

Repaso de Localización de Puntos en Subdivisión Trapezoidal

Ailyn Rebollar Pérez

Problema de Localización de Puntos en un Plano

Éste problema consiste en que se da una subdivisión plana \mathcal{S} la cual tiene n aristas y se quiere saber que dado un punto q está contenido en la subdivisión.

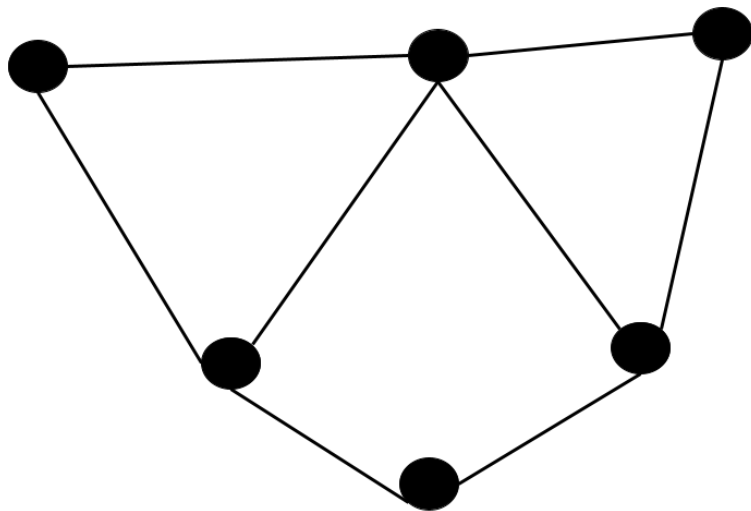
Problema de Localización de Puntos en un Plano

Éste problema consiste en que se da una subdivisión plana \mathcal{S} la cual tiene n aristas y se quiere saber que dado un punto q está contenido en la subdivisión.

Si está contenido en la subdivisión notemos que puede estar dentro de alguna cara, coincidir con alguno de los vértices que definen las aristas o bien, estar sobre una arista.

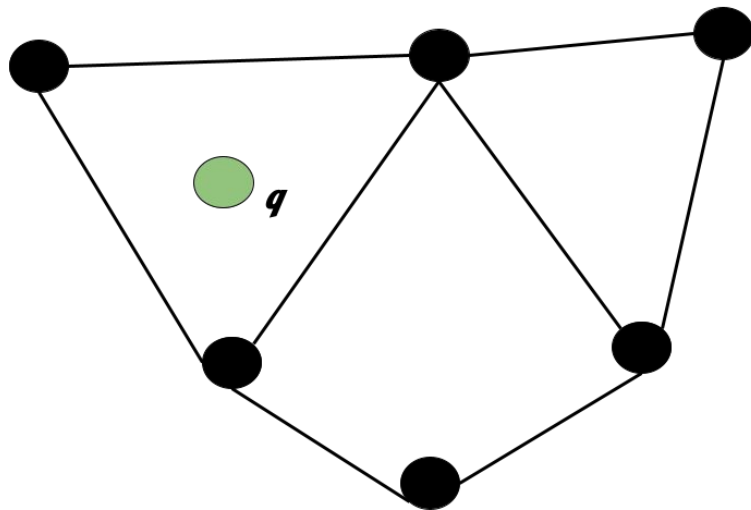
Problema de Localización de Puntos en un Plano

— — —

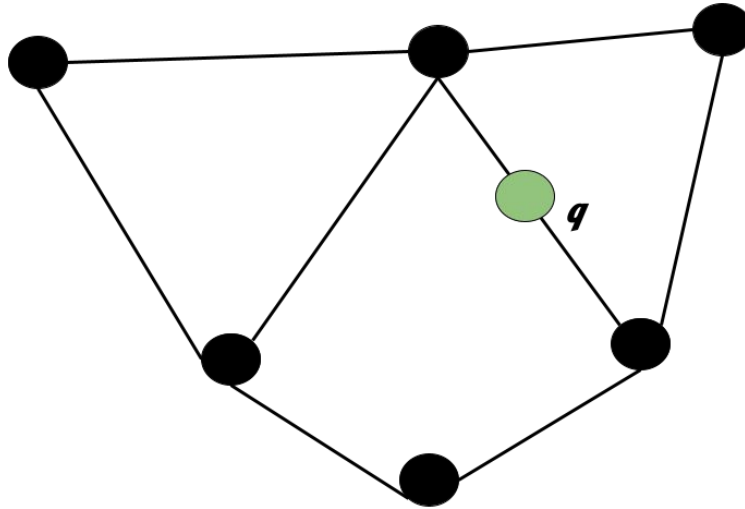


Problema de Localización de Puntos en un Plano

— — —

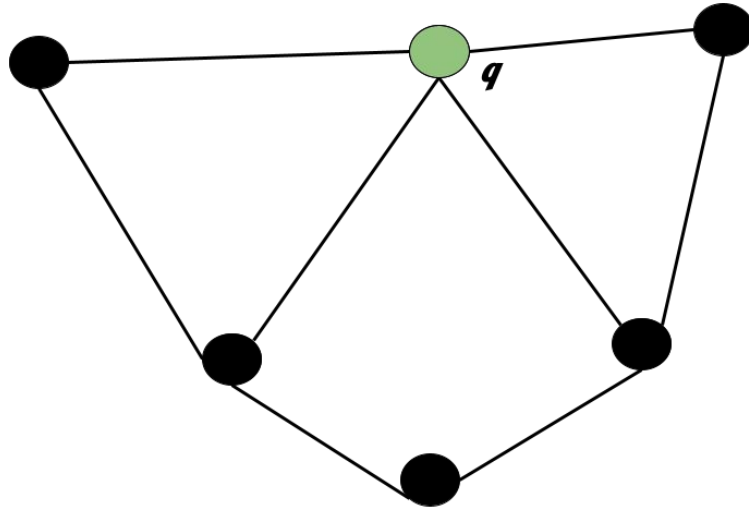


Problema de Localización de Puntos en un Plano



Problema de Localización de Puntos en un Plano

— — —



Problema de Localización de Puntos en un Plano

— — —

- Para resolver el problema podemos usar la técnica de subdivisiones trapezoidales.

Problema de Localización de Puntos en un Plano

- Para resolver el problema podemos usar la técnica de subdivisiones trapezoidales.
- ¿Cómo se construye ésta subdivisión?

Construcción

Construcción de una Subdivisión

— — —

→ Encerramos la subdivisión plana en un recuadro o rectángulo.

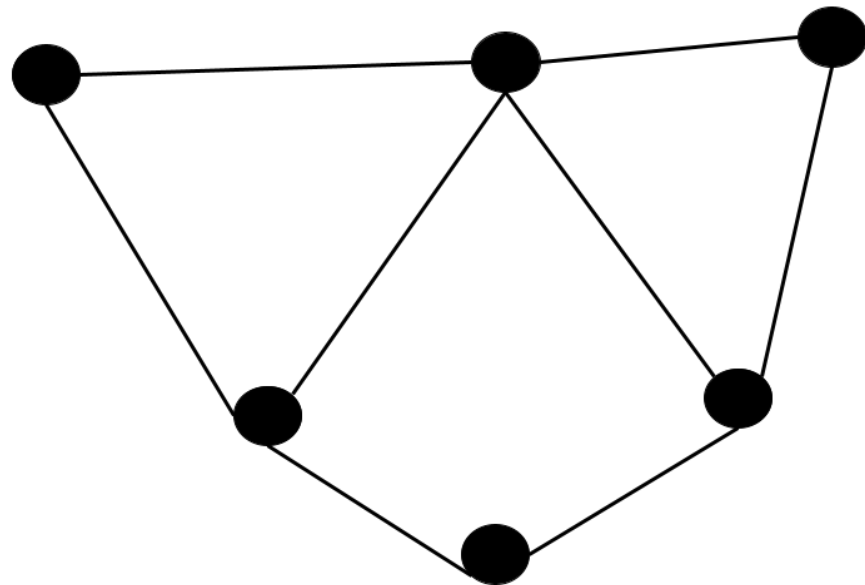
Construcción de una Subdivisión

— — —

- Encerramos la subdivisión plana en un recuadro o rectángulo.
- Trazamos líneas verticales en cada punto de la subdivisión ($2n$).

Construcción

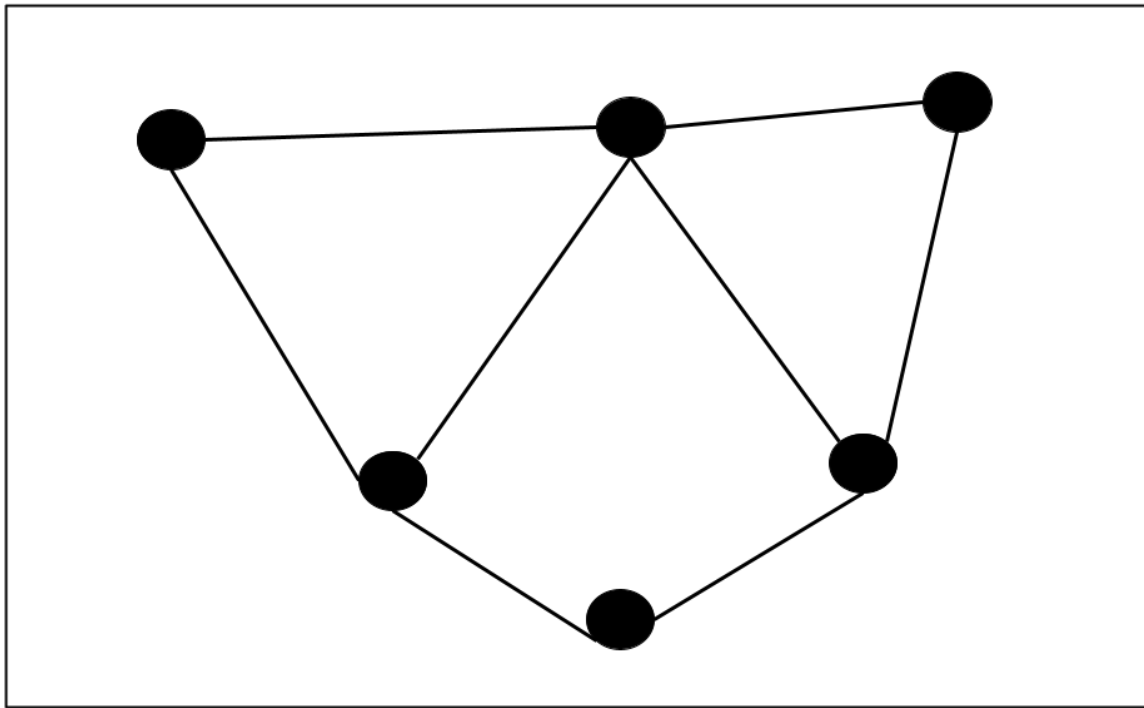
— — —



Construcción

— — —

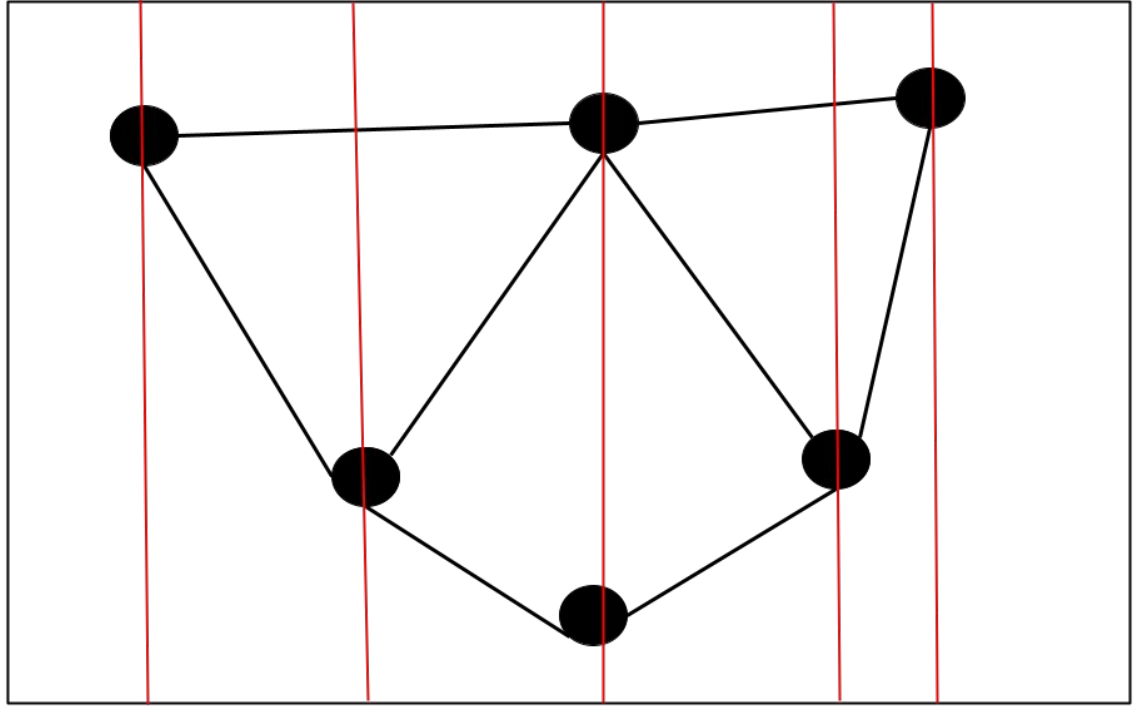
- Encerramos en un rectángulo.



Construcción

— — —

- Encerramos en un rectángulo.
- Trazamos las líneas verticales en cada punto.

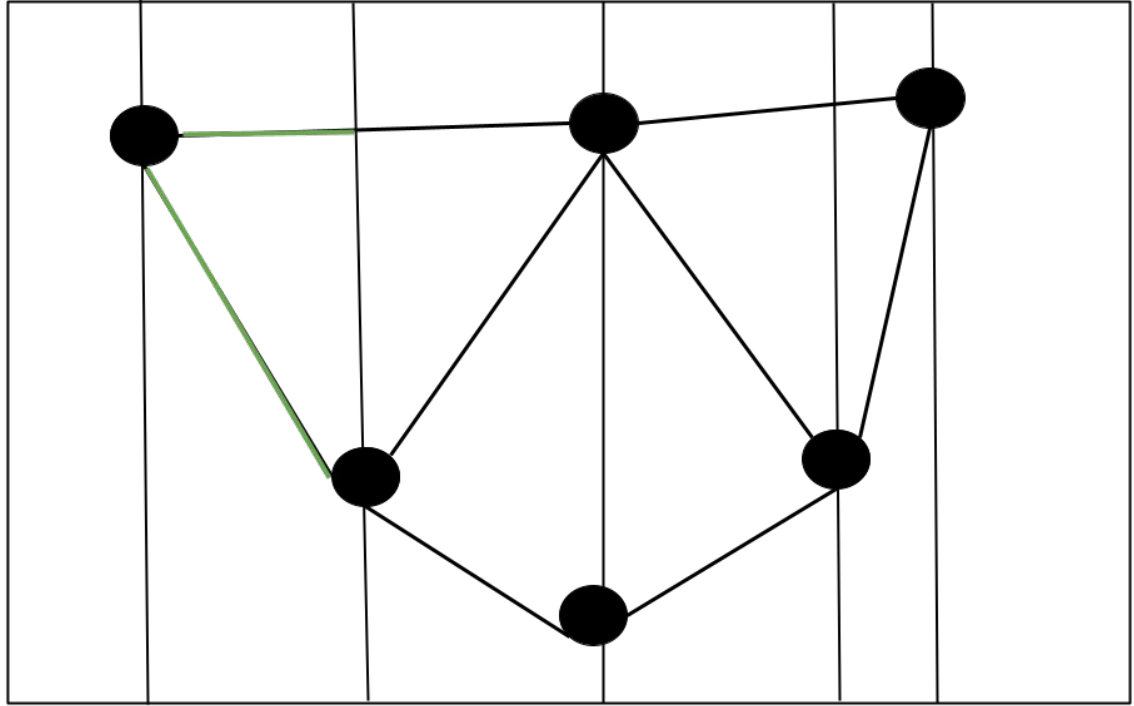


Consulta

Consulta

— — —

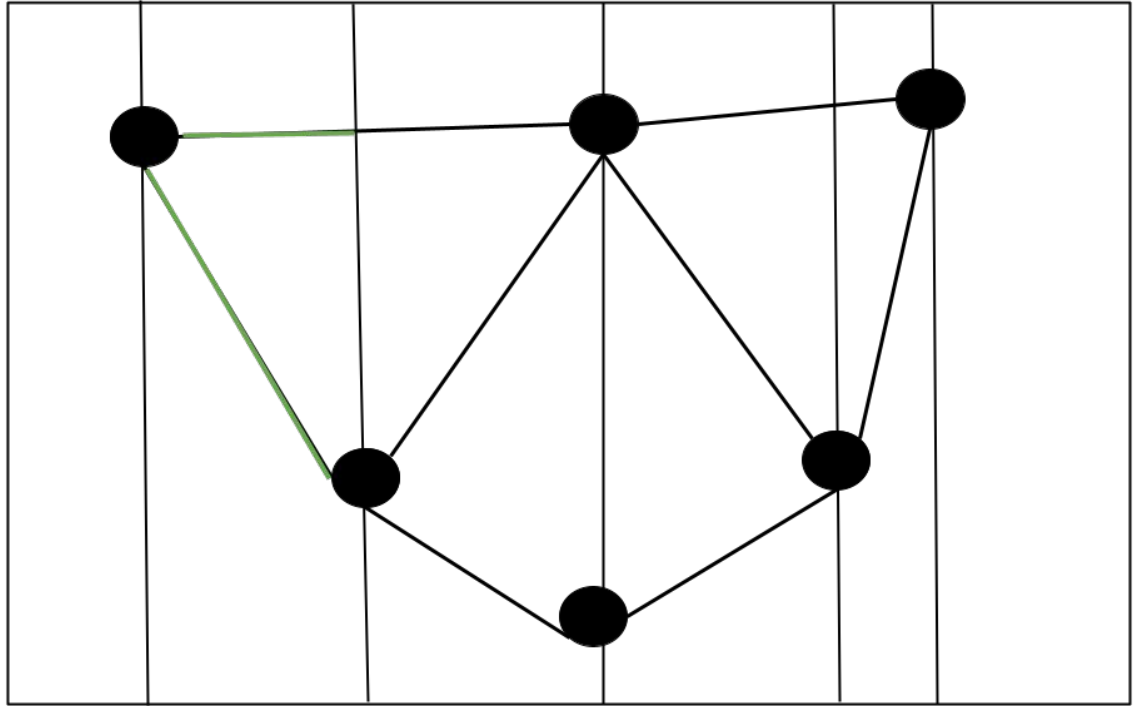
- Puede que en cada banda o rebanada haya segmentos de aristas o aristas completas de la subdivisión plana original.



Consulta

— — —

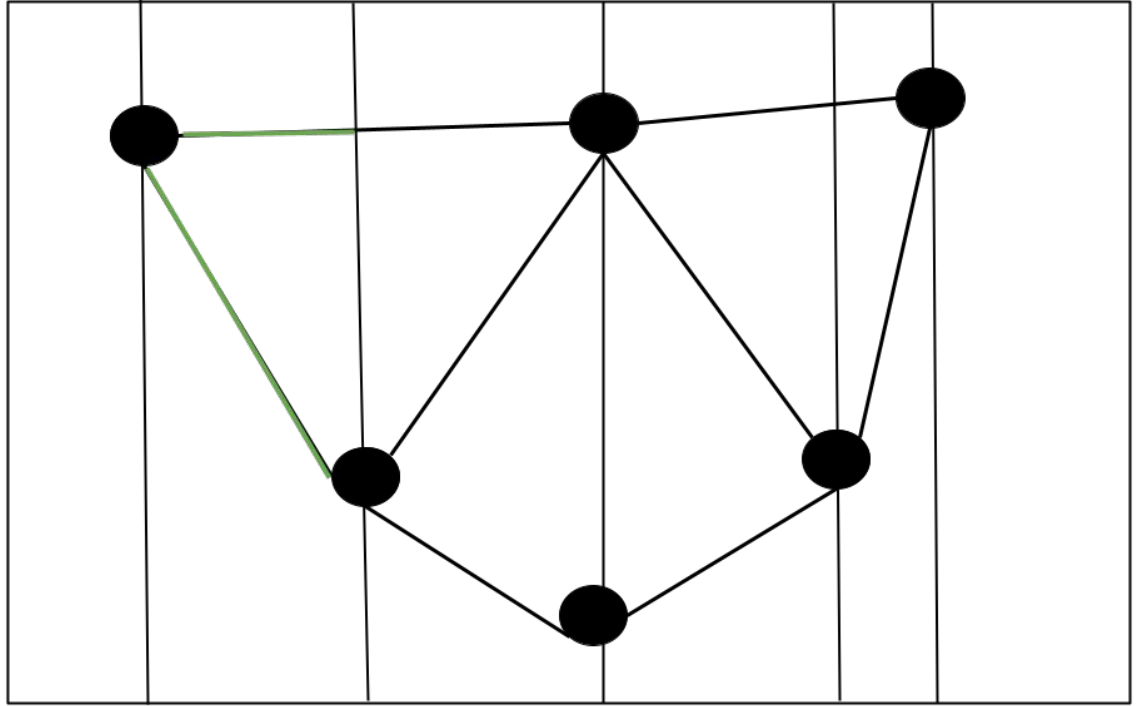
- Puede que en cada banda o rebanada haya segmentos de aristas o aristas completas de la subdivisión plana original.
- Las bandas formadas serán de ayuda para localizar el punto pedido.



Consulta

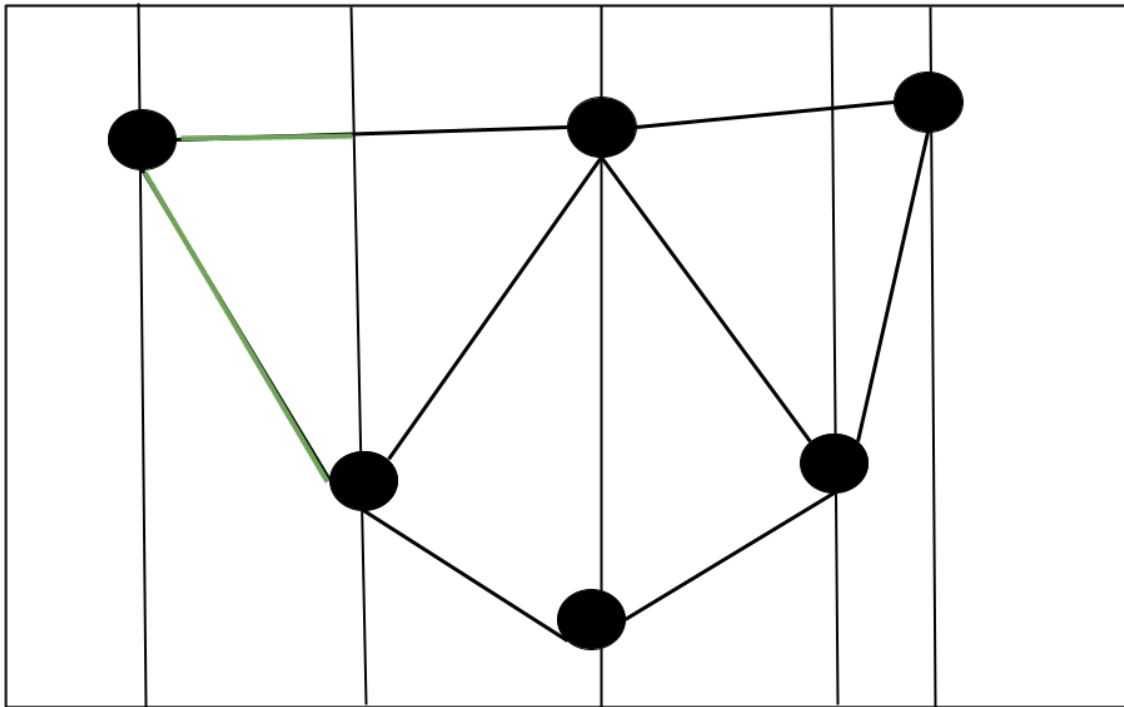
— — —

- Pero ¿cómo podemos saber dentro de qué banda puede estar el punto?



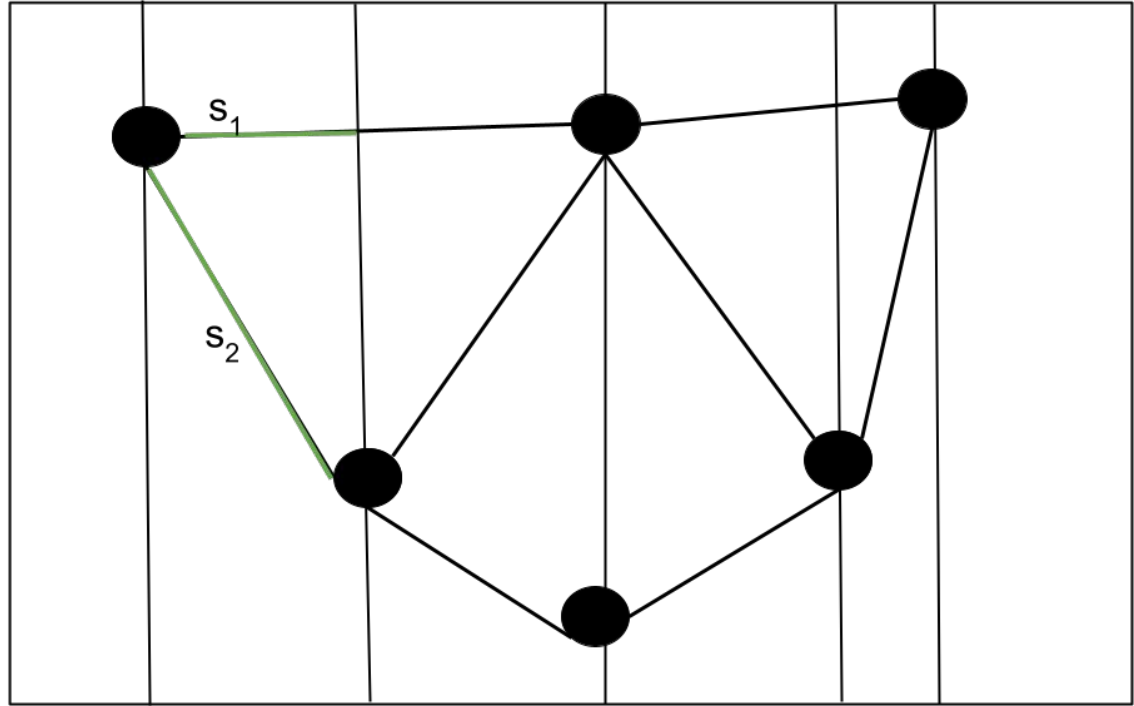
Consulta

- Pero ¿cómo podemos saber dentro de qué banda puede estar el punto?
- Podemos ordenar las bandas de acuerdo a la coordenada x del vértice por el cual pasa.



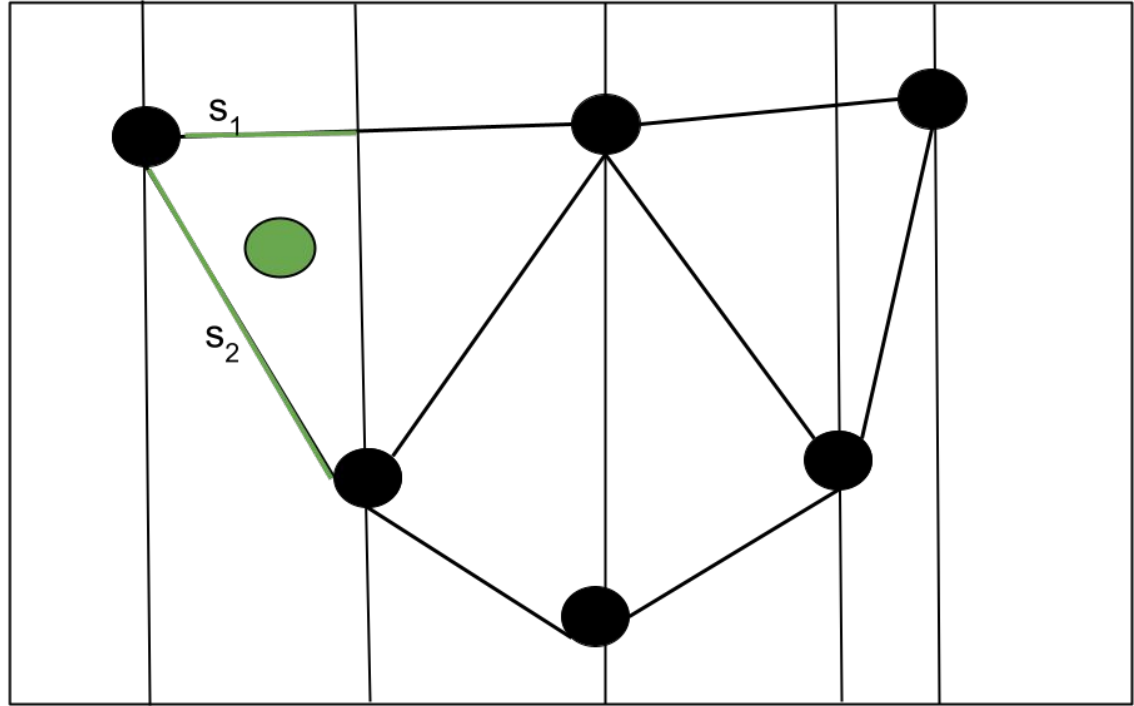
Consulta

- Podemos tener ordenados los segmentos de aristas y aristas que viven en cada banda pero en un orden de arriba hacia abajo o viceversa.
- De esa manera podemos buscar la coordenada y del punto que estamos buscando



Consulta

- ¿Qué pasa si el punto que estamos buscando es el verde?

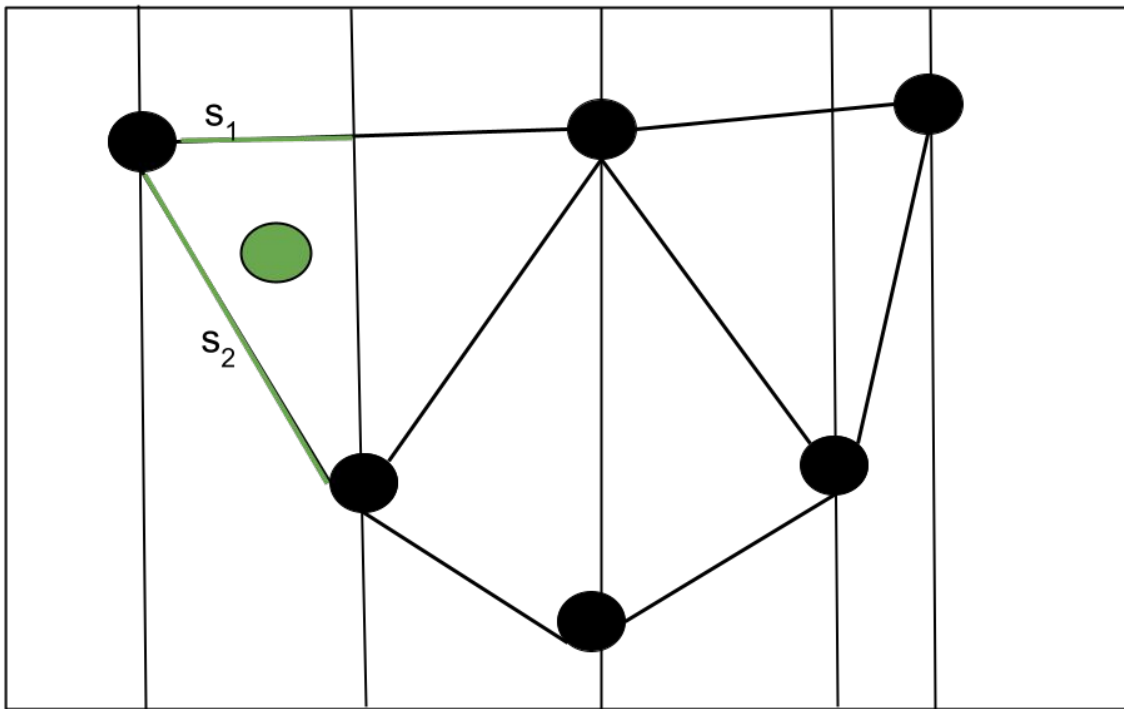


- _____



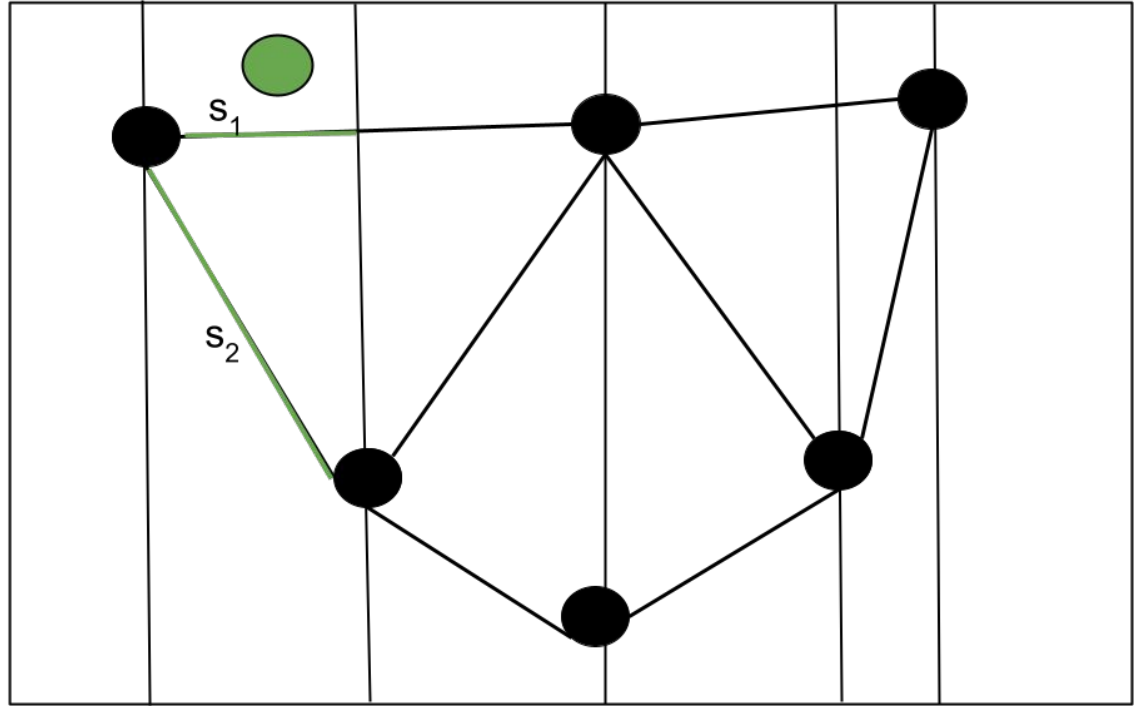
Consulta

- ¿Qué pasa si el punto que estamos buscando es el verde?
- Al buscar podremos ver que está debajo de S_1 pero arriba de S_2 .
- Entonces está dentro de la subdivisión plana.



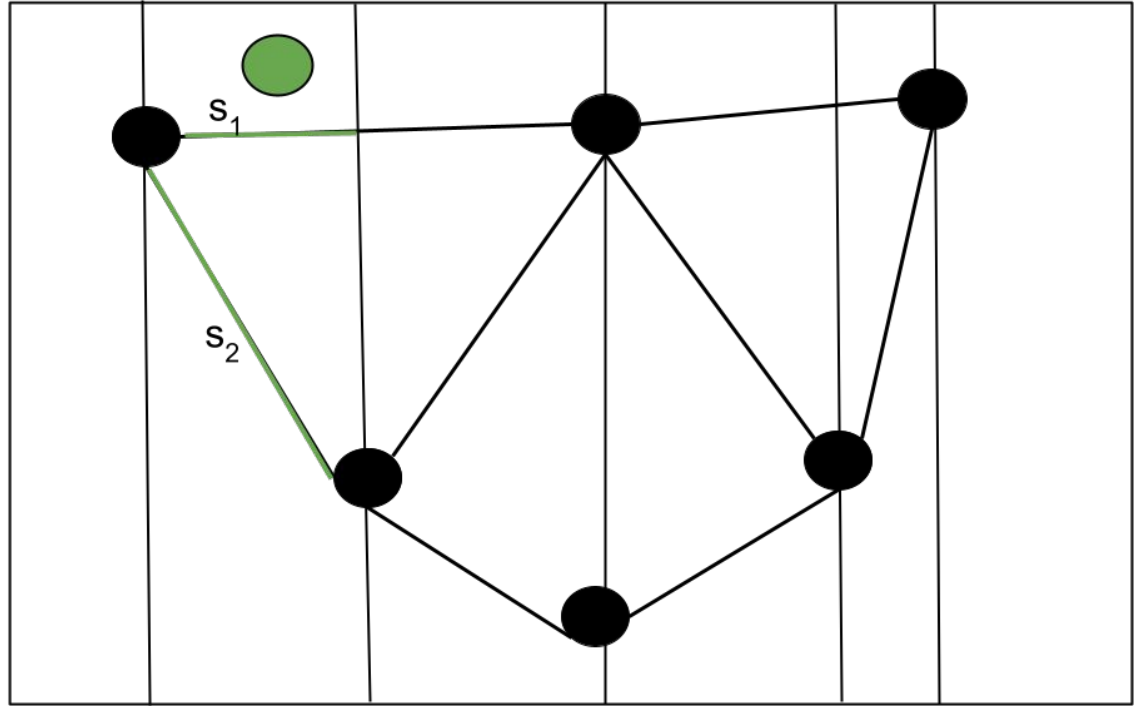
Consulta

- ¿Qué pasa si el punto que estamos buscando es el verde?



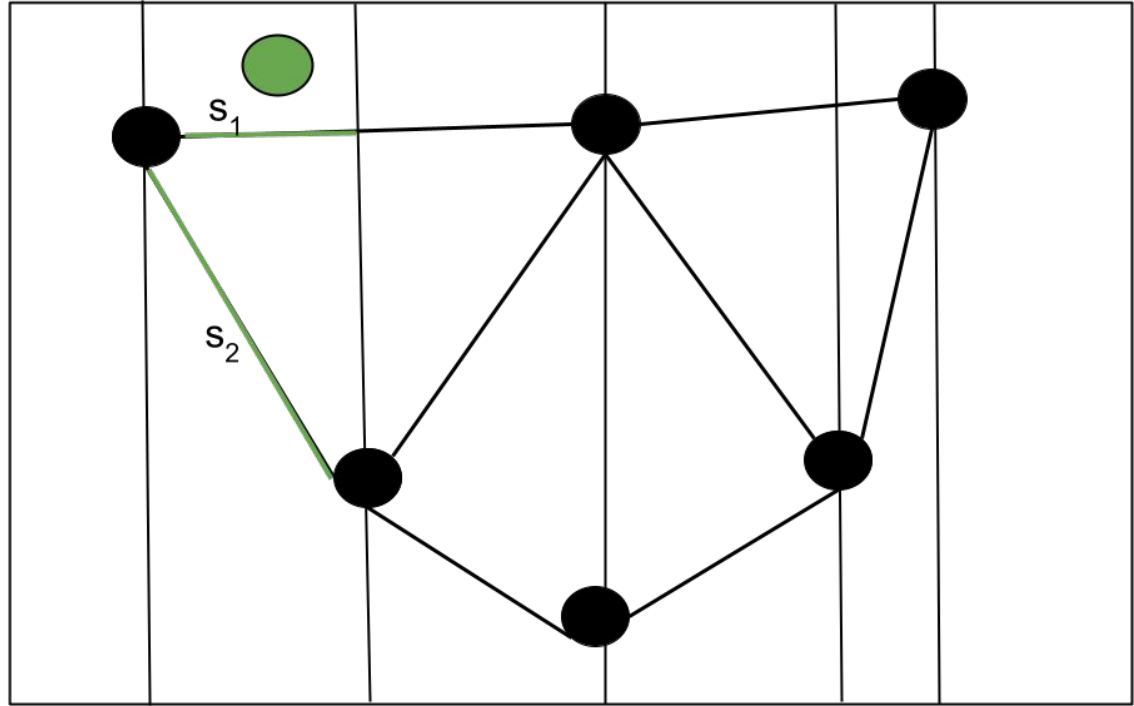
Consulta

- ¿Qué pasa si el punto que estamos buscando es el verde?
- Al buscar podremos ver que está arriba de S_1 .



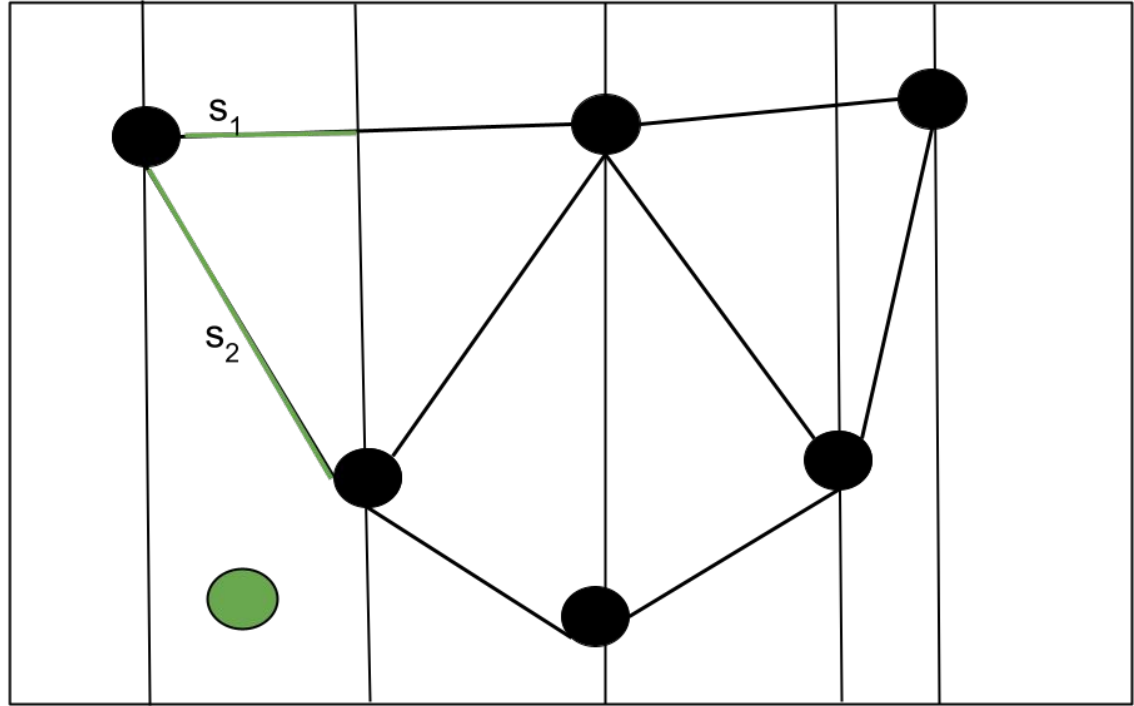
Consulta

- ¿Qué pasa si el punto que estamos buscando es el verde?
- Al buscar podremos ver que está arriba de S_1 .
- Entonces está fuera de la subdivisión plana.



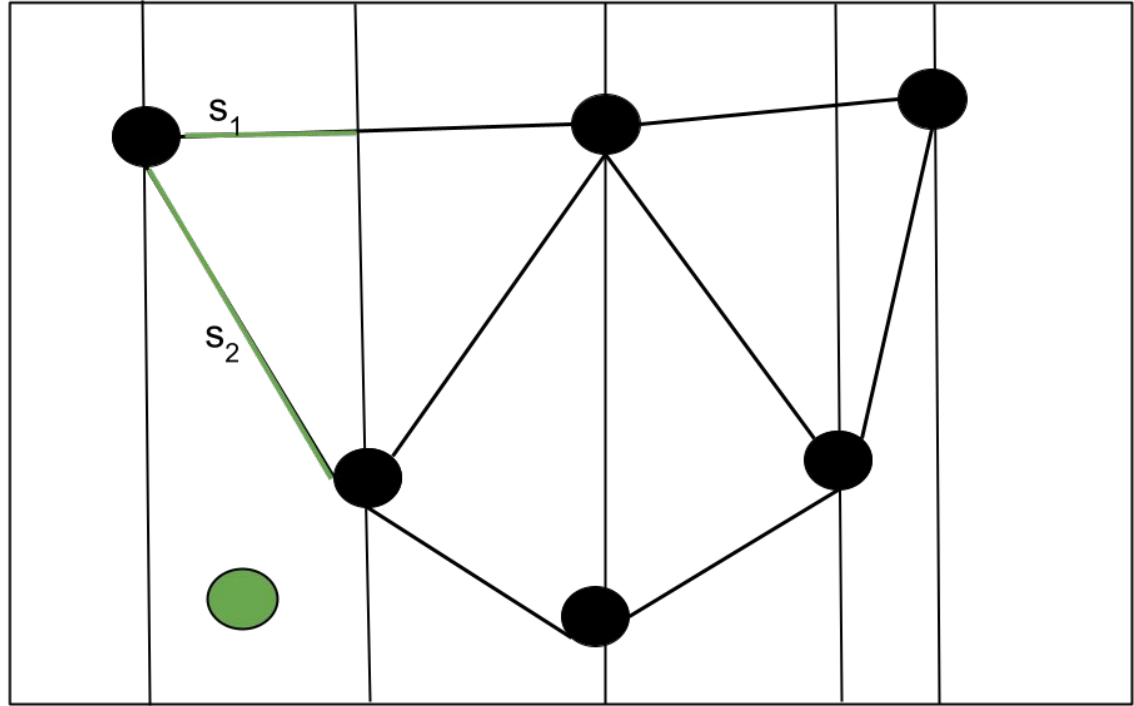
Consulta

- ¿Qué pasa si el punto que estamos buscando es el verde?



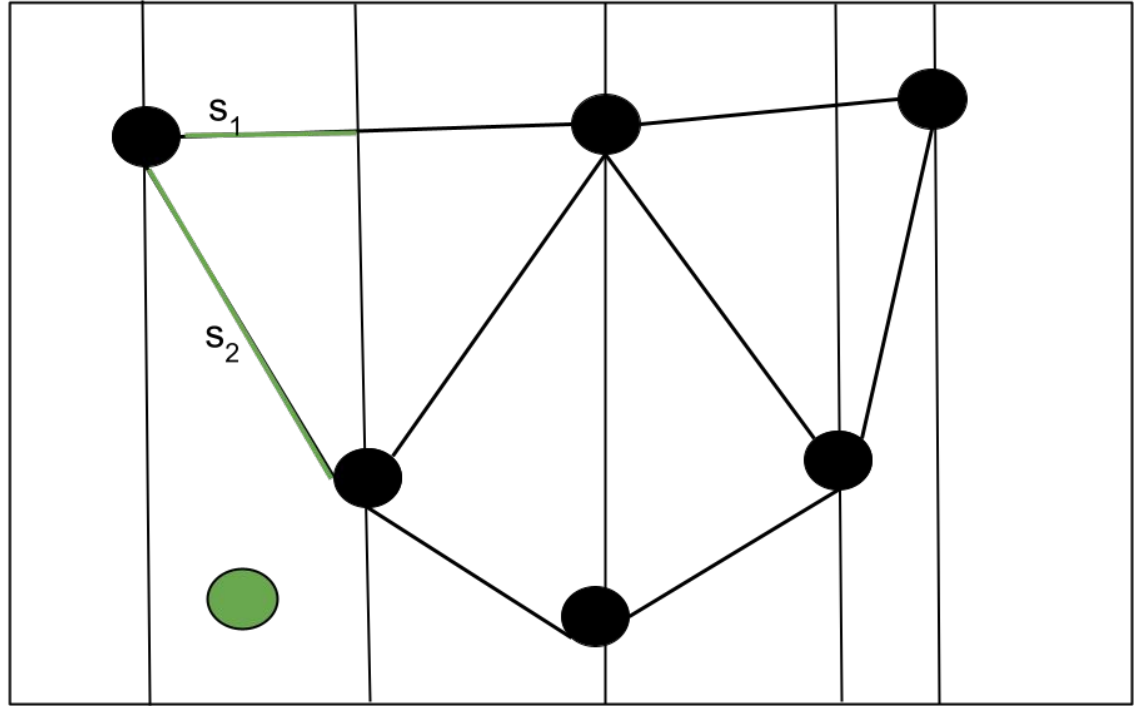
Consulta

- ¿Qué pasa si el punto que estamos buscando es el verde?
- Al buscar podremos ver que está abajo de S_2 .



Consulta

- ¿Qué pasa si el punto que estamos buscando es el verde?
- Al buscar podremos ver que está abajo de S_2 .
- Entonces está fuera de la subdivisión plana.

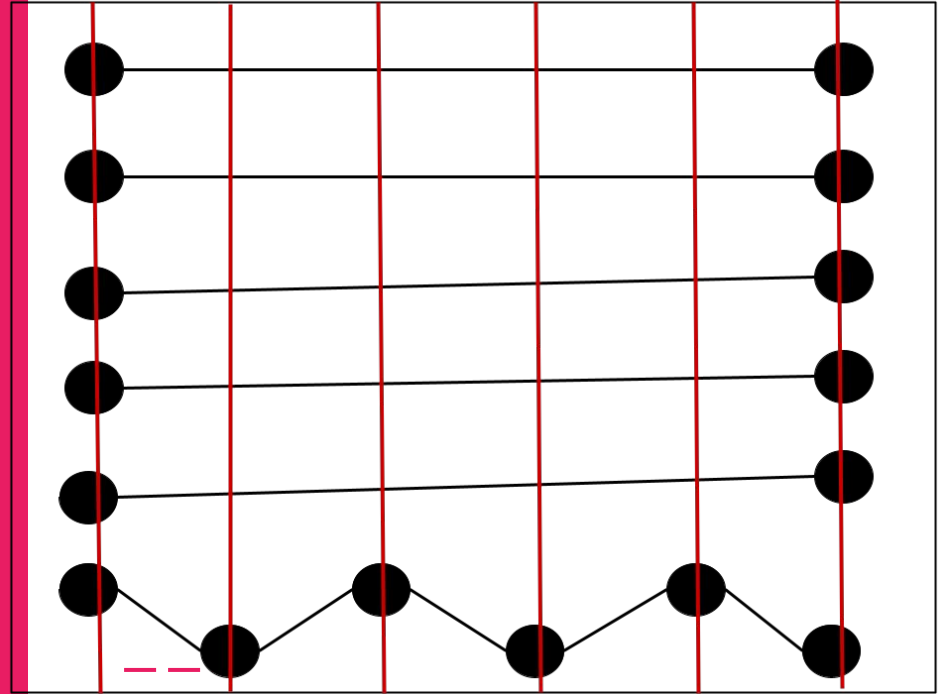


Complejidad

Construcción:

— — —

Complejidad



Complejidad

Construcción:

$O(n^2)$

Consulta:

Complejidad

Construcción:

$$O(n^2)$$

Consulta:

$$O(\log n)$$

Mejoremos ésta subdivisión

Usemos un Mapa Trapezoidal

Para poder mejorar la complejidad de procesar la construcción de la subdivisión trapezoidal se pedirán ciertas características que son:

Usemos un Mapa Trapezoidal

Para poder mejorar la complejidad de procesar la construcción de la subdivisión trapezoidal se pedirán ciertas características que son:

- ❑ Que un segmento no tenga dos puntos con la misma coordenada x .

Usemos un Mapa Trapezoidal

Para poder mejorar la complejidad de procesar la construcción de la subdivisión trapezoidal se pedirán ciertas características que son:

- ❑ Que un segmento no tenga dos puntos con la misma coordenada x.
- ❑ Que no haya segmentos verticales.

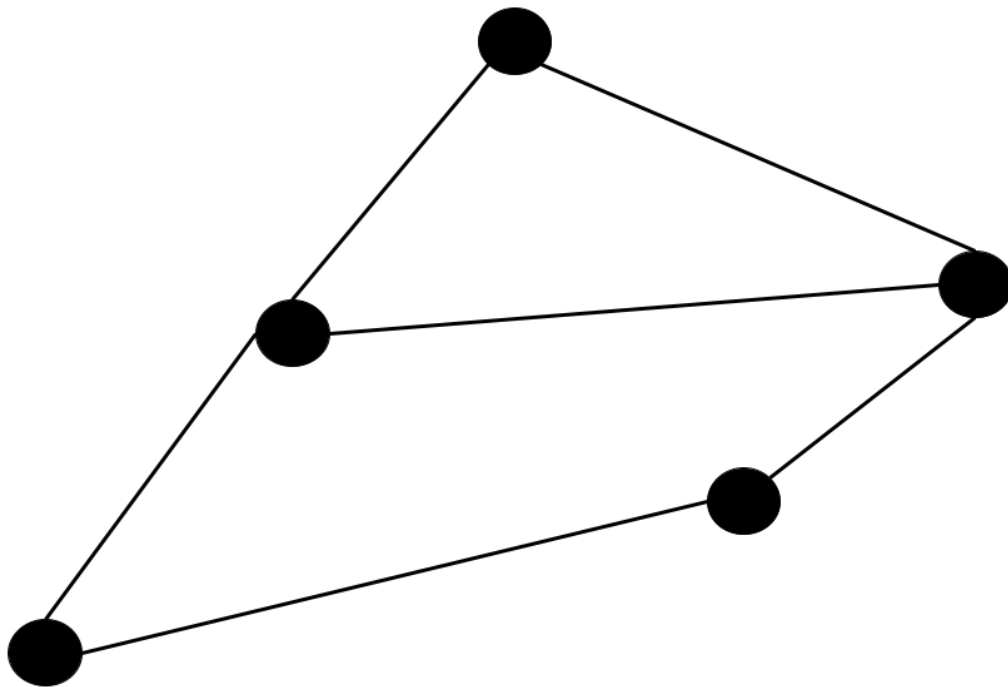
Usemos un Mapa Trapezoidal

Para poder mejorar la complejidad de procesar la construcción de la subdivisión trapezoidal se pedirán ciertas características que son:

- ❑ Que un segmento no tenga dos puntos con la misma coordenada x.
- ❑ Que no haya segmentos verticales.
- ❑ Los segmentos de la subdivisión no se crucen.

Subdivisión Trapezoidal (Mapa trapezoidal)

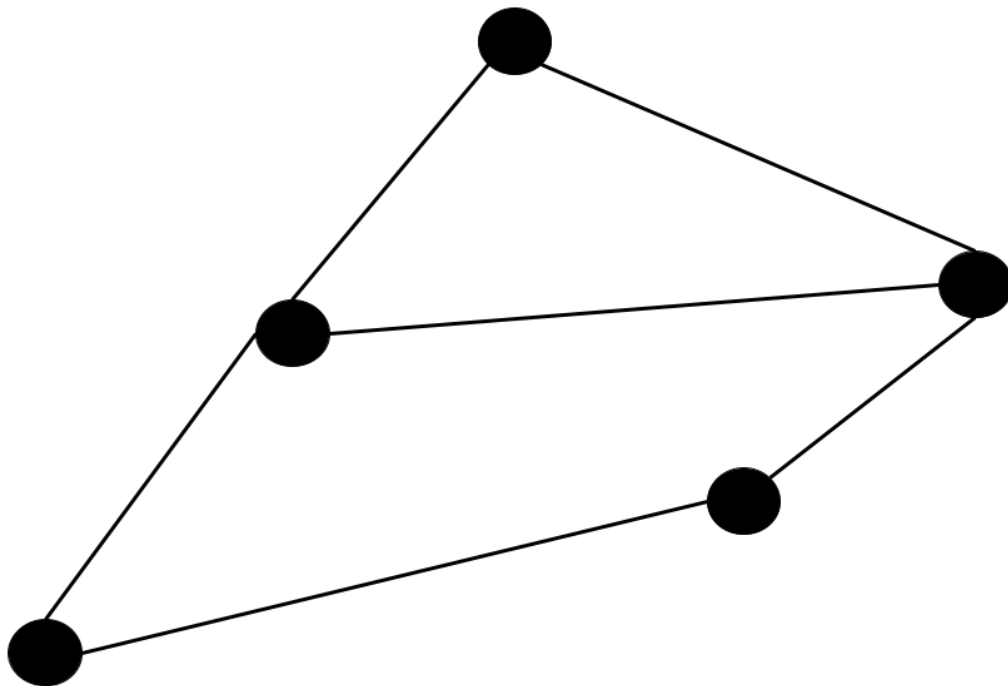
- Entonces para la mejora estamos pidiendo un conjunto de segmentos en posición general.



Subdivisión Trapezoidal (Mapa trapezoidal)

— — —

- Entonces para la mejora estamos pidiendo un conjunto de segmentos en posición general.
- A ésta subdivisión también se le conoce como subdivisión vertical.



Usemos un Mapa Trapezoidal

Pasos para construir un mapa trapezoidal:

1. Encerrar el conjunto de segmentos en un rectángulo.

Usemos un Mapa Trapezoidal

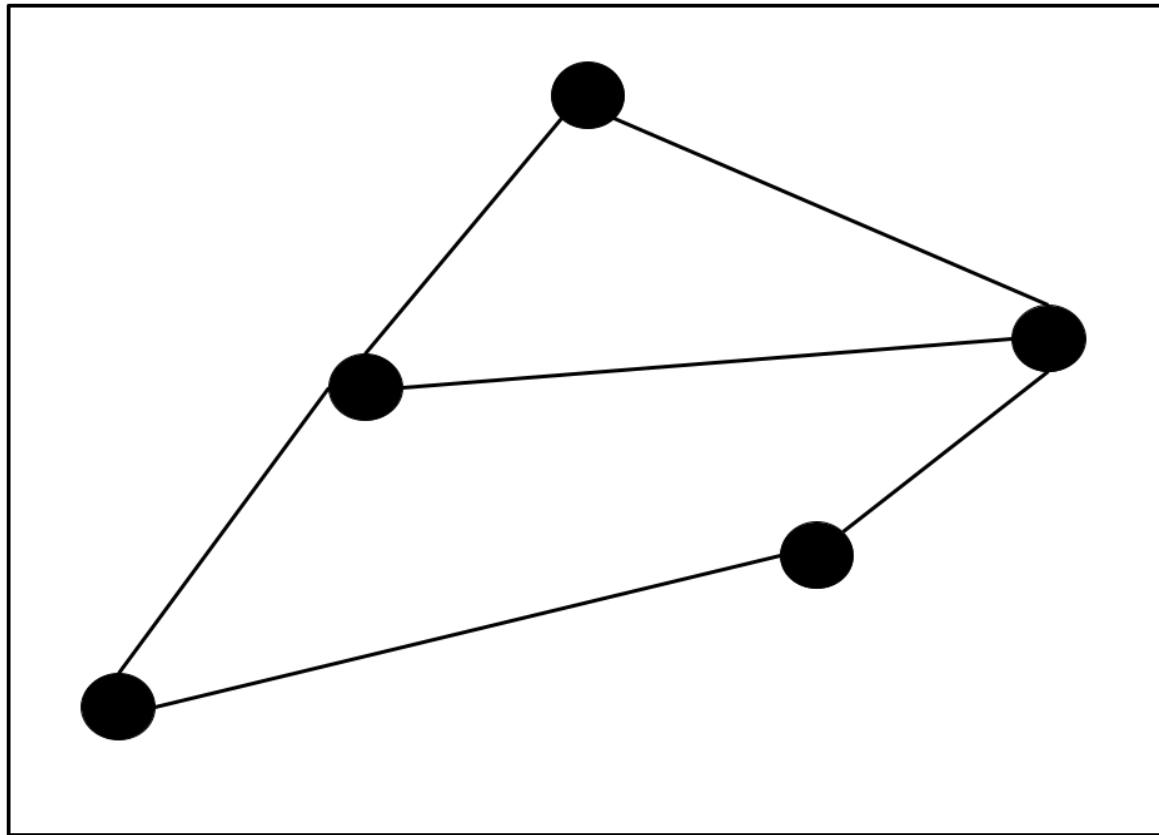
Pasos para construir un mapa trapezoidal:

1. Encerrar el conjunto de segmentos en un rectángulo.
2. Lanzar dos líneas verticales, una hacia arriba y otra hacia abajo hasta que toque parte de algún segmento o el rectángulo para cada vértice.

Construcción

— — —

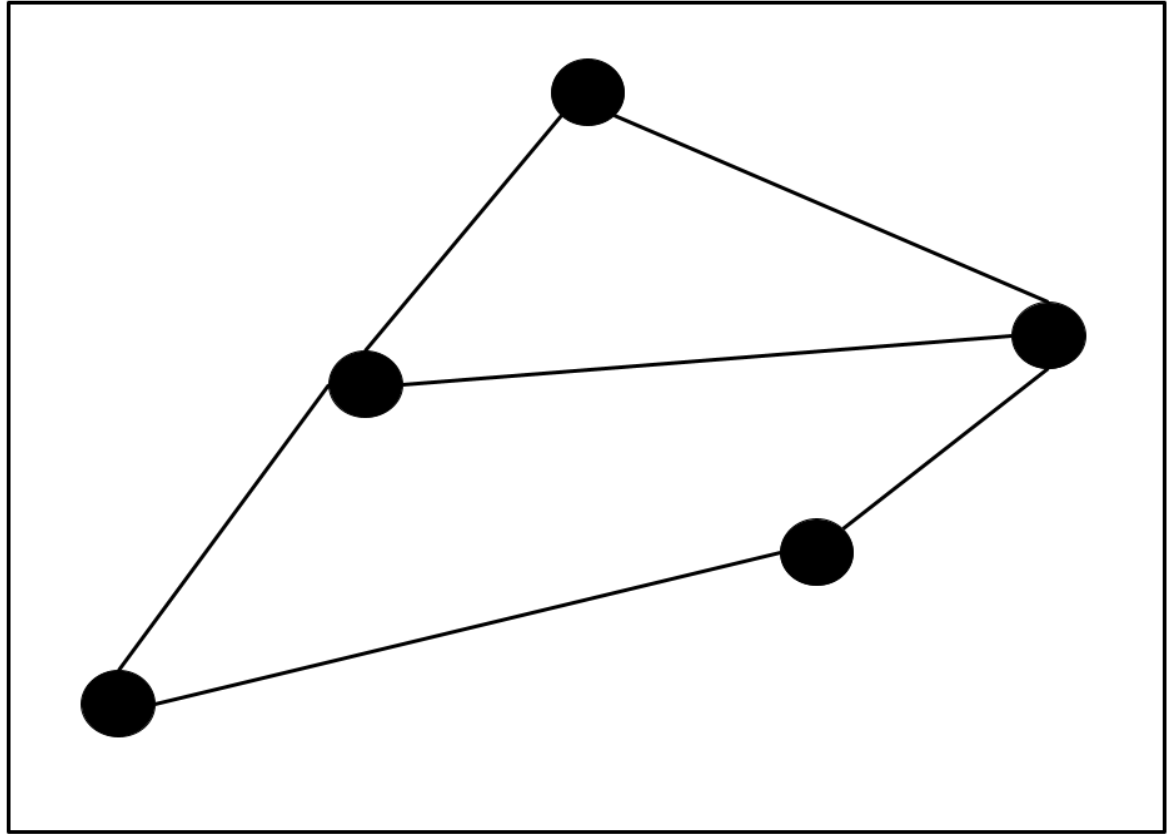
- Encerramos en un rectángulo.



Construcción

— — —

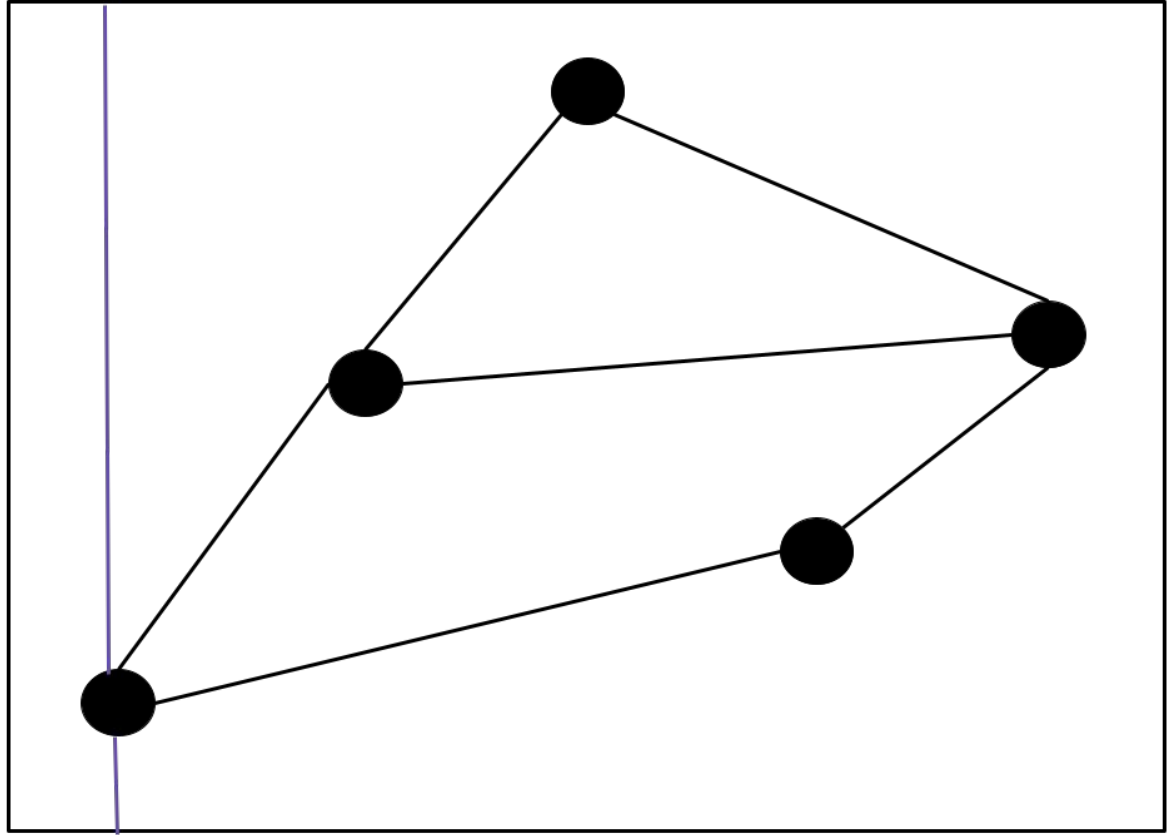
- Encerramos en un rectángulo.
- Trazamos las líneas verticales en cada punto.



Construcción

— — —

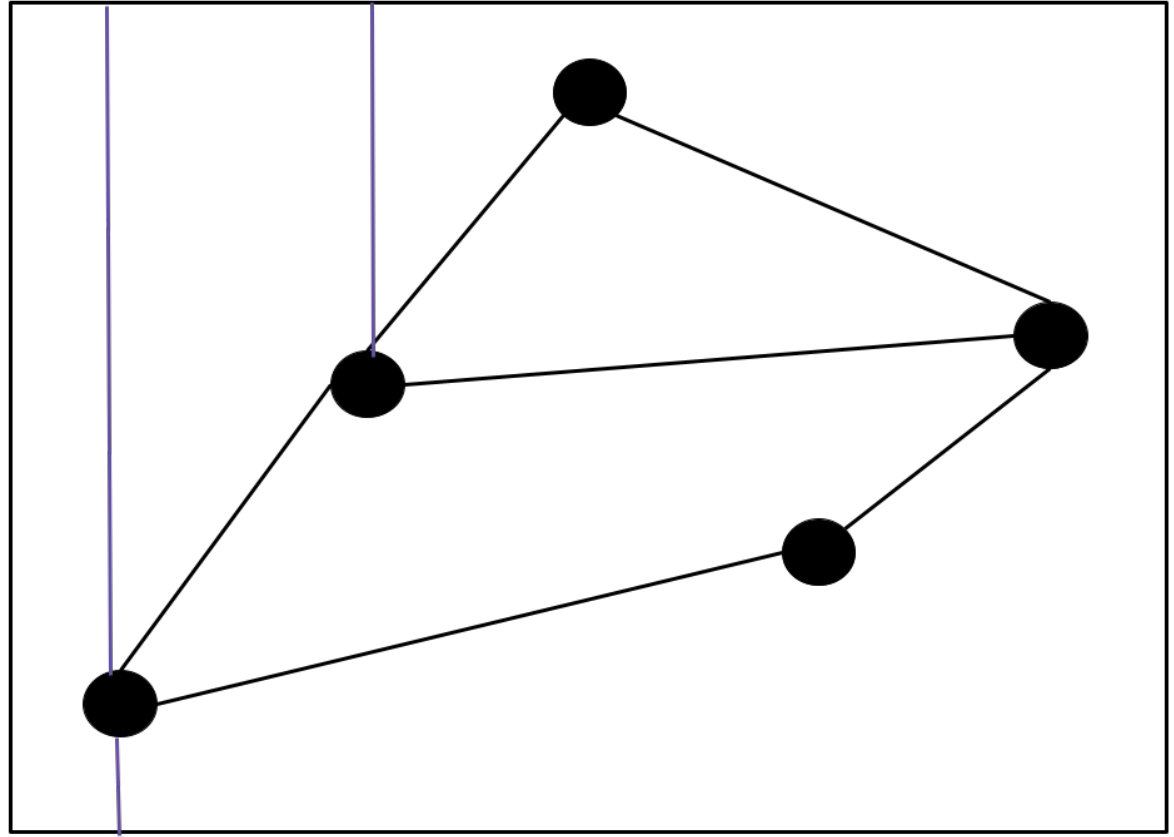
- Encerramos en un rectángulo.
- Trazamos las líneas verticales en cada punto.



Construcción

— — —

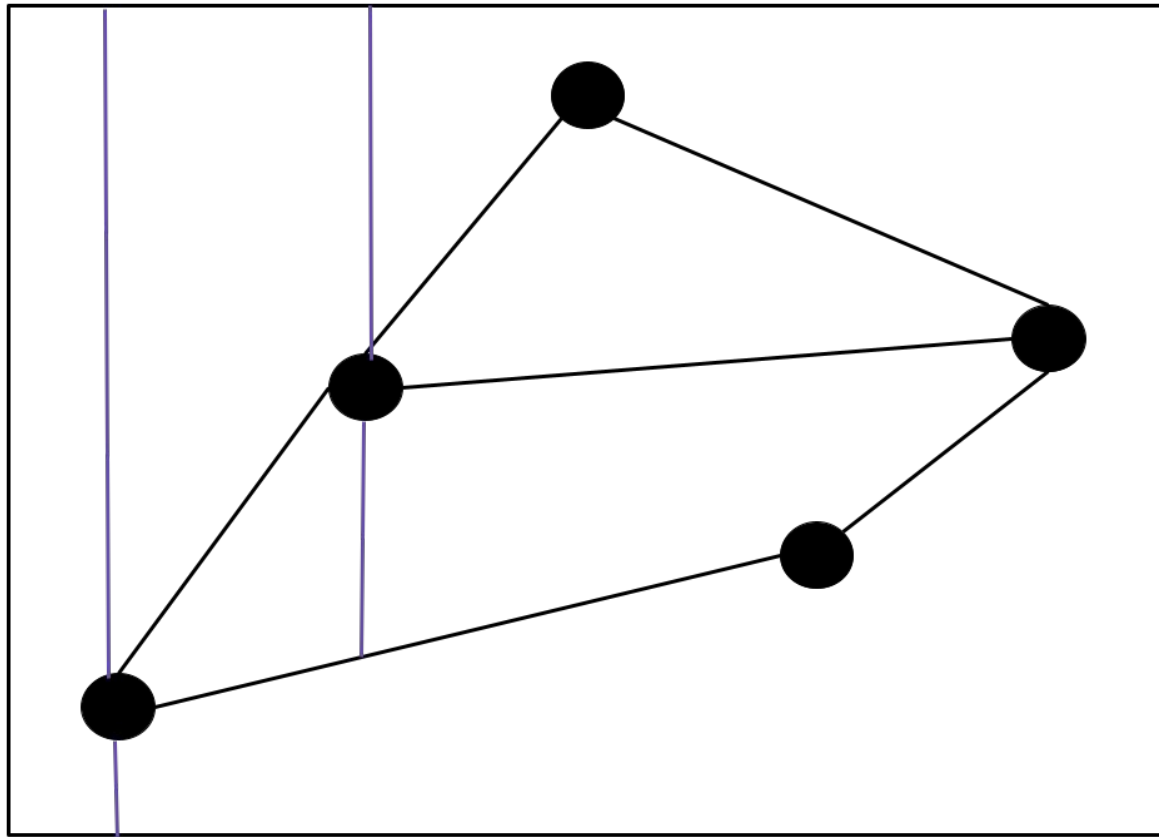
- Encerramos en un rectángulo.
- Trazamos las líneas verticales en cada punto.



Construcción

— — —

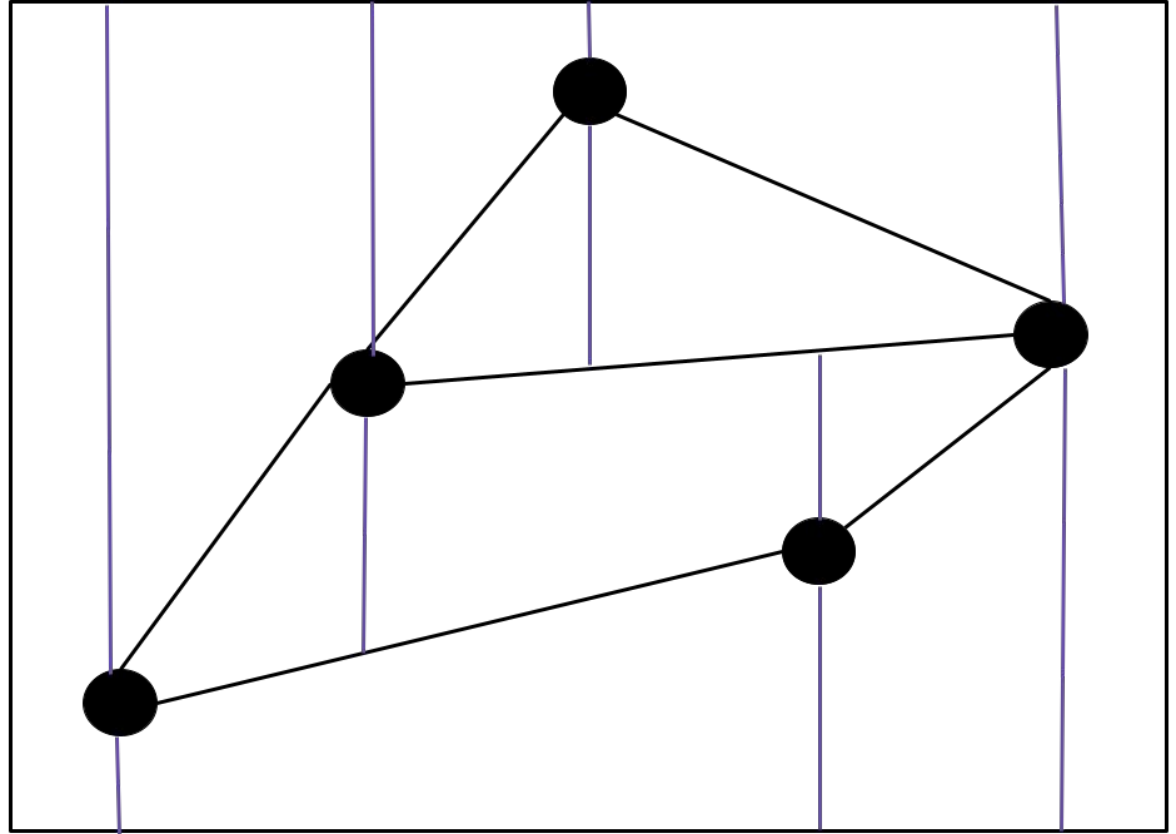
- Encerramos en un rectángulo.
- Trazamos las líneas verticales en cada punto.



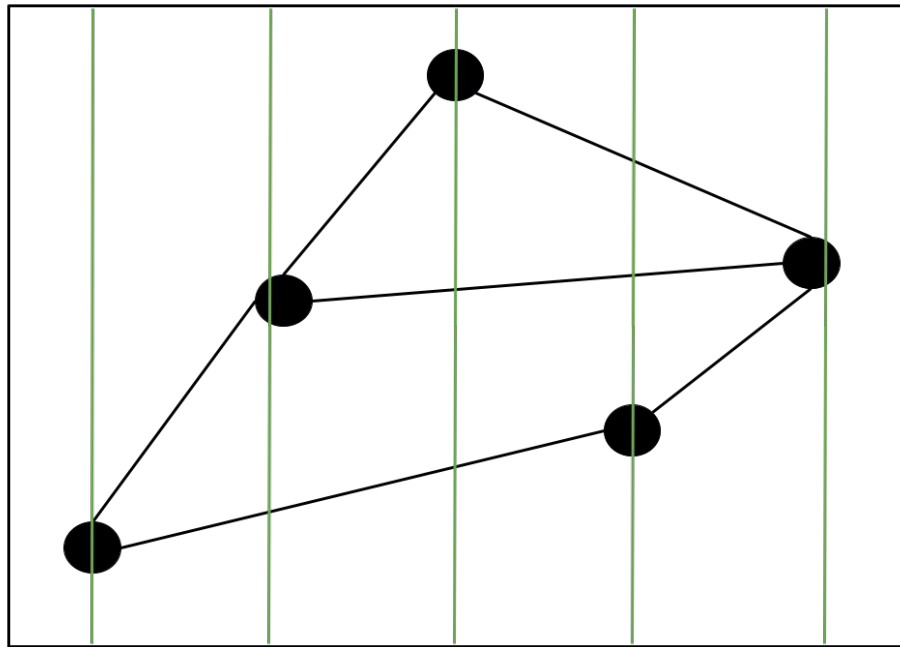
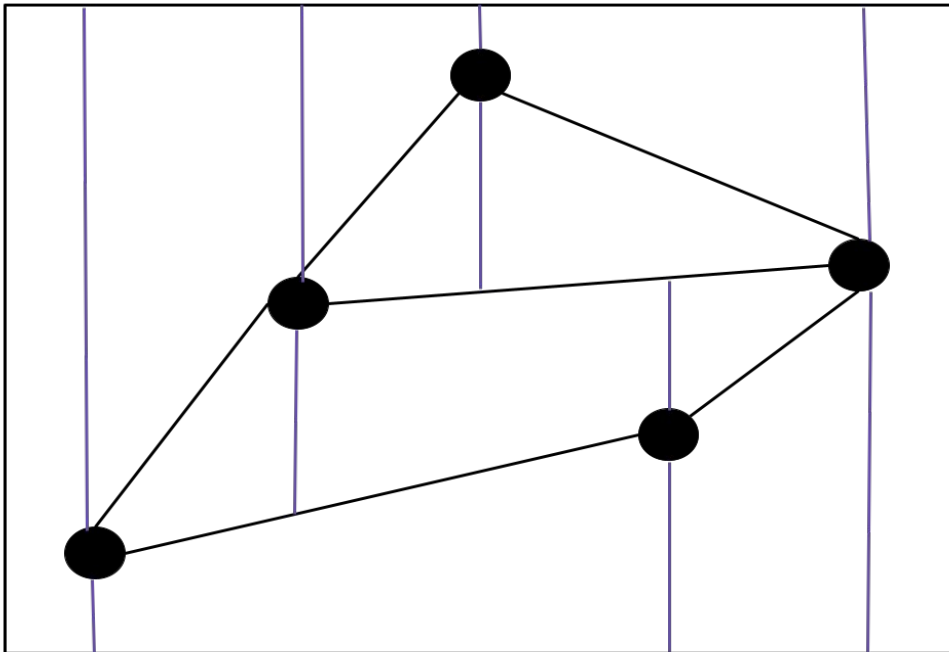
Construcción

— — —

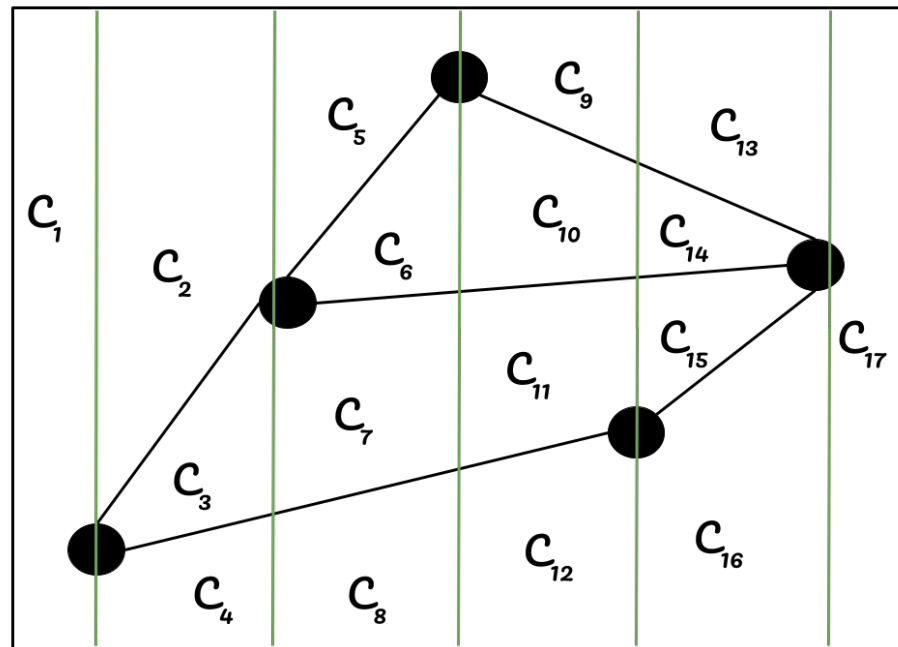
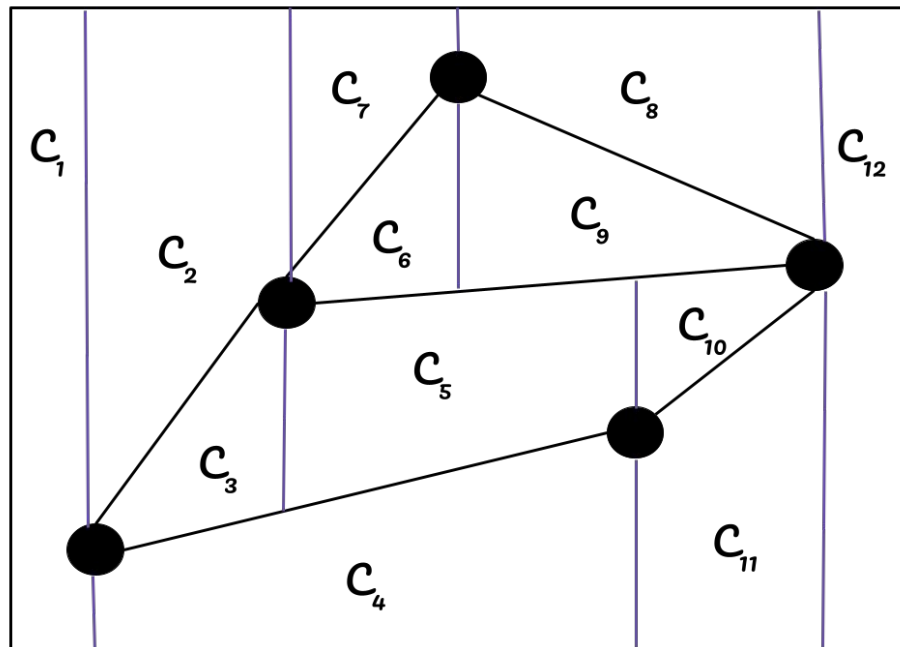
- Encerramos en un rectángulo.
- Trazamos las líneas verticales en cada punto.



Comparando subdivisiones



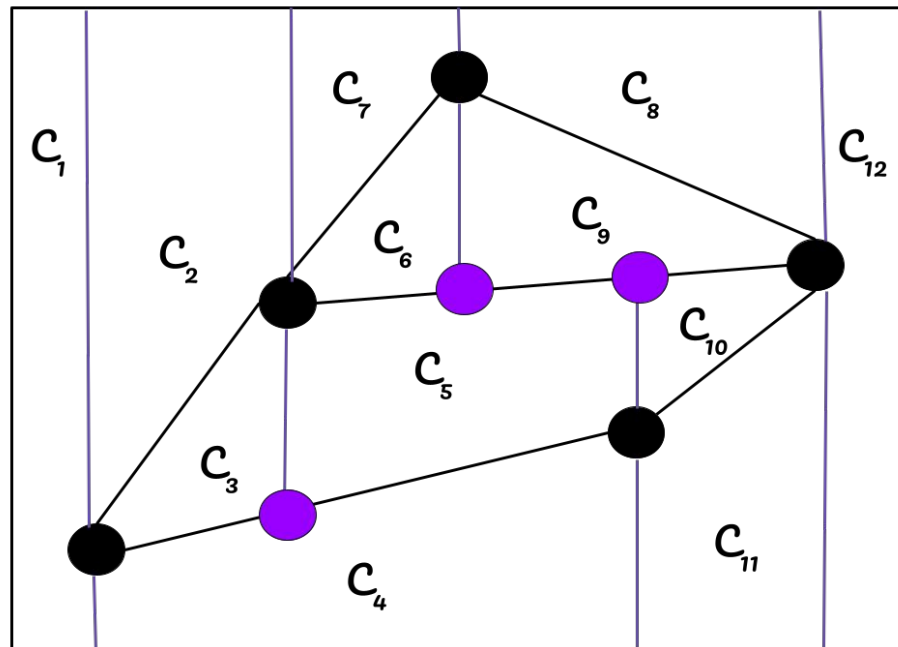
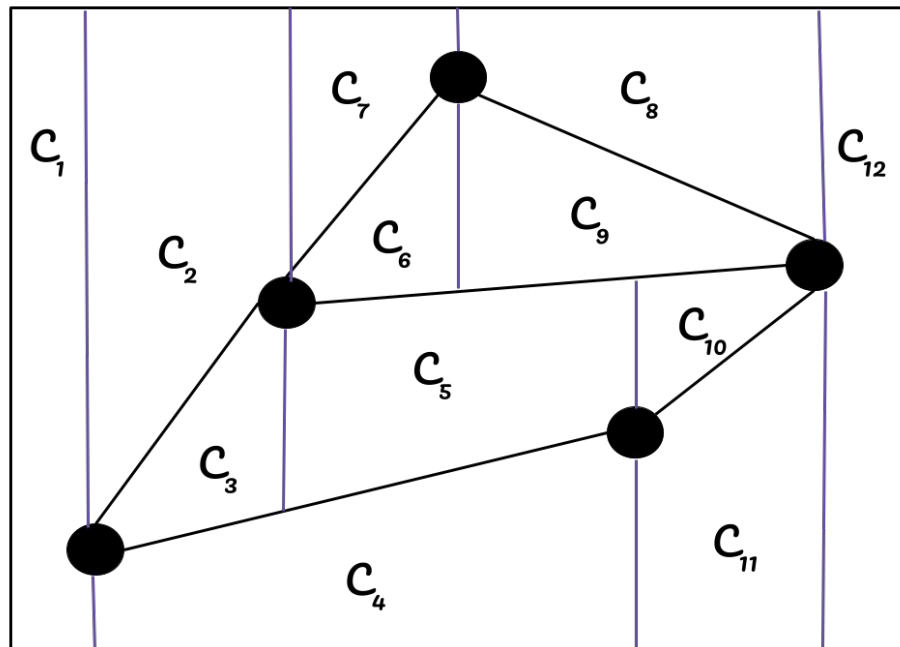
Comparando subdivisiones



Resultados importantes

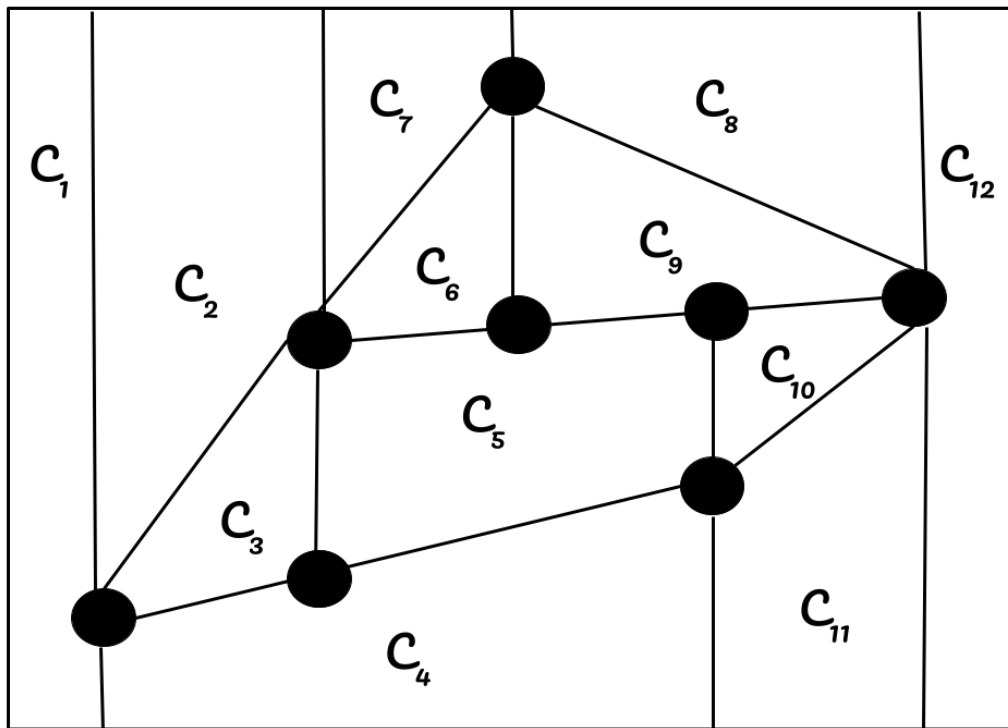
- Una subdivisión trapezoidal puede tener a lo más $6n + 1$ vértices.
- Una subdivisión trapezoidal puede tener a lo más $3n + 1$ caras que pueden ser trapecios o triángulos.

Comparando subdivisiones



Subdivisión resultante

— — —



Complejidad

Construcción:

— — —

Complejidad

Construcción:

$O(n)$

Consulta:

Complejidad

Construcción:

$$O(n^2)$$

Consulta:

$$O(\log n)$$

Subdivisión Trapezoidal Incremental

Construcción

- Vamos a tener una estructura para realizar la búsqueda que será un árbol.

Construcción

- Vamos a tener una estructura para realizar la búsqueda que será un árbol.
- En el árbol tendremos dos tipos de nodos, los nodos que buscan de acuerdo a la coordenada x (izquierda y derecha) y otros a la coordenada y (arriba y abajo).

Construcción

- Vamos a tener una estructura para realizar la búsqueda que será un árbol.
- En el árbol tendremos dos tipos de nodos, los nodos que buscan de acuerdo a la coordenada x (izquierda y derecha) y otros a la coordenada y (arriba y abajo).
- En las hojas del árbol vamos a tener las caras de la subdivisión.

Construcción

- Vamos a ir procesando segmento por segmento (por ello incremental).

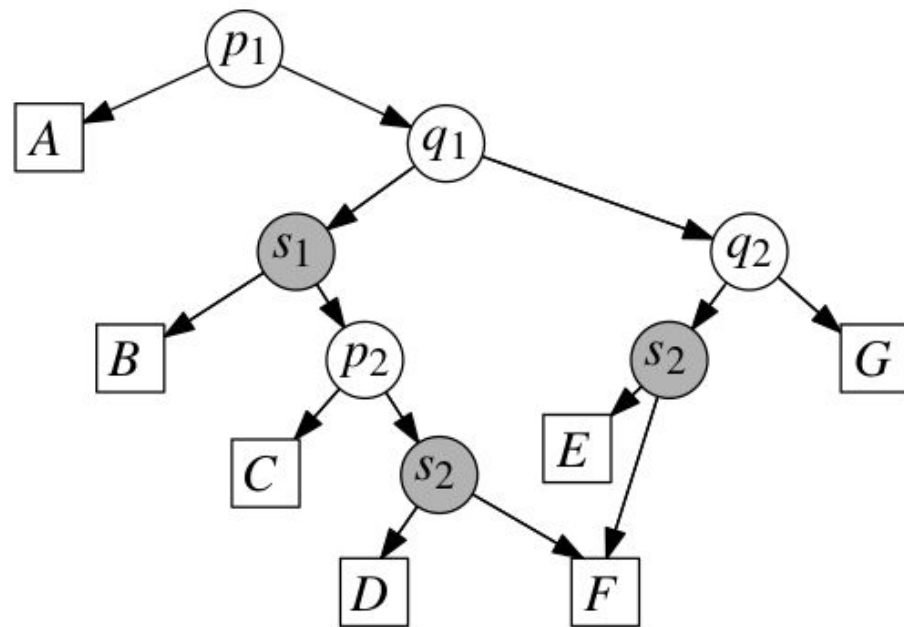
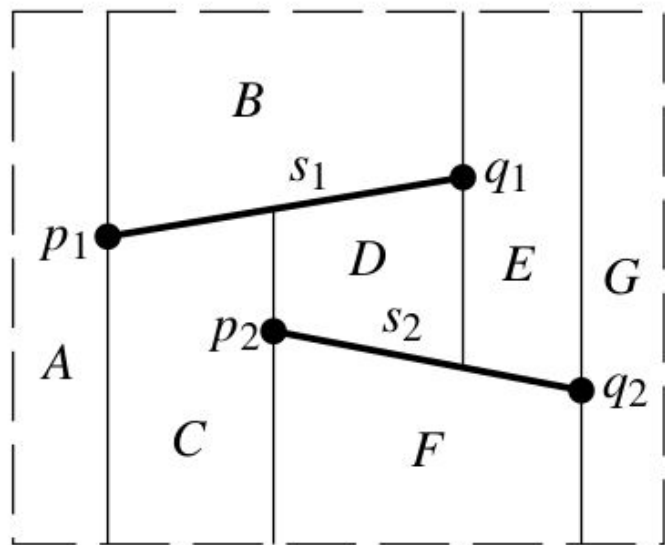
Construcción

- Vamos a ir procesando segmento por segmento (por ello incremental).
- En el árbol almacenaremos puntos, segmentos y caras.

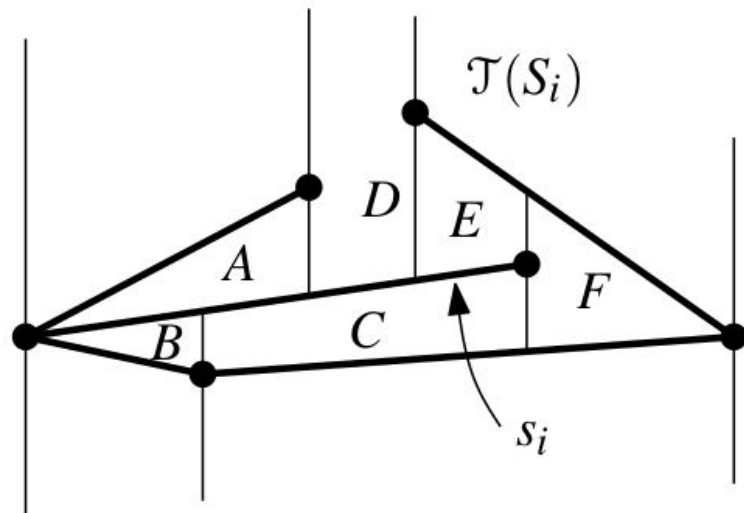
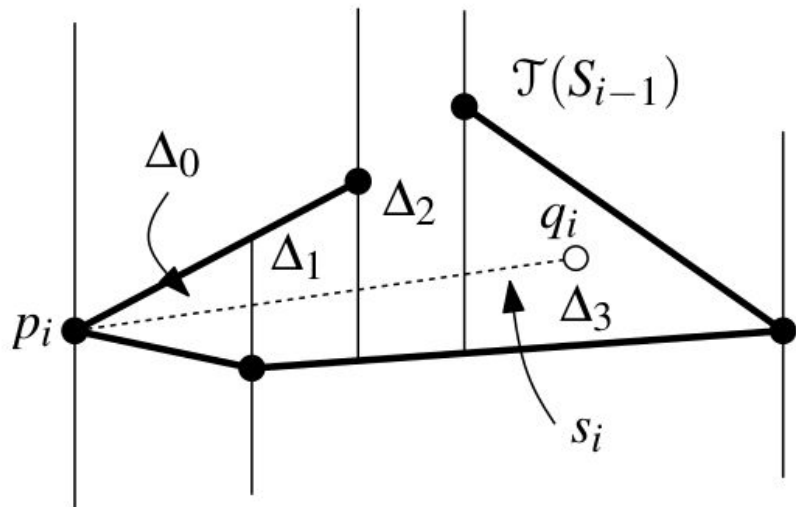
Construcción

- Vamos a ir procesando segmento por segmento (por ello incremental).
- En el árbol almacenaremos puntos, segmentos y caras.
- Debemos saber identificar los lados izquierdos y derechos (como lo hicieron en clase).

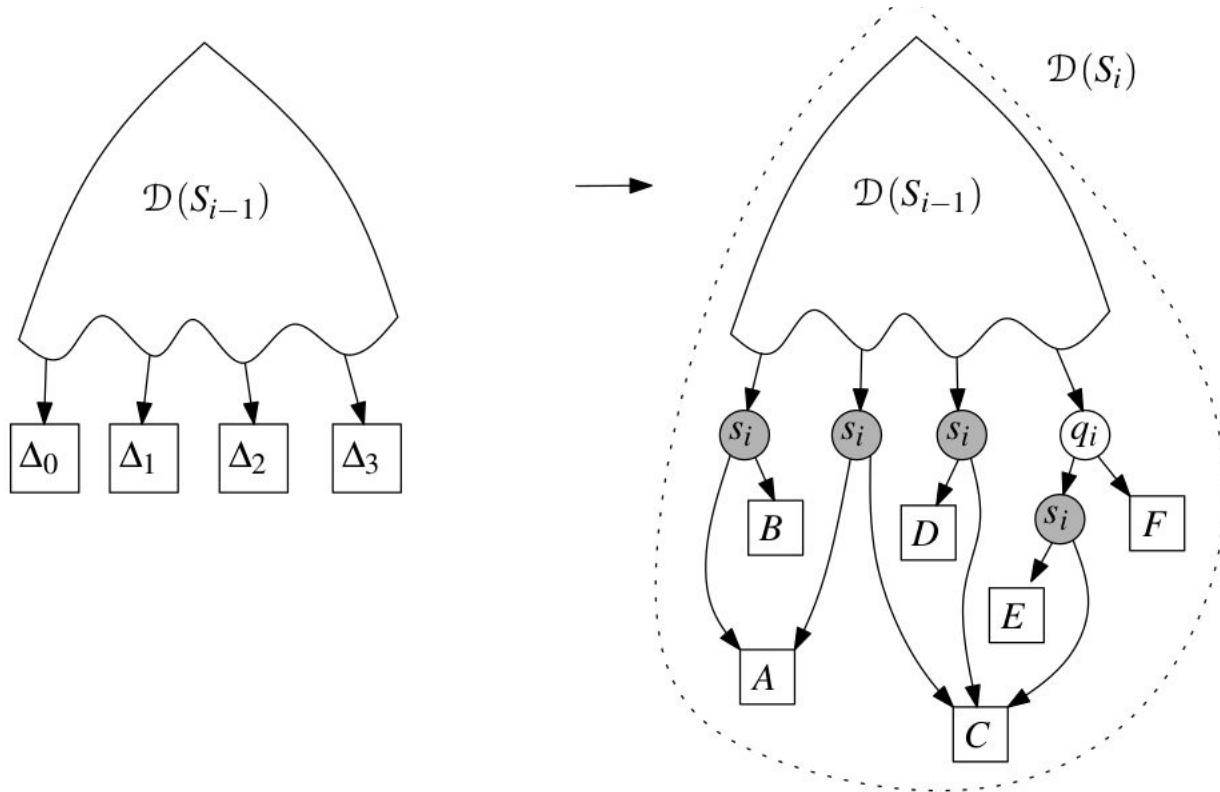
Ejemplo



Actualización



Actualización



Complejidad

Construcción:

— — —

Complejidad

Construcción:

$$O(n^2)$$

Consulta Esperada:

Complejidad

Construcción:

$O(n^2)$

Consulta Esperada:

$O(\log n)$ pero puede ser $O(n)$

Actualización:

Complejidad

Construcción:

$O(n^2)$

Consulta Esperada:

$O(\log n)$ pero puede ser $O(n)$

Actualización:

$O(n^2)$

Bibliografía:

1. Overmars, M. *Computational Geometry. Algorithms and Applications* .3ra Edición. Springer. 2008.