Objetos de una teoría

Lógica Simbólica

Objetos de una teoría

Al principio, todo era oscuridad, y, de pronto, Euclides. Hoy, a más de dos milenios de su existencia, los matemáticos, una y otra vez, continúan copiando su legado, dan origen a nuevas áreas del conocimiento, resuelven problemas abiertos, generan conocimiento, y aportan continuamente al desarrollo científico en distintas áreas. Pero ¿a qué se debe esto? La respuesta viene cuando es posible vislumbrar la estructura con la cual han sido escritas sus obras.

Esta estructura obedece a reconocer un conjunto de "elementos" (puntos, rectas, planos, espacio, en caso de geometría), un conjunto de axiomas (verdades evidentes) que dice cómo se relacionan los objetos entre ellos (axiomas de incidencia, axiomas de orden, axiomas de congruencia). Luego de seguir una serie de pasos donde cada uno se deduce como verdad partiendo de los anteriores, se obtienen verdades que se llaman teoremas (verdades demostradas). Los teoremas son la esencia de las matemáticas, porque en ellos se contienen las verdades irrefutables de las teorías.

Del mismo modo, fueron compilados los saberes de la época, como el de la aritmética, donde los objetos son los números enteros, los axiomas en términos generales corresponden a las mismas propiedades que aprendemos en nuestra vida escolar sobre este sistema numérico, y los teoremas comprenden toda una gama de propiedades en torno a cómo se relacionan principalmente mediante la multiplicación y la divisibilidad.

Un ejemplo más ocurre con las raíces de los números negativos, cuya aparición data del siglo I AC, pero fue el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) quien los definió rigurosamente, les dio una estructura axiomática y logró crear un nuevo sistema numérico: los números complejos. Desde entonces han comenzado a ser una herramienta cuyas aplicaciones son variadas, particularmente, en Física.

¿Y qué aprendimos de estos ejemplos? Bien, aprendimos que, para crear una teoría, necesitamos objetos de estudio, axiomas que los cumplan y, finalmente, poder deducir correctamente otras premisas que llamamos teoremas, las cuales fundamentan las propiedades de nuestros objetos de estudio. Esto, automáticamente, nos lleva a una pregunta fundamental:
¿Cómo sabemos que una deducción es correcta? Uno de los primeros intentos de responder esta pregunta comienza en los trabajos de Aristóteles, los cuales son una investigación sistemática acerca de los principios del razonamiento correcto. A este proceso del "buen razonar", lo conocemos como lógica. Y hubo que esperar hasta principios del siglo

pasado, con los trabajos de Bertrand Russell y Whitehead, para culminar el proceso de creación de la Lógica.

Objetos de la lógica proposicional

Nosotros estamos interesados en comprender cabalmente lo que conocemos actualmente como lógica clásica, algunas de sus aplicaciones, y la estudiaremos en la misma forma como una teoría matemática, reconociendo sus objetos, sus axiomas y sus teoremas.

En términos generales, tendremos: como objetos a las proposiciones, conectores lógicos y sus valores de verdad. Como axiomas a un conjunto de relaciones que permiten formar nuevas preposiciones y conocer sus nuevos valores de verdad, tales como, la negación, la conjunción, la disyunción, el condicional, entre otros.

Y finalmente construiremos un conjunto de teoremas que dan afirmaciones sobre el valor de verdad de nuevas proposiciones.
Ahora que ya tenemos completo el panorama podemos bien comenzar.

Proposición y el valor de verdad

Una *proposición* es una afirmación susceptible de tomar un valor de verdad Verdadero (V) o falso (F) pero no ambos valores al mismo tiempo. Las proposiciones las simbolizamos mediante las letras $P, Q, R, S, \ldots$

J. C. Bressan y A. E. Ferrazzi de Bressan (2009) profundizan bastante sobre distintos tipos de proposiciones. Nosotros mostraremos ejemplos varios de distintas áreas de las matemáticas.

- **Ejemplo 1.** En aritmética de los números enteros. proposiciones verdaderas son:

"el cero es un número par";
"el uno es un número impar";
"2 < 3";
"2 + 3 = 5";
"3 x 5 = 15".

- **Ejemplo 2.** En aritmética de los números enteros, proposiciones falsas son:

"1 + 1 = 3";
"3 < 2";
"5/7 es un número entero";
"Existen números *a* y *b* enteros pares tal que la suma *a* + *b* es impar".

- **Ejemplo 3**. En álgebra de los números complejos, proposiciones verdaderas son:

"todo polinomio de grado dos con coeficientes reales posee dos raíces complejas".
"todo polinomio con coeficientes complejos posee al menos una raíz compleja".

- **Ejemplo 4**. En álgebra de los números reales, una proposición verdadera es: "todo polinomio de grado dos con coeficientes reales posee a lo sumo dos raíces reales".

Es muy importante comenzar a notar que el valor de verdad de las proposiciones depende de la teoría donde se encuentre. Como hemos podido notar, esto es ilustrado en los ejemplos 3 y 4.

Muy probablemente todos, hemos resuelto una ecuación cuadrática en algún momento de nuestra vida y nos encontramos con el hecho de que las ecuaciones cuadráticas con coeficientes en los números reales poseen por solución:

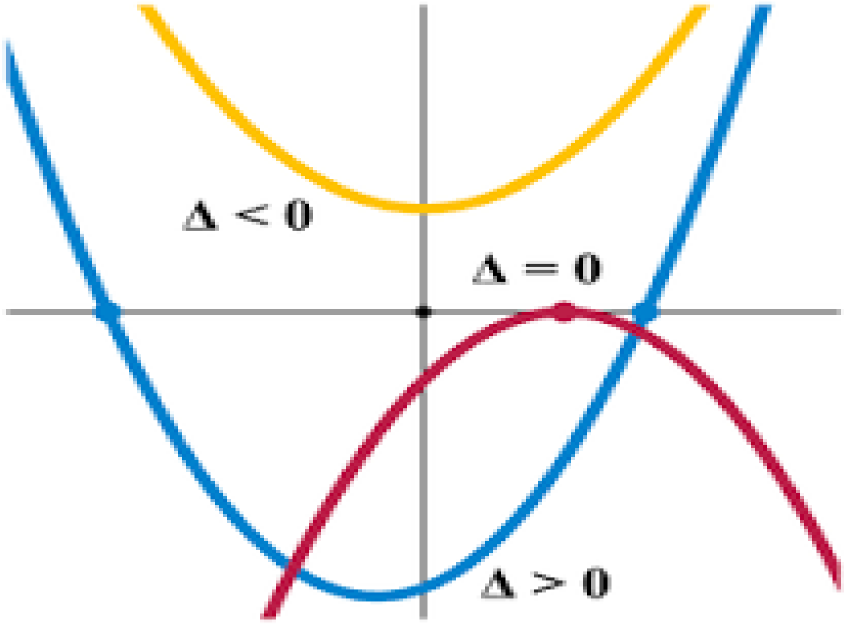
- una raíz real (discriminante 0);
- dos raíces reales (discriminante positivo);
- dos raíces complejas (discriminante negativo).

Y es por esto que es necesario distinguir en que sistema numérico estamos trabajando. Si fuese el caso del sistema numérico de los números reales entonces si encontramos una raíz real o dos raíces reales, entonces, tenemos soluciones reales, pero si encontramos dos raíces complejas entonces estas no tienen sentido en el sistema numérico de los números reales.

Sin embargo, si el sistema numérico en el que estamos trabajando es el sistema de los números complejos, entonces, cualquiera de las soluciones, complejas o reales nos sirven, ya que el sistema de los números reales está contenido en el sistema de los números complejos.

Geométricamente hablando en los números reales, las raíces de las ecuaciones cuadráticas dicen los puntos en que la parábola toca al eje x real, y los tres casos anteriores se ilustran como.

Figura 1: Parábola en los números reales



Fuente: [Imagen sin título sobre parábola]. (s. f.). Recuperada de https://goo.gl/47R2yq

- **Ejemplo 5.** En aritmética de los números enteros, la proposición **“**1 + 1 = 2**”** es una proposición verdadera de la teoría, sin embargo, en aritmética del sistema binario, nos encontramos con que “1 + 1 = 2” es una proposición que falsa. Esto se debe a que la proposición verdadera en aritmética de los números binarios es “1 + 1 = 10”.

De algún modo, la proposición ‘1 + 1 = 2’ no tiene ni siquiera sentido en la aritmética de los números binarios, esto es debido a que los números allí usados son unos y ceros. También hay una teoría que se llama aritmética modular: cuando el módulo es 2, entonces se tiene que la proposición “1 + 1 = 0” es cierta.

Así que, a partir de ahora, cada vez que nos pregunten cuánto da como resultado 1 + 1, deberemos responder que necesitamos saber de acuerdo con cuál aritmética están haciendo la pregunta, ya que, como hemos visto, esta suma puede dar 2, 10 o 0 según estemos en aritmética de los números enteros, del sistema binario o modular con módulo igual a 2 respectivamente.

El concepto de valor de verdad de una proposición es sumamente importante, ya vimos en el ejemplo anterior que una proposición puede o no tener sentido dentro de una teoría. También, una misma proposición puede ser cierta dentro de una teoría y ser falsa dentro de otra. Para reforzar este entendimiento, ilustraremos tal patología usando el ejemplo de cabecera que hemos venido tratando: la geometría euclidiana.

- **Ejemplo 6.** Además de la geometría euclidiana, históricamente aparecieron distintos tipos de geometrías que se llaman no euclídeas. Entre ellas, tenemos la geometría hiperbólica y la geometría elíptica.

Ahora bien, si recordamos nuestros años escolares, podemos traer a la memoria la siguiente proposición: "la suma de los ángulos interiores de todo triángulo suma 180 °".

Conocemos que es cierta, pero se cumple de esa forma en geometría euclidiana; para el caso de las geometrías hiperbólica y elíptica, no es cierta la misma proposición. En resumen, se tiene que:

- En geometría euclidiana, la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo da siempre 180 °;
- En geometría hiperbólica, la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es inferior a 180 °;
- En geometría elíptica la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es superior a 180°.

Esto ocurre fundamentalmente porque los axiomas de las geometrías no euclidianas son distintos a los de la geometría euclidiana.

Conectores lógicos

Un *conector lógico* es un operador binario, es decir, un operador que toma dos proposiciones y arroja como resultado una sola. Se caracteriza por medio de un símbolo o una palabra que se utiliza para conectar dos proposiciones. Si una proposición está formada por otras, se llama *proposición compuesta.*

- **Ejemplo 7**. El conector "o" es el más primitivo que existe. En aritmética de los números enteros, la proposición siguiente es falsa: "dado un número entero, este es divisible por dos o, dado un número entero, este es divisible por tres". Para verificar que es falsa, basta solo pensar en el número 5, el cual no cumple la proposición, ya que es un número entero.
- **Ejemplo 8.** El conector "entonces" es muy importante en matemáticas, ya que la gran mayoría de los teoremas se enuncian con base en este conector. Por ejemplo, en geometría euclidiana, una proposición verdadera es el teorema de Pitágoras que dice: "si en un triángulo rectángulo hay catetos de longitud a y b, y la medida de la hipotenusa es c, entonces $a^2 + b^2 = c^2$".

- **Ejemplo 9.** El conector "y" es también muy usual; por ejemplo, en los números enteros la siguiente proposición es verdadera: "16 es una potencia de dos y divisible por 4".

Referencias

Bressan, J. C., Ferrazzi de Bressan, A. E. (2009). Lógica simbólica y las teorías de conjuntos. *Revista de educación matemática*, Vol. 24, N.° I, 3-16.

Derivando (uploader). (2015). Los postulados de Euclides [video de YouTube]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=EPV-7cj8Ej8

[Imagen sin título sobre parábola]. (s. f.). Recuperada de https://d3pl14o4ufnhvd.cloudfront.net/v2/uploads/51d11508-e0ef-48df-a056-8afcfd01342f/a082efc58f7ca6b635d185f7242824f2cbe7e72a_original.png

Johnsonbaugg, R. (1998). *Matemática Discreta.* México: Iberoamérica.