonal, por lo que serán adyacentes en la gráfica flip

Construcción de una gráfica flip



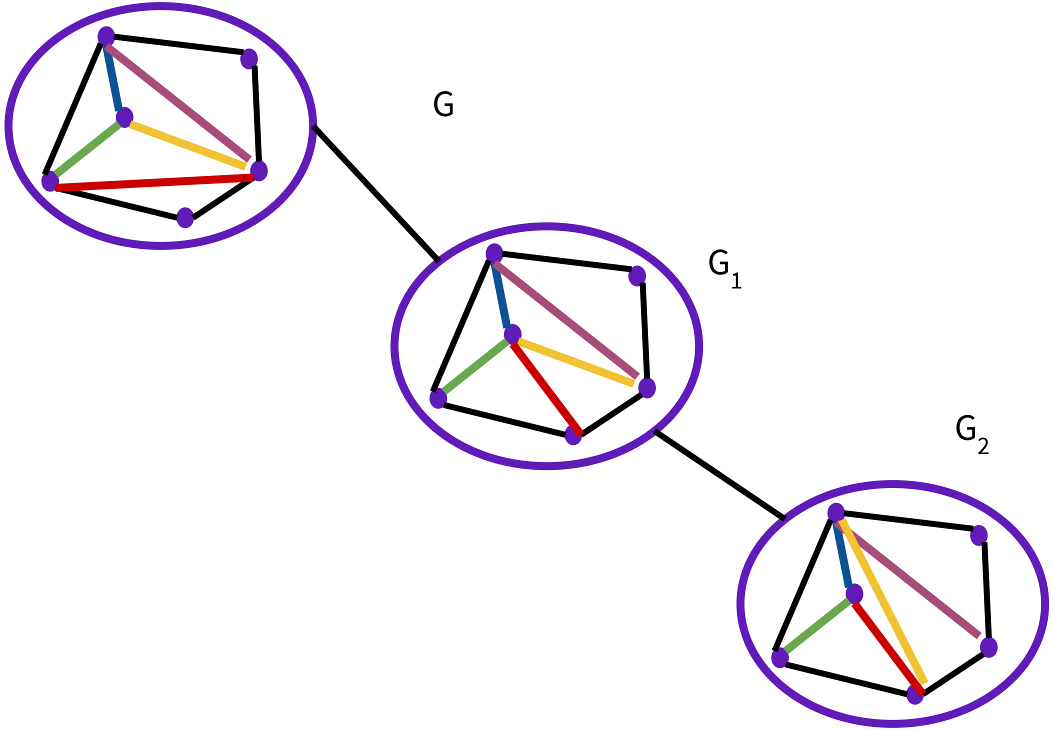
Construcción de una gráfica flip

Difieren en una diagonal



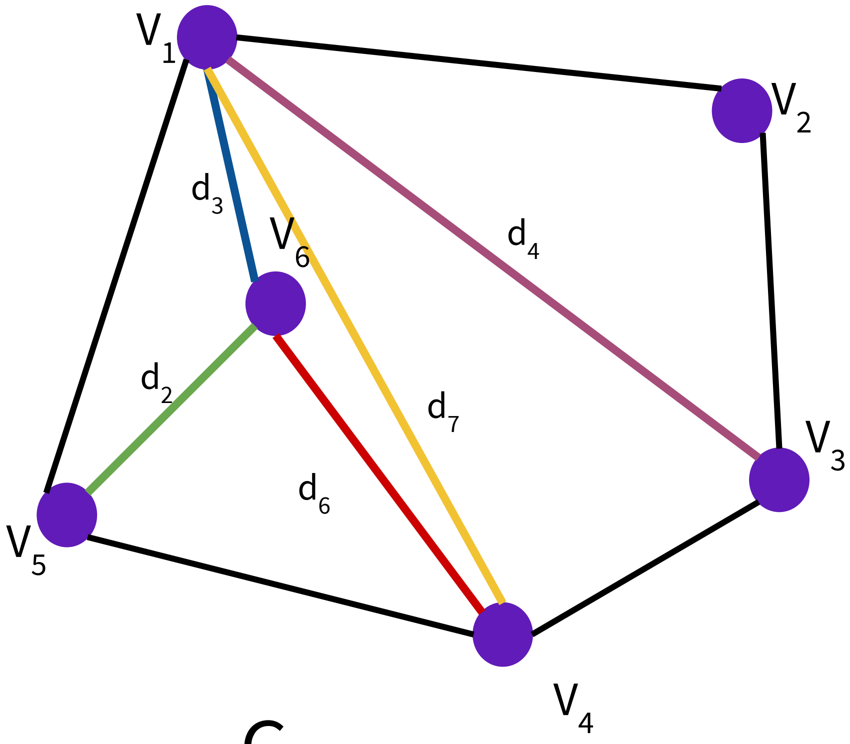
G_1 y G_2 difieren en una diagonal, por lo que serán adyacentes en la gráfica flip

Construcción de una gráfica flip

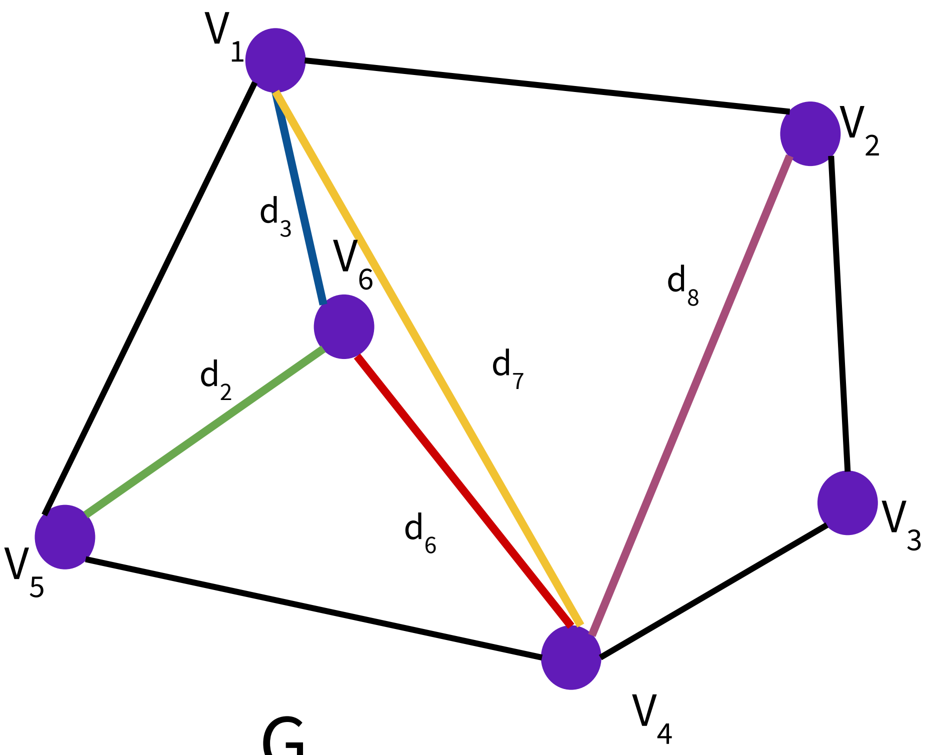


Construcción de una gráfica flip

Difieren en una diagonal



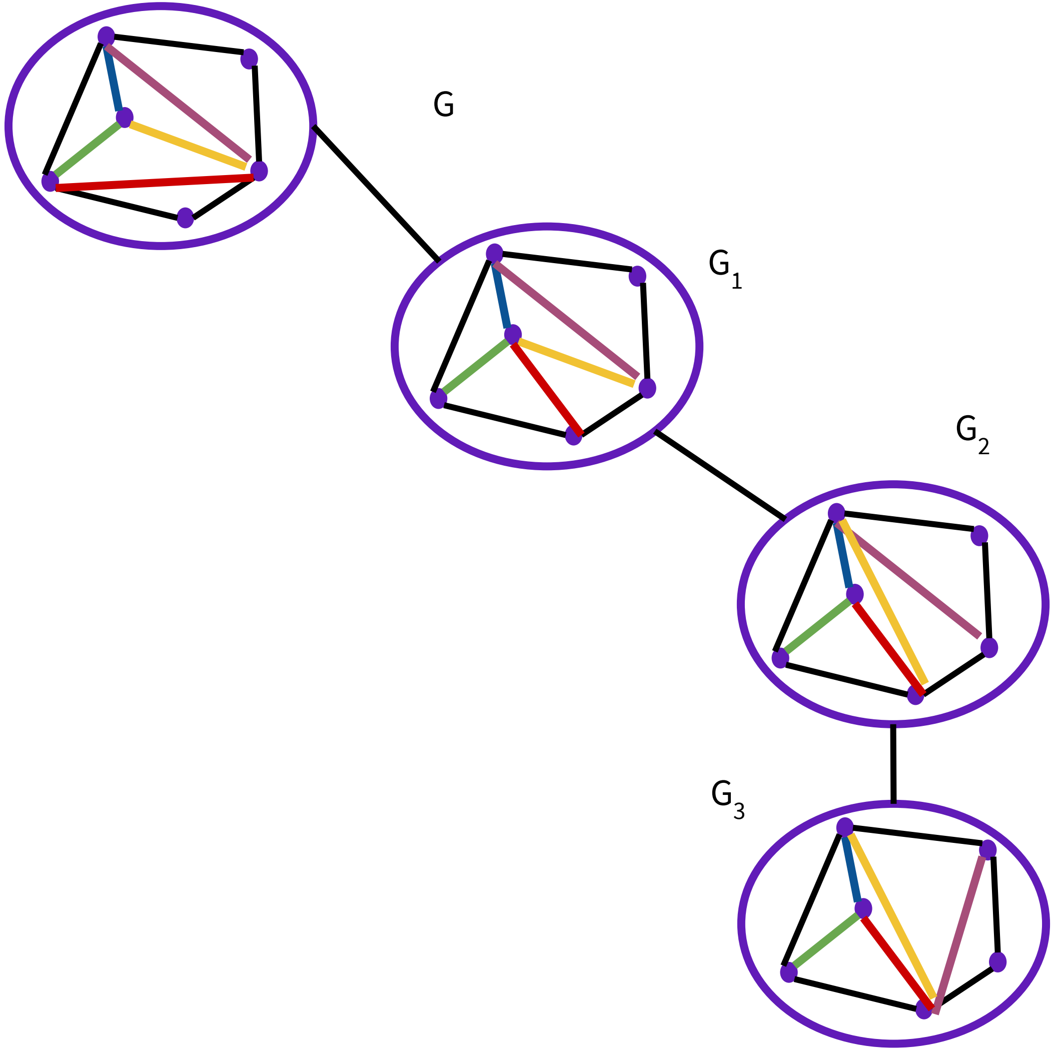
G_2



G_3

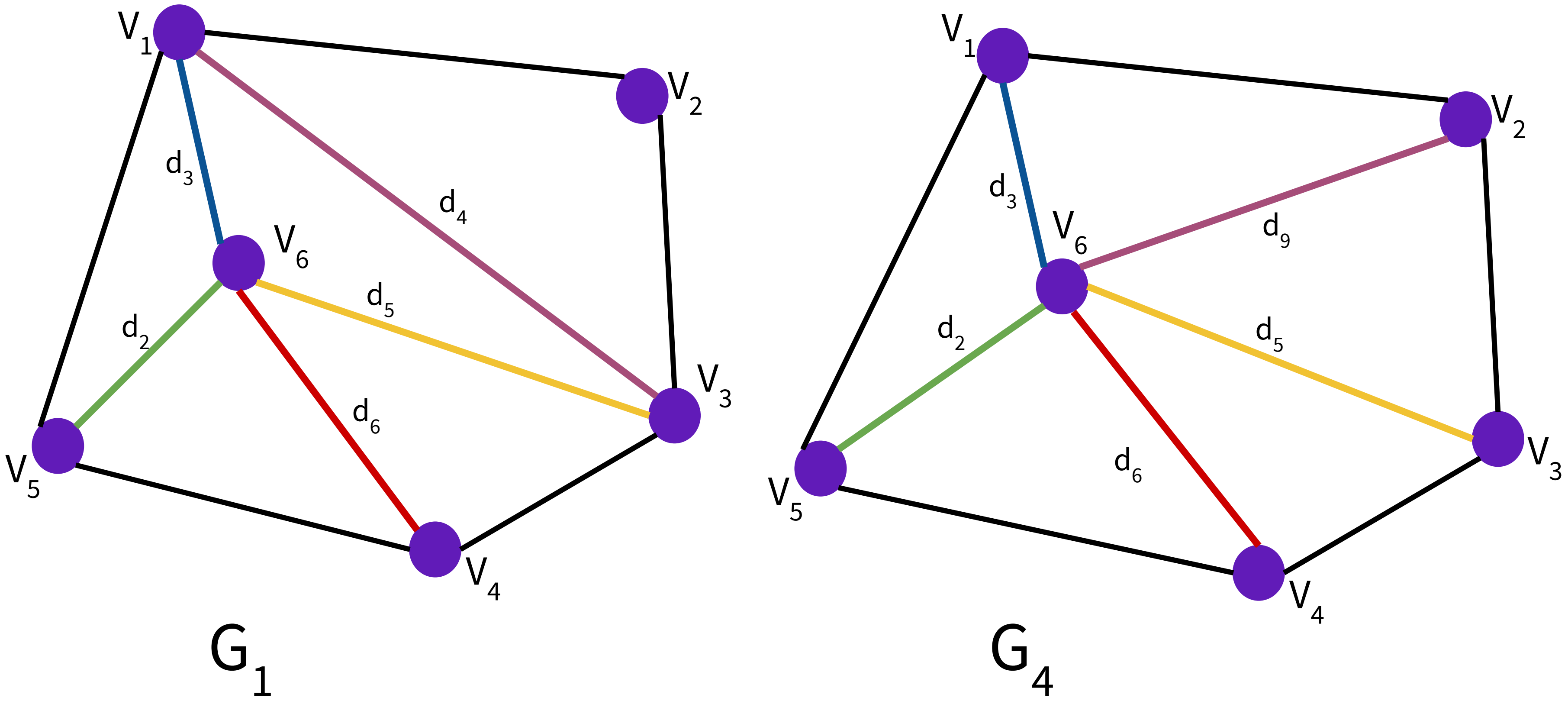
G_2 y G_3 difieren en una diagonal, por lo que serán adyacentes en la gráfica flip

Construcción de una gráfica flip



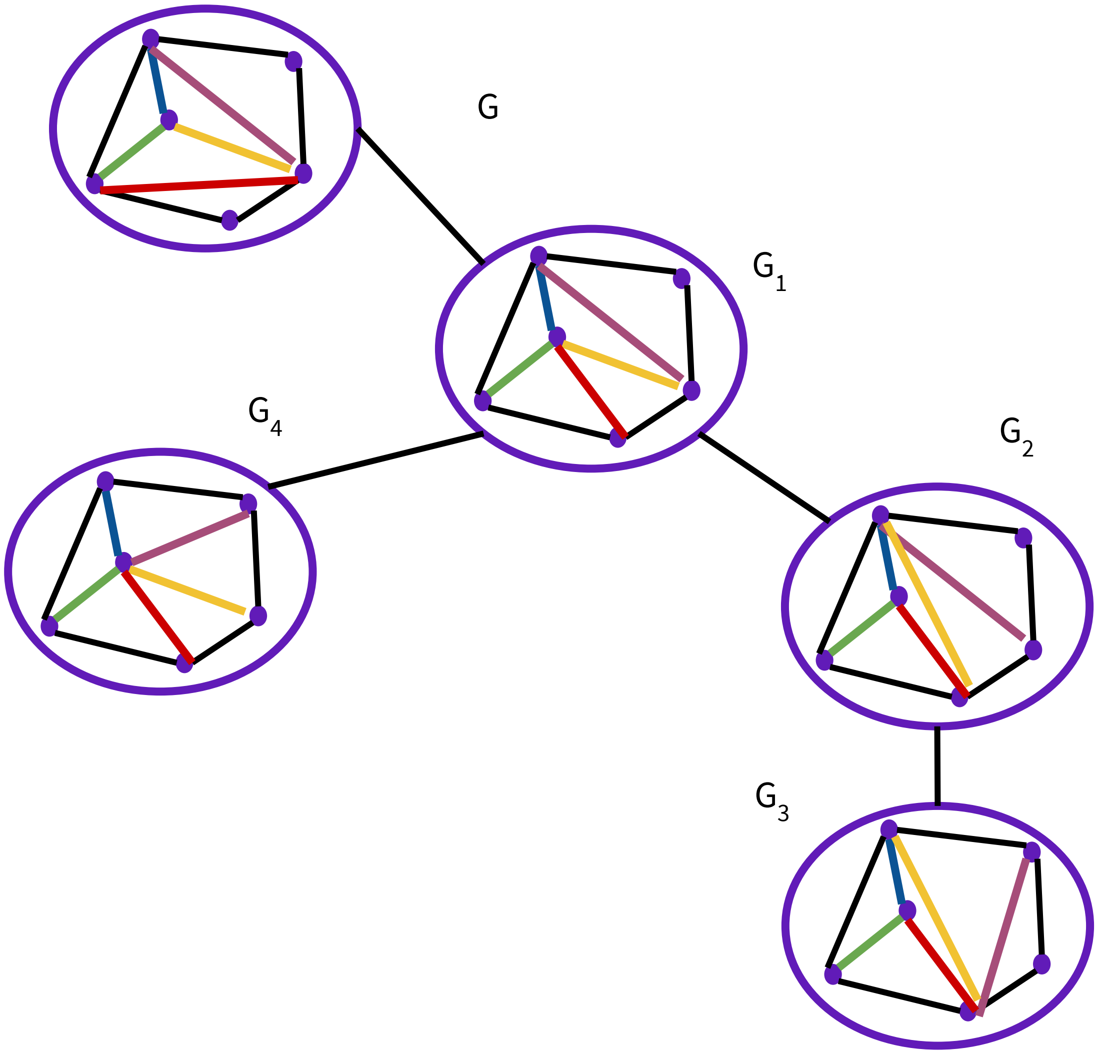
Construcción de una gráfica flip

Difieren en una diagonal



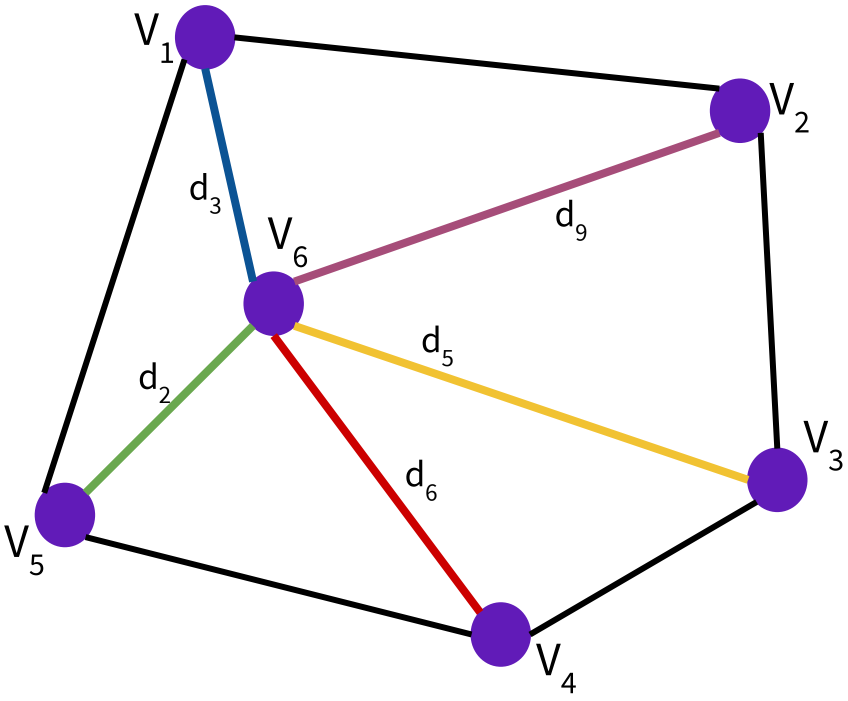
G_1 y G_4 difieren en una diagonal, por lo que serán adyacentes en la gráfica flip

Construcción de una gráfica flip

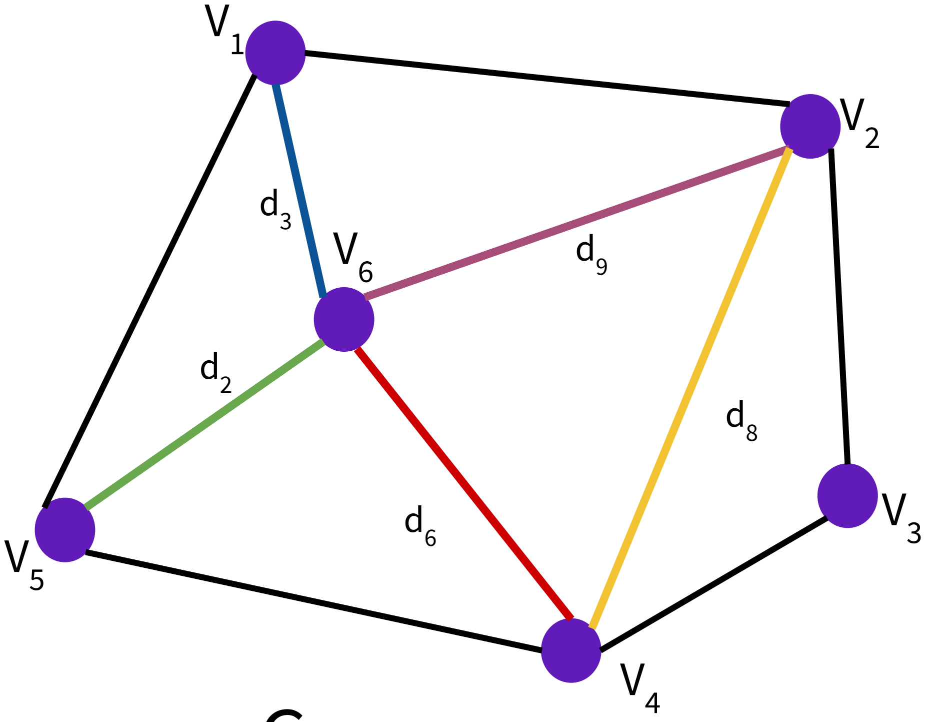


Construcción de una gráfica flip

Difieren en una diagonal



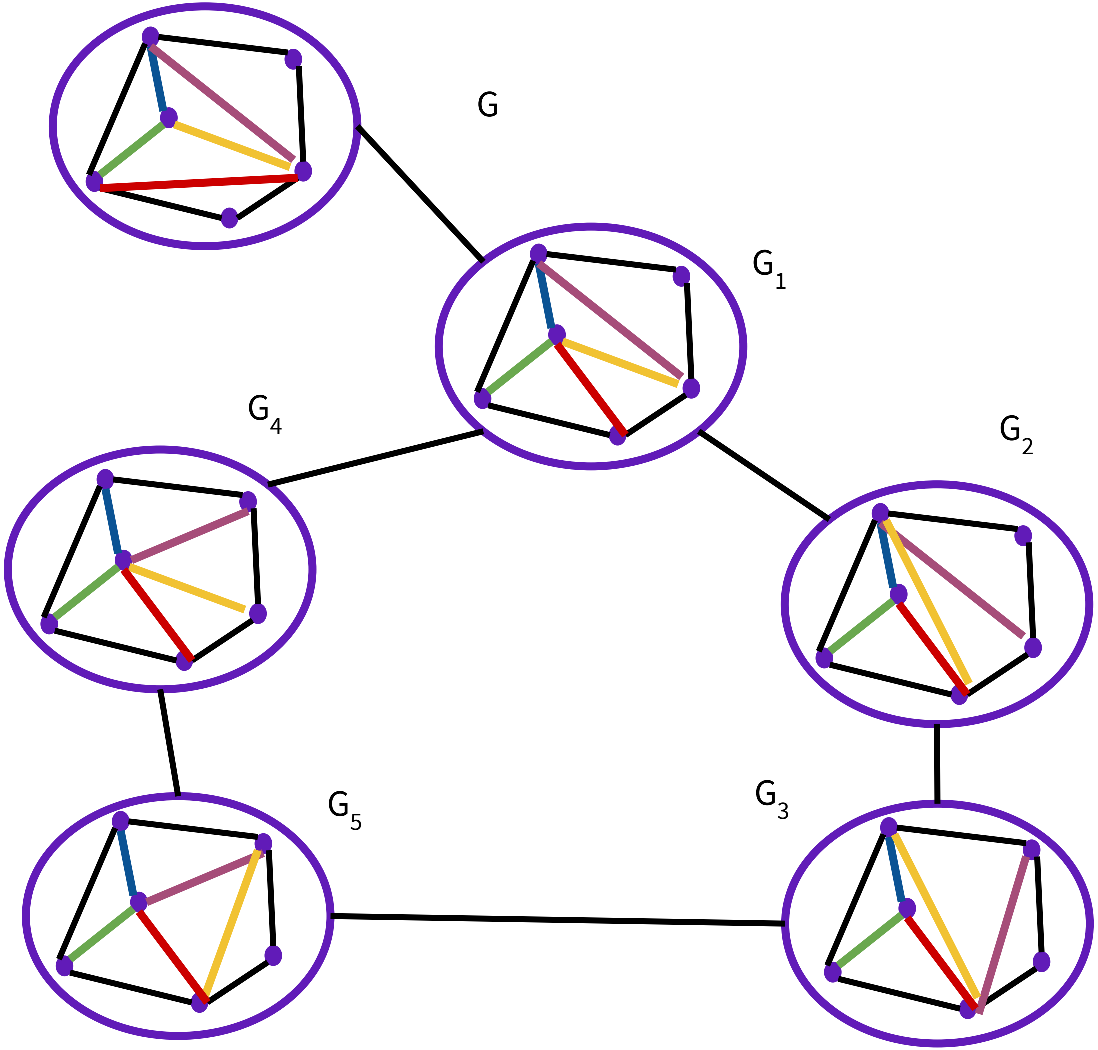
G_4



G_5

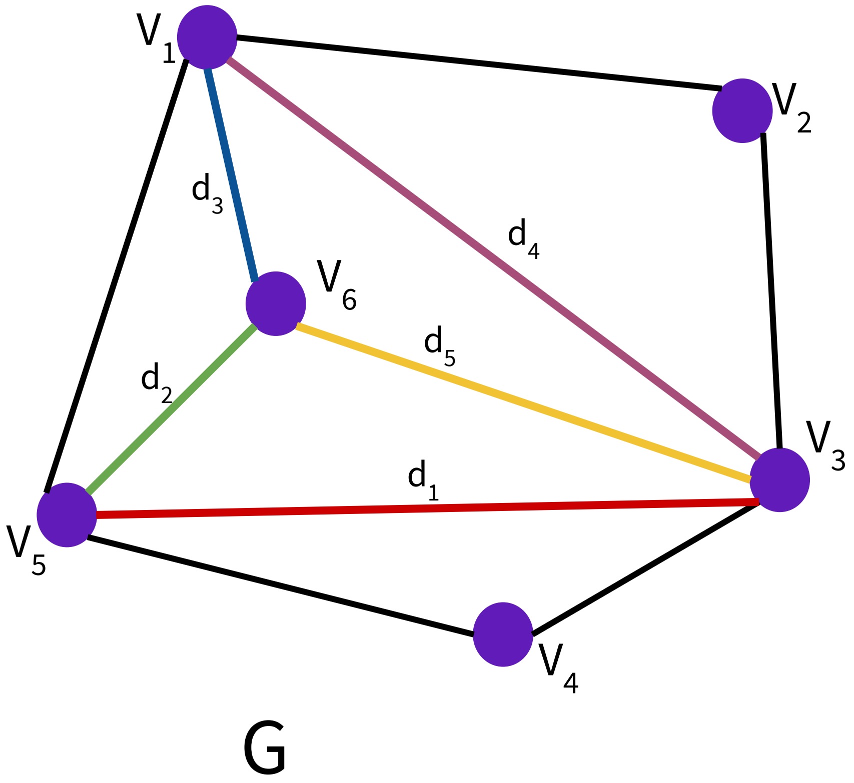
G_4 y G_5 difieren en una diagonal, por lo que serán adyacentes en la gráfica flip

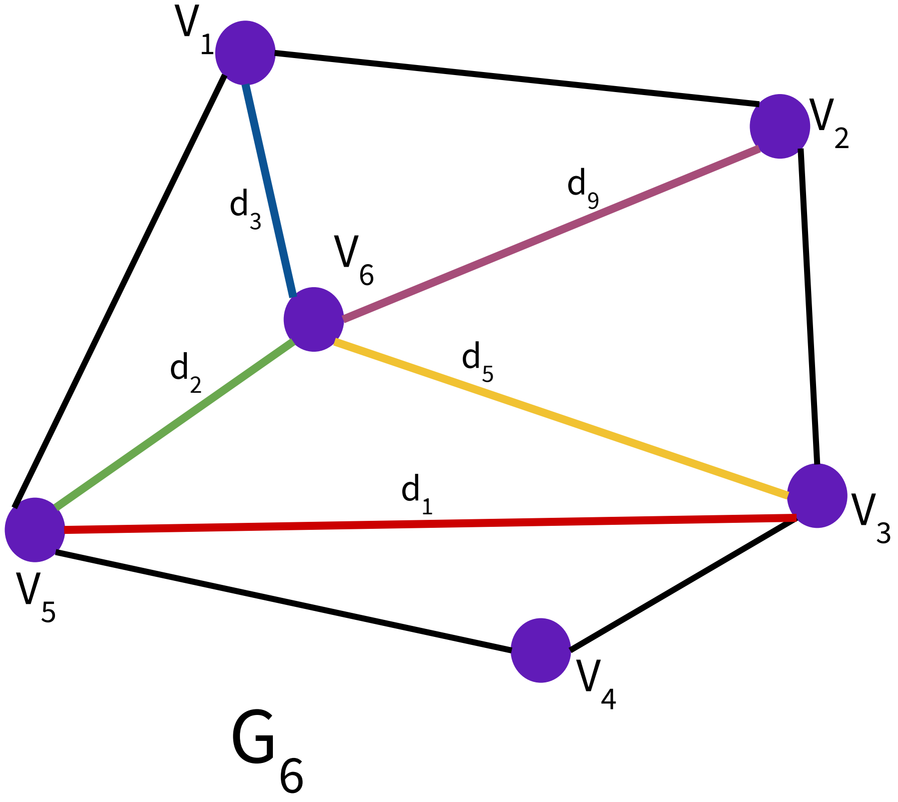
Construcción de una gráfica flip



Construcción de una gráfica flip

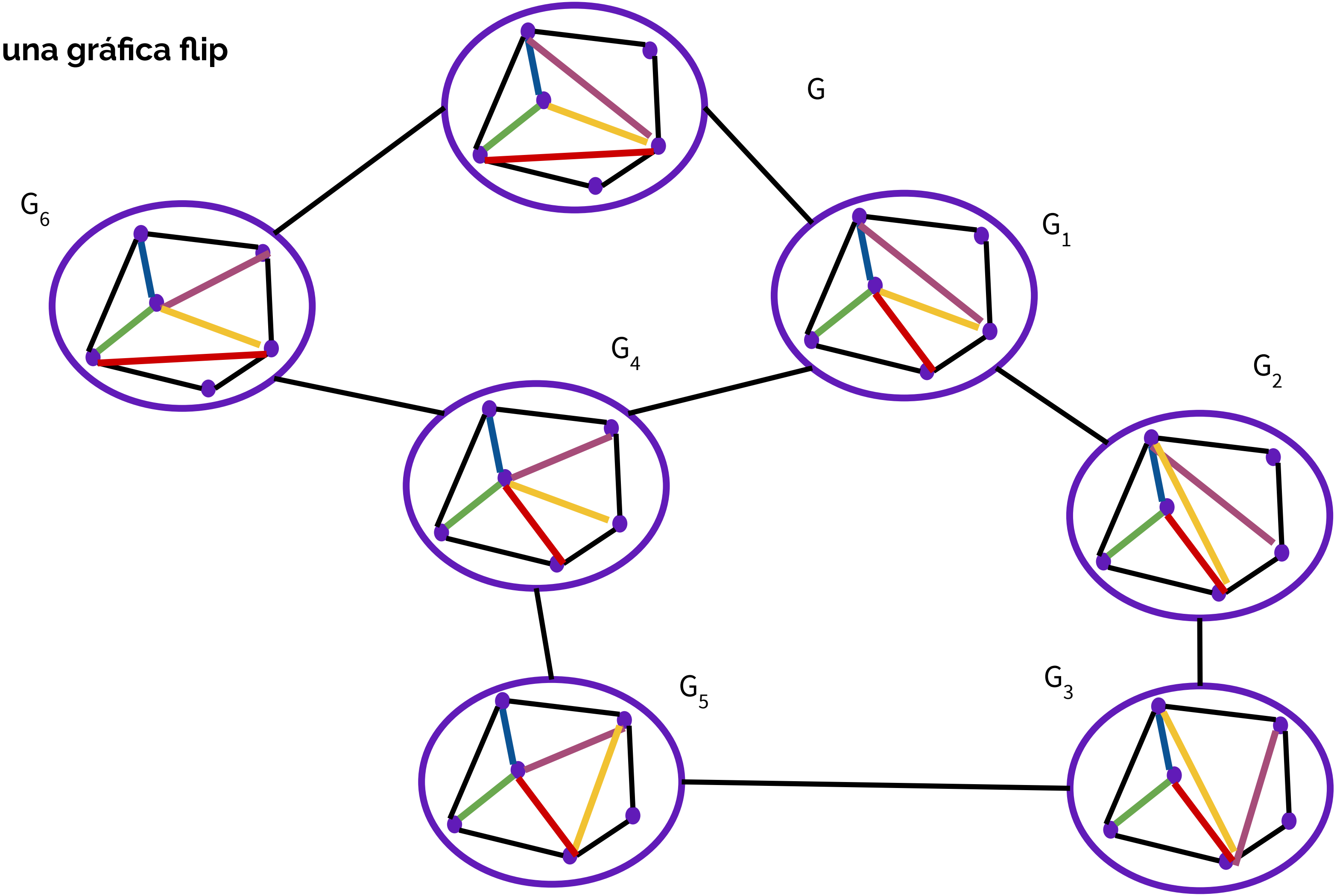
Difieren en una diagonal





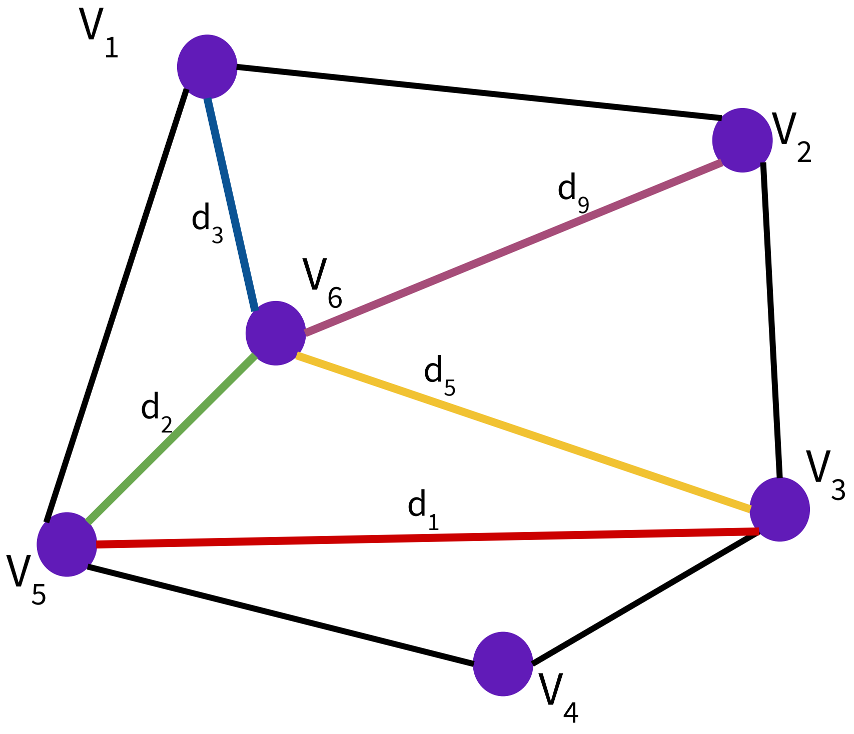
G y G_6 difieren en una diagonal, por lo que serán adyacentes en la gráfica flip

Construcción de una gráfica flip

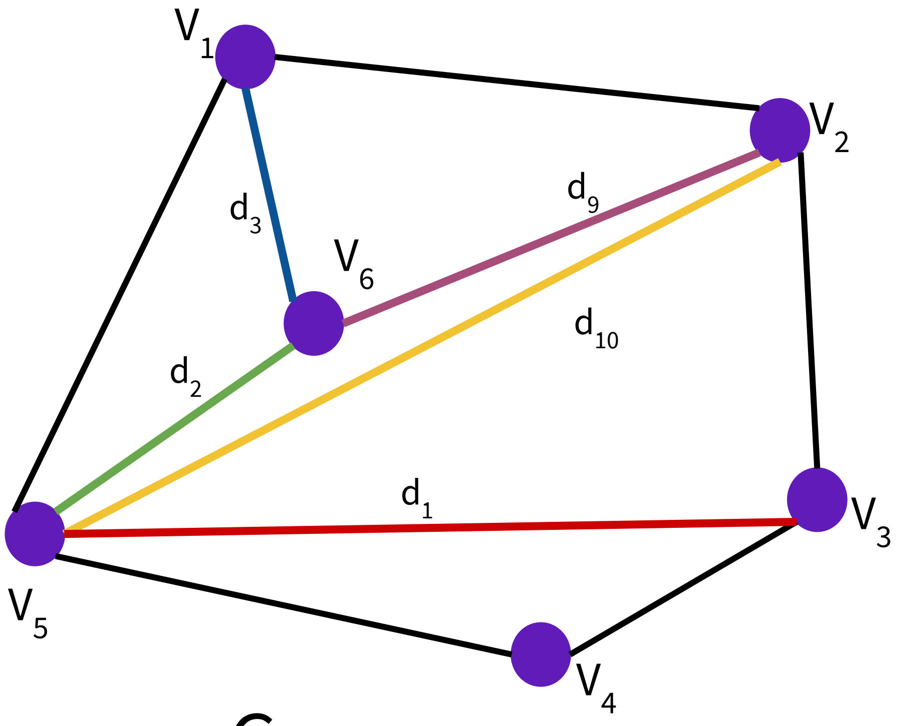


Construcción de una gráfica flip

Difieren en una diagonal



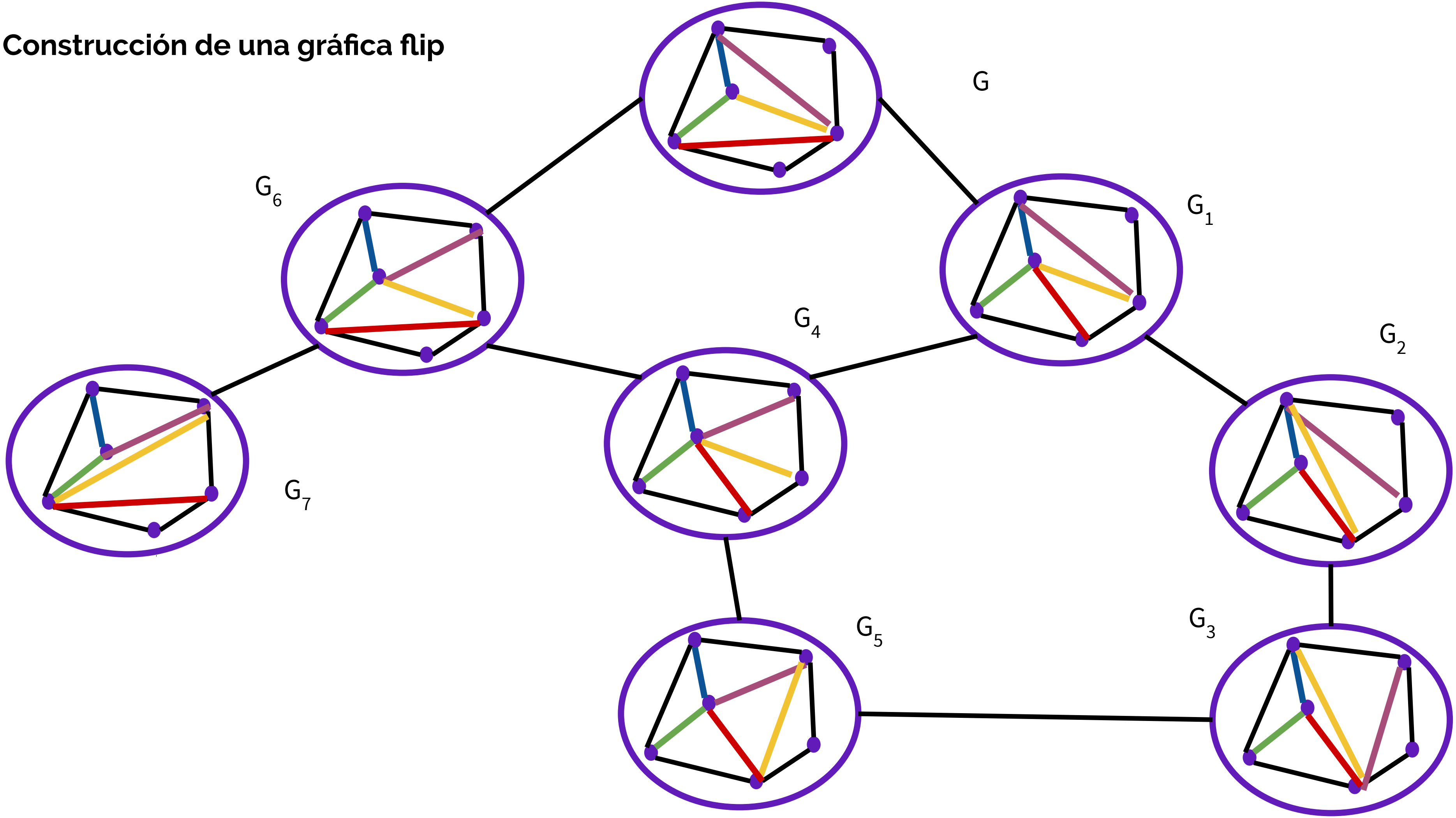
G_6



G_7

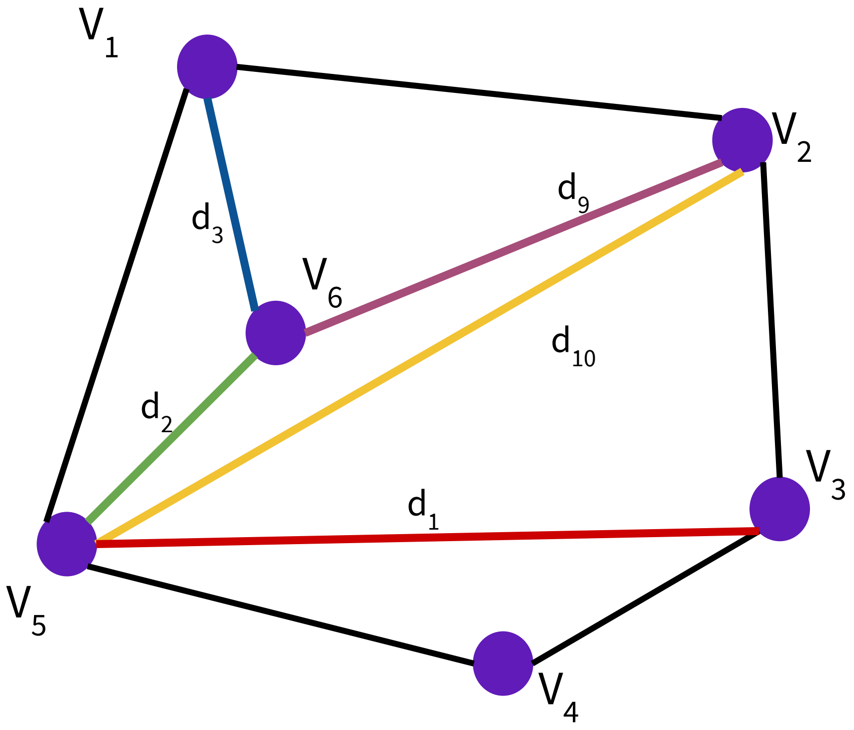
G_6 y G_7 difieren en una diagonal, por lo que serán adyacentes en la gráfica flip

Construcción de una gráfica flip

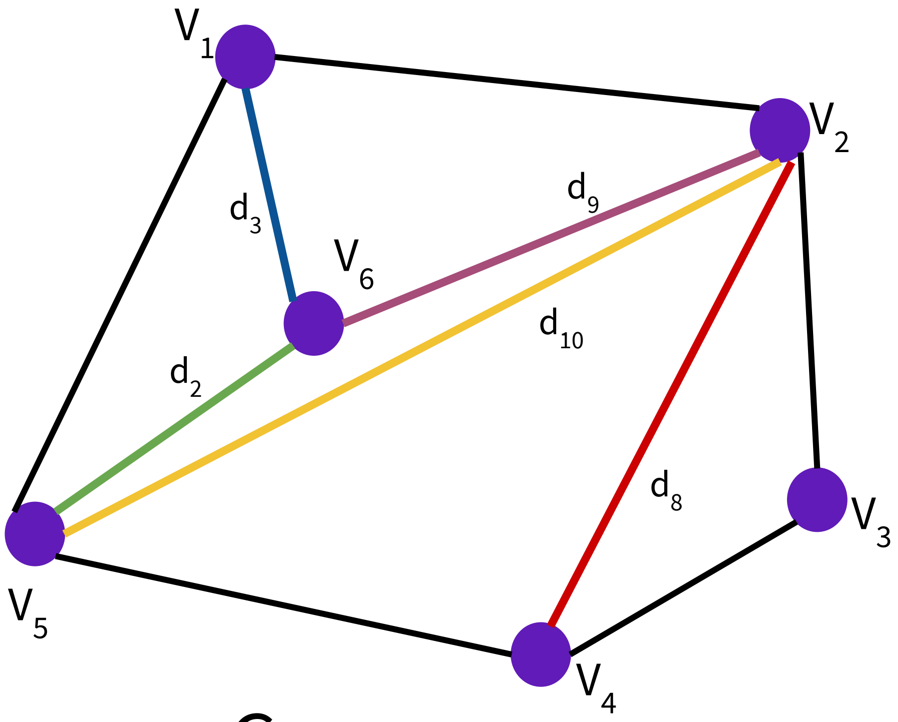


Construcción de una gráfica flip

Difieren en una diagonal



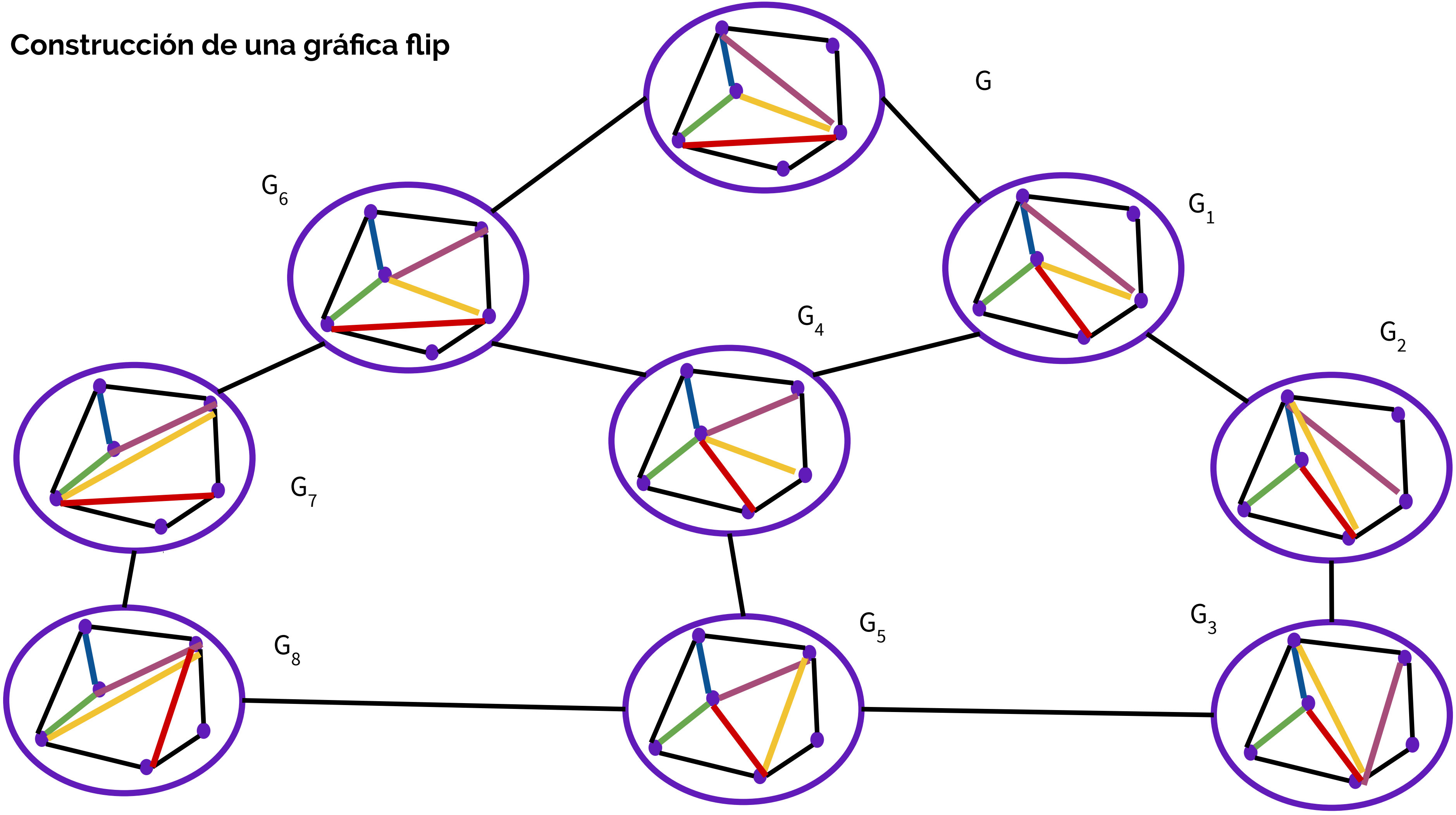
G_7



G_8

G_7 y G_8 difieren en una diagonal, por lo que serán adyacentes en la gráfica flip

Construcción de una gráfica flip



¿La gráfica flip es conexa?

- Sí y fue demostrado por Charles Lawson en 1971

Probando que la gráfica flip es conexa

- **Teorema:** La gráfica flip de cualquier conjunto S en el plano es conexa.

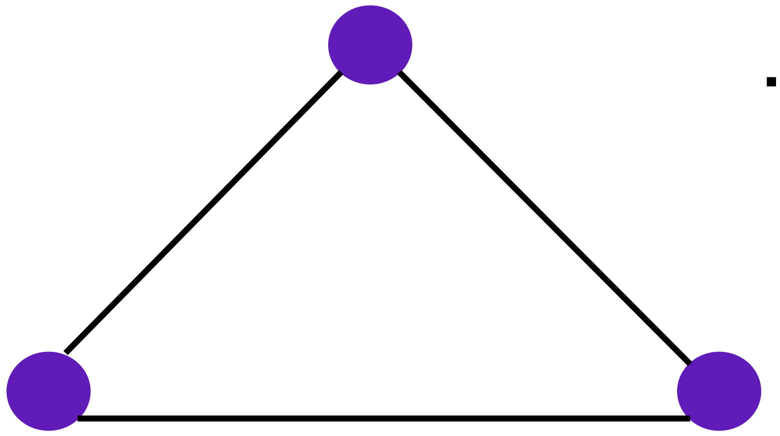
La idea es ver que de una triangulación de S puede transformarse en otra por medio de una secuencia de flips.

Probando que la gráfica flip es conexa

- Sea T_* la triangulación obtenida de S (maximal).
- Ésta triangulación se obtiene de un algoritmo incremental.

Demostración por inducción sobre el número de nodos

Caso Base n = 3:



$\therefore$ Es conexa

Demostración por inducción sobre el número de nodos

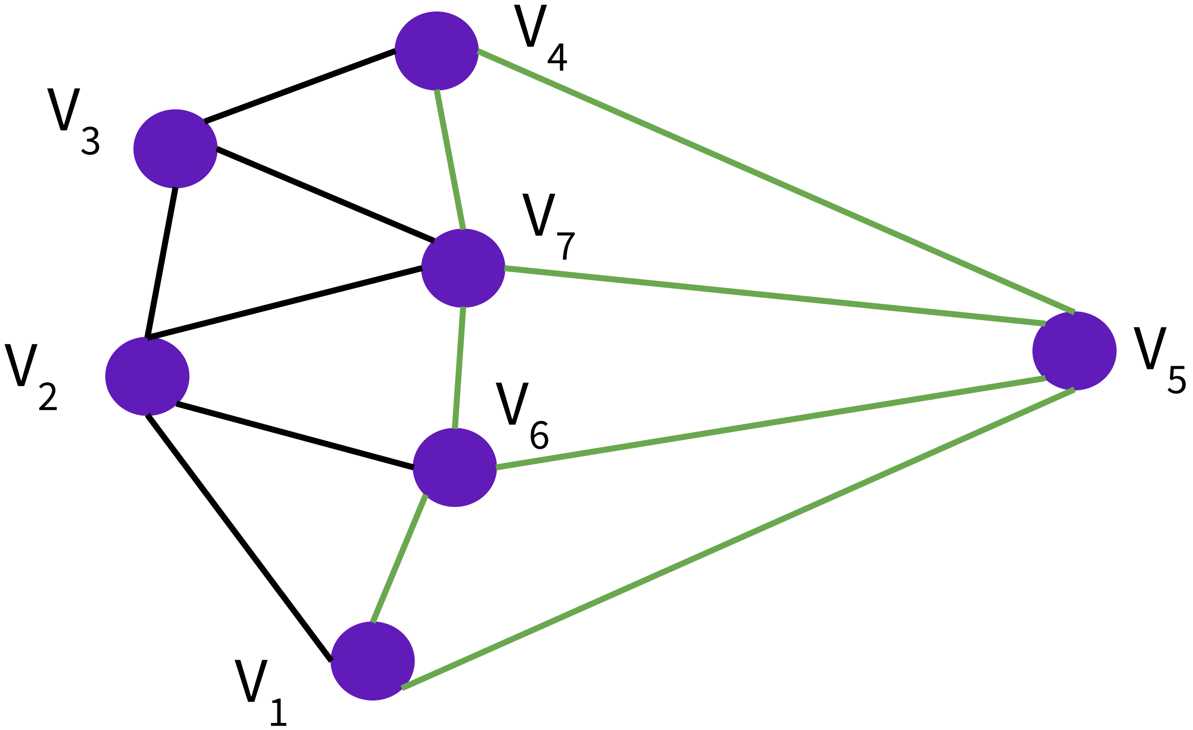
- **Hipótesis de Inducción:**
  Supongamos para un conjunto de n puntos en el plano que su gráfica flip es conexa, es decir, para cualquier triangulación de S se puede convertir/llegar a la T_* de S por una secuencia de flips.

Demostración por inducción sobre el número de nodos

- **Caso Inductivo para n+1:**

- La **estrella** de un vértice v de una triangulación es la unión de triángulos incidentes de v.

Demostración por inducción sobre el número de nodos

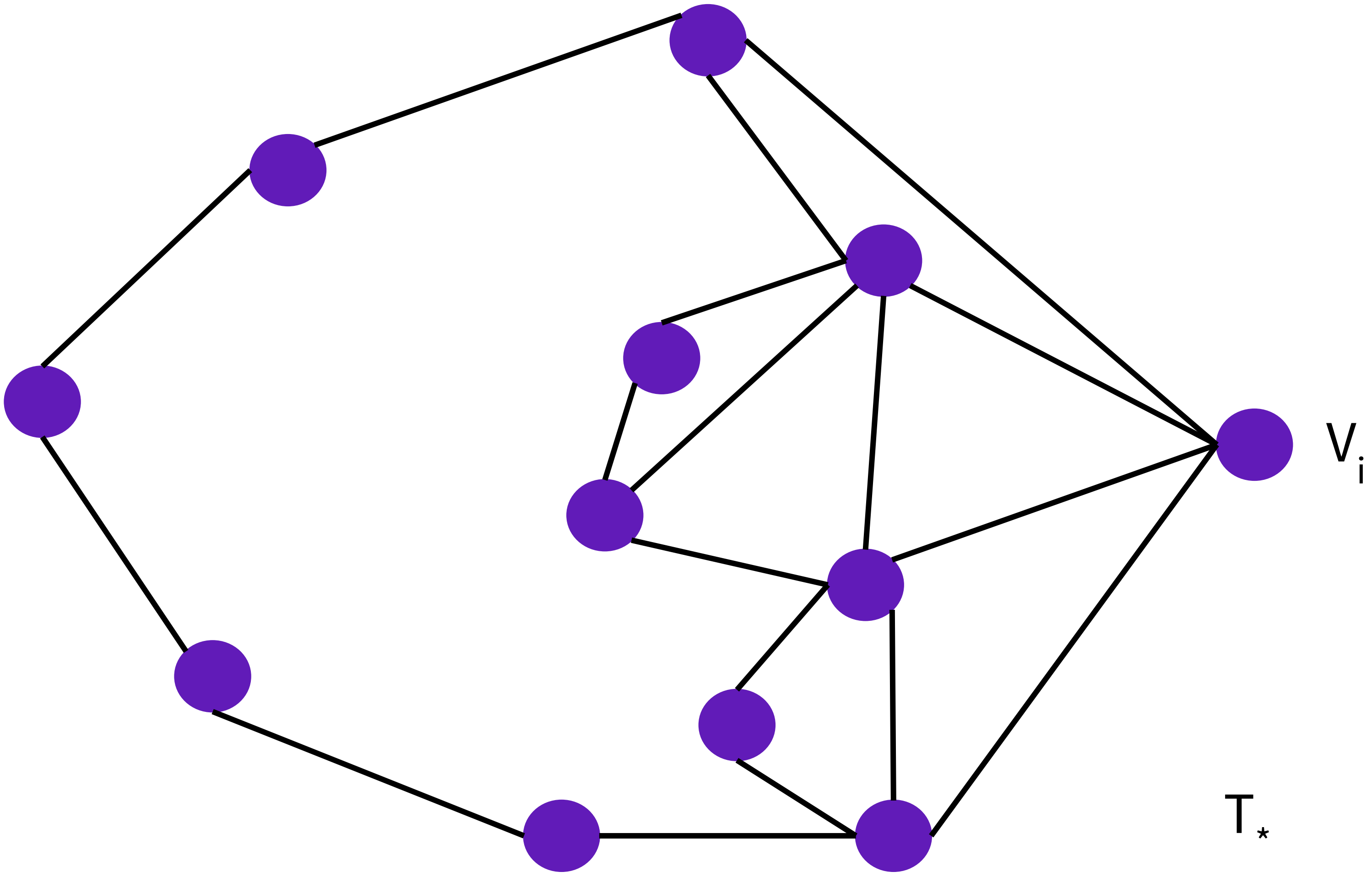


Estrella del vértice V_5

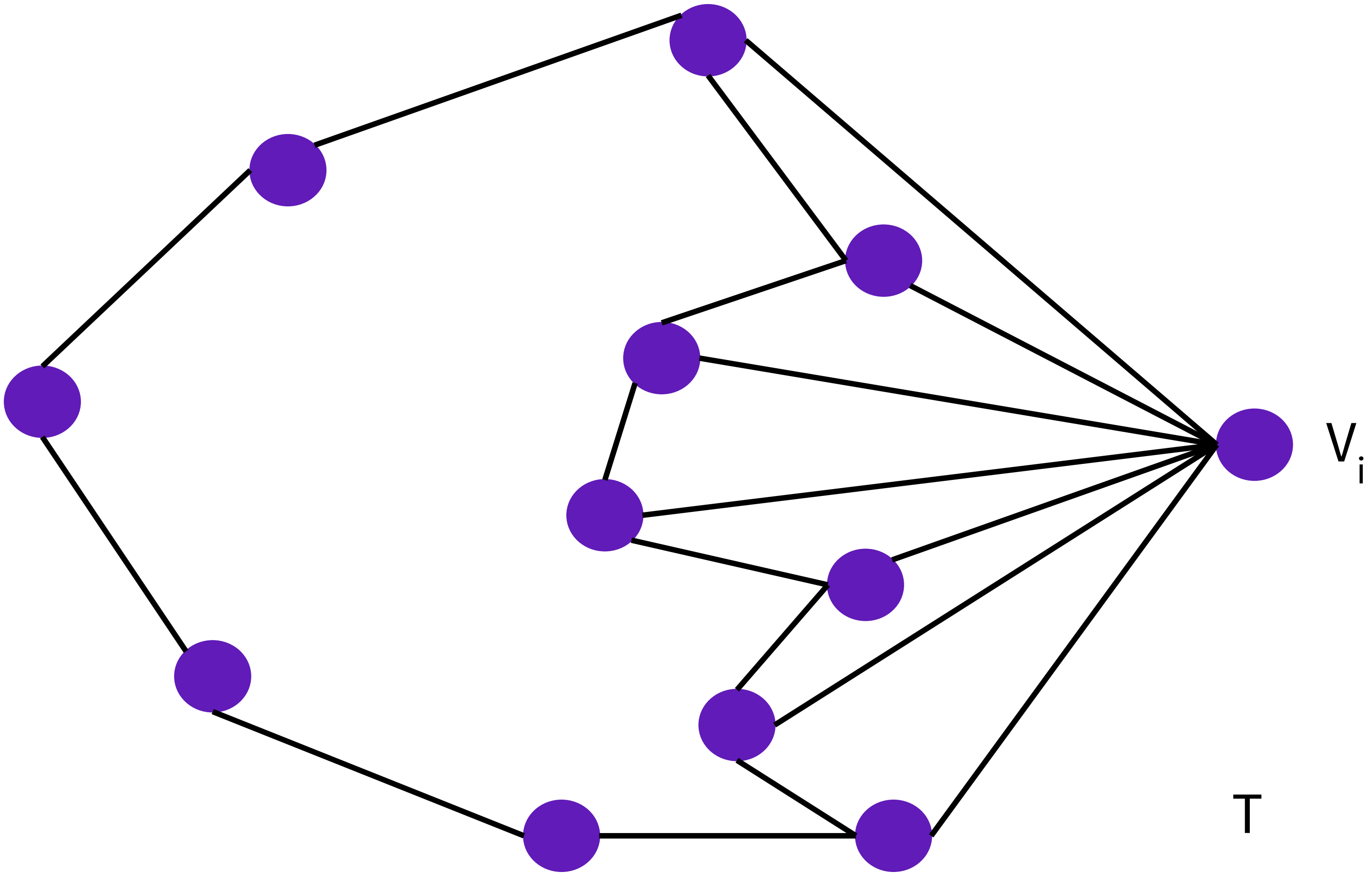
Demostración por inducción sobre el número de nodos

- Vamos a demostrar que a través de una secuencia de flips que si nos tomamos un vértice v_i en una triangulación T maximal esa estrella se puede convertir en la estrella de v_i en T_*

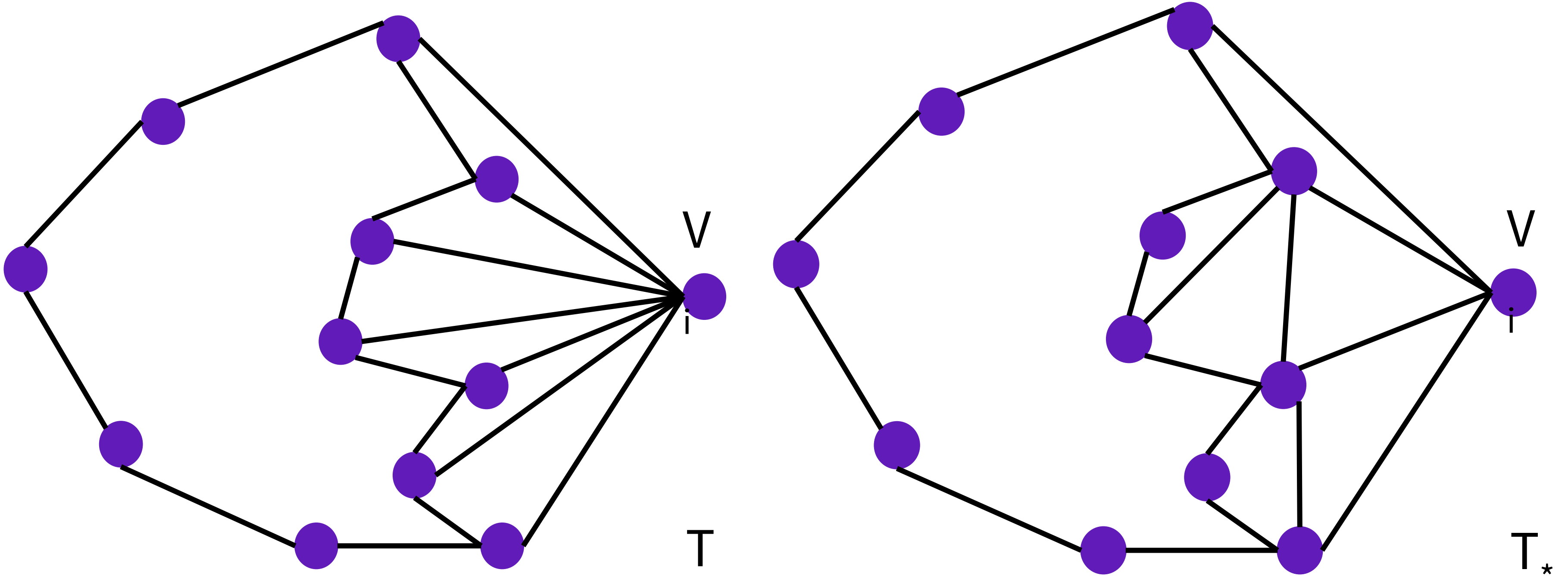
Demostración por inducción sobre el número de nodos



Demostración por inducción sobre el número de nodos



Demostración por inducción sobre el número de nodos



¿Cómo es el algoritmo incremental para un conjunto de puntos?

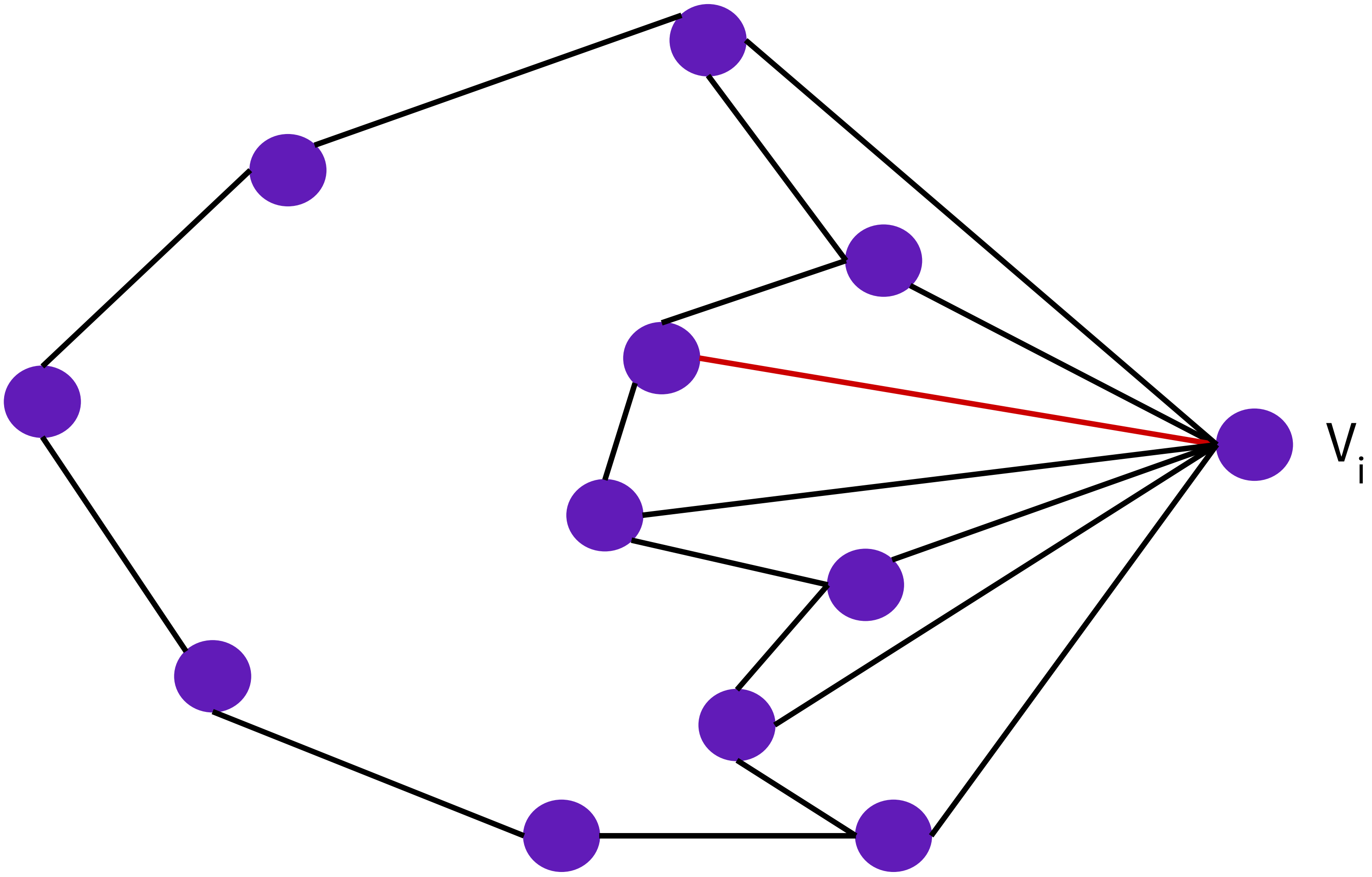
1. Ordenamos los puntos de acuerdo a su coordenada x y si tienen la misma coordenada x, pasamos a hacerlo con y.

2. Formamos un triángulo con los 3 primeros puntos, consideremos a $\boldsymbol{p_k}$ como el último punto tomado.

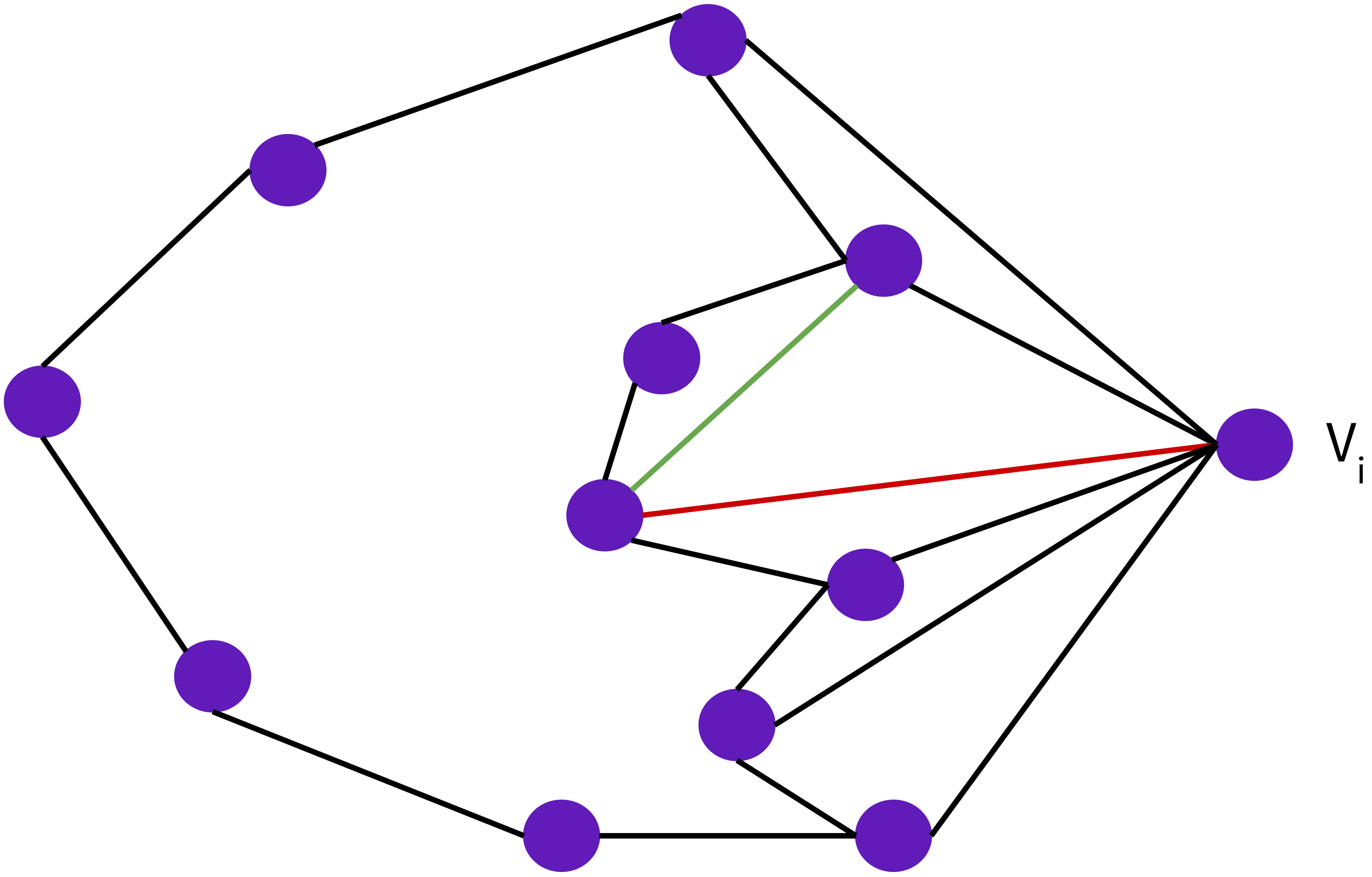
3. Conectamos a p_k con todos los puntos anteriores $\{p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}\}$ visibles para él .

4. Repetimos el proceso para los siguientes puntos de uno en uno.

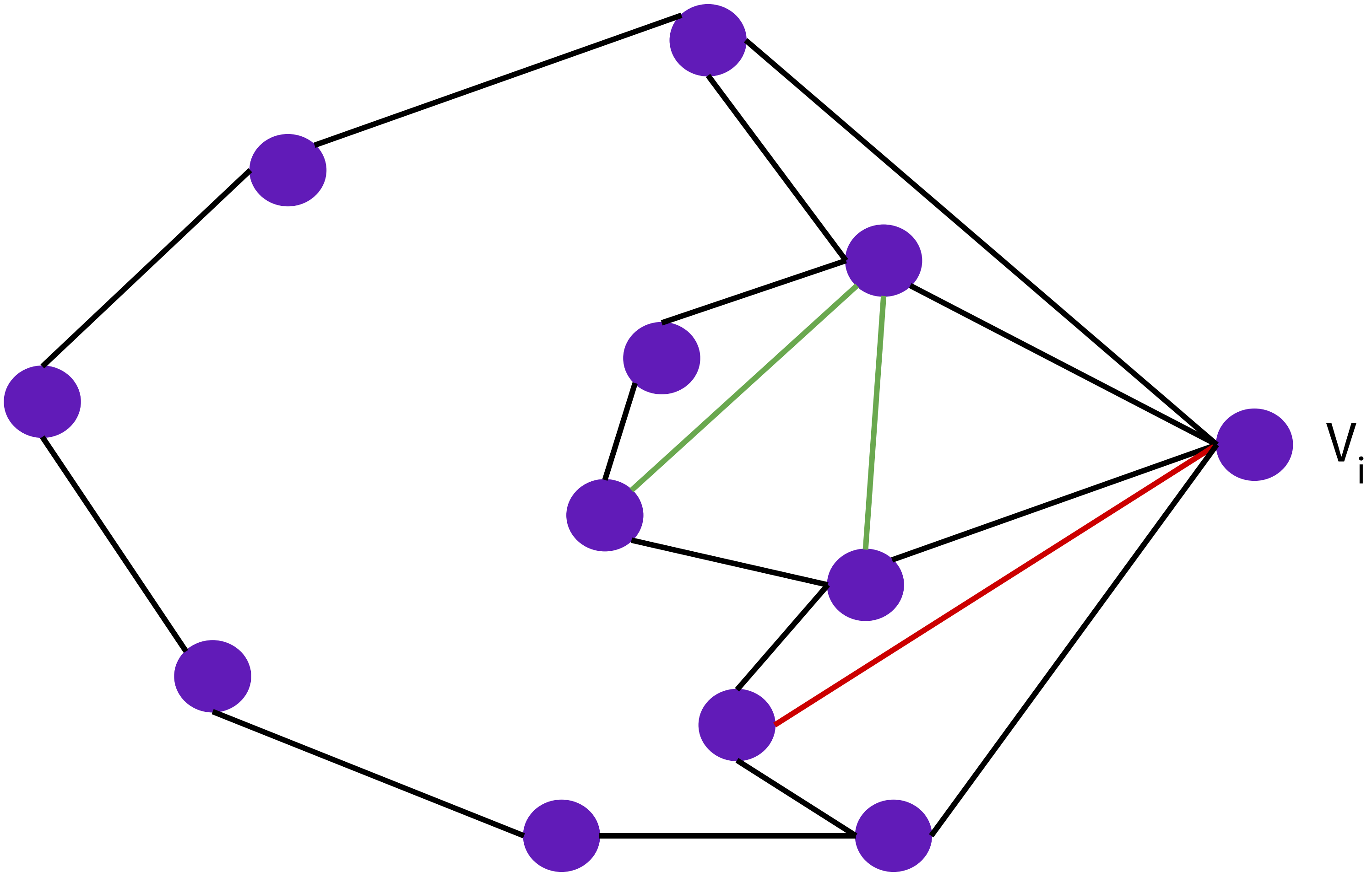
Demostración por inducción sobre el número de nodos



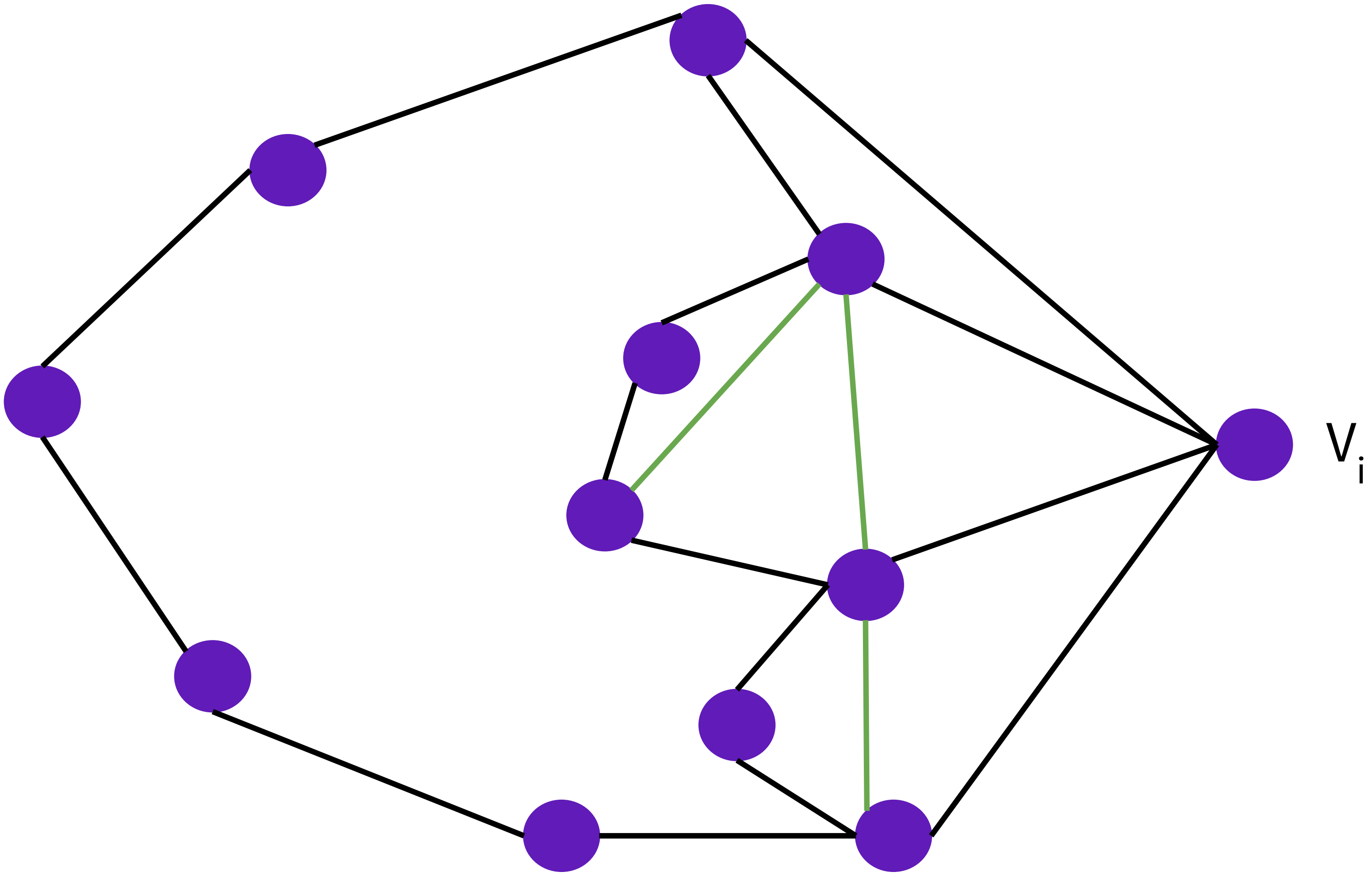
Demostración por inducción sobre el número de nodos



Demostración por inducción sobre el número de nodos



Demostración por inducción sobre el número de nodos



¿Cómo se relaciona el algoritmo incremental con la demostración?

- Aplicamos el algoritmo incremental para cambiar de triangulación.

$\therefore$ Es conexa

¿Podemos saber cuál es la distancia del camino más corto entre dos nodos?

- No podemos saber la longitud exacta pero podemos saber cuál sería su longitud a lo más.

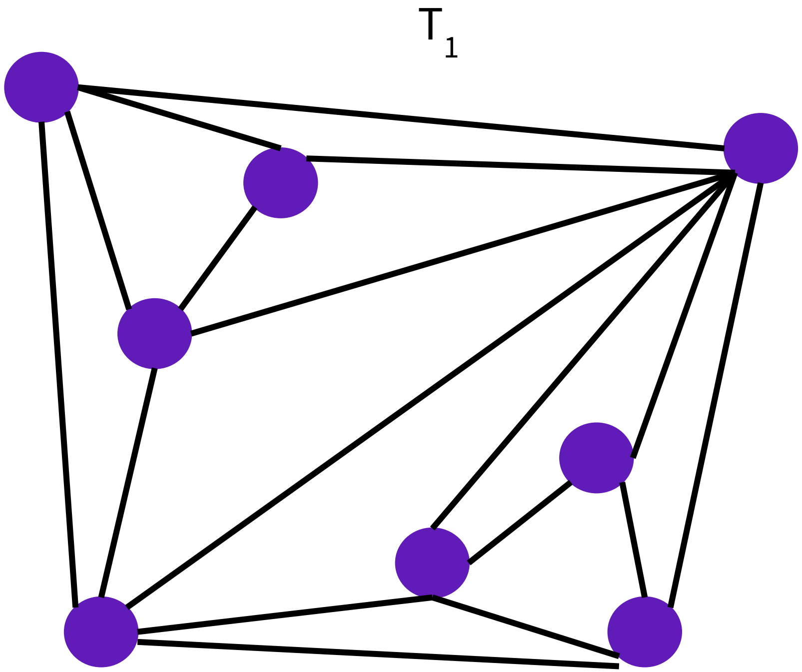
¿Podemos saber cuál es la distancia del camino más corto entre dos nodos?

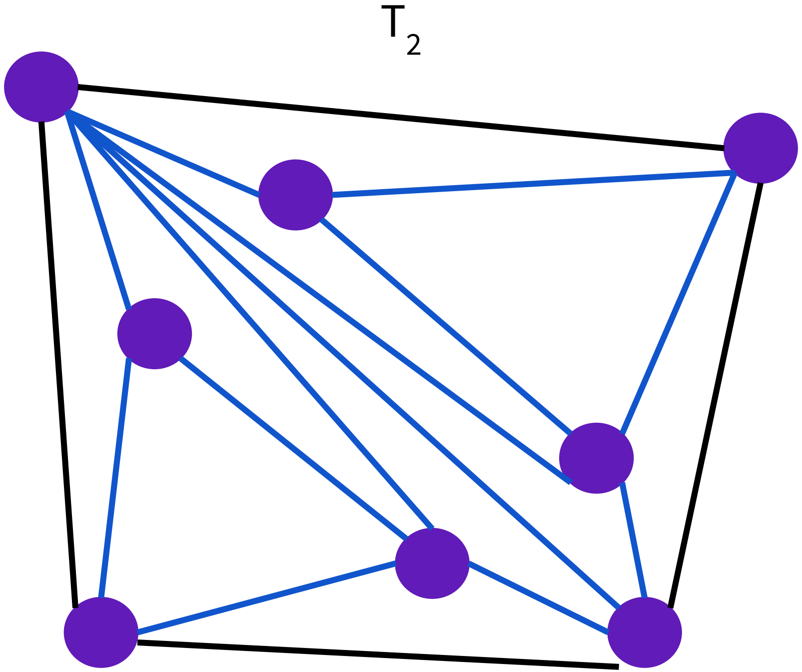
- Y lo sabemos gracias un teorema de Sabine Hanke, Thomas Ottmann y Sven Schurierer en 1996.

¿Podemos saber cuál es la distancia del camino más corto entre dos nodos?

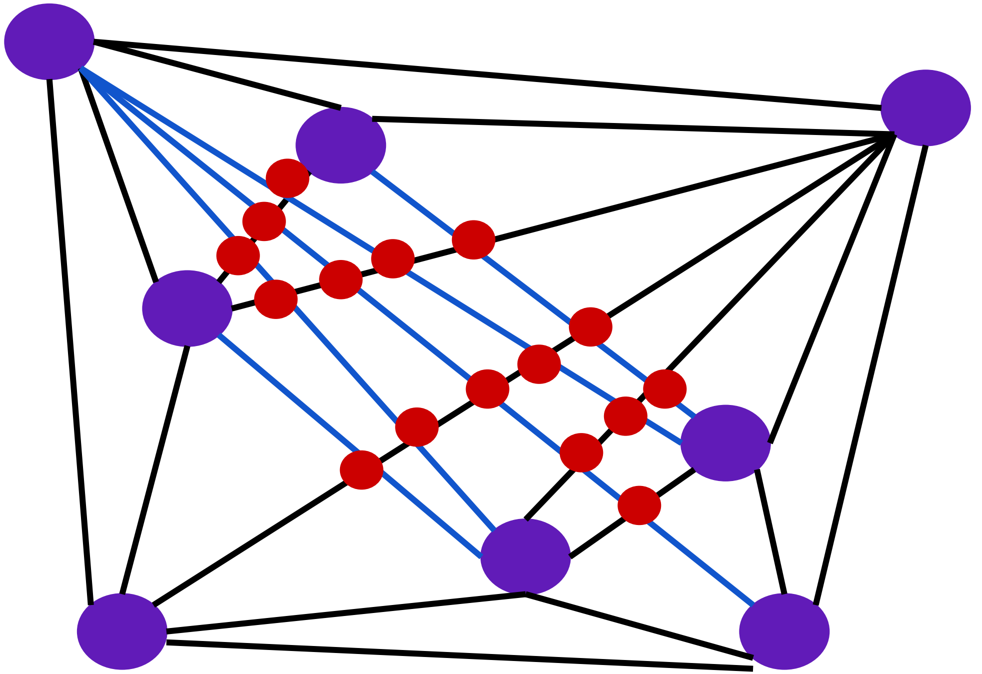
- **Teorema:** Sea S un conjunto de puntos en posición general y sean T_1 y T_2 dos triangulaciones de S. Sea T_{12} el diagrama obtenido de sobreponer T_1 y T_2 entonces la distancia entre T_1 y T_2 en la gráfica flip es a lo más el número de cruces entre las aristas en T_{12}.

Distancia del camino más corto entre dos nodos





Distancia del camino más corto entre dos nodos



T_{12}

16 cruces o intersecciones

El diámetro en la gráfica flip

- El diámetro de una gráfica es la longitud(número de arcos) del camino más largo entre 2 nodos.

- El diámetro de una gráfica flip podemos interpretarlo como el máximo número de flips que hay para pasar de una triangulación a otra.

El diámetro en la gráfica flip

- **Corolario**: Para un conjunto de puntos S en el plano, el diámetro de su gráfica flip es a lo más (n-2)(n-3)

Aplicaciones

Enumerar:

1. Enumerar los diferentes tipos de gráficas planas dado un tamaño

Optimizar:

1. Para generar una gráfica plana que sea óptima dado un criterio. (Ej. maximizar o minimizar los ángulos de los triángulos)

Bibliografía:

1. Devadoss, Satyan L. , O'Rourke ,Joseph. Discrete and Computational Geometry, Princeton Univesity Press, 2011, p.66.

2. https://www.journals.elsevier.com/computational-geometry