Álgebra Lineal

Jun

1 Práctica 5

1.0.1 1

a. Verificar que para $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$,

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}\bar{b}_{ij},$$

es un producto interno (conocido como producto de Frobenius).
$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$

b.

1.0.2 Dados $u, v \in V$ espacio vectorial con producto intetrno, probar que $u = v$ si y sólo si $\langle u, w\rangle = v \times w$ para todo $w \in V$.

1.0.3 Sea W un espacio vectorial con producto interno y W un subespacio de V. Probar que $(W^\perp)^\perp = W$.

- $\subseteq$: Sea $x \in (W^\perp)^\perp$, como $x \in V$ sabemos que podemos escribirlo como $x = p + u$ con $p \in W$ y $u \in W^\perp$. Además $x \cdot u = 0$ es decir $(p+u)\cdot u = \underbrace{p \cdot u}_{0} + u \cdot u = u \cdot u = 0 \iff u = 0$, por lo que $x = p \in W$.

- $\supset$: Sea $x \in W$, como $x \in W$ sabemos que podemos escribirlo como $x = p + u$ con $p \in W^\perp$ y $u \in (W^\perp)^\perp$. Además $x \cdot p = 0$ es decir $(p+u)\cdot p = p \cdot p + \underbrace{p \cdot 0}_{0} = p \cdot p = 0 \iff p = 0$, por lo que $x = u \in (W^\perp)^\perp$.

1.0.4 Sea $\mathbb{R}^{n\times n}$ con el producto interno definido en el ejercicio 17

1. Hallar una base ortogonal para $\mathbb{R}^{n\times n}$ para dicho producto interno.

   Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$, recordemos que $\langle A, B\rangle = aw + bx + cy + dz$; luego la base estandar es una base ortogonal.

2. Hallar $W^\perp$, si $W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

3.

1.0.5 Sea $v = (a, b)$. Describir el conjunto H de vectores (x, y) que son ortogonales a v.

$$H = \{(x,y)^T / (x,y)^T \cdot (a,b) = 0\} = \{(x,y)/xa + yb = 0\}$$

1.0.6 Sea $W = \langle\{v_1, \ldots, v_p\}\rangle$. Mostrar que si x es ortogonal a todo v_j, para $1 \le j \le p$, luego x es ortogonal a todo vector en W.

Sea $v \in W / v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p$.

Luego $v \cdot x = (\alpha_1 v_1)\cdot x + \cdots + (\alpha_p v_p)\cdot x = \alpha_1 \underbrace{(v_1 \cdot x)}_{0} + \cdots + \alpha_p \underbrace{(v_p \cdot x)}_{0} = 0.$

1.0.7 Mostrar que si $W \cap W^{\perp}$, entonces $x = 0$.

1.0.8 En cada caso, mostrar que $\{u_1, u_2\}$ o $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortogonal para $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ respectivamente, y luego expresar a x como combinación lineal de la base correspondiente.

a. $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}$.

b. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

1.0.9 Suponer que W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por n vectores ortogonales distintos de 0. Explicar por que $W = \mathbb{R}^n$

Debemos ver que los n vectores generan a $\mathbb{R}^n$. Ya sabemos que son n, nos resta ver que son linealmente independientes. Supongamos que no lo sean, luego uno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los demás: $v_1 = \alpha v_2 + \beta v_3$. Ahora:

$$(\alpha v_2 + \beta v_3) \cdot v_1 = (\alpha v_2) \cdot v_1 + (\beta v_2) \cdot v_1 = \alpha(v_2 \cdot v_1) + \beta(v_2 \cdot v_1) = 0$$

es decir $v_1 \cdot v_1 = 0 \Longleftrightarrow v_1 = 0$. Contradicción.

1.0.10 Sean U, V matrices ortogonales. Explicar por que UV es una matriz ortogonal.

Sea U, V matrices ortogonales entonces sabemos que vale $U^{-1} = U^T$ y $V^{-1} = V^T$

Luego

$$(UV)^t = V^t U^t = V^{-1} U^{-1}$$

Es decir, $(UV)^t = (UV)^{-1}$

1.0.11 Sea $\{u_1, u_2\}$ un conjunto ortogonal de vectores distintos de cero y c_1, c_2 escalares no nulos. Mostrar que $\{c_1 u_1, c_2 u_2\}$ también es ortogonal.

Como $\{u_1, u_2\}$ es un conjunto ortogonal entonces sabemos que $u_1 \cdot u_2 = 0$.
Tenemos que probar que $c_1 u_1 \cdot c_2 u_2 = 0$
COMPLETAR

1.0.12 Dado $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$ y sea $L = \langle\{u\}\rangle$. Para $y \in \mathbb{R}^n$, la reflexión de y en L se define como:

$$ref_L y = 2proy_L y - y$$

a. Graficar en $\mathbb{R}^2$ para observar que la $ref_L y$ es la suma de $\hat{y} = proy_L y$ con $\hat{y} - y$

b. Mostrar que la aplicación $y \to ref_L y$ es una transformación lineal.

1.0.13 Sean

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escribir x como suma de dos vectores, uno en $\langle\{u_1, u_2, u_3\}\rangle$ y otro en $\langle\{u_4\}\rangle$

$x = (-\frac{8}{9}u_1 - \frac{2}{9}u_2 + \frac{2}{3}u_3) + 2u_4$

1.0.14 Sea W el subespacio generado por

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a. Si $y = (3, 1, 5, 1)$, escribirlo como la suma de un vector en W y uno en $W^{\perp}$.

Sean $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, veamos que ambos pertenecen a $W^{\perp}$. Sean $x \in W/x = \alpha v_1 + \beta v_2$, luego $x \cdot v_3 = \alpha(\underbrace{v_1 \cdot v_3}_{=0}) + \beta(\underbrace{v_2 \cdot v_3}_{=0}) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$ y análogamente para v_4. Finalmente $y = \left(\frac{1}{2}v_1 + \frac{3}{2}v_2\right) + (2v_3 + 2v_4)$

b. Si $y = (3, -1, 1, 13)$, encontrar el punto más cercano a y en W.

Observemos que $y = \underbrace{(\frac{5}{3}v_1 - \frac{14}{3}v_2)}_{= y} + \underbrace{(\frac{28}{3}v_3 - \frac{14}{3}v_4)}_{= \hat{y}}$, luego el punto más cercano es $\left(\frac{1}{3}, \frac{19}{3}, -\frac{19}{3}, \frac{19}{3}\right)$

c. Si $y = (2, 4, 0, 1)$ encontrar la mejor aproximación a y mediante vectores de la forma $c_1v_1 + c_2v_2$. Hallar la distancia de y a W.

1.0.15 Sean $y = [4, 8, 1]^t$, $u_1 = [\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}], u_2 = [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}]^t$ y $W = \langle \{u_1, u_2\} \rangle$

a. Sea $U = [u_1, u_2]$. Calcular U^tU y UU^t

b. Calcular $proy_W y$ y $(UU^t)y$

1.0.16 Sea A una matriz $m \times n$. Demostrar que todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ puede escribirse en la forma $x = p + u$, donde p está en $\mathcal{F}(A)$ y $u \in \mathcal{N}(A)$. Mostrar que si la ecuación $Ax = b$ es consistente, entonces hay una única p en $\mathcal{F}(A)$ tal que $Ap = b$.

1.0.17 Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con una base ortogonal $\{w_1, \ldots, w_p\}$ y sea $\{v_1, \ldots, v_q\}$ una base ortogonal de $W^{\perp}$.

a. Explicar por qué $\{w_1, \ldots, w_p, v_1, \ldots, v_q\}$ es un conjunto ortogonal.

Para w_i y w_j sabemos que $w_i \cdot w_j = 0$ por ser $\{w_1, \ldots, w_p\}$ un conjunto ortogonal y análogamente para v_i, v_j.

Para w_i y v_j, como $v_j \in W^{\perp}$ significa que $v_j \cdot w = 0$ para cualquier $w \in W$, en particular para cualquier w_i.

b. Explicar por qué el conjunto definido en el ítem anterior genera $\mathbb{R}^n$.

c. Demostrar que $dim(W) + dim(W^{\perp}) = n = dim(V)$

Sean $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ y $\gamma = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ bases de W y $W^{\perp}$ respectivamente. Bastaría con probar que

$$\beta \cup \gamma = \{w_1, w_2, \ldots, w_k, x_1, x_2, \ldots, x_m\}$$

es una base para V. Dado $v \in V$, entonces sabemos que $v = v_1 + v_2$ para algún $v_1 \in W$ y $v_2 \in W^{\perp}$. Además como β y γ son bases para W y $W^{\perp}$ respectivamente, entonces existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_m$ tal que $v_1 = \sum_{i=1}^{k} a_iw_i$ y $v_2 = \sum_{j=1}^{m} b_jx_j$. Por lo tanto

$$v = v_1 + v_2 = \sum_{i=1}^{k} a_iw_i + \sum_{j=1}^{m} b_jx_j,$$

Se sigue que $\beta \cup \gamma$ genera a V. Ahora, mostraremos que $\beta \cup \gamma$ es linealmente independiente.

Dados $c_1, c_2, \ldots, c_k, d_1, d_2, \ldots, d_m$ tal que $\sum_{i=1}^{k} c_i w_i + \sum_{j=1}^{m} d_j x_j = 0$, entonces $\sum_{i=1}^{k} c_i w_i = -\sum_{j=1}^{m} d_j x_j$

Entonces $\sum_{i=1}^{k} c_i w_i \in W \cap W^{\perp}$ y $\sum_{j=1}^{m} d_j x_j \in W \cap W^{\perp}$.

Pero como $W \cup W^{\perp} = \{0\}$ (dado $x \in W \cap W^{\perp}$, tenemos que $\langle x, x \rangle = 0$) y por lo tanto $x = 0$), tenemos que $\sum_{i=1}^{k} c_i w_i = \sum_{j=1}^{m} d_j x_j = 0$. Por consiguiente $c_i = 0$ y $d_j = 0$ para cada i, j ya que β y γ son bases de W y $W^{\perp}$ respectivamente.

Luego concluímos que $\beta \cup \gamma$ es linealmente independiente.

1.0.18 Siendo

$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, usar el proceso de Gram-Schmidt para producir una base ortogonal de $\langle \{u, v\} \rangle$

1.0.19

a. Verificar que $A \times B = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$ es un producto interno en $\mathbb{R}^{n \times n}$ (conocido como producto de Frobenius).

- $(A + B) \times C = \sum_{i,j} (A_{ij} + B_{ij}) C_{ij} = \sum_{i,j} (A_{ij} C_{ij} + B_{ij} C_{ij}) =$
  $= \sum_{i,j} A_{ij} C_{ij} + \sum_{i,j} B_{ij} C_{ij} = A \times C + B \times C.$
- $\alpha A \times B = \sum_{i,j} \alpha A_{ij} B_{ij} = \alpha \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij} = \alpha(A \times B)$.
- $A \times B = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij} = \sum_{i,j} B_{ij} A_{ij} = B \times A$
- $A \times A = \sum_{i,j} A_{ij} A_{ij} = \underbrace{\sum_{i,j} A_{ij}^2}_{\geq 0} \geq 0$ y claramente $A \times A = 0A = 0$.

b. Probar que $A \times B = tr(AB^T)$.

$tr(AB^T) = \sum_{i=1}^{n} (AB^T)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_{ij} {B^T}_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_{ij} B_{ij} = A \times B$

c. Probar que $AB \times C = B \times A^t C$.

$\sum_{i=1}^{n} (AB)_i C_i = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} A_{ij} B_{ji}) C_i =$

1.0.20 Verificar que $f \times g = \int_1^e log(x) f(x) g(x) dx$ es un producto interno en $\mathcal{C}([1, e])$

1.0.21 Dados $u, v \in V$ espacio vectorial con producto interno, probar que $v = w$ si y sólo si $u \times v = u \times w \quad \forall w \in V$.

$$u \cdot v = u \cdot w$$
$$u \cdot v - u \cdot w = 0$$
$$u \cdot (v - w) = 0$$

Si $u \cdot v = u \cdot w$ para todo u (equivalentemente $u \cdot (v - w) = 0$), entonces con $u = v - w$, tenemos que $||v - w||^2 = (v - w) \cdot (v - w) = 0$. Por lo tanto $v = w$.

1.0.22 Demostrar.

i. Un vector $v \in W^{\perp}$ si y sólo si v es ortogonal a todo vector en un conjunto que generae a W. $v \in W^{\perp}$ if and only if v is orthogonal forall v that spams W $\Longrightarrow$

ii. $W^{\perp}$ es un subespacio vectorial de V.

1.0.23 Sea V un espacio vectorial con producto interno y W un subespacio de V. Probar que $(W^{\perp})^{\perp} = W$

- ($\subseteq$): Sea $x \in (W^{\perp})^{\perp}$, como $x \in V$ sabemos que podemos escribirlo como $x = p + u$ con $p \in W$ y $u \in W^{\perp}$. Además $x \cdot u = 0$ es decir $(p+u) \cdot u = p \cdot u + u \cdot u = u \cdot u = 0 \Longrightarrow u = 0$, por lo que $x = p \in W$.
- ($\supset$): Sea $x \in W$, como $x \in V$ sabemos que podemos escribirlo como $x = p + u$ con $p \in W^{\perp}$ y $u \in (W^{\perp})^{\perp}$. Además $x \cdot p = 0$ es decir $(p+u) \cdot p = p \cdot p = \underbrace{p \cdot u}_{=0} = p \cdot p = 0 \Longleftrightarrow p = 0$, por lo que $x = u \in (W^{\perp})^{\perp}$.

1.0.24 Sea $\mathbb{R}^n$ con el producto interno definido en el ejercicio anterior.

a) Hallar una base ortogonal para $\mathbb{R}^{n \times n}$ para dicho producto interno.

Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$, recordemos que $\langle A, B \rangle = aw + bx + cy + dz$; luego la base estandar es una base ortogonal.

b) Hallar $W^{\perp}$, si $W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

c) Idem para $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

Esto es lo que representa la multiplicacion de matrices.

$AB = C$

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$c_{1,1} = \sum_{k=1}^{n} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$

$c_{2,2} = \sum_{k=1}^{n} a_{21}b + ab + ab$