

題目：Use a neural network to approximate the Runge function

(程式方面有求救於 chat GPT 幫忙)

模型架構－

輸出層：x(1 維)

隱藏層：2 層，每層包含 64 神經元，激活函數採用 tanh

輸出層：1 層

訓練架構－

Loss function：MSELoss

Optimizer：Adam with learning rate 10^{-3}

學習率調整：ReduceLROnPlateau 函數 with factor 0.5 and patience 50

Early stopping：若驗證誤差連續 150 epoch 無改善則提前停止

```
78 #4.Loss and 優化
79 criterion = nn.MSELoss()
80 optimizer = torch.optim.Adam(model.parameters(), lr=1e-3)
81 scheduler = torch.optim.lr_scheduler.ReduceLROnPlateau(
82     optimizer, mode='min', factor=0.5, patience=50
83 )
84
```

資料集－在此設定兩資料集比較輸出結果

資料集 1：

訓練集：200 點

驗證集：50 點

測試點：1000 點 from[-1, 1]

```
28
29 #2.產生資料
30 N_TRAIN = 200
31 N_VAL = 50
32 N_TEST = 1000
33
```

資料集 2：

訓練集：500 點

驗證集：100 點

測試點：2000 點 from $[-1, 1]$

```
29 #2.產生資料
30 N_TRAIN = 500
31 N_VAL   = 100
32 N_TEST  = 2000
```

結果 1：

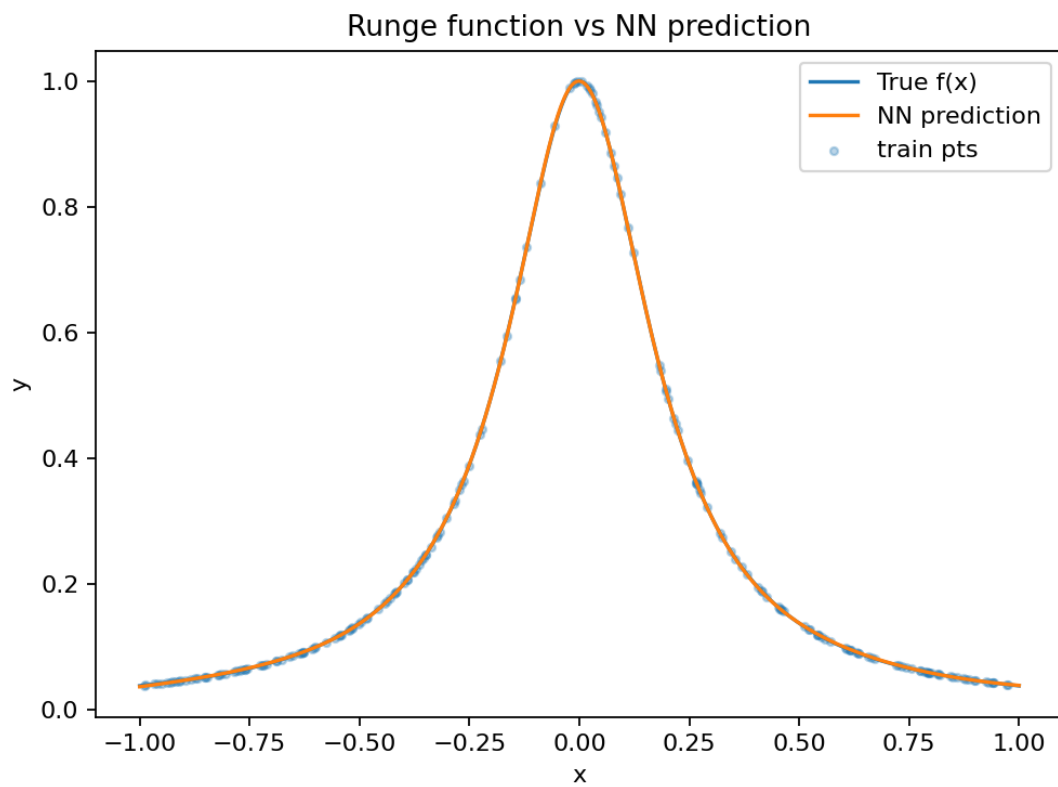


Fig1: the true function and the neural network prediction

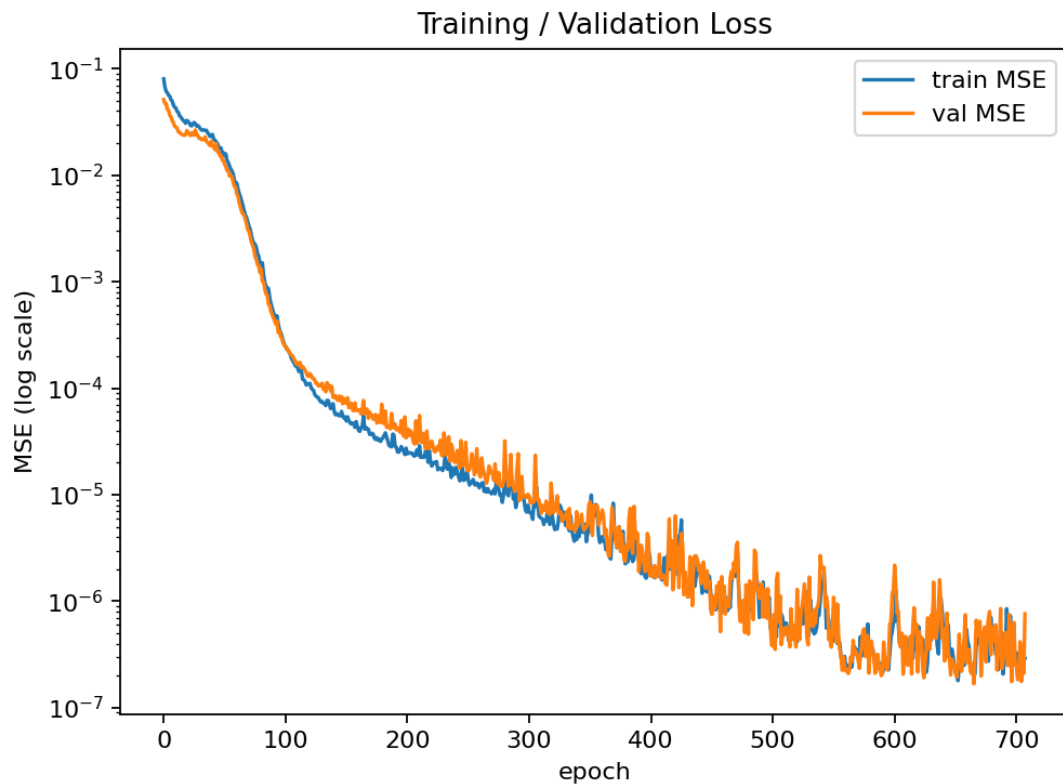


Fig2: the training/validation loss curves

```
Epoch 100 | train MSE 2.600665e-04 | val MSE 2.542729e-04
Epoch 200 | train MSE 2.738644e-05 | val MSE 3.423407e-05
Epoch 300 | train MSE 7.975557e-06 | val MSE 1.009957e-05
Epoch 400 | train MSE 2.656985e-06 | val MSE 1.738737e-06
Epoch 500 | train MSE 5.805530e-07 | val MSE 3.859135e-07
Epoch 600 | train MSE 6.404469e-07 | val MSE 1.282581e-06
Epoch 700 | train MSE 2.913830e-07 | val MSE 2.545908e-07
Early stopping at epoch 708. Best val MSE = 2.243112e-07
[Test] MSE = 3.113189e-07 | Max |error| = 2.012491e-03
```

Fig3: errors (MSE or max error)

說明：

訓練過程：停於 **epoch 708**

最佳驗證誤差：Best val MSE $\approx 2.24 \times 10^{-7}$

測試集表現：

- MSE = 3.11×10^{-7}

- Max error $\approx 2.01 \times 10^{-3}$

結果 2 :

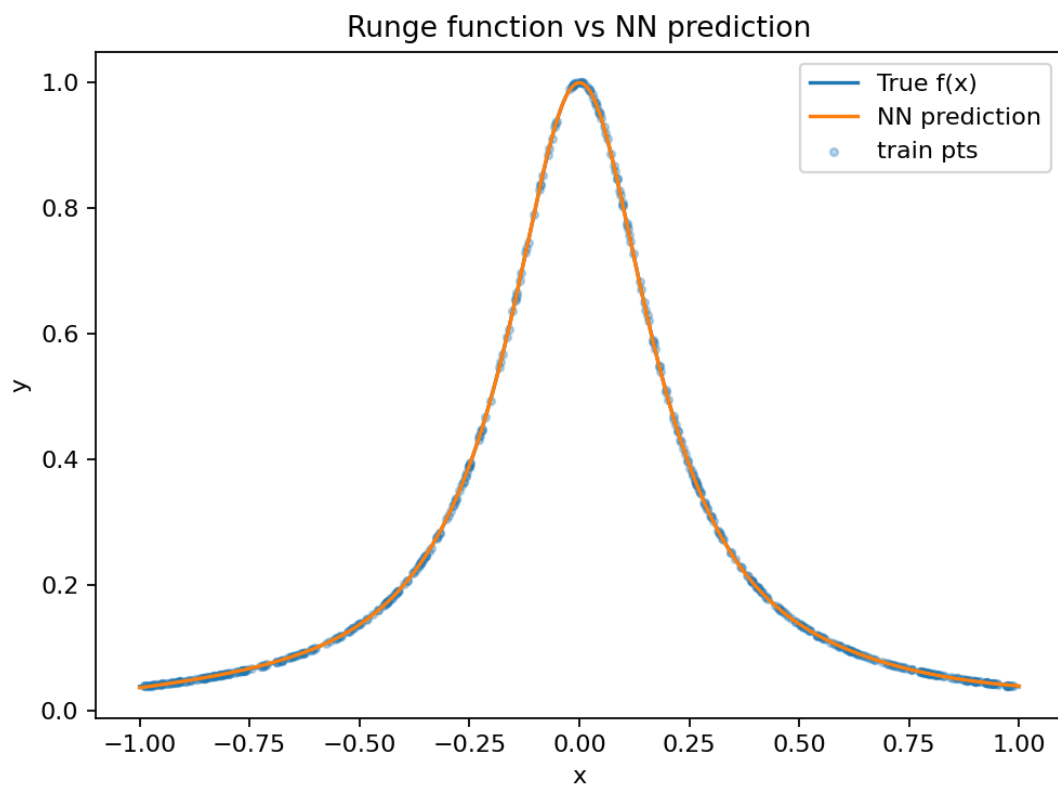


Fig4: the true function and the neural network prediction

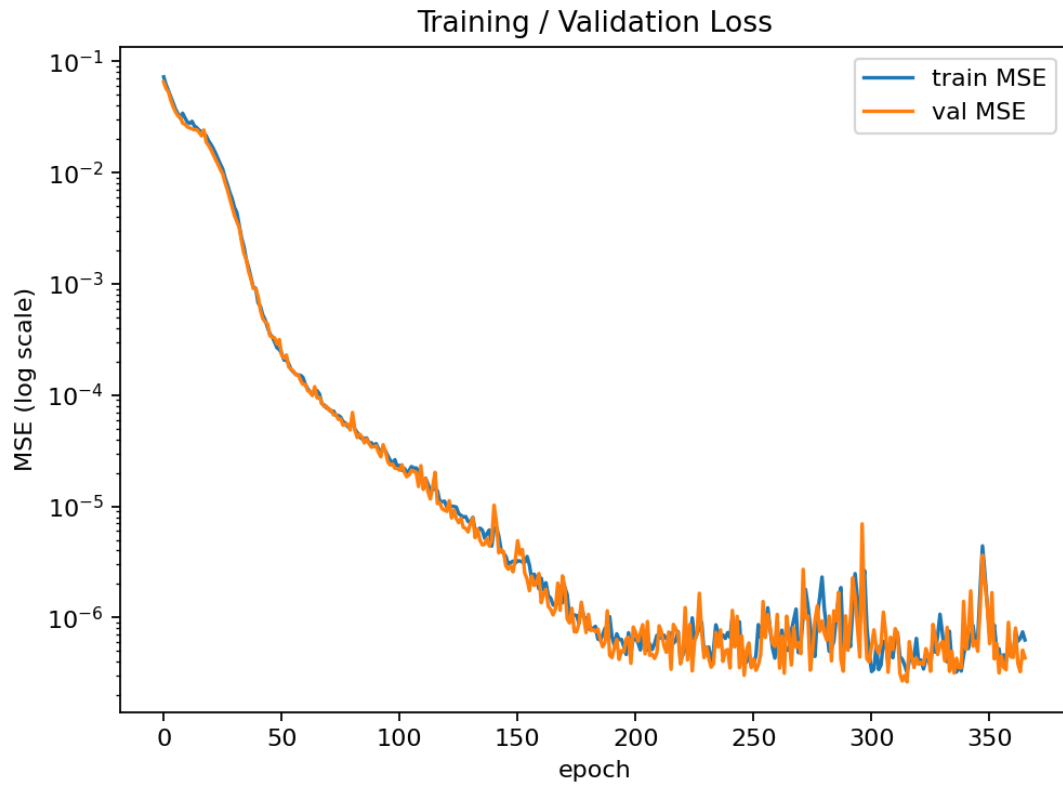


Fig5: the training/validation loss curves

```
Epoch 100 | train MSE 2.246633e-05 | val MSE 2.187237e-05
Epoch 200 | train MSE 6.409839e-07 | val MSE 8.207520e-07
Epoch 300 | train MSE 4.815734e-07 | val MSE 3.986899e-07
Early stopping at epoch 366. Best val MSE = 3.428609e-07
[Test] MSE = 3.494891e-07 | Max |error| = 1.706038e-03
```

Fig6: errors (MSE or max error)

說明：

訓練過程：停於 **epoch 366**

最佳驗證誤差：Best val MSE $\approx 3.43 \times 10^{-7}$

測試集表現：

- MSE = 3.49×10^{-7}
- Max error $\approx 1.71 \times 10^{-3}$

兩組數據比較討論：

資料集 2 收斂速度較快；而資料集 1 由於訓練集較小，雖然驗證誤差較低，但可信度可能沒那麼高；而資料集 2 最大誤差較小，可能可以表示其在邊界區域的近似效果比較穩定。