Práctica 2 - continuación: ESPACIOS VECTORIALES

A lo largo de esta práctica $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales, salvo mención expresa.

12. Probar el siguiente enunciado: Sean $U_1, U_2 \subset V$ subespacios. Luego $V = U_1 \oplus U_2$ si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:
    i) $V = U_1 + U_2$.
    ii) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.
    Encontrar un contraejemplo para demostrar que este resultado no puede extenderse a m subespacios.

13. Para cada uno de los siguientes conjuntos determinar si es un subespacio de $C(\mathbb{R})$ o explique por que no lo es

    a) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(x) \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$.
    b) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(0) = 0, \}$.
    c) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(2) = 0, \}$.
    d) El conjunto de funciones constantes.
    e) $\{\alpha + \beta \operatorname{sen} x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

14. Dar un ejemplo de subespacio no vacío de $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que U sea cerrado bajo la multiplicación por escalares, pero que no sea un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

15. Sea $\mathbb{K}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$, y sea U el subespacio de $\mathbb{K}[x]$ dado por
$$U = \{ax^2 + bx^5 : a, b \in \mathbb{K}\}.$$
    Encontrar un subespacio W de $\mathbb{K}[x]$ tal que $\mathbb{K}[x] = U \oplus W$.

16. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y sean W_1, W_2, W_3 son subespacios de V. Determinar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones
    i) Si $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$ luego $W_1 = W_2$.
    ii) Si $W_1 \oplus W_3 = W_2 \oplus W_3$ luego $W_1 = W_2$.

17. Sean A y B matrices tales que $AB = 0$. Demostrar que el espacio columna de B está contenido en el espacio nulo de A. ¿Qué sucede con el espacio fila de A y el espacio nulo de B^T?

18. Sean W_1, W_2 subespacios de V. Demostrar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$. Comparar con el ejercicio 6 de la primera parte de la práctica.

19. Considere el espacio vectorial V de todas las funciones con dominio y codomimio igual a $\mathbb{R}$ (con la suma y producto por escalares usuales).
    Sean $V_i = \{f \in V : f\, es\, un\, función\, impar\}$ y $V_p = \{f \in V : f\, es\, un\, función\, par\}$. Probar que

    a) V_i y V_p son subespacios de V.
    b) $V_i + V_p = V$.
    c) $V_i \cap V_p = \{0\}$.

20. En el espacio vectorial de las matrices reales de orden 3, describir el subespacio generado por cada uno de los siguientes conjuntos:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

21. Sea $\langle S\rangle$ el subespacio generado por un subconjunto S de V. Demostrar las siguientes propiedades

  a) Si $S\subset T$, entonces $\langle S\rangle \subset \langle T\rangle$.
  b) $S\subset \langle S\rangle$.
  c) Si $S\subset T$ y T es un subespacio de V, entonces $\langle S\rangle\subset T$. Es decir que $\langle S\rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.
  d) S es un subespacio de V si y sólo si $\langle S\rangle = S$.
  e) Si $\langle S\rangle = U$, entonces $\langle U\rangle = U$.
  f) Sea $W\subset V$. Entonces $i)\langle S\cap W\rangle \subset \langle S\rangle \cap \langle W\rangle$, $ii)\langle S\cup W\rangle \subset \langle S\rangle + \langle W\rangle$.
  g) Valen las contenciones inversas en los ítems a) y f).

22. Describir el menor subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a

  a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.
  b) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.
  c) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

23. Sea V el espacio vectorial de los polinomios en $\mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual a 3. Considere los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^3+2x^2+4, & p_4(x) &= 3x^3+6x^2+9x+12,\\ p_2(x) &= 2x^3+5x^2+11x+8, & p_5(x) &= x^3+3x^2+8x+3.\\ p_3(x) &= x^2+5x, & & \end{aligned}$$

Para $j\in\{4,5\}$ determinar si $p_j\in\langle\{p_1,p_2,p_3\}\rangle$.

24. Analizar si los siguientes vectores son linealmente independientes

  a) $(1,1,0,0);(1,0,1,0);(0,0,1,1);(0,1,0,1)$.
  b) $(1,1,0);(1,0,0);(0,1,1);(x,y,z)$ para x,y,z cualesquiera.

25. Sea $P=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x-2y+z-t=0\}$. Verificar que P es un espacio vectorial y hallar 3 vectores linealmente independientes en P.

26. Probar que

  a) Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo es *l.d.*
  b) Si S es *l.i.* entonces T es *l.i.* $\forall T\subset S$.
  c) Si S es *l.d.* entonces T es *l.d* $\forall T\supset S$.

27. Si $\{v_1,v_2,v_3\}\subset V$ es un conjunto *l.i.*, probar que $\{v_1+v_2, v_1+v_3, v_2+v_3\}$ también es *l.i.*