Introdução à Teoria de Confiabilidade

Vicente Garibay Cancho

Introdução à Confiabilidade de Sistemas

O que é confiabilidade?

Introdução à Confiabilidade de Sistemas

O que é confiabilidade?

- A tv de seu sua casa é confiável?

O que é confiabilidade?

- A tv de seu sua casa é confiável?
- As respostas mais frequentes são:

Introdução à Confiabilidade de Sistemas

O que é confiabilidade?

- A tv de seu sua casa é confiável?
- As respostas mais frequentes são:
  - acredito que sim, comprei-o faz uns 10 anos e ele nunca apresentou qualquer problema, ou
  - sim, ele funciona bem há mais de 8 anos ou ainda,
  - não, ele já apresentou muitos problema que não compro mais nenhum produto da mesma marca.

Introdução à Confiabilidade de Sistemas

O que é confiabilidade?

- A tv de seu sua casa é confiável?
- As respostas mais frequentes são:
  - acredito que sim, comprei-o faz uns 10 anos e ele nunca apresentou qualquer problema, ou
  - sim, ele funciona bem há mais de 8 anos ou ainda,
  - não, ele já apresentou muitos problema que não compro mais nenhum produto da mesma marca.
- A ideia de confiabilidade está intuitivamente associado ao grau de certeza que se tem no bom funcionamento durante um longo período de tempo.

O que é confiabilidade?

- A tv de seu sua casa é confiável?
- As respostas mais frequentes são:
  - acredito que sim, comprei-o faz uns 10 anos e ele nunca apresentou qualquer problema, ou
  - sim, ele funciona bem há mais de 8 anos ou ainda,
  - não, ele já apresentou muitos problema que não compro mais nenhum produto da mesma marca.
- A ideia de confiabilidade está intuitivamente associado ao grau de certeza que se tem no bom funcionamento durante um longo período de tempo.
- Do ponto de vista da engenharia por exemplo, seria importante poder garantir a confiabilidade de um produto.

Introdução à Confiabilidade de Sistemas

O que é confiabilidade?

- A tv de seu sua casa é confiável?
- As respostas mais frequentes são:
  - acredito que sim, comprei-o faz uns 10 anos e ele nunca apresentou qualquer problema, ou
  - sim, ele funciona bem há mais de 8 anos ou ainda,
  - não, ele já apresentou muitos problema que não compro mais nenhum produto da mesma marca.
- A ideia de confiabilidade está intuitivamente associado ao grau de certeza que se tem no bom funcionamento durante um longo período de tempo.
- Do ponto de vista da engenharia por exemplo, seria importante poder garantir a confiabilidade de um produto.
- Esta tarefa, contudo, só seria viável se este grau de certeza pudesse ser medido de alguma forma aceitável.

Conceitos básicos

Confiabilidade de um produto (componente ou sistema) é a probabilidade de bom funcionamento do produto durante período de tempo e condições de uso especificados.

Conceitos básicos

Confiabilidade de um produto (componente ou sistema) é a probabilidade de bom funcionamento do produto durante período de tempo e condições de uso especificados.

Função de confiabilidade

- Seja T uma v.a não negativa que representa o tempo até falha de um componente (ou sistema).

Conceitos básicos

Confiabilidade de um produto (componente ou sistema) é a probabilidade de bom funcionamento do produto durante período de tempo e condições de uso especificados.

Função de confiabilidade

- Seja T uma v.a não negativa que representa o tempo até falha de um componente (ou sistema).
- A função de **Confiabilidade** de uma componente (ou sistema) no período de tempo t, denotado por $R(t)$, está definida como

$$R(t) = P(T > t).$$

Conceitos básicos

Confiabilidade de um produto (componente ou sistema) é a probabilidade de bom funcionamento do produto durante período de tempo e condições de uso especificados.

Função de confiabilidade

- Seja T uma v.a não negativa que representa o tempo até falha de um componente (ou sistema).
- A função de **Confiabilidade** de uma componente (ou sistema) no período de tempo t, denotado por $R(t)$, está definida como

$$R(t) = P(T > t).$$

- A função de densidade e função de risco de T são respectivamente

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}, \text{ e } h(t) = -\frac{d}{dt}\log(R(t))$$

Conceitos básicos

Propriedades da função de confiabilidade

- $0 \leq R(t) \leq 1$;
- $\lim_{t \longrightarrow 0} R(t) = 0$
- $\lim_{t \longrightarrow \infty} R(t) = 1$

Exemplo

Suponha que o tempo até a falha de microchips, segue uma distribuição log-normal com $\mu = 9,65$ horas e $\sigma = 0,1053$ horas. Determine a confiabilidade do microchips nas primeiras 20000 horas de uso:

Se T é tempo de vida dos microchips, então $T - LN(\mu, \sigma^2)$
A função de confiabilidade

$$R(t) = \Phi\left(-\frac{\log t - 9,65}{0,1053}\right)$$

Dai tem-se

$$R(20000) = \Phi\left(-\frac{\log 20000 - 9,65}{0,1053}\right) = 0,008$$

Isto indica que 99,2% dos microchips falhariam nas 20000 primeiras horas de uso.

Confiabilidade de sistemas

- Muitos sistemas são conectados em série ou em paralelo ou em combinações paralelo-série, série-paralelo ou sistemas k-em-n e o interesse é determinar a confiabilidade do sistema sabendo a confiabilidade das componentes.

Confiabilidade de sistemas

- Muitos sistemas são conectados em série ou em paralelo ou em combinações paralelo-série, série-paralelo ou sistemas *k*-em-*n* e o interesse é determinar a confiabilidade do sistema sabendo a confiabilidade das componentes.

Sistema em série

Suponha que um sistema com n componentes montadas em série,

$$\longrightarrow \boxed{C_1} \rightarrow \boxed{C_2} \rightarrow \cdots \rightarrow \boxed{C_n} \longrightarrow$$

- No sistema em série, todos os componentes do sistema devem funcionar para que o sistema funcione.
- Objetivo é determinar a função de confiabilidade do sistema em termos da confiabilidade das componentes.

Sistema em série

- Suponha que as componentes falham independentemente.
- Seja T_i o tempo até a falha da i-ésima componente.
- Seja T o tempo até a falha do sistema.

Por definição a confiabilidade do sistema é dado por

$$\begin{aligned} R(t) = P(T > t) =& P\left([T_1 > t] \cap [T_2 > t] \cap \cdots \cap [T_n > t]\right) \\ =& P(T_1 > t)P(T_2 > t) \dots P(T_n > t) \\ =& R_1(t)R_2(t) \dots R_n(t). \end{aligned}$$

onde $R_i(t)$ é a função de confiabilidade da i-ésima componente.

Sistema em série

- Suponha que as componentes falham independentemente.
- Seja T_i o tempo até a falha da i-ésima componente.
- Seja T o tempo até a falha do sistema.

Por definição a confiabilidade do sistema é dado por

$$\begin{aligned} R(t) = P(T > t) =& P\left([T_1 > t] \cap [T_2 > t] \cap \cdots \cap [T_n > t]\right) \\ =& P(T_1 > t)P(T_2 > t) \ldots P(T_n > t) \\ =& R_1(t)R_2(t) \ldots R_n(t). \end{aligned}$$

onde $R_i(t)$ é a função de confiabilidade da i-ésima componente.

Observação (1)

Em um sistema em serie com n componentes o tempo até a falha do sistema é dado por:

$$T = \min(T_1, \ldots, T_n)$$

Exemplo (1)

Considere o sistema com quatro componentes formados por motor, embrague, transmissão e roda montados em série como mostra a Figura. Supondo que tempo até falha de cada componente é independente e com distribuição exponencial com taxa de falha, λ_i. Determine a função de confiabilidade do sistema.

$$\boxed{\textit{Motor}} \longrightarrow \boxed{\textit{Embrague}} \longrightarrow \boxed{\textit{Transmissão}} \longrightarrow \boxed{\textit{Roda}}$$

Seja T_i o tempo até a falha do i-ésimo componente, $i = 1, 2, 3, 4$ com $R_i(t) = exp(-\lambda_i t),\ t > 0$. Assim

$$R(t) = exp(-[\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4]t),\ t > 0$$

Exemplo (2)

Tem-se um sistema de captação de água com quatro bombas montadas em série. Sabe-se que a taxa de falha de cada bomba é constante, $\lambda = 0,00015$ falhas/hora. Determinar a confiabilidade do sistema nas 100 primeiras horas de funcionamento.

Seja T_i o tempo até a falha da i-ésima bomba, $i = 1, 2, 3, 4$ com $R_i(t) = exp(-\lambda t),\ t > 0$. Assim

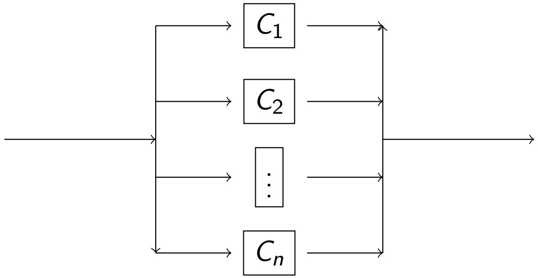
$$R(t) = exp(-4\lambda t),\ t > 0$$

Dai

$$R(100) = exp(-4(0,00015)(100)) = 0,94$$

Sistema em Paralelo

Suponha que um sistema com n componentes montadas em série,



- O sistema em paralelo funciona se pelo menos um das componentes funciona.
- Objetivo determinar a função de confiabilidade do sistema em termos da confiabilidade das componentes.

Sistema em Paralelo

- Suponha que as componentes falham independentemente.
- Seja T_i o tempo até a falha da i-ésima componente.
- Seja T o tempo até a falha do sistema.

Por definição a confiabilidade do sistema é dado por

$$\begin{aligned} R(t) = P(T > t) =& P\left([T_1 > t] \cup [T_2 > t] \cup \cdots \cup [T_n > t]\right) \\ =& 1 - P\left([T_1 \leq t] \cap [T_2 \leq t] \cap \cdots \cap [T_n \leq t]\right) \\ =& 1 - P(T_1 \leq t)P(T_2 \leq t) \ldots P(T_n \leq t) \\ \\ =& 1 - [1 - R_1(t)][1 - R_2(t)] \ldots [1 - R_n(t)]. \end{aligned}$$

onde $R_i(t)$ é a função de confiabilidade da i-ésima componente.

Sistema em Paralelo

- Suponha que as componentes falham independentemente.
- Seja T_i o tempo até a falha da i-ésima componente.
- Seja T o tempo até a falha do sistema.

Por definição a confiabilidade do sistema é dado por

$$
\begin{aligned}
R(t) = P(T > t) =& P\left([T_1 > t] \cup [T_2 > t] \cup \cdots \cup [T_n > t]\right) \\
=& 1 - P\left([T_1 \leq t] \cap [T_2 \leq t] \cap \cdots \cap [T_n \leq t]\right) \\
=& 1 - P(T_1 \leq t) P(T_2 \leq t) \ldots P(T_n \leq t) \\
\\
=& 1 - [1 - R_1(t)][1 - R_2(t)] \ldots [1 - R_n(t)].
\end{aligned}
$$

onde $R_i(t)$ é a função de confiabilidade da i-ésima componente.

Observação (2)

Em um sistema em paralelo com n componentes o tempo até a falha do sistema é dado por:

$$T = \max(T_1, \ldots, T_n)$$

Exemplo (3)

Tem-se um sistema de captação de água com três bombas montadas em paralelo. Sabe-se que a taxa de falha de cada bomba é constante, $\lambda = 0,02$ falhas/hora. Compare a confiabilidade do sistema a final de 150 horas com a confiabilidade de uma única bomba.

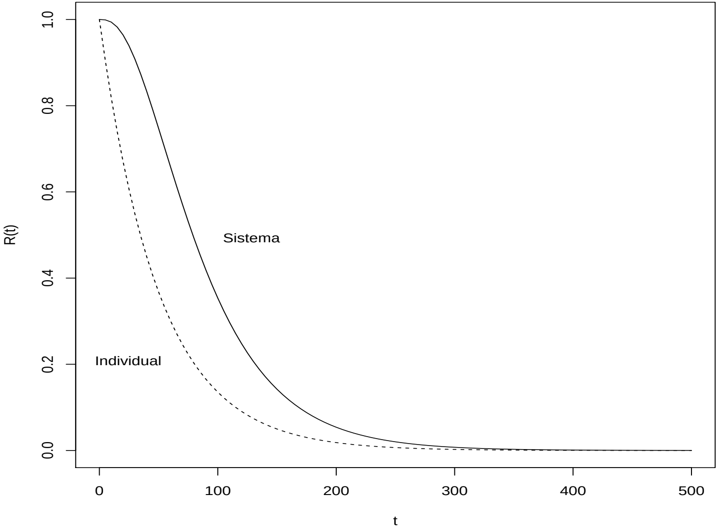
Seja T_i o tempo até a falha da i-ésima bomba, $i = 1, 2, 3, 4$ com $R_i(t) = exp(-\lambda t),\ t > 0$. Assim

$$R(t) = 1 - [1 - exp(-\lambda t)]^3,\ t > 0$$

Dai

$$R(150) = 1 - [1 - exp(-(0,02)(150))]^3 = 0,142.$$

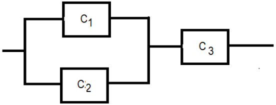
Para uma única componente:
$R_1(150) = exp(-0,02(150)) = 0,049.$



R(t)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
100
200
300
400
500
t
Sistema
Individual

Exercício 1

Um sistema com três componentes que funcionam independentemente estão conectados como mostra a Figura.



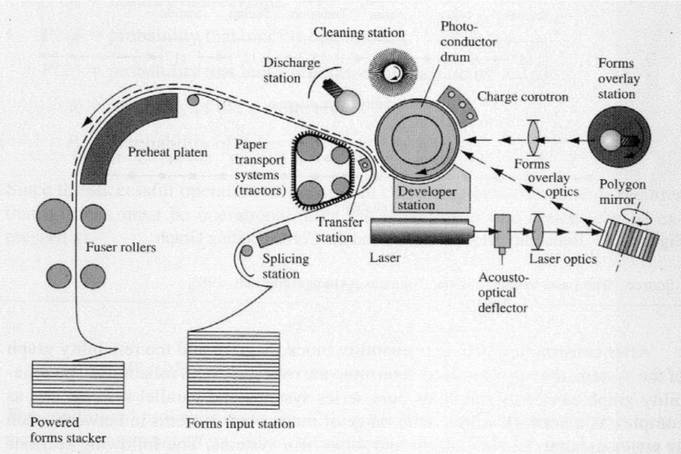
Supondo que a confiabilidade de cada componente por um período de T horas de operação é dado por

$$R(t) = e^{-0{,}03t}.$$

Se T é o tempo até a primeira falha do sistema. (a) Determine a fdp de T (b) Determine a confiabilidade do sistema e compare-o com a confiabilidade de uma das componentes.

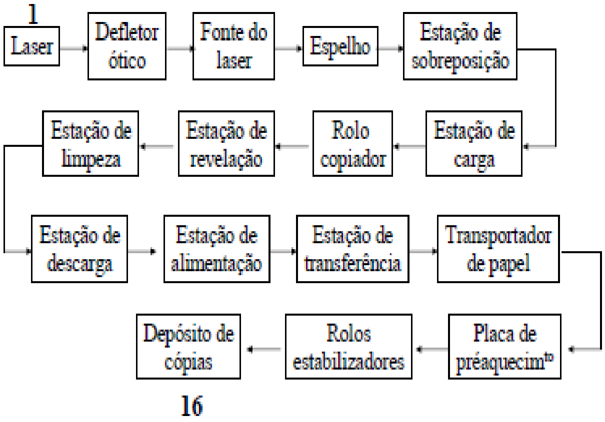
Exercício 2

Um impressora a laser é montado como mostra a Figura



Exercício 2

As especificação da montagem mostrada no diagrama dada na Figura



Exercício 3

Suponha que os tempos até a falha (horas) de cada componente são independentes com taxas de falha constante igual $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, 16$. Se T é o tempo até a falha (horas) da impressora. Determinar

(a) a confiabilidade do sistema por um período de tempo t

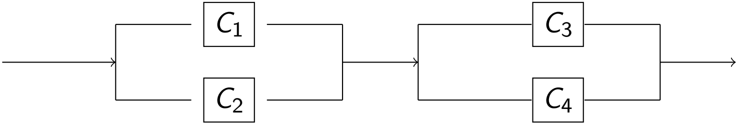
(b) A fdp de T.

(c) A função taxa de falha do sistema.

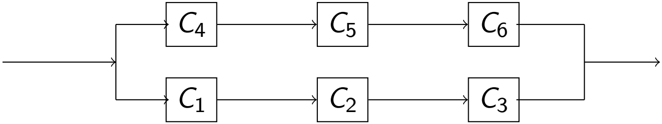
(d) Suponha que $\lambda_i = i/10^4$ $i = 1, 2, \ldots, 16$. Determinar a confiabilidade do sistema por um período de 2 anos.

Combinação de sistemas

Sistema Paralelo-Série



Sistema Série-Paralelo



Sistema k em n

- Alguns sistemas ou módulos são construídos com n componentes em paralelo, mas para que o sistema funcione é necessário que pelo menos k das n funcionem.
- Exemplos:
  1. Carros com 5 pneus (um step) precisam de pelo menos quatro funcionando para poder funcionar.
  2. Sistemas de comunicação com quatro canais, três dos quais devem estar operantes para que o sistema esteja operante.
- A função de confiabilidade de um sistema em paralelo k em n, na qual todas componentes independentes e tendo a mesma confiabilidade, R é

$$R_S(k; n, R) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} R^i (1 - R)^{n-i} = 1 - F_B(k - 1; n, R)$$

onde $F_B(\cdot\,; n, R)$ é a função de distribuição acumulada da distribuição binomial com parâmetros n e R.

Exemplo (4)

O sistema S de $n = 3$ bombas de água para resfriamento de um reator. Se as bombas funcionam de forma independente e a sua confiabilidade, ao longo de um período de 1000 horas, é $R = 0,95$, e se pelo menos $k = 2$ bombas devem funcionar para o resfriamento do reator. Determine a confiabilidade do sistema.

É um sistema $k = 2$ em $n = 3$. Daí a confiabilidade do sistema é

$$R_S(2; 3, 0,95) = \sum_{i=2}^{3} \binom{3}{i} (0,95)^i (0,05)^{n-i} = 0,993.$$

Exemplo (5)

Dois modulos M_1 e M_2 são conectados em série. O módulo M_1 é um sistema 3 em 5 com confiabilidade de cada componente de $R_1 = 0,8$. O modulo M_2 é um sistema 4 em 8 com confiabilidade de cada componente de $R_2 = 0,6$.

(a) *Determine a confiabilidade de cada modulo.*

(b) *Determine a confiabilidade do sistema.*

Exemplo (5)

Dois modulos M_1 e M_2 são conectados em série. O módulo M_1 é um sistema 3 em 5 com confiabilidade de cada componente de $R_1 = 0,8$. O modulo M_2 é um sistema 4 em 8 com confiabilidade de cada componente de $R_2 = 0,6$.

(a) *Determine a confiabilidade de cada modulo.*

(b) *Determine a confiabilidade do sistema.*

A confiabilidade do modulo M_1

$$R_S(3;5,0,8) = \sum_{i=3}^{5} \binom{5}{i} (0,8)^i (0,2)^{n-i} = 0,942.$$

A confiabilidade do modulo M_2

$$R_S(4;8,0,6) = \sum_{i=3}^{5} \binom{8}{i} (0,6)^i (0,4)^{n-i} = 0,826.$$

A confiabilidade do sistema

$$R_S = (0,942)(0,826) = 0.779$$