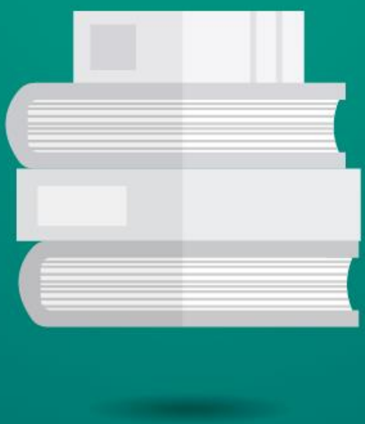
Axiomas de una teoría



Lógica Simbólica

UNIVERSIDAD SIGLO 21
MIEMBRO DE LA RED ILUMNO

Axiomas de una teoría

Ya tenemos entonces nuestros objetos para trabajar. En lo que sigue, introducimos los axiomas, que son reglas evidentes que aceptamos sin demostración. Estos axiomas nos permiten construir nuevas proposiciones y decidir el valor de verdad de las nuevas proposiciones siempre que conozcamos previamente el valor de verdad de las proposiciones dadas de antemano.

Para compilar entonces los valores de verdad de la proposición compuesta, será necesario considerar todas combinaciones de valores de verdad de cada una de las proposiciones que la componen. Al final, creamos una *tabla de verdad,* en la cual se consignan todos los valores posibles para cada una de las combinaciones, tal como veremos a continuación. Bressan y Ferrazi de Bressan (2009) ofrecen una amplia exposición sobre el tema de preposiciones y conectores.

Axiomas de la lógica proposicional

Negación

Dada una proposición P, llamaremos *negación de* P a la nueva proposición $\backsim P$ (que leemos $no\ P$), y sus valores de verdad vienen dados mediante la siguiente tabla de verdad.

Tabla 1: Tabla de verdad para la negación

P	$\backsim P$
V	F
F	V

Fuente: elaboración propia.

Podemos notar que la negación solo cambia el valor de verdad de la proposición en la que actúa.

- **Ejemplo 1.** En el sistema de los números reales, si *a* y *b* son números reales, la negación de la proposición verdadera: "la ecuación $x + a = b$ tiene solución en los números reales" es "la ecuación $x + a = b$ no tiene solución en los números reales". Esta última proposición es falsa, ya que se trata la negación de una proposición verdadera.

Disyunción

Dadas dos proposiciones P, Q, llamaremos *disyunción* a la nueva proposición $P \vee Q$ (que leemos $P\ o\ Q$), y sus valores de verdad vienen dados por la siguiente tabla de verdad.

Tabla 2: Tabla de verdad para la disyunción

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fuente: elaboración propia.

Mas fácilmente, la disyunción entre dos proposiciones P y Q es falsa si ambos valores de verdad son falsos.

- **Ejemplo 2.** En el sistema de los números enteros, si *a* y *b* son números enteros cualesquiera, una proposición falsa es: "*a* es un múltiplo de *b* o *b* es un múltiplo de *a*".

Para entender el valor de falsedad, basta pensar en *a* = 2 y *b* = 5, y notar que la expresión "2 es múltiplo de 5" es una proposición falsa. Del otro lado, "5 es múltiplo de dos" también es falsa. De lo anterior, se deduce que toda la proposición compuesta es falsa.

Conjunción

Dadas dos proposiciones P, Q llamaremos *conjunción* a la nueva proposición $P \wedge Q$ (que leemos $P\ y\ Q$), y sus valores de verdad vienen dados mediante la siguiente tabla de verdad.

Tabla 3: Tabla de verdad para la conjunción

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F

F	V	F
F	F	F

Fuente: elaboración propia.

En otras palabras, la disyunción entre dos proposiciones es un conector lógico cuyo valor de verdad, cuando ambas proposiciones son verdaderas y es falsa en cualquier otro caso.

- **Ejemplo 3.** En el sistema de los números complejos, una proposición verdadera es: “$i^2 = -1$ e $i^3 = -i$”. Para entender el valor de verdad, basta recordar que i denota la unidad imaginaria compleja. Ahora bien, por axioma de los números complejos “$i^2 = -1$” es verdadero. Del otro lado, $i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$, por tanto, “$i^3 = -i$” es una proposición verdadera. De lo anterior se deduce que toda la proposición compuesta es verdadera.
- **Ejemplo 4.** En el sistema de los números reales, una proposición falsa es: “hay un número real cuyo cuadrado es negativo y hay un número real positivo”. Para entender el valor de falsedad, basta recordar que ningún cuadrado de un número real es negativo. Por lo tanto, ya la primera de las proposiciones conectada por medio de el conector “y” es falsa, y esto hace que toda la proposición sea falsa.

Condicional

Dadas dos proposiciones P, Q, llamaremos *proposición condicional* a la nueva proposición $P \Rightarrow Q$ (que leemos P *implica* Q), y sus valores de verdad vienen dados mediante la siguiente tabla de verdad.

Tabla 4: Tabla de verdad para el condicional

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fuente: elaboración propia.

Podemos notar varios detalles. El primero es que “verdad solo puede implicar verdad”, es decir, una proposición verdadera no puede implicar una proposición falsa y preservar el valor de verdad en la implicación. El segundo es que, si partimos de una proposición falsa, entonces no importa el valor de verdad de la segunda proposición, de cualquier modo, se obtiene una implicación verdadera.

- **Ejemplo 5.** El teorema de Pitágoras (ya conocemos que su valor de verdad es verdadero porque es un teorema), en geometría euclidiana, puede ser escrito en función de una implicación como sigue: “si en un triángulo rectángulo los catetos tienen medidas *a* y *b*, y la medida de la hipotenusa es *c*, entonces $a^2 + b^2 = c^2$”. Debemos notar, en la forma de escritura, la palabra “si” con la que inicia la proposición. Esta expresión es de lo más usual cuando se tiene una proposición condicional y, de hecho, es la característica que le da el nombre, porque este es un “si” condicional y no un sí de afirmación.

Bicondicional

Dadas dos proposiciones P, Q, llamaremos *proposición bicondicional* a la nueva proposición $P \Longleftrightarrow Q$ (que leemos P *si y solo si* Q), y sus valores de verdad vienen dados mediante la siguiente tabla de verdad.

Tabla 5: Tabla de verdad para el bicondicional

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fuente: elaboración propia.

Podemos notar que la proposición bicondicional es verdadera exactamente cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad, en otras palabras, una proposición falsa no puede “tener el mismo valor de verdad” que una proposición verdadera y viceversa.

- **Ejemplo 6**. Nuevamente, nuestro ejemplo está basado en el teorema de Pitágoras, el cual posee una generalización en geometría euclidiana. Esta ya no es llamada propiamente por el mismo nombre, sin embargo, contiene la proposición del teorema de Pitágoras. Tal proposición es

cierta y dice que: “si en un triángulo los lados tienen longitud a, b y c, entonces
$a^2 + b^2 = c^2$ si y solo si el triángulo es rectángulo”. Y podemos notar que, dentro de todos nuestros ejemplos, es la primera vez que aparece una proposición que sigue la forma de $P \Longrightarrow (Q \Longleftrightarrow R)$.
P es: en un triángulo los lados tienen longitud a, b y c;
Q es: $a^2 + b^2 = c^2$;
R es: el triángulo es rectángulo.

Comencemos por notar que se escribe $(Q \Longleftrightarrow R)$, porque el conector $\Longleftrightarrow$ es un operador binario, por lo tanto el “( )” indica que lo que hay dentro de él es una proposición completa. Así, se tiene que el conector $\Longrightarrow$ puede unir las dos proposiciones P y $Q \Longleftrightarrow R$.

- **Ejemplo 7.** Otra proposición verdadera en el sistema de los números reales es “si a es un número real y b es un número real entonces $a = b$ si y solo si a es menor o igual a b y b es menor o igual que a”. Podemos volver a notar que cada vez necesitamos más proposiciones para poder enunciar proposiciones nuevas o también, por ejemplo, para ser capaces de expresar teoremas en matemáticas. En nuestro caso, la proposición tiene una forma del tipo $(P \wedge Q) \Longrightarrow (R \Longleftrightarrow (S \wedge T))$, donde

P es: a es un número real;
Q es: b es un número real;
R es: $a = b$;
S es: si a es menor o igual que b, y b es menor o igual que a;
T es: b es menor o igual que a.

- **Ejemplo 8**. Una patología curiosa es la posibilidad de encontrar proposiciones dentro de una teoría, a las cuales no se les haya podido determinar un valor de verdad. Un ejemplo de estos es la famosa “conjetura de Golbach”, cuyo valor de verdad aún no sido determinado. Para conocer un poco más, mira el video de Sáenz de Cabezón (Derivando, 2016, https://goo.gl/Czie9x) que se consigna en Referencias.

Referencias

Bressan, J. C., Ferrazzi de Bressan, A. E. (2009). Lógica simbólica y las teorías de conjuntos. *Revista de educación matemática*, Vol. 24, N.° I, 3-16.

Johnsonbaugg, Richard. (1998). *Matemáticas Discretas (*pp 1-2). México: Editorial: Grupo Editorial de Iberoamérica.

Derivando (uploader). (2016). La Conjetura de Golbach [video de YouTube]. Recuperada de https://www.youtube.com/watch?v=oCoSwlEDPeM