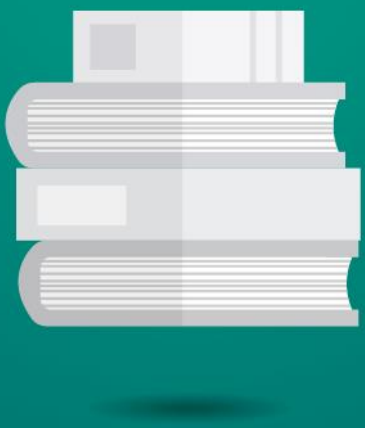
Teoremas de la teoría



Lógica Simbólica

UNIVERSIDAD SIGLO 21 | MIEMBRO DE LA RED ILUMNO

Teoremas de la teoría

Ahora bien, hasta el momento, ya tenemos nuestros objetos y axiomas de la teoría, pero ¿cómo conseguimos nuestros primeros teoremas? La respuesta es sencilla: debemos formar proposiciones, por lo general, compuestas y hallar sus tablas de verdad.

Contrarrecíproco

Si p y q son proposiciones, entonces, dada la implicación $(p \Rightarrow q)$, se define su *recíproca* como $(q \Rightarrow p)$.

- **Ejemplo 1.** Notemos que la tabla de verdad de $q \Rightarrow p$ la podemos conocer mediante la tabla de verdad del condicional.

Tabla 1: Tabla de verdad de la recíproca

p	q	q=>p
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Fuente: elaboración propia.

Notemos que podemos deducir los valores de verdad de $q \Rightarrow p$ a partir de los axiomas, entonces tenemos concluimos un teorema.

Doble implicación

Si p y q son proposiciones, entonces la doble implicación se define como la conjunción de una implicación y su recíproca, y se denota por $p \Leftrightarrow q$.

- **Ejemplo 2.** De este modo, si p y q son proposiciones, la tabla de valores de verdad de $p \Leftrightarrow q$ puede obtenerse mediante la tabla de $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Consideremos la proposición $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ a la cual le vamos a calcular su tabla de verdad. Entonces para poder hacerlo:

notamos que la proposición es una conjunción entre las proposiciones (p ⇒q) y (q ⇒p).

A su vez, p ⇒ q y q ⇒ p son proposiciones compuestas mediante la implicación.
Finalmente, p y q son proposiciones que no podemos descomponer.
Ordenamos entonces de manera "creciente" las proposiciones incluyendo todos los valores de verdad posibles entre las simples.

Tabla 2: Tabla de verdad con valores de las proposiciones simples

p	q	p=>q	q=>p	(p=>q) y (p=>q)
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Fuente: elaboración propia.

Ahora resolvemos la tabla de verdad para las primeras proposiciones compuestas, es decir, en la columna de p ⇒ q ponemos los valores de verdad que resultan de los valores de verdad de p y q consignados previamente en la tabla. También continuamos con la tabla de verdad para las primeras proposiciones compuestas, es decir, en la columna de q ⇒ p, ponemos los valores de verdad que resultan de los valores de verdad de p y q consignados previamente en la tabla. Este proceso lo continuamos hasta acabar con las proposiciones que solo poseen dos proposiciones simples y un conector o una negación.

Tabla 3: Valores de las primeras proposiciones compuestas

p	q	p=>q	q=>p	(p=>q) y (p=>q)
V	V	V	V	
V	F	F	V	
F	V	V	F	
F	F	V	V	

Fuente: elaboración propia.

Continuamos resolviendo la tabla de verdad para las proposiciones "más compuestas" hasta finalizar el procedimiento siguiendo las reglas de las tablas de verdad. En nuestro caso, es la proposición $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, y, teniendo en cuenta los valores de verdad arrojados en las columnas de $(p \Rightarrow q)$ y $(q \Rightarrow p)$, se obtiene la siguiente tabla.

Tabla 4: Valores de verdad de proposiciones formadas por proposiciones compuestas

p	q	p=>q	q=>p	(p=>q) y (p=>q)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Fuente: elaboración propia.

Finalmente, concluimos que la tabla de verdad de $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ resulta ser la siguiente.

Tabla 5: Valores de verdad de proposiciones formadas por proposiciones compuestas

p	q	p=>q	q=>p	(p=>q) y (p=>q)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Fuente: elaboración propia.

En el siguiente par de ejemplos, veremos proposiciones que tienen la particularidad de tener un mismo valor de verdad independiente de los valores de verdad de las proposiciones más simples. Puedes encontrar, en el video de Brite Learn (2016, https://goo.gl/Mxf6DS), algunas otras tablas de verdad relacionadas con la implicación.

- **Ejemplo 3.** La proposición $\{(p \Rightarrow q) \wedge p\} \Rightarrow q$ posee la siguiente tabla de

Verdad.

Tabla 6: Valores de verdad de { (p ⇒ q) ∧ p } ⇒ q

p	q	p=>q	q=>p	{ (p ⇒ q) ∧ p } ⇒ q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Fuente: elaboración propia.

Comprobamos que, independientemente de la combinación de valores de verdad de las proposiciones p y q, el valor de verdad de la proposición es siempre “verdadera”.

- **Ejemplo 4.** La proposición p ∧ (~ p) tiene el nombre de “tercero excluido” y posee la siguiente tabla de verdad.

Tabla 7: Tabla de verdad de p ∧ (~ p)

p	~p	p ∧ ~p
V	F	F
F	V	F

Fuente: elaboración propia.

Este principio del tercero excluido es fundamental en la historia del pensamiento humano. Para comprender mejor la importancia de este principio, puedes leer el trabajo de C. Crespo (2015) citado en las referencias.

Los dos ejemplos anteriores muestran que es posible que una proposición sea siempre verdadera o siempre falsa sin importar las combinaciones de los valores de verdad que toman las proposiciones inicialmente. En el primer caso, la proposición recibe el nombre de *tautología*; en el segundo, la proposición recibe el nombre de *contradicción*. Las demás proposiciones que toman distintos valores de verdad reciben el nombre de *contingencia*.

Referencias

Brite Learn (uploader). (2016). Lógica proposicional, Recíproca, inversa y contrareciproca. [video de YouTube]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=WSACH1FCDWo

Crespo, C. (2015). La no aceptación del principio del tercero excluido en la lógica desde la visión matemática. Revista Premisa, 17(64).

Johnsonbaugg, R. (1998). *Matemáticas Discretas.* México: Iberoamérica.