Equivalencias lógicas

Lógica Simbólica

UNIVERSIDAD SIGLO 21
MIEMBRO DE LA RED ILUMNO

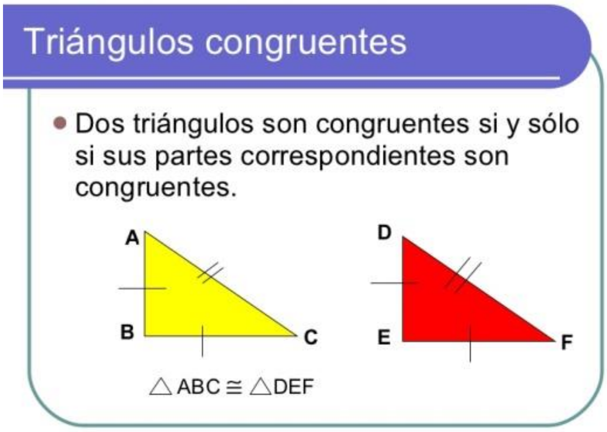
Equivalencias lógicas

Recapitulemos un poco el trabajo que hemos venido realizando hasta ahora, esto es, construir una teoría matemática que llamamos Lógica. Para llevar a cabo esta tarea, ha sido necesario tener objetos de estudio que llamamos proposiciones, que son, a groso modo, sentencias que toman algún valor de verdad (verdadero o falso). Tenemos un conjunto de axiomas que nos dan reglas para crear nuevas proposiciones y nos ayudan a determinar sus nuevos valores de verdad. Además, hemos vistos los primeros teoremas de la teoría.
En términos generales, el siguiente paso se refiere a una de esas tareas que surgen en matemáticas, que es la de clasificar los objetos de la teoría, es decir, identificar de "algún modo" cuáles objetos tienen exactamente el mismo comportamiento bajo "algún criterio de igualdad".

- **Ejemplo 1.** En aritmética de los números enteros, una forma de clasificarlos es conociendo qué resto deja cada entero al dividirse por un número fijo. De esto se encarga el estudio de las "congruencias".

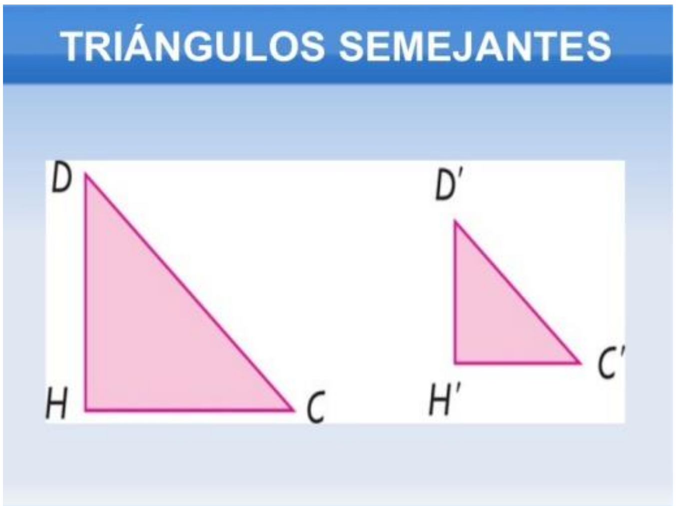
- **Ejemplo 2.** En geometría euclidiana, los conceptos de congruencias de triángulos y de semejanzas de triángulos estudian, primero, cuándo dos triángulos son exactamente iguales en todas sus dimensiones; y, segundo, cuándo dos triángulos son "copias" el uno del otro, es decir, tienen los mismos ángulos, y los lados correspondientes miden un múltiplo de la medida del otro.

Figura 1: Triángulos congruentes



Fuente: [Imagen sin título sobre triángulos congruentes]. (s. f.). Recuperada de https://goo.gl/1e1Zr8

Figura 2: Triángulos semejantes



Fuente: [Imagen sobre triángulos congruentes]. (s. f.). Recuperada de https://es.slideshare.net/whiteblanca/tringulos-semejantes-10720138

De esta manera, se identifican de algún modo los triángulos, ya sea porque son idénticos en todas sus medidas correspondientes o porque las medidas de uno de ellos son proporcionales a las medidas del otro. Cuando traslademos la misma pregunta a la lógica, tendremos entonces que preguntarnos: ¿qué proposiciones son "iguales"? Recordemos que el sentido de igualdad se da bajo algún tipo de identificación. Entonces ¿cómo identificamos de alguna manera dos proposiciones? Claramente, podemos tener distintos tipos de identificaciones. En este segmento, vamos a concentrarnos en uno de esos conceptos tal como lo definimos a continuación.

Dos proporciones P y Q que dependen de proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son *lógicamente equivalentes* si siempre que, dados valores de verdad fijos para las proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$, entonces P y Q tienen el mismo valor de verdad. Para verificar entonces que dos proposiciones son equivalentes, basta entonces calcular, en una tabla de verdad conjunta o en dos tablas de verdad separadas, los valores de verdad de cada proposición,

Idempotencia

Sea p una proposición, entonces valen las siguientes equivalencias lógicas:

$p \vee p \equiv p$;

$p \wedge p \equiv p$.

En otras palabras, si se tiene una proposición, entonces conectarla mediante una conjunción o una disyunción consigo misma no altera el valor de verdad.

Ejemplo 1. Sea P una proposición, mostraremos la equivalencia lógica $P \vee P \equiv P$ computando, en una misma tabla de verdad, los valores de $P \vee P$ y de P cómo sigue.

Tabla 1: Idempotencia de la disyunción

P	P o P	P
V	V	V
F	F	F

Fuente: elaboración propia.

Bastará notar entonces que los valores de verdad, en la columna de $P \vee P$ y en la de P, son exactamente los mismos, es decir, que $P \vee P$ y P son lógicamente equivalentes.

Conmutatividad

Sean p, q proposiciones, entonces valen las siguientes equivalencias lógicas:

$p \wedge q \equiv q \wedge p$;

$p \vee q \equiv q \vee p$.

En otras palabras, el orden de dos proposiciones conectadas mediante una conjunción o una disyunción no altera el resultado de su valor de verdad.

Ejemplo 2. Sean p, q proposiciones, veremos que la equivalencia lógica $p \vee q \equiv q \vee p$ es válida computando, en una misma tabla de verdad, los valores de verdad de $p \vee q$ y de $q \vee p$ como sigue.

Tabla 2: Conmutatividad de la disyunción

p	q	p o q	q o p
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

Fuente: elaboración propia.

Notamos entonces que los valores de verdad en la columna de $p \vee q$ y en la columna de $q \vee p$ son exactamente los mismos, por tanto $p \vee q \equiv q \vee p$.

Asociatividad

Sean p, q, r proposiciones, entonces valen las siguientes equivalencias lógicas:

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

En otras palabras, el orden en que se asocien las proposiciones conectadas mediante una conjunción o mediante una disyunción no altera el valor de verdad de la proposición.

- **Ejemplo 3.** Sean p, q, r proposiciones, verificaremos el caso de $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ mediante el cálculo de las tablas de verdad. En el lado izquierdo, tenemos $(p \vee q) \vee r$, y la tabla de verdad correspondiente es la siguiente.

Tabla 3: Tabla de verdad de (p o q) o r

p	q	r	p o q	(p o q) o r
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	F

Fuente: elaboración propia.

El lado derecho corresponde a $p \vee (q \vee r)$, y la correspondiente tabla de verdad en este caso es la que sigue.

Tabla 4: Tabla de verdad de p o (q o r)

p	q	r	q o r	p o (q o r)
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	F	F

Fuente: elaboración propia.

Podemos verificar entonces que las columnas de $(p \vee q) \vee r$ y $p \vee (q \vee r)$ poseen exactamente los mismos valores de verdad, esto significa que $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, es decir, $(p \wedge q) \wedge r$ y $p \wedge (q \wedge r)$ son lógicamente equivalentes.

Distributividad

Sean p, q, r proposiciones, entonces valen las siguientes equivalencias lógicas:

$$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$
$$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

Como su nombre lo indica, la propiedad es distributiva y permite distribuir la conjunción respecto de la disyunción y la disyunción respecto de la conjunción sin alterar el valor de verdad de las proposiciones.

- **Ejemplo 4**. Verifiquemos la expresión $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$. Y, naturalmente, comenzamos por verificar la tabla de verdad para el lado izquierdo, es decir, para $(p \vee q) \wedge r$, y obtenemos los siguientes valores.

Tabla 5: Tabla de verdad de (p o q) y r

p	q	r	p o q	(p o q) y r
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

Fuente: elaboración propia.

Seguidamente, tomamos la proposición del lado derecho: $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ y calculamos su tabla de verdad correspondiente, para lo cual obtenemos lo siguiente.

Tabla 5: Tabla de verdad de (p y r) o (q y r)

p	q	r	p y r	q y r	(p y r) o (q y r)
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

Fuente: elaboración propia.

De nuevo, notamos que la columna final, que es donde están compilados los valores de verdad de las proposiciones, coinciden, por lo cual, concluimos que: $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$, es decir, que $(p \vee q) \wedge r$ y $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ son equivalentes lógicamente.

Leyes de De Morgan

Sean p, q proposiciones, entonces valen las siguientes equivalencias lógicas:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

En pocas palabras, las leyes de De Morgan son las reglas para negar conjunciones y disyunciones. En resumen, ya tenemos una forma de distinguir cuando dos proposiciones son "iguales" en el sentido de que se preservan los mismos valores de verdad.

No se debe confundir que dos proposiciones lógicamente equivalentes sean equivalentes en el sentido del conector si y solo si. Esto es que, en el "si y solo si", los valores de verdad de ambas proposiciones son exactamente el mismo cuando la proposición completa es cierta, es decir, la equivalencia bajo el "si y solo si" solo busca preservar los valores de verdad para que la proposición sea cierta. Sin embargo, en la equivalencia lógica, preservamos los valores de verdad de las proposiciones de forma más íntegra.

Para comprender lo anterior, hay que entender un poco que el lenguaje tiene niveles. En un primer nivel, tenemos objetos, axiomas y teoremas, pero nuestros teoremas deciden los valores de verdad de las distintas proposiciones que podemos formar, y todo se queda al nivel de los objetos.

Pero, cuando hablamos de que dos proposiciones son lógicamente equivalentes, tenemos dos proposiciones independientes y comparamos sus valores de verdad y hacemos una afirmación sobre esas proposiciones.

Esto es un nivel más arriba del lenguaje que estudiaremos en profundidad más adelante.

Para entender un poco mejor la diferencia entre los niveles de lenguaje, podemos imaginarnos una teoría que tiene objetos, axiomas y teoremas.

Allí surgen preguntas naturales como: ¿los axiomas que se tienen son independientes entre ellos?, ¿los axiomas que se tienen no generan contradicciones?, dada una afirmación en la teoría, ¿se puede determinar siempre si es cierta o falsa?, entre otras preguntas.

Cada uno de los interrogantes anteriores requiere ver la teoría más desde "afuera de ella" que desde adentro. Cuando vemos una teoría desde afuera, y hacemos una afirmación sobre sus objetos, decimos que estamos hablando en un “metalenguaje”. En otras palabras, la equivalencia lógica es una expresión del “metalenguaje”, y la equivalencia del “si y solo si” es una equivalencia del lenguaje.

El camino de la lógica en el mundo moderno continúa abriéndose paso. Un buen artículo para ver esto es el de A. Ostra (2008), en el cual se presentan algunos problemas abiertos en lógicas distintas de la proposicional.

Referencias

[Imagen sin título sobre triángulos congruentes]. (s. f.). Recuperada de https://image.slidesharecdn.com/congruenciasdefigurasplanas-110427162626-phpapp02/95/congruencias-y-semejanza-de-figuras-planas-6-728.jpg?cb=1303921741

Johnsonbaugg, R. (1998). *Matemáticas Discretas.* México: Iberoamérica.

Ostra, A. (2008). Una reseña histórica de la lógica matemática de Charles S. Peirce. *Revista Universidad Eafit*, Vol. 44, N.° 150.