Análise de Sobrevivência e Confiabilidade

Vicente G. Cancho
garibay@icmc.usp.br

Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
Universidade de São Paulo

Caracterização dos tempos de sobrevivência

Seja T : o tempo até a ocorrência de um evento de interessa de uma unidade de experimental.
A distribuição de probabilidade de T pode ser especificada de três formas:

- função de sobrevivência (ou confiabilidade);
- função de densidade, e
- função risco.

Função de sobrevivência

A probabilidade do evento acontecer após o tempo t e é dada pela função de *sobrevivência*

$$S(t) = P(T > t)$$

Função de sobrevivência

A probabilidade do evento acontecer após o tempo t e é dada pela função de *sobrevivência*

$$S(t) = P(T > t) = 1 - F(t). \tag{1}$$

Função de sobrevivência

A probabilidade do evento acontecer após o tempo t e é dada pela função de *sobrevivência*

$$S(t) = P(T > t) = 1 - F(t). \tag{1}$$

onde $F(t)$ é a função de distribuição acumulada da v.a T.

Função de sobrevivência

A probabilidade do evento acontecer após o tempo t e é dada pela função de *sobrevivência*

$$S(t) = P(T > t) = 1 - F(t). \qquad (1)$$

onde $F(t)$ é a função de distribuição acumulada da v.a T.

Propriedades

- $\lim_{t\to 0} S(t) = 1$;

Função de sobrevivência

A probabilidade do evento acontecer após o tempo t e é dada pela função de *sobrevivência*

$$S(t) = P(T > t) = 1 - F(t). \tag{1}$$

onde $F(t)$ é a função de distribuição acumulada da v.a T.

Propriedades

- $\lim_{t \to 0} S(t) = 1$;
- $\lim_{t \to \infty} S(t) = 0$;
- $S(t)$ é uma função não crescente do tempo t.

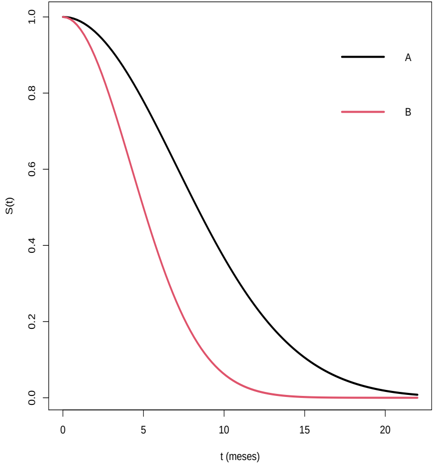
Função de sobrevivência

Observação

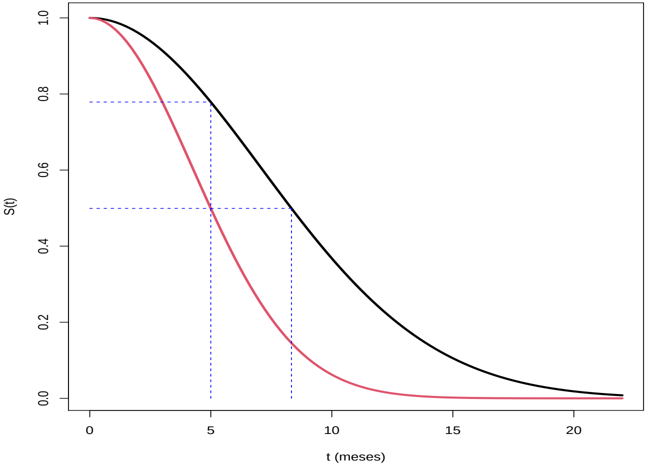
- *A primeira propriedade significa que no início do acompanhamento, todos os indivíduos não sofreram o evento de interesse.*
- *O segundo implica que se o tempo de acompanhamento for suficiente longo ($t \to \infty$), todos os indivíduos sofrerão o evento em estudo.*
- *O segundo também significa que não há fração de cura; veja mais sobre este tópico em Ibrahim et al. (2001) e Rodrigues et al. (2009).*
- *A terceira propriedade é herdada diretamente de a relação com a função de distribuição cumulativa $F(t)$*

Função de sobrevivência

- T: tempo até a falha de produtos;
- A Figura ao lado representa a função de confiabilidade de produtos de 2 marcas;
- O produto da marca A é superior que ao da marca B em relação da durabilidade;
- O produto da marca A é mais confiável que o produto da marca B.



Função de sobrevivência



Função de sobrevivência

- Note que produtos da marca A o tempo para que ao redor do 50% dos produtos ter falhado (tempo mediano) é aproximadamente 9 meses, enquanto para o produto da marca B é 5 meses.
- Outra informação que podemos retirar desta figura é o porcentual de produtos que estará em operação até um tempo determinado tempo de interesse.
- Assim, para os produtos da marca A, aproximadamente 80% de produtos ainda estarão em operação com 5 meses de uso, enquanto para a marca B é 50%.

Função de densidade

A função de densidade da v.a. T é definido por

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{\Delta t} \\
&= - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[S(t + \Delta t) - S(t)]}{\Delta t} \\
&= -\frac{dS(t)}{dt} = -S'(t).
\end{aligned}
$$

Função de taxa de risco (ou falha)

- A taxa de risco é uma forma útil de descrever a distribuição do "tempo até o evento" porque tem uma interpretação natural que se relaciona com o envelhecimento de uma população.
- Essa terminologia é muito popular na comunidade biomédica.
- Motivamos a definição de taxa de risco definindo primeiro taxa de mortalidade, que é uma versão discreta da taxa de risco.

Função de taxa de risco (ou falha)

Definição (Taxa de mortalidade)

A taxa de mortalidade no tempo t, onde t é geralmente considerado um número inteiro em termos de alguma unidade de tempo (por exemplo, anos, meses, dias, etc), é a proporção da população que falhou (morre) entre os tempos t e $t+1$ entre indivíduos vivos no tempo t, ou seja,

$$m(t) = P(t \leq T < t+1 | T > t)$$

Função de taxa de risco (ou falha)

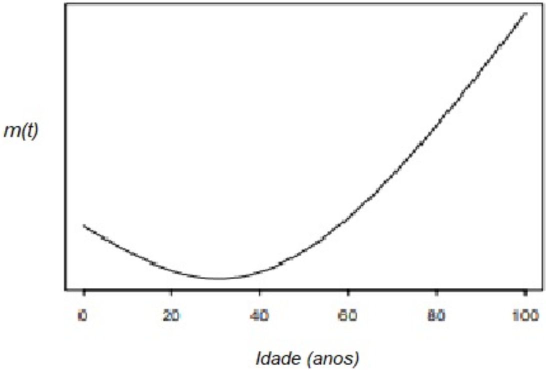


Figura: Padrão de mortalidade típico para humanos

Função de taxa de risco (ou falha)

- A *taxa de risco* $h(t)$ é o limite de uma taxa de mortalidade se o intervalo de tempo for considerado pequeno (em vez de uma unidade).
- A *taxa de risco* é a taxa instantânea de falha (experimentando o evento) no tempo t, dado que um indivíduo está vivo no tempo t.

Especificamente a *taxa de risco* é definido pela seguinte equação

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T > t)}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Função de taxa de risco (ou falha)

Portanto, se Δt é muito pequeno, temos

$$P(t \leq T < t + \Delta | T > t) \approx \Delta t h(t).$$

A definição da função de risco implica que]

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t)}{\Delta t}}{P(T > t)} = \frac{f(t)}{S(t)} \\ &= \frac{-S'(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} \log(S(t)) \end{aligned} \tag{3}$$

Função de taxa de risco (ou falha)

Em (3) , integrando os dois lados obtém-se

$$H(t) = \int_0^t h(u)du = -\log(S(t))$$

onde $H(t)$ é referido como a função de risco cumulado.

Função de taxa de risco (ou falha)

Em (3) , integrando os dois lados obtém-se

$$H(t) = \int_0^t h(u)du = -\log(S(t))$$

onde $H(t)$ é referido como a função de risco cumulado.

Propriedades

- $\lim_{t \to 0} H(t) = 0$;

Função de taxa de risco (ou falha)

Em (3) , integrando os dois lados obtém-se

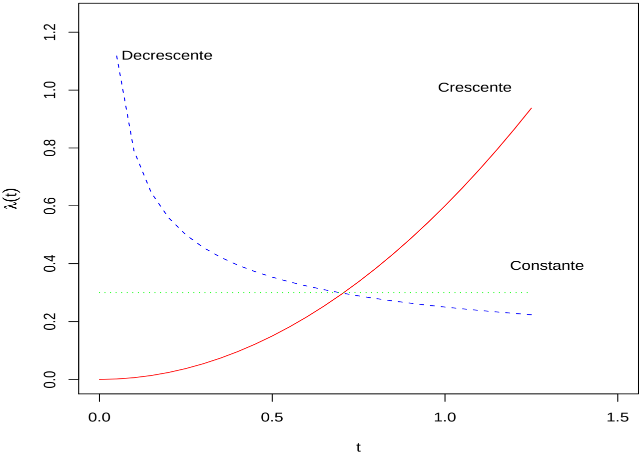
$$H(t) = \int_0^t h(u)du = -\log(S(t))$$

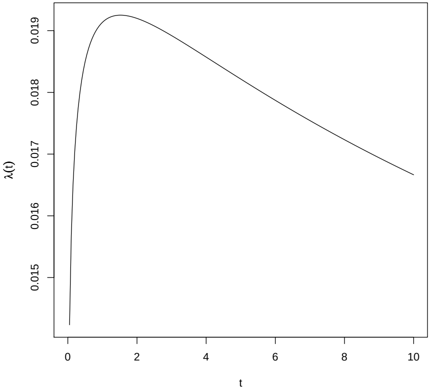
onde $H(t)$ é referido como a função de risco cumulado.

Propriedades

- $\lim_{t\to 0} H(t) = 0$;
- $\lim_{t\to \infty} H(t) = \infty$;
- $H(t)$ é uma função crescente do tempo t e ilimitada.

Função de taxa de risco (ou falha)




0.019
0.018
0.017
0.016
0.015
λ(t)
0
2
4
6
8
10
t

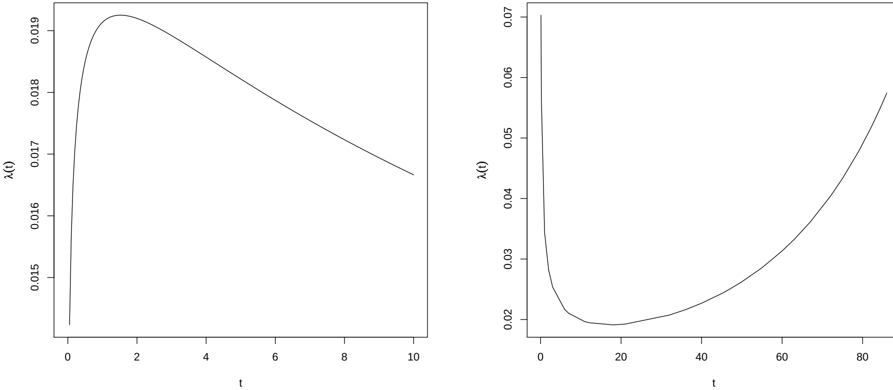


Figura: Função de taxa de falha unimodal e forma de banheira (ou U)

Algumas relações entre as funções

- $$f(t) = -\frac{d}{dt}\left(S(t)\right),$$

Algumas relações entre as funções

- $$f(t) = -\frac{d}{dt}(S(t)),$$
- $$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt}(\log S(t)),$$

Algumas relações entre as funções

- $$f(t) = -\frac{d}{dt}\left(S(t)\right),$$
- $$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt}\left(\log S(t)\right),$$
- $$H(t) = -log(S(t)),$$

Algumas relações entre as funções

- $$f(t) = -\frac{d}{dt}\left(S(t)\right),$$
- $$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt}\left(\log S(t)\right),$$
- $$H(t) = -log(S(t)),$$
- $$S(t) = \exp(-H(t)) = \exp\left(-\int_0^t h(u)du\right) \text{ e}$$

Algumas relações entre as funções

- $$f(t) = -\frac{d}{dt}\left(S(t)\right),$$

- $$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt}\left(\log S(t)\right),$$

- $$H(t) = -log(S(t)),$$

- $$S(t) = \exp(-H(t)) = \exp\left(-\int_0^t h(u)du\right) \text{ e}$$

- $$f(t) = h(t)S(t) = h(t)\exp(-H(t)).$$

Exemplo-1

Suponha que a taxa de falha instantânea de componentes elétricos, é expressa pela função linear: $h(t) = 0,5t$

(a) Determine a função de confiabilidade, e a função de densidade.

(b) Obtenha o tempo médio de falha.

(c) Obtenha e interprete $S(2)$.

Seja T o tempo de falha (em anos) de equipamentos.
A função de risco acumulado de T

$$H(t) = \int_{t=0}^{t} (0,5u)du = 0,25t^2, \quad t > 0$$

A função de sobrevivência (confiabilidade) de T resulta

$$S(t) = \exp\{-0.25t^2\} \quad t > 0$$

A f.d.p de T resulta

$$f(t) = 0,5t \exp\{-0.25t^2\} \quad t > 0$$

O tempo médio de falha

$$E(T) = \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty 0,5t^2 \exp\{-0.25t^2\}dt$$
$$= 2\frac{\Gamma(3/2)}{2} = \sqrt{\pi}.$$

$$S(2) = \exp\{-0.25 \times 2^2\} = 0,36(36\%)$$

Algumas medidas em análise de sobrevivência

- O *tempo médio de vida* é obtida pela área sob a função de sobrevivência. Isto é,

$$E(T) = \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty S(t)dt$$

- A *vida média residual* (VMR) é obtida pela área sob a curva de sobrevivência à direita do tempo t e dividida por $S(t)$. Ou seja,

$$VMR(t) = E[T - t | T > t] = \frac{\int_t^\infty (u-t)f(u)du}{S(t)} = \frac{\int_t^\infty S(u)du}{S(t)}.$$

Algumas medidas em análise de sobrevivência

- O *tempo médio de vida* é obtida pela área sob a função de sobrevivência. Isto é,

$$E(T) = \int_0^\infty t f(t) dt = \int_0^\infty S(t) dt$$

- A *vida média residual* (VMR) é obtida pela área sob a curva de sobrevivência à direita do tempo t e dividida por $S(t)$. Ou seja,

$$VMR(t) = E[T - t | T > t] = \frac{\int_t^\infty (u-t) f(u) du}{S(t)} = \frac{\int_t^\infty S(u) du}{S(t)}.$$

  A VMR mede para indivíduos com idade t o tempo médio restante de vida.

- O *q-ésimo quantil* da distribuição T é o valor tal que t_q tal que

$$P(T \leq t_q) = q, \; 0 < q < 1.$$

Para Exemplo 1, tem-se:

$$E[T] = \int_0^{\infty} \exp\{-0,25t^2\}dt = \int_0^{\infty} exp\{-u\}\frac{2}{u^{1/2}}du$$
$$= 2\int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}+1-1}e^{-u}du = 2\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi} = 1,772 \text{ anos}$$

0 q-ésimo quantil

$$\exp\{-0,25t_q^2\} = 1 - q, \implies t_q = -2log(1-q)^{1/2}$$

Daí o tempo mediano de falha $t_{0,5}$ é,

$$t_{0,5} = 2(log(2))^2 = 1,665 \text{ anos}$$

Modelos de Sobrevivência

Modelos mais utilizados na análise de sobrevivência e confiabilidade:

- Exponencial.
- Weibull.
- Gama.
- Log–Logística.
- Log–normal.
- Gama Generalizada.

Modelo Exponencial

Uma variável aleatória T tem distribuição exponencial com parâmetro $\lambda > 0$ se sua função de densidade de probabilidade (fdp) é dada por

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \; t > 0.$$

A correspondente função de sobrevivência e função de risco são dados

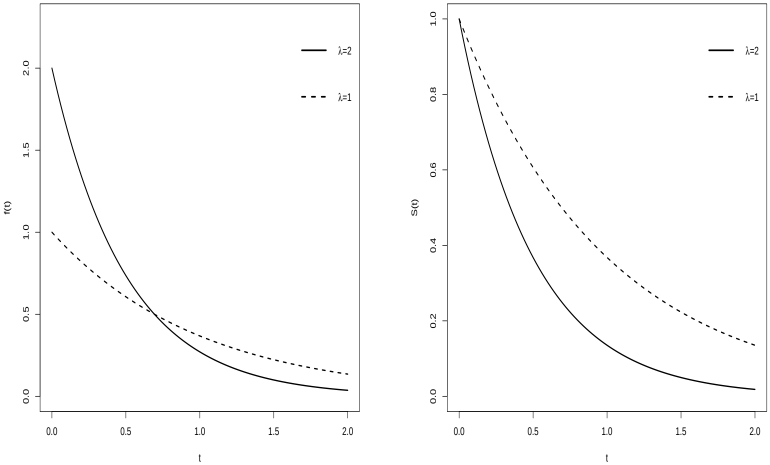
$$S(t) = e^{-\lambda t}, \; t > 0,$$

e

$$h(t) = \lambda, \; t > 0.$$

respectivamente.
Notação: $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Modelo Exponencial



Modelo Exponencial

- O k-ésimo momento é dada por

$$E[T^k] = \lambda^{-k}\Gamma(k+1)$$

- A média e variância são dados por

$$E(T) = 1/\lambda, \;\; \mathrm{Var}(T) = 1/\lambda^2.$$

- O q-ésimo quantil é dado por:

$$t_q = -\log(1-q)/\lambda, \; 0 < q < 1.$$

- A mediana

$$t_{0,5} = \log(2)/\lambda.$$

Modelo Exponencial

- O tempo médio residual

$$VMR(t) = 1/\lambda.$$

- A falta de memória

$$P(T > s + t | T > t) = P(T > t).$$

- Indica que a vida restante de um componente independe de sua idade atual.

Modelo Exponencial

- A distribuição exponencial é usada frequentemente para modelar componentes eletrônicos que geralmente não sofrem desgaste até muito tempo depois da vida esperada do produto no qual estão instalados.
- São exemplos os componentes de circuitos integrados de alta qualidade como diodos, transistores, resistores e capacitores.

Modelo Exponencial-Exemplo (Nelson-1990)

Os tempos até a falha de ventiladores de motores a diesel tem distribuição exponencial com tempo médio de falha de 28700 horas.

(a) Qual é a probabilidade de um destes ventiladores não falhar nas primeiras 8000 horas de funcionamento?

(b) Determine e interprete o quantil 1%.

(c) Determine o tempo de falha mediano.

(c) Determine o quantil correspondente ao tempo médio.

Modelo Exponencial-Exemplo (Nelson-1990)

Os tempos até a falha de ventiladores de motores a diesel tem distribuição exponencial com tempo médio de falha de 28700 horas.

(a) Qual é a probabilidade de um destes ventiladores não falhar nas primeiras 8000 horas de funcionamento?

(b) Determine e interprete o quantil 1%.

(c) Determine o tempo de falha mediano.

(c) Determine o quantil correspondente ao tempo médio.

- Seja a v.a T representa o tempo até a falha de ventiladores de motores a diesel.

Modelo Exponencial-Exemplo (Nelson-1990)

Os tempos até a falha de ventiladores de motores a diesel tem distribuição exponencial com tempo médio de falha de 28700 horas.

(a) Qual é a probabilidade de um destes ventiladores não falhar nas primeiras 8000 horas de funcionamento?

(b) Determine e interprete o quantil 1%.

(c) Determine o tempo de falha mediano.

(c) Determine o quantil correspondente ao tempo médio.

- Seja a v.a T representa o tempo até a falha de ventiladores de motores a diesel.
- Do enunciado tem-se $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$ com $\lambda = 1/28700$.

Modelo Exponencial-Exemplo (Nelson-1990)

Os tempos até a falha de ventiladores de motores a diesel tem distribuição exponencial com tempo médio de falha de 28700 horas.

(a) Qual é a probabilidade de um destes ventiladores não falhar nas primeiras 8000 horas de funcionamento?

(b) Determine e interprete o quantil 1%.

(c) Determine o tempo de falha mediano.

(c) Determine o quantil correspondente ao tempo médio.

- Seja a v.a T representa o tempo até a falha de ventiladores de motores a diesel.
- Do enunciado tem-se $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$ com $\lambda = 1/28700$.
- (a) $Pr(T > 8000) = S(8000) = \exp\{\frac{8000}{28700}\} = 0,76$.

Modelo Exponencial-Exemplo (Nelson-1990)

Se 8000 horas é o tempo de garantia dada pelo fabricante, significa que 24% é a fração esperada de ventiladores que falhariam na garantia.

Modelo Exponencial-Exemplo (Nelson-1990)

Se 8000 horas é o tempo de garantia dada pelo fabricante, significa que 24% é a fração esperada de ventiladores que falhariam na garantia.

- (b)
  $t_{0,01} = -\log(1 - 0,01)/\lambda = 28700(-\log(0,99)) = 288\text{horas},$

Modelo Exponencial-Exemplo (Nelson-1990)

Se 8000 horas é o tempo de garantia dada pelo fabricante, significa que 24% é a fração esperada de ventiladores que falhariam na garantia.

- (b)
  $t_{0,01} = -\log(1-0,01)/\lambda = 28700(-\log(0,99)) = 288\text{horas},$
- Isto significa, que é esperado que cerca de 1% dos ventiladores falhem nas primeiras 288 horas de uso

Modelo Exponencial-Exemplo (Nelson-1990)

Se 8000 horas é o tempo de garantia dada pelo fabricante, significa que 24% é a fração esperada de ventiladores que falhariam na garantia.

- (b)
  $t_{0,01} = -\log(1-0,01)/\lambda = 28700(-\log(0,99)) = 288$horas,
- Isto significa, que é esperado que cerca de 1% dos ventiladores falhem nas primeiras 288 horas de uso
- (c) $t_{0,5} = \log(2)/\lambda = 28700(\log(2)) = 19893$ horas

Modelo Exponencial-Exemplo (Nelson-1990)

Se 8000 horas é o tempo de garantia dada pelo fabricante, significa que 24% é a fração esperada de ventiladores que falhariam na garantia.

- (b)
  $t_{0,01} = -\log(1-0,01)/\lambda = 28700(-\log(0,99)) = 288$horas,
- Isto significa, que é esperado que cerca de 1% dos ventiladores falhem nas primeiras 288 horas de uso
- (c) $t_{0,5} = \log(2)/\lambda = 28700(\log(2)) = 19893$ horas
- (d) Para $t_q = 28700$, qual é o valor de q? Dos dados $q = 0,63$. Ou seja o tempo médio de falha corresponde ao quantil 63%.

Modelo Weibull

Uma v.a. T tem a distribuição Weibull parâmetros $\lambda > 0$ (escala) e $\alpha > 0$ (forma) se sua f.d.p dada por

$$f(t) = \alpha\lambda t^{\alpha-1}e^{-\lambda t^{\alpha}}, \ t > 0 \tag{4}$$

Notação: $T \sim W(\alpha, \lambda)$.
A função de sobrevivência e função de riscos são dada por,

$$S(t) = e^{-\lambda t^{\alpha}}, \ t > 0 \tag{5}$$

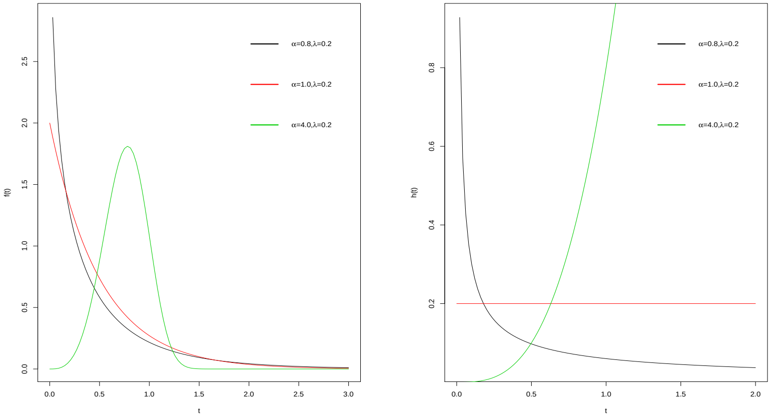
e

$$h(t) = \alpha\lambda t^{\alpha-1}, \ t > 0 \tag{6}$$

A forma da função de risco tem as seguintes formas:

- Se $\alpha = 1$ a função de risco é constante (distribuição exponencial)
- Se $\alpha < 1$ a função de risco é decrescente,
- Se $\alpha > 1$ a função de risco é crescente.

Gráfico da f.d.p e a função de risco da distribuição Weibull



Momentos e a função quantil do modelo Weibull

- O k-ésimo momento é dada por

$$E[T^k] = \lambda^{-k/\alpha}\Gamma(\frac{k}{\alpha} + 1)$$

- Média e variância

$$E(T) = \lambda^{-1/\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1), \;\; Var(T) = \lambda^{-2/\alpha}[\Gamma(\frac{2}{\alpha}+1) - \Gamma^2(\frac{1}{\alpha}+1)]$$

onde

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty u^{s-1}e^{-u}du$$

é a função gama.

Modelo Weibull

- O $p-$ésimo quantil, denotado por t_p

$$t_p = \lambda^{-1/\alpha}[-\log(1-p)]^{1/\alpha}, \; 0 < p < 1.$$

- A mediana, $md = t_{0,5}$

$$t_{0,5} = \lambda^{-1/\alpha}[\log(2)]^{1/\alpha}.$$

Modelo Weibull

- O tempo médio residual

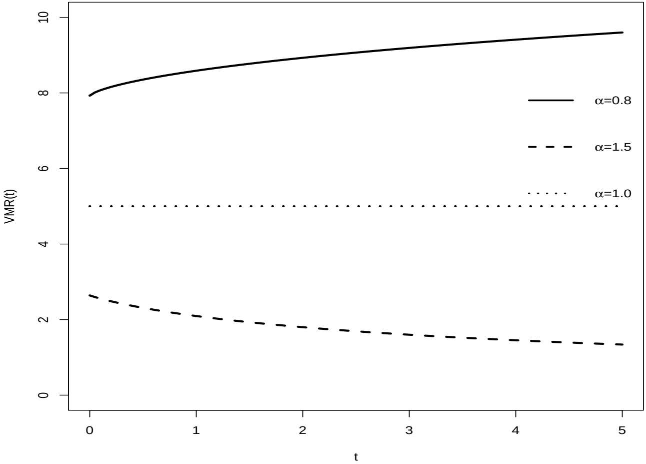
$$VMR(t) = \frac{\lambda^{-1/\alpha}\Gamma(1/\alpha, \lambda t^{\alpha})}{\alpha e^{-\lambda t^{\alpha}}}$$

onde

$$\Gamma(s, t) = \int_t^{\infty} u^{s-1} e^{-u} du$$

é a função gama incompleta superior.

Gráfico do VMR para o modelo Weibull para $\alpha = 0.8, 1, 1.5$ e $\lambda = 0, 2$



Modelo Gamma

Uma v.a. T tem a distribuição Gamma com parâmetros $\lambda > 0$ (escala) e $\alpha > 0$ (forma) se sua f.d.p dada por

$$f(t) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, \ t > 0 \tag{7}$$

A função de sobrevivência e função de risco são dada por,

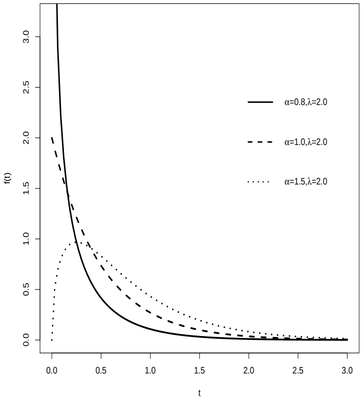
$$S(t) = \frac{\Gamma(\alpha, \lambda t)}{\Gamma(\alpha)}, \ t > 0 \tag{8}$$

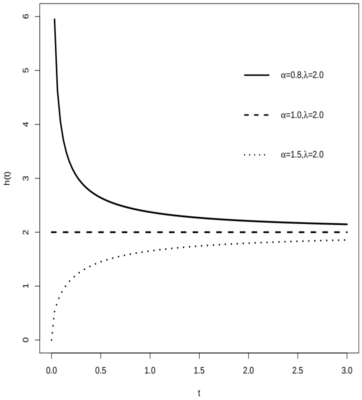
e

$$h(t) = \frac{\lambda^{\alpha} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha, \lambda t)}, \ t > 0 \tag{9}$$

Notação: $T \sim G(\alpha, \lambda)$

Gráfico da f.d.p e a função de risco da distribuição Gamma





Modelo Gamma

- O k-esimo momento

$$E(T^k) = \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\lambda^k \Gamma(\alpha)}, \ k = 1, 2, \dots,$$

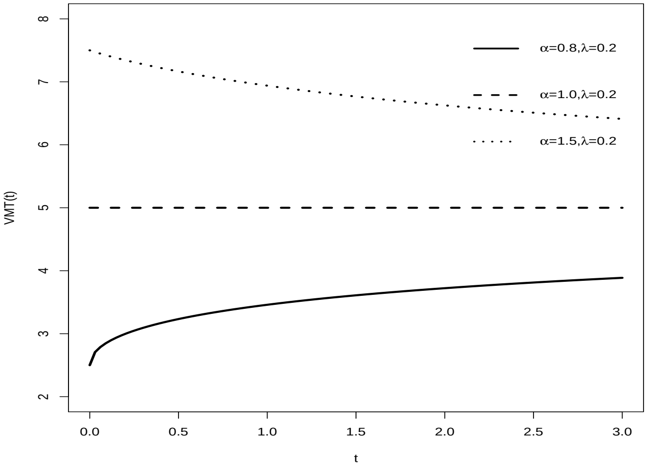
- Média e Variância

$$E(T) = \frac{\alpha}{\lambda}, \ \ \text{Var}(T) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

- Tempo médio de vida residual

$$VMR(t) = \frac{\Gamma(\alpha + 1, \lambda t)}{\lambda \Gamma(\alpha, \lambda t)} - t, \ t > 0 \qquad (10)$$

Gráfico do VMR para o modelo Gama para $\alpha = 0.8, 1, 1.5$ e $\lambda = 0, 2$



O modelo log-logistica

Uma v.a T tem distribuição log-logistica com parâmetros $\alpha >$ e $\lambda > 0$ se sua fdp é dada por

$$f(t) = \frac{\alpha\lambda t^{\alpha-1}}{(1+\lambda t^{\alpha})^2}.$$

A correspondente função de sobrevivência é dada por

$$S(t) = (1+\lambda t^{\alpha})^{-1},$$

Notação: $T \sim LL(\alpha, \lambda)$

O modelo log-logistica

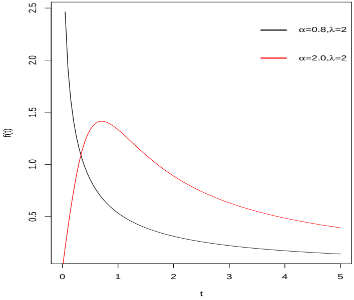
A função de risco da distribuição log-logistica é dada por

$$h(t) = \frac{\alpha\lambda t^{\alpha-1}}{1+\lambda t^{\alpha}},$$

com $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$.

Formas da função de risco

- $\alpha \leq 1$: é decrescente;
- $\alpha > 1$: é unimodal.



O modelo log-logistica

O $p-$ésimo quantil, denotado por t_p

$$t_p = \lambda^{-1/\alpha} \left[\frac{p}{1-p} \right]^{1/\alpha}, \ 0 < p < 1.$$

A mediana

$$t_{0,5} = \lambda^{-1/\alpha}.$$

Modelo log-Normal

Uma v.a T tem distribuição log-normal se sua f.d.p é dada por

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} t\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\log t - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}, \; t > 0,$$

onde $\mu \in R$ é média de $\log T$, assim como $\sigma > 0$ é o desvio padrão, ou seja, $\log T \sim N(\mu, \sigma^2)$.

A média e variância

$$E(T) = \exp\{\mu + \sigma^2/2\}, \;\; e \;\; Var(T) = \exp\{2\mu + \sigma^2\}(\exp\{\sigma^2\} - 1).$$

O q-ésimo quantil

$$t_q = \exp\{\mu + \sigma z_q\}$$

onde z_q é q-ésimo quantil da distribuição normal padrão.

Modelo log-Normal

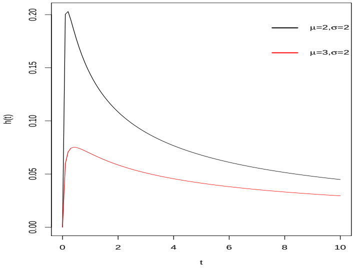
A função de sobrevivência não tem uma forma analática explicita e é representado por

$$S(t) = \Phi\left(-\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right)$$

onde $\Phi(.)$ é a função de distribuição acumulada da distribuição normal padrão.

A correspondente função de risco é dado por:

$$h(t) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}}{\sqrt{2\pi}t\sigma\Phi\left(-\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right)}.$$



Modelo Gama Generalizado

Uma v.a. T tem a distribuição Gamma com parâmetros $\lambda > 0$, $\alpha > 0$ e $p > 0$ se sua f.d.p dada por

$$f(t) = \frac{p\lambda}{\Gamma(\frac{\alpha}{p})}(\lambda t)^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^p}, \; t > 0 \tag{11}$$

A função de sobrevivência e função de risco são dada por,

$$S(t) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{p}, (\lambda t)^p)}{\Gamma(\frac{\alpha}{p})}, \; t > 0 \tag{12}$$

e

$$h(t) = \frac{(\lambda t)^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^p}}{\Gamma(\frac{\alpha}{p}, (\lambda t)^p)}, \; t > 0 \tag{13}$$

Modelo Gama Generalizado

- O $k-$ésimo momento

$$E(T^k) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha+k}{p})}{\Gamma(\frac{\alpha}{p})}, \ k = 1, 2, \ldots$$

- $GG(\alpha, \lambda, p = 1) = G(\alpha, \lambda)$.
- $GG(\alpha, \lambda, p = \alpha) = W(\alpha, \lambda^{\alpha})$.

Exercícios

(a) Para os modelos log-logística, log-normal e gama generalizado determine o valor médio residual e mostre o comportamento dessas característica ao longo do tempo.

(b) Para modelo gama generalizado, determine a média e mediana.