Práctica 4: Autovectores y Autovalores

1. (a) Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^2)$ definida por $T(u,v) = (v,u)$ para $u,v \in \mathbb{K}$.Calular los autovalores y sus autovectores asociados para T.

   (b) Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3, \mathbb{K}^3)$ definida por $T(u,v,w) = (2u,0,5w)$ para $u,v,w \in \mathbb{K}$.Calcular los autovalores y sus autovectores asociados para T.

   (c) Para $n \in \mathbb{N}$ sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ definida por

   $$T(x_1,\dots,x_n) = (x_1 + \cdots + x_n \cdots + x_n), x_1,\dots,x_n \in \mathbb{K}.$$

   Calular los autovalores y sus autovectores asociados para T.

Recordatorio:$Ax = T(x,y) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.T(e_1) = A(e_1)$

Soluciones

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.B = A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}.|B| = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \iff \lambda = 1 \vee \lambda = -1.$

   i. $\lambda = 1 : B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff x \in \langle\{1,1\}\rangle$.Ya que $1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   ii. $\lambda = -1 : B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.Bx = 0 \iff x \in \langle\{1,-1\}\rangle.$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.B = A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix}.|B| = (2-\lambda)(-\lambda)(5-\lambda) = 0 \iff \lambda = 2 \vee \lambda = 0 \vee \lambda = 5.$

- $\lambda = 2 : B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.B\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \iff x \in \langle\{1,0,0\}\rangle.$
- $\lambda = 0 : B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff x \in \langle\{0,1,0\}\rangle.$
- $\lambda = 5 : B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.B\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \iff x \in \langle\{0,0,1\}\rangle.$

2. Encontrar los autovalores y autovectores asociados para los operadores lineales sobre $\mathbb{K}^2$dados por las siguientes matrices.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

   (b) $B = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

   (c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Encontrar el autoespacio correspondiente de cada autovalor

   (a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \lambda = 10$

   (b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \lambda = 3$

Soluciones:

(a) $A-\lambda I=\begin{bmatrix}-6 & -2\\ -3 & -1\end{bmatrix}.Hx=0 \iff x\in\langle\{\frac{-1}{3},1)\}\rangle$.

(b) ....

4. Para cada matriz dada, encontrar los autovalores para el operador T sobre K^nsin realizar cálculos. Describir los autovectores $v\in\mathbb{K}^n$asociados a cada autovalor λanalizando las soluciones de la ecuación matricial $(A-\lambda I)v=0$.

(a) $A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(b) $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 7 & 11\\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

Sabemos: $det(A)=\lambda_1\cdots\lambda_n$ y $tr(A)=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$.

Soluciones:

(a) $\lambda_1=-\frac{1}{3},\lambda_2=1,\lambda_3=\frac{1}{2}$.
$v_1=(x_1,x_2,0,0),v_2=(0,0,x_3,0),v_3=(0,0,0,x_4)$. Tenemos dos autovectores con un mismo autovalor ya que hay dos autovalores repetidos, que nos dan dos columnas nulas al hacer $A-(-\frac{1}{3})\lambda I=0$, por lo tanto el espacio nulo de esa matriz posee dos soluciones no triviales.

$$A+\frac{1}{3}\lambda I=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}+\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1+\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$X\in\left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$, así con los dos autovectores siguientes.

(b) $\lambda_1=1,\lambda_2=\frac{1}{2},\lambda_3=0,\lambda_4=2$.

5. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$y $T\in\mathcal{L}(V)$. Un espacio vectorial U se dice invariante bajo T si $T(U)\subset U$.Supongamos que U_1,U_2son dos subespacios invariantes bajo T. Probar que $U_1\cap U_2$también es invariante bajo T.

Solución Sea $v\in\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2\Rightarrow v\in\mathcal{U}_1\wedge v\in\mathcal{U}_2\Rightarrow T(v)\in\mathcal{U}_1\wedge T(v)\in\mathcal{U}_2\Rightarrow T(v)\in\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$.

6. Sea V un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{K},T\in\mathcal{L}(V)$ inversible y $\lambda\in\mathbb{K}-\{0\}$. Probar que λ es autovalor de A si y sólo si λ^{-1}es autovalor de T^{-1}.

Solución Sea $x\in V/T(x)=\lambda x\iff Ax=\lambda x\iff A^{-1}Ax=A^{-1}\lambda x\iff x=A^{-1}\lambda x\iff\lambda^{-1}x=A^{-1}x$.

7. Sea V un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$,$A\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ matriz inversible y $\lambda\in\mathbb{K}$. Probar que λ es autovalor de A si y sólo si λ es autovalor de A^t.

Solución Notemos que $(A-\lambda I)^t=A^t-\lambda I$ luego como $|X|=|X|^t$ resulta:

$$|A-\lambda I|=|(A-\lambda I)^t|=|A^t-\lambda I|$$

8. Sea V un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y sea $T\in\mathcal{L}(V)$ con la propiedad de que todo $v\in V-\{0\}$ es un autovector asociado al mismo autovalor para T. Probar que T debe ser igual a un escalar por la identidad en V.

9. Completar

10. Sea $A=\begin{bmatrix}5 & -2 & 6 & -1\\ 0 & 3 & h & 0\\ 0 & 0 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Encontrar h tal que el autoespacio correspondiente a $\lambda=5$ sea bidimensional.

Solución $A-\lambda I=\begin{bmatrix}0 & -2 & 6 & -1\\ 0 & -2 & h & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}.|A-\lambda I|=det\left(\begin{bmatrix}0 & -2 & 6 & -1\\ 0 & -2 & h & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\right)\iff det\left(\begin{bmatrix}0 & -2 & 6 & -1\\ 0 & -2-(-2) & h-6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\right)\iff$

$det\left(\begin{bmatrix}0 & -2 & 6 & -1\\ 0 & 0 & h-6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\right)$.

Luego para $h=6$ resultara $(A-\lambda I)x=0 \iff \begin{bmatrix}0 & -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \iff x=\begin{bmatrix}x_1\\3x_3\\x_3\\0\end{bmatrix}$ es decir, si y sólo si $x\in\langle\{(1,0,0,0),(0,3,1,0)\}\rangle$.

11. En cada uno de los siguientes items, sea $A=PDP^{-1}$ y calcule A^4.

   (a) $P=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

   Solución $A^4=PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1}=PD^4P^{-1}$.

   Luego $A^4=P\begin{bmatrix}16 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}32 & 3\\ 64 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 9\\ -6 & 19\end{bmatrix}$.

   (b) $P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}$.

   Solución $A^4=P\begin{bmatrix}a^4 & 0\\ 0 & b^4\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}a^4 & 0\\ 3a^4 & b^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^4 & 0\\ 3a^4-3b^4 & b^4\end{bmatrix}$.

   (c) Completar.

12. Diagonalizar las siguientes matrices:

   (a) $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}$.

   (b) $B=\begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\ 2 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$.

   (c) $C=\begin{bmatrix}-7 & -16 & 4\\ 6 & 13 & -2\\ 12 & 16 & 1\end{bmatrix}$.

   (d) $E=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

Soluciones

   (a) $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 4 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)-12=\lambda^2-3\lambda-10=(x-5)(x+2)$.

   $\lambda=5:(A-\lambda I)x=0\iff\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 4 & -4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0\iff\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}x=0\iff x\in\langle\{(1,1\}\rangle$.

   $\lambda=-2:(A-\lambda I)x=0\iff\begin{bmatrix}4 & 3\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0\iff x\in\langle\{(-\frac{3}{4},1)\}\rangle$.

   Luego $A=PDP^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{4}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}P^{-1}$.

   (b) $|B-\lambda I|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 0 & -2\\ 2 & 5-\lambda & 4\\ 0 & 0 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(5-\lambda)^2$

   $\lambda=5:(B-\lambda I)x=0\iff\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x=0\Leftrightarrow x\in\langle\{(-2,0,1),(0,1,0)\}\rangle$.

   $\lambda=4:(B-\lambda I)x=0\iff\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x=0\iff x\in\langle\{(-\frac{1}{2},1,0)\}\rangle$.

   Luego $B=PDP^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}P^{-1}$.

(c) Completar.

(d) $|E-\lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (4-\lambda)^2(2-\lambda)^2 = 0.$

$\lambda = 4 : (E-4I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x \in \langle\{(0,1,0,0),(2,0,0,1)\}\rangle.$

$\lambda = 2 : (E-2I)x = 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \Leftrightarrow x \in \langle\{(0,0,0,1),(0,0,1,0)\}\rangle.$

Luego $E = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1}.$

$DIM(N(A)) = n^{o}$ de columnas $- rang(A)$.

13. Sea A una matriz 3×3 con dos autovalores. Cada autoespacio es unidimensional. Determinar si A es diagonalizable jusutificando la respuesta.
Solución A es no es una matriz diagonalizable ya que necesitamos 3 autovectores linealmente independiente para que A sea diagonalizable, si sólo tenemos dos autovalores y el autoespacio correspondiente a éstos es unidimensional entonces A no es diagonalizable.

14. Demostrar que si A es tanto diagonalizable como invertible, también lo es A^{-1}.
Solución $A = PDP^{-1} \Longleftrightarrow AA^{-1} = PDP^{-1}A^{-1} \Longleftrightarrow I = PDP^{-1}A^{-1} \Longleftrightarrow$
$P^{-1} = DP^{-1}A^{-1} \Longleftrightarrow D^{-1}P^{-1} = P^{-1}A^{-1} \Longleftrightarrow PD^{-1}P^{-1} = A^{-1}$.

15. (a) Describir una matriz 2×2 distinta de cero que sea inversible pero no diagonalizable.
 (b) Describir una matriz 2×2 distinta de cero que sea diagonalizable pero no inversible.

Soluciones:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ o $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$. Cualquier matriz que tenga autovalores diferentes en la diagonal es diagonalizable.

Formas de Jordan: Teoría

Un operador T puede expresarse en la forma canónica de Jordan si sus polinomios minimales y característico se factorizan en polinomios lineales. Esto siempre es posible si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En cualquier caso podemos extender el cuerpo $\mathbb{K}$ a uno en el cual los polinimios minimales y característicos puedan factorizarse en factores lineales, entocnes en un sentido amplio cualquier operador tiene una forma canónica de Jordan. Análogamente, toda matriz es semejante a una matriz en forma canónica de Jordan.
Teorema 10 Sea $T : V \to V$ un operador lineal cuyos polinomios minimal y característico son respectivamente:

$$p(t) = det(T - tI) = (t - \lambda I)^{n_1} \cdots (t - \lambda_r)^{n_r}$$
$$m(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r},$$

donde los λ_i son esacalares distintos. Entonces T tiene una representación matricial diagonal por bloques cuyos elementos diagonales son de la forma:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Para cada λ_i los bloques correspondientes a J_{ij} tienen las siguientes propiedades:

1. Existe al menos un J_{ij} de orden m_i , los demás J_{ij} son de orden $\leq m_i$.

2. La suma de los órdenes de los J_{ij} es n_i.

3. La cantidad de J_{ij} es igual a la multiplicidad geométrica de λ_i (es decir la dimensión de su autoespacio).

4. La cantidad de J_{ij} de cada orden posible está determinado únicamente por T.

A la matriz J se la llama forma canónica de Jordan.

Demos: Por el Teorema 7, T se puede descomponer en operadores $T_1, \cdots, T_r$, esto es $T = T_1 \bigoplus \cdots T_r$, donde $(t-\lambda_i)^{m_i}$ es el polinomio minimal de T_i. Luego en particular

$$(T_1 - \lambda_i I)^{m_1} = 0, \cdots, (T_r - \lambda_r I)^{m_r} = 0.$$

Sea $N_i = T_i = \lambda_i I$, entonces para cada $i = 1, \cdots, r \quad T_i = N_i + \lambda_i I$, con $N_i^{m_i} = 0$. Esto es, T_i es la suma del operador $\lambda_i I$ y un operador nilpotente N_i, el cual es tiene ídnice m_i ya que $(t-\lambda_i)^{m_i}$es el polinomio minimal de T_i.
Ahora, podemos elegir una base tal que N_i esté en su forma canónica. En este base $T_i = N_i + \lambda_i I$ se representa por una matriz diagonal por bloques M_i, cuyos elementos de la diagonal son las matrices J_{ij}. La suma directa de las matricers M_i es una matriz J que es una forma canónica de Jordan y por el Teo. 4 es una representación matricial de T.
Por último, veamos que los bloques J_{ij} satisfacen las propiedades requeridas:

1. Se obtiene por ser N_i de índice m_i.

2. Vale porque T y J tiene el mismo polinomio característico.

3. Vale pues la $dim(nul(N_i)) = dim(nul(T_i - \lambda_i I))$ es igual a la dimensión del autoespacio correspondiente a λ_i.

4. Vale por estar los T_i (y los N_i) determinados únicamente por T.

Observación $J_{ij} = \lambda_i I + N_i$
El polinomio mínimo se calcula cuando por ejemplo si elevas la matriz varias veces $(A - \lambda I) = 0$ o cuando después de elevar la matriz varias veces te da la misma multiplicidad del autovalor, tal que cuando elegís el vector en el paso siguiente te da 0 en esa potencia $(A-\lambda I)^4 w_4 = 0$. (Eso determina el minimal polynomial). No simpre tenés que buscar la matriz tal que $(A - \lambda I)^n = 0$.

0.1 Ejemplo Jordan

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Polinomio característico: $det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2(-1-\lambda)$
Autovalores: $\lambda_1 = 2 \wedge m_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1 \wedge m_1 = 1$

$v_1(2) = nul(A - 2I) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$v_2(2) = nul((A-2I)^2) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \right\}; dim(v_2(1)) = 2 = m_1$

El otro autovalor:

$v_1(-1) = nul(A + I) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \right\}$

Buscamos un vector: $w_2 \in v_2(2) - v_1(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Siempre empezamos del más chico hasta el más grande,$w_1 = (A-2I)w_2, w_2 = (A-2I)^2 w_3$

$w_1 = (A - 2I)w_2 \implies \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

El número de bloques es igual a la dimensión del $nul(A - \lambda I)$
Tenemos que calcular $(A - \lambda I)^n$ hasta que tengamos la misma multiplicidad del autovalor y el vector que elegimos tiene que cumplir que la siguiente potencia debería tener la misma dimensión. (La potencia n es la longitud del bloque)
Hasta ahora tenemos nuestro bloque de 2×2. Para el siguiente bloque (de tamaño 1), podemos usar cualquier autovector

que no esté en el autoespacio del bloque 2×2, así que elegimos:

$$w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego $\{v_1, v_2\}$ es una base de $v_2(2)$

$$\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\} \Rightarrow B = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{w_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{w_3} \right\}$$

$$Aw_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}_B = 2w_1$$

$$Aw_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B = 2w_2 + w_1$$

$$Aw_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}_B = -w_3$$

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J = P^{-1}AP = P^{-1}A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observación: No importa el orden de los bloques de Jordan, porque representa simplemente un renombre de las v_i al hacer la base.

La lógica base de Jordan xd:
Sea A una matriz 4×4 con un vector propio λ de multiplicidad 4. Describa las posibles formas de Jordan dependiendo de las multiplicidades geométrices.
Solución:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ Multiplicidad geométrica = 4 = multiplicidad algebraica luego, la matriz es diagonalizable.

La dimensión del autovector de λ_i, se le dice **multiplicidad geométrica** de λ_i.

Es decir si la multiplicidad geométrica es 3 entonces hay 3 autovectores.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

multiplicidad geométrica 2 =
u * cadena de longitud 3 corresponde a un bloque de tamaño 3x3
$v \to v_1 \to v_2$ = Genera dos vectores más para completar la multiplicidad.

1 autovector: $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Multiplicidad geométrica = 1 o sea 1 autovector y genero 3 más para formar la matriz Jordan.
es decir: $u \to u_1 \to u_2 \to u_3$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Multiplicidad geométrica = 2

$\begin{cases} u & \to u_1 \\ v & \to v_1 \end{cases}$ longitud 2 corresponden a 2 bloques de tamaño 2×2.
Necesito generar dos vectores más para completar la M.

Aclaraciones varias: cuando armamos la matriz jordan al vector que tenemos que buscar que debería estar en el último autoespacio generado lo llamaremos u_1 a los demás vectores u_2, u_3 lo generaremos a partir de $u_2 = (A - \lambda I)u_1$ y $u_3 = (A - \lambda I)^2 u_1$, hasta hallar la base en caso de que nos falte un vector, tendríamos que ver a que autoespacio generado anteriormente ya sea $E_1, \cdots, E_n$ debería pertenecer, y debería completar la base (super importante).

Empezas del u_1, u_2, u_3 siempre agregas hacia la derecha y después los tomas todo al revés es decir al formar las columnas de P tomá del último hacia el primero.

Primero tenemos que elevar la matriz $(A - \lambda I)^n$ hasta conseguir que la dimensión del espacio nulo de la misma sea igual a la multiplicidad algebraica del autovalor. Ahora tenemos que buscar un vector que esté en el último espacio nulo(que tiene la misma dimensión que la multiplicidad geométrica ese autovalor) y que no este en el anterior. Luego procederemos a calcular la imágen de ese vector en los demás espacio nulos.
Al calcular la matriz jordan de orden 4 por ejemplo de multiplicidad algebraica 2 con dos bloques de 2×2 tenés que tomar un u y un v los dos tienen que ser elementos que pertenezan al último autoespacio pero no al anterior y que sean l.i. (tenés que ampliar la base de E1 hasta llegar a la dimensión del útlimo subespacio, completando con un autovalor de E_1 si hace falta), y a partir de ellos tenés que generar las imágenes en el autoespacio anterior.
https://www.youtube.com/watch?v=5eOPx9QMTi4 minuto 7:35
y https://www.youtube.com/watch?v=IDGpOWcOaHI

Jordan 3x3

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} |A - \lambda I| = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$

Autovectores: $\lambda_1 = 1,\ m_1 = 2$
$\lambda_2 = 2,\ m_2 = 1$

$nul(A - 2I) = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = m_2$

$E_1 = nul(A - I) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$E_2 = nul(A - I)^2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$\{0\} \subseteq E_1 \subseteq E_2 = R^2$

Tomo un $u_1 \in E_2 - E_1$, es decir, que esté en E_2 pero no en E_1 luego calculo la imágen de u_1 en E_1, es decir $u_2 = (A - I)u_1$:

$$u \to u_2$$
$$v$$

Luego $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Luego la base es $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$, ahora escribimos la base al revés, del último al primero: $P = \begin{bmatrix} -8 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Resultado: https://www.wolframalpha.com/input/?i=%28inverse+%7B%7B-8%2C6%2C1%7D%2C%7B1%2C0%2C0%7D%2C%7B-2%2C0%2C2%7D%7D%29*%7B%7B1%2C-2%2C3%7D%2C%7B0%2C2%2C0%7D%2C%7B0%2C-2%2C1%7D%7D*%7B%7B-8%2C6%2C1%7D%2C%7B1%2C0%2C0%7D%2C%7B-2%2C0%2C2%7D%7D

Para matrices en donde tengas que a partir de 2 vectores en el último subespacio generar dos imágenes tenés éste video https://www.youtube.com/watch?v=k-ILtVBFn-Y

Jordan orden 5.

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$

$|A - \lambda I| = (2-\lambda)^5$

$\lambda = 5, \quad u = 5$

Primero empezamos generando el primer espacio, del autovalor. Luego dependiendo de la dimensión seguiremos calculando las potencias hasta llegar a al multiplicidad del autovalor.

$E_1 = ker(A-2I) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$

$rang(A-2I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} =$

$E_1 = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$. Tenemos 3 autovectores por lo tanto tendremos 3 bloques de Jordan.

$E_2 = ker(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \ dim(E_2) = 5$

$\underbrace{0 \quad E_1}_{3} \underbrace{\quad E_2}_{2} = \mathbb{R}^5$, (los números abajo son la diferencia de las dimensiones de los espacios nulos)

Entonces tenemos que tomar dos vectores en E_2 y encontrar su imágen en E_1 hasta completar la base de $\mathbb{R}^5$.

$\begin{cases} u & \to (A-2I)u \\ v & \to (A-2I)v \\ w & (para\ completar\ la\ base) \end{cases}$

El vector u es un vector que pertenece a $E_2 = R^5$ pero no a E_1.

$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} u & \to (A-2I)u = (-1,1,0,0,0) \\ v & \to (A-2I)v = (-1,1,0,-1,1) \\ w & = (-1,0,1,0,0) \end{cases}$

$\mathcal{B} = \{u, \underbrace{(A-2I)u}_{esto\ representa\ la\ im\acute{a}gen\ de\ u\ en\ la\ base\ E_1}, v, (A-2I)v, w\}$

Luego la matriz de paso es, el último hasta el primero, primero escribimos el último vector de la base anterior:

$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Despues para formar la matriz Jordan, podés hacer tipo $[Av_0]_B$ pero si te das cuenta es intuitivo y podés calcularlo sin hacer eso, primero los autovalores van siempre en la diagonal, ahora tenemos que ver a que autovalor corresponde cada vector de la matriz de paso, sabemos por la multiplicidad geométrica (la dimensión de E_1) que posee 3 bloques, hay casos en los que vas a tener dos autovalores con dimensiones distintas cada una la suma de los dos es la cantidad de bloques, en este ejercicio sólo tenemos un autovalor. El primer vector corresponde al autovalor 2 pero es independiente de las otras, es decir no tuviste que generar nada no te da problema, en el segundo como a partir de ese vector generaste otro va un 1, entonces $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ para demostrar otra forma si hacemos $[Av_0]_B = (-1,-1,0,0,0)+(-1,1,2,0,0) = (-2,0,2,0,0) =$
$2v_0 (v_0 \; es \; la \; primer \; columna \; de \; P, así \; con \; la \; demas) = (2,0,0,0,0)$
(que es la primer columna de Jordan)
$[Av_1]_B = (-1,-1,0,0,0) + (-1,3,0,0,0) + (1,-1,0,-1,-1) + (-1,1,0,-1,3) = (-2,2,0,-2,-2) = 2v_1 = (0,2,0,0,0)$
$\vdots$

así con los demás pero no hace falta se puede deducir la matriz Jordan sin hacer todos esos cálculos.

Práctica 6: FORMAS DE JORDAN

1. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Mostrar que cada uno de los siguientes subespacios son invariantes por T:

$$a)\{0\} \quad b)V \quad c)nul(T) \quad d)img(T)$$

Soluciones

(a) $W = \{0\} \subseteq_{se} V$.
Sea $w = 0 \in W, T(0) = 0 \in W$, $\{0\}$ es invariante por T.

(b) $V \subseteq_{se} V$.
Sea $v \in V \Rightarrow T(v) \underbrace{\in}_{T:V\to V} V$. Luego V es invariante por T.

(c) $nul(T) \subseteq_{se} V$.
Sea $w \in nul(T), T(w) \underbrace{=}_{w\in nul(T)} 0 \underbrace{\in}_{T(0)=0 \; pues \; T \; lineal} nul(T)$.

(d) $im(T) \subseteq_{se} V$.
Sea $w \in im(T) \subset V$, ¿$T(w) \in im(T)$?
Tomando $v = w$ resulta $im(T)$ invariante por T.

2. Sea $\{W_i\}$ una colección de subespacios de un espacio vectorial V invariantes por T. Mostrar que $W = \bigcap_i W_i$ también es invariante por T.

Sea $w \in W \underbrace{\Rightarrow}_{w=\bigcap_i W_i} w \in W_i \; \forall i \underbrace{\Longrightarrow}_{W_i \; inv. \times T} T(w) \in W_i \; \forall i \Longrightarrow T(w) \in \bigcap_i W_i$.

3. Hallar todos los subespacios invariantes de $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ considerada como operador lineal sobre $\mathbb{R}^2$.

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / T(x) = Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

- Por (1) $\{0\}, \mathbb{R}^2, nul(A), col(A)$ ser subespacios invariantes.
- Por otro lado, los autovectores de un operador lineal $T : V \to V$ pueden caracterizarse como generadores de subespacios invariantes de T de dimensión 1.
  Supongamos $T(v) = \lambda v, v \neq 0$ entonces $W = \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{K}\}$ es invariante por T pues $T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha(\lambda v) = (\alpha\lambda)v \in W$.
  Recíprocamente, supongamos $dim(U) = 1, U = \langle u \rangle$ y U invariante por T. Entonces, como $T(u) \in U$, resulta

$T(u) = \beta U$ para algún $\beta \in \mathbb{K}$, con lo que resulta un autovector de T.
Pensando matricialmente, debemos hallar los $v \neq 0 \mid Av = \lambda v$ y luego $W_i = \langle v_i \rangle$ serán los subespacios de $\mathbb{R}^2$ invariantes por T de dim 1.

$$(A - \lambda I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (2-\lambda)v_1 - 5v_2 = & 0 \\ v_1 - (2+\lambda)v_2 = & 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow v_1 = (2+\lambda)v_2 \wedge (2-\lambda)(2+\lambda)v_2 - 5v_2 = 0 \Rightarrow (-1-\lambda^2)v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = 0$ si esto ocurre $v_1 = 0$ y $v = 0$.
Absurdo! (v autovector).
Ya analizamos todas las posibilidades de subespacios de $\mathbb{R}^2$ invariantes por T, ya que estos son o bien de dimensión 1 o 2.
Por lo tanto, los únicos subespacios invariantes de A son $\{0\}$ y $\mathbb{R}^2$.

Caso en que donde existe un subespacio invariante de dimensión 1:
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Supongamos que v es el autovector respondiente al autovalor λ, tenemos que

$T(v) = \lambda v$

Entonces, **el espacio generado por el autovector v va a ser invariante**.
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$

Si buscamos el autoespacio de esa matriz $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ del autovalor correspondiente a 1 nos da $\langle (1,0)^t \rangle$.

$|A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \Longrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Longrightarrow (1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

$\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow x \in \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

Luego $W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ es un **subespacio invariante** por T.

Por lo tanto, los subespacios invariantes del operador lineal T son $\{\}, W$ y $\mathbb{R}^2$.

Fuente:https://www.chegg.com/homework-help/find-invariant-subspaces-real-linear-operator-whose-matrix-cha
s4-problem-5e-solution-9780134689609-exc

4. Sea $\hat{T}$ la restricción de un operador T a un subespacio invariante W, es decir $\hat{T}w = Tw, \forall w \in W$. Probar que para todo polinomio $p(t)$, $f(\hat{T})w = f(T)w$.
$T : V \to V, \quad W \subseteq_{se} V$ invariante por T y $\hat{T} = T\mid_w$ ie, $\hat{T}w = Tw, \forall w \in W$.

Veamos que para todo polinomio $p(t)$, $\quad p(\hat{T})(w) = p(T)(w)$

- Si $p(t) = 0$ o $p(t) = cte$ el resultado vale
- Lo probamos por inducción sobre el grado del polinomio.
  $n = 1, \quad p(t) = a_1 t + a_0$
  $p(\hat{T})(w) = (a_1\hat{T})(w) + a_0 = a_1(\hat{T}(w)) + a_0 = a_1(T(w)) + a_0 = (a_1 T)(w) + a_0 = p(T)(w)$.

Supongamos que vale para $n-1$

Lo probamos para n
$p(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} \cdots + a_1 t + a_0$. Luego,
$p(\hat{T})(w) = (a_n\hat{T}^n + a_{n-1}\hat{T}^{n-1} + \cdots + a_1\hat{T}^1 + a_0 \underbrace{I}_{\hat{T}^0})(w) =$

$= (a_n\hat{T}^{n-1})(\hat{T}(w)) + (a_{n-1}\hat{T}^{n1} + \cdots + a_0 I)(w) \underbrace{=}_{HI}$

$= (a_n T^{n-1})(\hat{T}(w)) + (a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0 I)(w) \quad \underbrace{=}_{T(w)=\hat{T}(w)}$

$= (a_nT)(T(w)) + (a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0I)(w) = p(T)(w)$

$\therefore$Vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

5. Sea $T : V \to V, T \in \mathcal{L}(V)$. Supongamos que para todo $v \in V$ se tiene que $T^k v = 0$ pero $T^{k-1}v \neq 0$. Probar que:
   (a) $S = \{T^{k-1}, \dots, Tv, v\}$ es linealmente independiente.
   (b) El subespacio $W = \langle X \rangle$ es invariante por T.

   $T : V \to V, T \in \mathcal{L}(V)$ $\forall v \in V$ $T^k(v) = 0$ pero $T^{k-1}(v) \neq 0$.

   (a) Probar que $S = \{T^{k-1}(v), \cdots, T(v), v\}$ es linealmente independite.
   Consideremos$\alpha_0 v + a_1T(v) + \cdots + a_{t-1}T^{k-1}(v) = 0$
   $a_0 v + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i T^i(v) = 0$
   Luego $T^{k-1}(\alpha_0 v + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i T^i(v)) = T^{k-1}(0) \underbrace{=}_{T^{k-1}lineal} 0 \underbrace{\Longrightarrow}_{T^{k-1}lineal}$
   $\alpha_0 T^{k-1}(v) + \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{\alpha_i\, T^{i-1}(\underbrace{T^k(v)}_{=0}}_{=0} = 0$
   $\Longrightarrow \alpha_0 T^{k-1}(v) = 0 \quad \wedge \quad T^{k-1}(v) \neq 0 \Longrightarrow \alpha_0 = 0$
   Teniendo en cuenta que $\alpha_0 = 0$, de (1) tenemos
   $\alpha_1 T(v) + \cdots + \alpha_{k-1}T^{k-1}(v) = 0$
   Aplicamos T^{k-2} y con un razonamiento análogo al anterior obtenemos $\alpha_1 = 0$
   Aplicamos iterativamente este procedimiento resulta
   $\alpha_i = 0 \quad \forall i = 0 \to k-1$
   $\therefore$ S es un conjunto de vectores linealmente independiente.

   (b) $W = \langle S \rangle$ es invariante por T.

   Sea $w \in W$, luego $w = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i T^i(v)$.
   Ahora bien $T(w) \underbrace{=}_{T\ lineal} \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i T^{i+1}(v) \underbrace{=}_{T^k(v)=0} \sum_{i=0}^{k-2} \alpha_i T^{i+1}(v) =$
   $= \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{i-1} T^i(v) \underbrace{\in}_{W\ subesp.} W$.
   $\therefore$ W es invariante por T.

6. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, probar que
   (a) $\{0\} = nul(T^0) \subset nul(T^1) \subset \cdots \subset nul(T^k) \subset nul(T^{k+1}) \subset \dots$
   (b) $nul(T^m) = nul(T^{m+1}) \Rightarrow nul(T^m) = nul(T^{m+1}) = nul(T^{m+2}) = ...$
   (c) Si $dimV = n$ luego $nul(T^n) = nul(T^{n+1}) = \dots$.

   Soluciones

   (a) $\{0\} = nul(T^0) \subset nul(T^1) \subset \cdots \subset nul(T^k) \subset nul(T^{k+1}) \subset \cdots$
   Primero observemos que $nul(T^0) = nul(I) = \{v \in V \mid Iv = 0\} = \{v \in V \mid v = 0\} = \{0\}$
   Ahora bien, veamos que $nul(T^k) \subset nul(T^{k+1}) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
   Sea $v \in nul(T^k) \Rightarrow T^k(v) = 0$. Aplicamos T y así
   $T(T^k(v)) = T(0) = 0 \Leftrightarrow v \in nul(T^{k-e1})$
   $\therefore nul(T^k) \subset nul(T^{k+1}) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$.

   (b) Sea $nul(T^n) = nul(T^{n+1})$, luego $nul(T^n) = nul(T^{n+1}) = nul(T^{n+2}) = \cdots$
   Consideramos $nul(T^{n+i-1})$ veamos que $nul(T^{mn-1}) = nul(T^{n+i}) \quad \forall i \in k \in \mathbb{N}_0$
   Lo probamos por inducción

   - Si $i = 1$ vale por hipótesis.
   - Suponemos que vale para algún $i = nul(T^{n+i-1}) = nul(T^{n+i})$

- Lo probamos para $i+1$
  $nul(T^{n+i+1}) = \{v \in V \mid T^{n+i+1}(v) = 0\} = \{v \in V \mid T^{n+i}(T(v)) = 0\} =$
  $\underbrace{=}_{HI} \{v \in V \mid T^{n+i-1}(T(v)) = 0\} = \{v \in V \mid T^{n+i}(v) = 0\} = nul(T^{n+i})$.

7. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, $dim(V) = n$, luego $V = nul(T^n) \oplus img(T^n)$.

8. Determinar todas las posibles formas canónicas de Jordan para una matriz de orden 5 cuyo polinomio minimal es $m(t) = (t-2)^2$.
   Solución
   $n(t) = (t-2)^2$ existe al menos un bloque de orden 2×2 y los demás bloques correspondientes a $\lambda = 2$ son de orden ≤ 2.

9. Determinar todas las posibles formas canónicas de Jordan para una matriz con polinomio característico $p_A(t) = (t+2)^3(t-7)^2$. En cada caso determinar el polinomio minimal $m(t)$.

$$p_A(t) = \underbrace{(t+2)^3}_{-2\ aparece\ 3\ veces\ en\ la\ diag\ princial} \times \overbrace{(t-7)^2}^{7\ aparece\ 2\ veces\ en\ la\ diag\ principal}$$

   Los posibles formas canónicass de Jordan con sus polinomios minimales son:

Práctica 2: Espacios Vectoriales

1. Sea $\langle S \rangle$ el subespacio generado por un subconjunto S de V. Demos las siguientes propiedades:
   (a) Si $S \subset T$, entonces $\langle S \rangle \subset \langle T \rangle$.
   (b) $S \subset \langle S \rangle$.
   (c) Si $S \subset T$ y T es un subespacio de V, entonces $\langle S \rangle \subset T$. Es decir $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.
   (d) S es un subespacio de V si y sólo si $\langle S \rangle = S$.
   (e) Si $\langle S \rangle = \mathcal{U}$, entonces $\langle \mathcal{U} \rangle = \mathcal{U}$.
   (f) Sea $W \subset V$. Entonces
      i. $\langle S \cap W \rangle \subset \langle S \rangle \cap \langle W \rangle$,
      ii. $\langle S \cup W \rangle \subset \langle S \rangle + \langle W \rangle$.
   (g) Valen las contenciones inversas en los ítems $a)$ y $f)$.

   SOLUCIONES:
   (a) Sea $s \in \langle S \rangle \Longrightarrow \sum_{v \in S} \alpha_v v$ y como $v \in S \Rightarrow v \in T$.
   (b) Sea $s \in S \Longrightarrow s = 1s + \sum_{v \in S-s} 0v$, por lo que resulta $s \in \langle S \rangle$.
   (c) Sea $s \in \langle S \rangle$ luego $\sum_{v \in S} \alpha_v v$ como $v \in S \Rightarrow v \in T$ y como T es un subespacio se cumple la clausura bajo de la suma y del producto entonces $s \in T$.
   (d) $\Leftarrow$) Trivial pues si S es un subespacio de V cumple la clausura bajo la suma y el producto luego, $\langle S \rangle = S$.
   $\Rightarrow$) S es un subespacio $\Rightarrow S \subseteq \langle S \rangle$. $S \subseteq S$ y S es un subespacio de V por lo tanto$\langle S \rangle \subseteq S$.
   (e) $\Longrightarrow$) Supongo $\langle S \rangle = \mathcal{U}$

   Pruebo $\langle \mathcal{U} \rangle = \mathcal{U}$
   - $\boxed{\supset}$ $v \in U \Rightarrow v = 1v + \sum_{v \in U-v} 0v$, luego $U \subset \langle U \rangle$.
   - $\boxed{\subseteq}$ Como U es un subespacio generado por S, vale la clausura de la suma y del producto, luego $\langle U \rangle = U$.

2. Analizar si los siguientes vectores son linealmente independientes.
   (a) $(1,1,0,0); (1,0,1,0); (0,0,1,1); (0,1,0,1)$
   (b) $(1,1,0); (1,0,0); (0,1,1); (x,y,z)$ para x, y, z cualesquiera.

Soluciones:

(a) $\alpha(1,1,0,0)+\beta(1,0,1,0)+\gamma(0,0,1,1)+\delta(0,1,0,1)=0 \Longrightarrow \alpha=\beta=\gamma=\delta=0$.
$=(\alpha+\beta,\alpha+\delta,\beta+\gamma,\gamma+\delta)=0$. O podemos hacer reducción por filas sobre los vectores.
$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$. Luego como tenemos una columna nula, el rango de esta matriz es 3 (el rango son las filas no nulas luego de la eliminación de filas), $\alpha+\beta=0, -\beta+\delta=0, \gamma+\delta=0$ (es decir tengo que encontrar una solución no trivial, que no sean todos los escalares nulos, tal que el sistema me de la solución nula. Por ejemplo $-1(1,1,0,0)+1(1,0,1,0)-1(0,0,1,1)+1(0,1,0,1)$.

(b) Claramente para $(x,y,z)=(1,0,0)$ resulta $0=1(1,1,0)+0(1,0,0)+0(0,1,1)-1(x,y,z)$, luego no son linealmente independientes.

3. Sea $P=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x-2y+z-t=0\}$. Verificar que P es un espacio vectorial y hallar 3 vectores linealmente independientes en P.
En efecto, sean $u=(x_1,y_1,z_1,t_1)\in P$, $v=(x_2,y_2,z_{,2},t_2)\in P$ y $\alpha\in\mathbb{K}$. Luego:

- Sabemos que $x_1-2y_1+z_1-t_1=0$ y $x_2-2y_2+z_2-t_2=0$ y sumando ambas ecuaciones: $(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)+(z_1+z_2)-(t_1+t_2)=0$ por lo que $u+v=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2+t_1+t_2)\in P$.
- $\alpha u=(\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1,\alpha t_1)\in P$ pues multiplicando ambos lados por α tenemos que $\alpha x_1-2(\alpha y_1)+\alpha z_1-\alpha t_1=0$.
- Para encontrar los vectores que generan esos espacios podemos reescribir la ecuación como $x=2y-z+t$. Luego tenemos que $\begin{bmatrix}2y-z+t\\y\\z\\t\end{bmatrix}$, sacando factor común $y\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$, que son los 3 vectores linealmente independientes que generan a P. También debemos recordar que si estamos hablando de vectores de $\mathbb{R}^n$ y ya tenemos una simple condición/ecuación que deben cumplir los vectores el subespacio va a tener una dimensión menor a n.

4. Si $\{v_1,v_2,v_3\}\subset V$ es un conjunto l.i., probar que $\{v_1+v_2,v_1+v_3,v_2+v_3\}$ también es l.i.
Suponemos que $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=0$.Ahora vamos a ver que $\{v_1+v_2,v_1+v_3,v_2+v_3\}$ también es l.i., para ello tenemos que probar que la única solución nula sea que todos los escalares sean ceros.
$\alpha(v_1+v_2)+\beta(v_1+v_3)+\gamma(v_2+v_3)=0\Rightarrow \alpha v_1+\alpha v_2+\beta v_1+\beta v_3+\gamma v_2+\gamma v_3=0\Rightarrow$
$(\alpha+\beta)v_1+(\alpha+\gamma)v_2+(\beta+\gamma)v_3=0$ y como V es linealmente independiente tenemos que resolver $\alpha_1+\alpha_2=0, \alpha_1+\alpha_3=0$ y $\alpha_2+\alpha_3=0$ por lo que resolviendo el sistema obtenemos $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

5. Sea V un espacio vectorial de dimensión finta y W un subespacio de V tal que $dim(V)=dim(W)$. Probar que $V=W$.

6. Sea $A=\{(1,-3,2)^t,(2,4,1)^t,(3,1,3)^t,(1,1,1)\subset\mathbb{R}^3$, obtener:

(a) Una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

(b) Las componentes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base obtenida en el apartado anterior.

Soluciones:

(a) $\begin{bmatrix}1&2&3\\1&4&1\\1&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&10&10\\0&-3&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}$.
$B=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\4\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\3\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$

(b) $\alpha(1,1,1)+\beta(2,4,1)+\gamma(3,1,3)=(\alpha+2\beta+3\gamma,-3\alpha+4\beta+\gamma,2\alpha+\beta+3\gamma)=0$.
$[1,0,0]_B=(\alpha+2\beta+3\gamma,\alpha+4\beta+\gamma,\alpha+\beta+3\gamma)$.

$1=\alpha+2\beta+3\gamma$
$0=\alpha+4\beta+\gamma$
$0=\alpha+\beta+3\gamma$

Ahora sólo despejamos las variables y listo o también podemos hacer la matriz aumentada y luego aplicar reducción por filas para llegar a la solución.
$[1,0,0]_B=(-\frac{11}{2},1,\frac{3}{2})$
$[0,1,0]_B=(\frac{3}{2},0,-\frac{1}{2})$
$[0,0,1]_B=(5,-1,-1)$

7. Sea $S = \langle \{(1,-1,1)^t, (2,1,0)^t, (4,-1,2)^t\} \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Obtener una base de S.
No es linealmente independiente ya que $(0,0,0) = 2(1,-1,1) + 1(2,1,0) - 1(4,-1,2)$.
Esto significa que un vector puede ser escrito como combinación lineal de otros, lo pedemos ver en la ecuación anterior simplemente despejando algún vector.
Entonces sacaremos un vector del conjunto tomaremos como base de S: $\langle \{1,-1,1\}, (2,1,0) \rangle$, podemos verificar que son l.i. multiplicandolo a cada vector por un escalares a_1, a_2, a_3 y ver si la única solución que posee es cuando todos los escalares se hacen 0. O haciendo eliminación por filas y que no nos quede ninguna fila nula.

8. Encontrar la dimensión de:
   (a) el espacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas componentes suman cero.
   (b) el espacio nulo de la matriz $I \in \mathcal{M}_{4\times 4}$.
   (c) el espacio de matrices simétricas 3×3. Hallar una base.

   Soluciones:

   (a) $A = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2+x_3+x_4 = 0 \right\}$, entonces se cumple que $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2-x_3-x_4$
   luego
   $\begin{bmatrix} -x_2-x_3-x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, sacando factor común obtendremos 3 vectores que van a ser la base de este subespacio. Y como la dimensión es la cantidad de elementos de la base, entonces la dimensión es 3.

   (b) $N(I) = 0$ ya que usando el teorema de la dimensión $DIM(N(A)) = n - r$. (nº de columnas - rango = número de filas no nulas luego de la eliminación por filas a una matriz escalonada). En este caso la matriz identidad tiene rango 4 y el número de columna es 4, luego el nulo de la matriz identidad es 0.

   (c) $DIM\left(\left\langle\left\{ \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\1&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{bmatrix} \right\}\right\rangle\right\} = 6$

9. Describir los cuatro espacios asociados a las siguientes matrices:

$$a)A = \begin{bmatrix} 0&1&4&0\\0&2&8&0 \end{bmatrix} \quad b)B = \begin{bmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

   Soluciones:

   (a) Primero hacemos reducción por filas para ver cual es el rango(nº de filas no nulas) de A y A^t y cuáles columnas son linealmente independientes. $A = \begin{bmatrix} 0&1&4&0\\0&2&8&0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0&1&4&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix}$. Como el rango es 1, luego el espacio columna está generado por sólo un vector de la matriz, que se toma desde la matriz original, no del resultado de la reducción por filas.
   $A^T = \begin{bmatrix} 0&0\\1&2\\4&8\\0&0 \end{bmatrix} \underbrace{\to}_{F_3=F_3-4F_2} \begin{bmatrix} 0&0\\1&2\\0&0\\0&0 \end{bmatrix}$, el rango de esta matriz coincide con el rango del espacio columna de A, es decir, es 1.

   Recordemos que $RowSpace(A) = C(A^T)$ y $dim(C(A)) = dim(C(A^T))$
   $dim(C(A)) = 1; dim(C(A^T)) = 1; dim(N(A)) = n(cant\, de\, columnas) - r(rango) = 4-1 = 3; dim(N(A^T)) = m(n\ de\ filas) - r(rango) = 2-1 = 1$

   $\begin{bmatrix} 0&0\\1&2\\0&0\\0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\\x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\0 \end{bmatrix} \Longrightarrow N(A^T) = \left\langle \begin{bmatrix} -2\\1 \end{bmatrix} \right\rangle$

   $\begin{bmatrix} 0&1&4&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\0 \end{bmatrix} \Rightarrow N(A) = \left\langle\left\{ \begin{bmatrix} 0\\-4\\1\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{bmatrix} \right\}\right\rangle$

Como la dimensión de $C(A) = 1$ entonces tomamos un vector de la matriz original, análogamente con $C(A^T)$.
$C(A) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$

$C(A^T) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$

10. Sea $B_1 = \{v_1, v_2 v_3\}$ una base para un espacio vectorial V. (Este ejercicio no lo hice yo)

    (a) Demostrar que $B_2 = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ también es una base.

    (b) Hallar la matriz de cambio de base $A / [v]_{B_1} = A[v]_{B_2}$

    (a) Para que B_2 sea una base tenemos que verificar que sean linealmente independientes y que la dimensión sea la misma.

    $$dim(V) = 3 = |B_1| = |B_2|$$

    Ahora para comprobar que es linealmente independiente hacemos:
    $\alpha(v_1) + \beta(v_1 + v_2) + \gamma(v_1 + v_2 + v_3) = 0$ y sólo deberíamos obtener la solución donde todos los escalares sean ceros. $\implies (\alpha + \beta + \gamma)v_3 + (\beta + \gamma)v_2 + (\gamma)v_3 = 0$ y como sabemos que B_1 es linealmente independiente entonces tenemos que resolver $0 = (\alpha + \beta + \gamma) = (\beta + \gamma) = \gamma$.
    Luego $\gamma = 0 \Rightarrow \beta = 0$ y $\alpha = 0$. Por lo que hemos probado que también es una base de V.

    (b) $[v]_{B_1} = A[v]_{B_2}$

    Recordemos que la matriz de cambio de base está formada por:

    $$P_{B_1 \leftarrow B_2} \begin{bmatrix} [v_1]_{B_1} & [v_1 + v_2]_{B_1} & [v_1 + v_2 + v_3]_{B_1} \end{bmatrix}$$

    $[v_1]_{B_1} = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3$
    $[v_1 + v_2]_{B_1} = 1v_1 + 1v_2 + 0v_3$
    $[v_1 + v_2 + v_3]_{B_1} = 1v_1 + 1v_2 + 1v_3$

    Copiando las coordenadas anteriormente calculadas obtenemos: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. Dar en cada caso una matriz que cumpla las condiciones dados o jutificar porque no existe.

    (a) Su espacio columna está generado por los vectores $(1, 0, 0)^t, (0, 0, 1)^t$ y su espacio fila está generado por $(1, 1)^t, (1, 2)^t$.

    (b) Su espacio columna tiene al vector $(1, 1, 1)^t$ como base y su espacio fila tiene como base al vector $(1, 2, 1)^t$.

    (c) Su espacio columna contiene a los vectores $(1, 1, 0)^t, (1, 0, 1)^t$ pero no al vector $(1, 1, 1)^t$.

    (d) Su espacio columna contiene a $(1, 2, 1)^t$,su espacio nulo contiene a $(-1, 0, 1)^t$ y tiene determinante -1.

    (a) $C(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; C(A^T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$
    $C(A^T) = \langle \{(1, 0)^t, (0, 1)^t\} \rangle = \langle \{(1, 1)^t, (1, 2)^t\} \rangle$
    podemos tomar la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ya que $C(A^T) = \langle \{(1, 1)^t, (1, 2)^t\} \rangle = \langle \{(1, 0)^t, (0, 1)^t\} \rangle$.

    (b) $C(A) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, C(A^T) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. Repasando teoremas tenemos que obligatoriamente debe pasar que $dim(C(A)) = dim(C(A^T)) = rango$ y $N(A) = n - r = n - 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) $(1,1,1) = a_1(1,1,0) + a_2(1,0,1) \Rightarrow$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 & = 1 \\ a_1 & = 1 \\ a_2 & = 1 \end{cases} \Longrightarrow a_1 + a_2 \neq 1$$

Es decir, los 3 vectores son linealmente independientes.

Luego no existe ninguna combinación lineal de los vectores $(1,1,0)$ y $(1,0,1)$ que de como resultado al vector $(1,1,1)$.

Nos bastaría con tomar la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) Si $N(A) = 0 \Rightarrow A$ posee columnas independientes y $dim(A) \neq 0$.
Ahora si tenemos $N(A) \neq \emptyset$ entonces si o si $dim(A) = 0$ ya que las columnas no son independientes.

En este caso se nos pide una matriz en la que el nulo de la matriz contiene un vector (lo que implicaría que los vectores son l.d.) y a su vez nos pide que su determinante sea $|A| \neq 0$, lo cual no es posible, ya que si el determinante es $|A| \neq 0$ implicaría que sus columnas son independientes por lo tanto el espacio nulo debería contener solo al $\{0\}$.

12. Sea $V = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i / a_i \in \mathbb{R} \right\}$ y $B_1 = \{1, x, x^2\}$ base estándar de V.

(a) Probar que $B_2 = \{x-1, 1, (x-1)^2\}$ es otra base de V.

(b) Hallar la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

(c) Utilizar lo obtenido en el item anterior y determinar $[p]_{B_2}$ donde $p(x) = 2x^2 - 5x + 6$. ¿Cuáles son las coordenadas de p en la base $\{(1, (x-1)^2, x-1\}$?

(a) Lo primero que hacemos es calcular la dimensión de la base $dim(V) = 3 = |B_1| = |B_2|$. Ahora sólo nos resta probar que B_2 es linealmente independiente.
$a(x-1) + b(1) + c(x-1)^2 = 0 \Longrightarrow ax - a + b + c(x^2 - 2x + 1) = 0 \Longrightarrow ax - a + b + cx^2 - 2cx + c = 0 \Longrightarrow cx^2 + (a-2c)x - a + b + c = 0x^2 + 0x + 0 \Longrightarrow$

$$\begin{cases} c & = 0 \\ a - 2c & = 0 \\ a + b + c & = 0 \end{cases} \Longrightarrow c = 0; a = 0; b = 0$$

Luego B_2 genera a V por lo tanto también una base para V.

(b)

$$P_{B_2 \leftarrow B_1} \left[[1]_{B_2} \quad [x]_{B_2} \quad [x^2]_{B_2} \right]$$

$[1]_{B_2} = 0(x-1) + 1(1) + 0((x-1)^2)$
$[x]_{B_2} = 1(x-1) + 1(1) + 0((x-1)^2)$
$[x^2]_{B_2} = a(x-1) + b(1) + c(x-1)^2 = ax - a + b + c(x^2 - 2x + 1) = ax - a + b + cx^2 - 2cx + c = cx^2 + (a-2c)x + -a + b + c$

$$\begin{cases} cx^2 & = x^2 \\ (a-2c)x & = 0 \\ -a + b + c & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c & = 1 \\ (a - 2.1) & = 0 \\ -a + b + c & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c & = 1 \\ a & = 2 \\ -2 + b + 1 & = 0 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

Hay otra forma de calcular la matriz cambio de base haciendo lo siguiente:

$$[\mathcal{C}|\mathcal{B}] \underbrace{\longrightarrow}_{reducción} \left[I \middle| \underbrace{\mathcal{C}^{-1}B}_{P_{C \leftarrow B}} \right]$$

Volviendo a lo anterior:

Luego $P_{B_2 \leftarrow B_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ejemplo de como usar la matriz de cambio de base, en este caso el vector $(1,1,1)$ representa a $1(1)+1(x)+1(x^2)$ en la base B_1.

$$P_{B_2 \leftarrow B_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_2} = 3(x-1)+1+1(x-1)^2 = 3x-3+1+x^2-2x+1 = x^2+x+1.$$

Obtuvimos el mismo resultado en diferentes bases.

(c) $[2x^2-5x+6]_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{B_2} = -1(x-1)+3(1)+2[(x-1)^2] = 2x^2-5x+6$$

13. Hallar la matriz cambio de base de:

    (a) la base estándar de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a la base
    $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$
    Determinar $[A]_{B'}$ para $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

    (b) la base $\{1, x, -1+2x^2, -3x+4x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ a la base $\{1, -\frac{1}{2}+x, -x+x^2, \frac{1}{4}-\frac{3}{2}x^2+x^3\}$.

(a) Tenemos que pasar de la base estándar: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$.

Para hacer eso calculamos la matriz cambio de base $P_{B' \leftarrow B} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{B'}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{B'}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{B'}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{B'} \right]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{B'} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{B'} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{B'} = 0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{B'} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{4} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P_{B' \leftarrow B} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -2 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}_{B_2} \underbrace{=}_{???} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Calculamos: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{4}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ efectivamente nos da como resultado la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Hago la matriz cambio de base de la base $B = \{1, x, -1 + 2x^2, -3x + 4x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ a la base $B' = \{1, -\frac{1}{2} + x, -x + x^2, \frac{1}{4} - \frac{3}{2}x^2 + x^3\}$.
$P_{B' \leftarrow B} \left[[1]_{B_2} \quad [x]_{B_2} \quad [-1 + 2x^2]_{B_2} \quad [-3x + 4x^3]_{B_2} \right]$

$[1]_{B_2} = 1(1) + 0(-\frac{1}{2} + x) + 0(-x + x^2) + 0(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}x^2 + x^3)$

$[x]_{B_2} = \frac{1}{2}(1) + 1(-\frac{1}{2} + x) + 0(-x + x^2) + 0(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}x^2 + x^3)$

$[-1 + 2x]^2_{B_2} = 0(1) + 2(-\frac{1}{2} + x) + 0(-x + x^2) + 0(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}x^2 + x^3)$

$[-3x+4x^3]_{B_2} = a(1)+b(-\frac{1}{2}+x)+c(-x+x^2)+d(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}x^2+x^3) = a-\frac{b}{2}+bx-cx+cx^2+\frac{d}{4}-\frac{3}{2}dx^2+dx^3 \Longrightarrow$

$dx^3 + (c - \frac{3}{2}d)x^2 + (b - c)x + a - \frac{1}{2} + \frac{d}{4} = -3x + 4x^3$. Entonces por igualdad de polinomios nos queda el siguiente sistema:

$$\begin{cases} d & = 4 \\ c - \frac{3}{2}d & = 0 \\ b - c & = -3 \\ a - \frac{1}{2} + \frac{d}{4} & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} d & = 4 \\ c - 6 & = 0 \Rightarrow c = 6 \\ b - 6 & = -3 \Rightarrow b = 3 \\ a - \frac{1}{2} + 1 & = 0 \Rightarrow a + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

La matriz de cambio de base nos quedaría:

$$P_{B' \leftarrow B} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

14. COMPLETAR ÚLTIMO EJ.

Práctica 3: Transformaciones Lineales

1. Para cada una de las siguientes funciones $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ determinar si se trata de una transformación lineales y en caso afirmativo: obtener $nul(T)$, $img(T)$, calcular sus dimensiones y determinar si T es inversible.

   (a) $T((x, y)) = (y, x)$
   (b) $T((x, y)) = (x^2, y^2)$
   (c) $T((x, y)) = (x, -y)$
   (d) $T((x, y)) = (x, 0)$

   Para probar que es lineal tengo que ver que se cumpla lo siguiente: $T(u + v) = T(u) + T(v)$ y $T(\alpha v) = \alpha T(v)$.

   (a) $img(T) = \{y(1, 0) + x(0, 1) : x, y \in \mathbb{R}\} = \langle\{(0, 1), (1, 0)\}\rangle = \mathbb{R}^2$. Luego $dim(img(T)) = 2$. O también lo podemos calcular así:
   $img(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x, y) = (a, b)\}$

   $nul(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid T(x, y) = (0, 0)\} \Rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y, x) = (0, 0)\} = \{0\}$. Además $nul(T) = n - r$, donde n sería la dimensión del espacio vectorial donde se mueve T. Como $nul(T) = \{0\}$ entonces decimos que T es inyectiva, y como $img(T) = \mathbb{R}^2$ entonces T también es sobreyectiva.
   Luego T al ser biyectiva, es inyectiva.

   Sea $u = (x_1, y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$

   $T(u + v) = T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2) =$

$= T(u) + T(v) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = (y_1, x_1) + (y_2, x_2) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2)$

Por lo tanto T es una transformación lineal.

(b) No es una transformación lineal, ya que no se cumple la clausura bajo el producto tomando $u = (1, 0)$ y $a = -1$ tenemos que
$T(au) = T(-1(1, 0)) = T((-1, 0)) = ((-1)^2, 0^2) = (1, 0) \neq (-1, 0) = -1(1, 0) = aT(u)$

(c) $img(T) = \{(x, 0) + (0, -y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \langle\{(1, 0), (0, -1)\}\rangle = \mathbb{R}^2$. Luego $dim(img(T)) = 2$.
Por lo tanto el nulo de T sólo contiene al $\{0\}$, como vimos anteriormente $dim(nul(T)) = n - r$.

Sea $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ probemos entonces que es una transformación lineal

$T(u + v) = T((u_1 + v_1, u_2 + v_2)) = (u_1 + v_1, -u_2 - v_2) =$
$= T(u) + T(v) = T(u_1, u_2) + T(v_1, v_2) = (u_1, -u_2) + (v_1, -v_2) = (u_1 + v_1, -u_2 - v_2)$

Luego T es una transformación lineal.

(d) $img(T) = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle(1, 0)\rangle$. Luego $dim(img(T)) = 1$. (No es sobreyectiva)
Por lo tanto ya sabemos que el nulo de T va a contener un elemento, $dim(nul(T)) = n - r = 2 - 1 = 1$ (No es inyectiva)
Observemos que el espacio nulo siempre es la entrada de la función, el espacio nulo se genera a partir del dominio que de como resultado al 0, ya sea 0 de polinomios, vectores, matrices. Entoncen sin hacer ningún cálculo ya sabemos que el $nul(T) = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(0, 1) : y \in \mathbb{R}\} = \langle\{0, 1\}\rangle$, es decir todas las comb. lineales de ese vector ya que darían como resultado al 0.

Otra forma:
$nul(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R} : T(x, y) = (0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : (x, 0) = (0, 0)\} \implies$
$\begin{cases} x &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$, es decir el y puede valer cualquier cosa.

Luego, T no es invertible.

Ahora verificamos si es lineal, tomando $u = (u_1, u_1)$ y $v = (v_1, v_2)$

$T(u + v) = T(u_1 + v_1, v_1 + v_2) = (u_1 + v_1, 0) = (u_1, 0) + (v_2 + 0) = T(u_1, u_1) + T(v_2, v_2) = T(u) + T(v)$
$T(a(u)) = T(a(u_1, u_2)) = T(au_1, au_2) = (au_1, 0) = aT(u_1, u_2) = aT(u)$

Luego T es una TL.

2. Sea $V = \mathbb{R}^2$, fijamos la base canónica $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. Para cada $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hallar A_i tal que $A_i x = T_i(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, 4$.

   (a) $T_1(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$
   (b) $T_2(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
   (c) $T_3(x) = cx, c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$
   (d) $T_4(x) = y, donde\ y = (y_k)_{k=1}^n$ con $y_k, = x_k, i \neq k, y_k = x_i, k = j$ y $y_k = x_j, k = i$.

   (a) $T_1(e_i) = e_i$, por lo tanto $A_1 = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{bmatrix}$
   (b) $T_2(e_i) = 0$, por lo tanto $A_2 = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$.
   (c) $T_3(e_i) = cx$, por lo tanto, $A_3 = \begin{bmatrix} ce_1 & ce_2 & \cdots & ce_n \end{bmatrix}$.

3. Consideremos la base canónica de $V = \mathbb{R}^2$ dada por $B = \{e_1, e_2\}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que aplica los vectores e_1 y e_2 como sigue:

   - $T(e_1) = e_1 + e_2$
   - $T(e_2) = 2e_1 - e_2$

   Obtener:

(a) $T(3e_1 - 4e_2)$ y $T^2(3e_1 - 4e_2)$

(b) Las matrices asociadas a T y T^2 en la base B.

(c) $T(v), \forall v \in V$.

(a) $T(3e_1-4e_2) = T(3e_1)+T(-4e_2) = 3T(e_1)-4T(e_2) = 3(e_1+e_2)-4(2e_1-e_2) = 3e_1+3e_2-8e_1+4e_2 = (3-8)e_1+(3+4)e_2 =$
$= -5e_1+7e_2 = -5(1,0)+7(0,1) = (-5,7)$
$T^2(3e_1-4e_2) = T(T(3e_1-4e_2)) = T(-5e_1+7e_2) = -5T(e_1)+7T(e_2) = -5(e_1+e_2)+7(2e_1-e_2) = -5e_1-5e_2+14e_1-7e_2 = 9e_1+12e_2$

(b) $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

Para calcular la matriz asociada a T^2 tenemos que hallar $T(T(e_1))$ y $T(T(e_2))$,
$T(e_1+e_2) = T(e_1)+T(e_2) = (e_1+\cancel{e_2})+(2e_1-\cancel{e_2}) = 3e_1+0e_2 = (3,0)$
$T(2e_1-e_2) = 2T(e_1)-T(e_2) = 2(e_1+e_2)-(2e_1-e_2) = \cancel{2e_1}+2e_2-\cancel{2e_1}+2e_2 = 3e_2 = (0,3)$

Luego la matriz de la transformación lineal es:
$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(c) Sabemos que $T(x) = Ax$, entonces tenemos que $T(x_1,x_2) = A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$ (x_1+2x_2, x_1-x_2)

4. Sea $T_{1,2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T_1((x,y,z)^t) = (x,y,0)$ y $T_2((x,y,z)^t) = (x,y,y)^t$. Hallar $T_1 \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1$. Analizar si son epimorfismo (transformación lineal sobreyectiva), monomorfismo(inyectiva) o ninguna de ellas.
Es inyectiva si el espacio nulo contiene sólo al $\{0\}$, es sobreyectiva si el codominio es igual a la imágen.

$T_1 \circ (T_2(x,y,z)^t) = T_1(T_2(x,y,z)^t) = T_1((x,y,y)^t) = (x,y,0)^t$
$T_2(T_1(x,y,z)^t) = T_2((x,y,0)^t) = (x,y,y)^t$

$img(T_1 \circ T_2) = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,0)+y(0,1,0) : x,y \in \mathbb{R}\} = \langle\{(1,0,0),(0,1,0)\}\rangle, dim(T_1 \circ T_2) = 2$, como podemos ver la dimensión de la imágen es diferente de la dimensión del codominio por lo tanto basándonos en que $dim(nul(T)) = n(dim \quad R^3) - r = 3-2$ el nulo contendrá un elemento.
Observemos además que el nulo son los elementos de entrada(dominio) que hacen nulo a la función/transformación lineal.
$nul(T_1 \circ T_2) = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(0,0,1) : z \in \mathbb{R}\} = \langle\{0,0,1\}\rangle$
O también podemos buscar un contraejemplo $T_1(T_2(0,0,0)) = T_1(T_2(0,0,9000)) = (0,0,0)$, por lo tanto T no es un monomorfismo.

$img(T_2 \circ T_1) = \{(x,y,y) : x,y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,0)+y(0,1,1) : x,y \in \mathbb{R}\} = \langle\{(1,0,0),(0,1,1)\}\rangle, dim(T_2 \circ T_1) = 2 \neq 3 = \mathbb{R}^3$. Luego no es ni un epimorfismo, tampoco monomorfismo.

$nul(T_2 \circ T_1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T_2(T_1(x,y,z))\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,y) = (0,0,0)\}$. El elemento z puede valer cualquier cosa, luego:
$nul(T_2 \circ T_1) = \langle(0,0,1)\rangle$

5. Definimos $\mathbb{R}_n[x] = \{p : p\, polinomio\ a\ coeficientes\ reales\ grad(p) \leq n, x \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$. Sea

$$T : \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}_3[x]$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \qquad T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2dx^3 + (a+b)x^2 + (a-c)x + 2(c+d)$$

(a) Probar que T es lineal.

(b) Hallar una base para $nul(T)$ y una para $img(T)$.

(c) Determinar si T es un isomorfismo.

(a) Para probar que T es lineal debemos verificar que $T(u+v) = T(u)+T(v)$ y $T(au) = aT(u)$.
Sea $u = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{bmatrix}\right) = 2(a_4+b_4)x^3 + ((a_1+b_1)+(a_2+b_2))x^2 + ((a_1+b_1)-(a_3+b_3))x + 2((a_3+b_3)+(a_4+b_4) =$

$= 2a_4x^3 + (a_1+a_2)x^2 + (a_1-a_3)x + 2(a_3+a_4) + 2b_4x^3 + (b_1+b_2)x^2 + (b_1-b_3)x + 2(b_3+b_4) =$
$= T\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\right)$

$T\left(\alpha\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} \alpha b_1 & \alpha b_2 \\ \alpha b_3 & \alpha b_4 \end{bmatrix}\right) = 2(\alpha b_4)x^3 + (\alpha b_1 + \alpha b_2)x^2 + (\alpha b_1 - \alpha b_3)x + 2(\alpha b_3 + \alpha b_4) = \alpha\Big[2b_4x^3 + (b_1+b_2)x^2 + (b_1-b_3)x + 2(b_3+b_4)\Big] = \alpha T\left(\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\right)$

(b) $img(T) = \{2dx^3 + (a+b)x^2 + (a-c)x + 2(c+d) : a,b,c,d \in \mathbb{R}\} = \{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \epsilon : \alpha, \beta, \gamma, \epsilon \in \mathbb{R}\} = \langle\{x^3, x^2, x, 1\}\rangle$. $dim(img(T)) = 4$.
$nul(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0x^3+0x^2+0x+0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : 2dx^3+(a+b)x^2+(a-c)x+2(c+d) = 0x^3+0x^2+0x+0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \epsilon = 0x^3+0x^2+0x+0 \right\} = \{0\}$

Otra forma de calcularlo:
Como sabemos que $dim(nul(T)) = n - r = 4 - 4$ entonces el nulo sólo contiene al 0. Luego $nul(T) = \{0\}$

(c) T no es isomorfo ya que no es ni un monomorfismo(inyectiva) ni un epimorfismo(sobreyectiva).

6. Sea $T_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid T_w(z) = z + w\hat{z}$, donde $w = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) Considerar $w = 1 + i$ y calcular $T_w(2 + 3i)$.
   (b) Comprobar que T_w es una transformación lineal entre espacios vectoriales.
   (c) Si $B = \{1, i\}$ es una base de $\mathbb{C}$, hallar la matriz de T_w en dicha base.
   (d) Probar que T_w es isomorfismo si y sólo si $a^2 + b^2 \neq 1$.

   (a) $T_{1+i}(2+3i) = (2+3i) + (1+i)(2-3i) = (2+3i) + (2-3i+2i-3i^2) = (2+3i) + (2-i+3) = 7+2i$.
   (b) Debería probar que se cumple $T_w(u+v) = T_w(u)+T_w(v)$, y $T_w(au) = aT(u)$, supongo que tomando $w = a+ib$.
   (c) Para hallar la matriz de la transformación lineal, tenemos que hallar cuanto vale la transformación en dicha base y el resultado pasará a ser las columnas de la matriz en el orden de la base.
   $T_w(1) = 1 + (a+ib)(1) = 1 + a + ib$
   $T_w(i) = i + (a+ib)(-i) = i - ai - i^2b = b + (1-a)i$
   $T = \begin{bmatrix} | & | \\ T_w(i) & T_w(i) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a & b \\ b & 1-a \end{bmatrix}$
   (d) T_w es isomorfismo si y sólo si A es inversible si y sólo si $|A| = 0$, si y sólo si $(1+a)(1-a) - b^2 = 0 \iff 1 \cancel{-a+a} - a^2 - b^2 = 0 \iff 1 = a^2 + b^2$.

7. Sea $T : \mathbb{R}_n[x] \to R_n[x]$ tal que $T(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_0 + a_1(x+1) + \cdots + a_n(x+1)^n$. Probar que T es isomorfo.
   Ni toman esto y no tengo idea como hacerlo.

8. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (x+y, x+z, \alpha(v))^t$, donde $v = (x,y,z)^t$ y $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Determinar, si es posible, α de modo que T resulte lineal.
   Para que T sea lineal se tiene que cumplir que $T(u+v) = T(u) + T(v)$ y $T(au) = aT(u)$
   Desarrollandolo nos queda que α debe ser una transformación lineal, así que podemos tomar por ejemplo a $\alpha(x,y,z) = x+y+z$.

9. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal tal que

$$T((0,0,1)^t) = (2,3,5)^t, \qquad T((0,1,1)^t) = (1,0,0)^t, \qquad T((1,1,1)^t) = (0,1,-1)^t$$

   (a) Probar que con esta información es posible obtener $T(v), \forall v \in \mathbb{R}^3$.

(b) Determinar, fijada la base canónica en $\mathbb{R}^3$, la matriz de T.

(c) Utilizando (9b), obtener $dim(nul(T))$ y $rang(T)$.

(d) Determinar si T es inversible.

(a) Como los 3 vectores son linealmente independientes entonces vale que $\forall v \in \mathbb{R}^3$, siempre va a existir una combinación lineal tal que $v = \alpha(0,0,1)+\beta(0,1,1)+\gamma(1,1,1)$, luego tenemos que $T(v) = \alpha T(0,0,1)+\beta T(0,1,1)+\gamma T(1,1,1)$.

(b) Primero tenemos que calcular $T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)$. Para ello tenemos que calcular $(1,0,0)$ como combinación lineal de los elementos de la base, ya que sabemos cuánto vale la transformación lineal sobre esos elementos, entonces:
$(1,0,0) = 0(0,0,1) - (0,1,1) + (1,1,1)$, luego
$T(1,0,0) = 0T(0,0,1) - T(0,1,1) + T(1,1,1) = (-1,0,0) + (0,1,-1) = (-1,1,-1)$

$(0,1,0) = -(0,0,1) + (0,1,1) + 0(1,1,1)$, luego
$T(0,1,0) = -1T(0,0,1) + T(0,1,1) = (-2,-3,-5) + (1,0,0) = (-1,-3,-5)$

$T(0,0,1) = (2,3,5)$

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ T(1,0,0) & T(0,1,1) & T(1,1,1) \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

(c) Hacer reducción por filas a la matriz de la TL, luego a partir de ahí calcularlo.

(d) Yes.

10. Determinar, si existe, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verique: $T((1,-1,1)^t) = (1,0)^t$ y $T((1,1,1)^t) = (0,1)^t$.
Toda transformación lineal queda determinada por cómo actúa en los elementos de la base. Como el dominio de la transformación lineal es $\mathbb{R}^3$ necesitamos un vector linealmente independiente más para determinar la transformación. Por lo tanto agregamos el vector $(0,1,0)$ y le damos cualquier imágen como por ejemplo $(3,14)$.
$T((0,1,0)^t) = (3,14)$ ahora tenemos que verificar que sean linealmente independientes para ellos vamos a hacer eliminación por filas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ No es linealmente independiente, ya que contiene una fila nula por lo tanto el espacio columna está siendo generado por dos vectores:

O también podemos probar que no son linealmente independiente haciendo la siguiente cuenta:

$(0,1,0) = a(1,-1,1) + b(1,1,1) = (0,1,0) = (a+b, -a+b, a+b) \implies$

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ -a+b &= 1 \\ a+b &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2b &= 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \\ a &= -b \end{cases}$$
$(0,1,0) = -\frac{1}{2}(1,-1,1) + \frac{1}{2}(1,1,1) = (0,1,0)$

Ahora probemos tomar $T((0,0,1)^t) = (3,14)$, luego los 3 vectores son linealmente independientes por lo que la matriz de la transformación es la siguiente:

Luego la norma de la tranformación lineal es la siguiente:
$$T(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 14 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+3z, y+14z).$$

11. Sea V y W espacios vectoriales $\mathbb{K}$ y $\mathcal{L}(V,W) = \{T : V \to W : T\ transformación\ lineal\}$. Probar que para $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V,W)$

(a) $\{v \in V : T_1(v) = T_2(v)\} \overset{\subset}{s.e.} V$.

(b) Si $V = \langle U \rangle$ y $T_1(u) = T_2(u), \forall u \in \mathcal{U}$, entonces $T_1(v) = T_2(v), \forall v \in V$.

(a) Después lo paso.

12. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Probar que:

    (a) Si T inyectiva, entonces T transforma conjuntos l.i. de V en conjuntos l.i. de W.

    (b) Si T sobreyectiva, entonces T transforma conjuntos generadores de V en conjuntos generadores de W.

    (c) T isomorfismo si y sólo si T transforma bases de V en bases de W.

    (a) sfd

13. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y supongamos que existe una aplicación lineal $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que tanto $nul(T)$ como $img(T)$ son subespacios de dimensión finita. Probar que V también debe ser de dimensión finita.

14. Sea V un espacio vectorial de dimensión finta sobre $\mathbb{K}$, y $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Probar que:

    (a) $T \circ S$ es inversible si y sólo si $S\ y\ T$ son inversibles.

    (b) Para I la función identidad en V, $T \circ S = I$ si y sólo si $S \circ T = I$.

15. Sea V el espacio vectorial de los números complejos y $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales. Con las operaciones usuales, V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Describir explícitamente un isomorfismo de este espacio con $\mathbb{R}^2$.

16. Una matriz $n \times n$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ con entradas en $\mathbb{C}$ tal que $A = \overline{A}^t$, i.e. $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, para todos $i, j = 1, \ldots, n$ se dice Hermitiana.
    Sea W el conjunto de todas las matrices Hermitianas 2×2.

    (a) Verificar que W es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

    (b) Verificar que la aplicación

    $$(x, y, z, t) \to \begin{bmatrix} t + x & y + iz \\ y - iz & t - x \end{bmatrix}$$

    es un isomorfismo de $\mathbb{R}^4$ en W.

17. Mostrar que $\mathbb{K}^{m \times n}$ es isomorfo a $\mathbb{K}^{mn}$.

18. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. Probar que V y W son isomorfos si y sólo si $dim\ V = dim\ W$.

19. Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por

    $$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1)$$

    (a) Si $\mathcal{B}$ es la base ordenada estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}'$ es la base ordenada estándar para $\mathbb{R}^2$, determinar la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

    (b) Si $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(0, 1), (1, 0)\}$. ¿Cuál es la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$?.

    (a) $T(1, 0, 0) = (1, -1)$
    $T(0, 1, 0) = (1, 0)$
    $T(0, 0, 1) = (0, 2)$

    Luego la matriz de la transformación lineal es:
    $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

    (b) $T(1, 0, -1) = (1, -3)$
    $T(1, 1, 1) = (2, 1)$
    $T(1, 0, 0) = (1, -1)$

    Y como la base destino que es canónica y están invertidos los elementos, entonces calculamos:

$\alpha(0,1)+\beta(1,0)=(1,-3)$ y así con los demás elementos

$$\begin{cases} \beta &= 1 \\ \alpha &= -3 \end{cases}$$

Siempre se pone en orden a la base dada, luego tenemos:

$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

20. Sea T un operador lineal sobre $\mathbb{K}^n$ y sea A la matriz de T relativa a la base estándar de $\mathbb{K}^n$. Sea W el subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado por los vectores columnas de A. ¿Quérelación existe entre W y T?

21. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo $\mathbb{K}$ y sean S y T operadores lineales sobre V. Probar que existen dos bases ordenadas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ en V tales que $[S]_B = [T]_{B'}$ si y sólo existe un operador lineal inversible $\mathcal{U}$ sobre V tal que $T = \mathcal{U}\mathcal{S}\mathcal{U}^{-1}$.

22. En $\mathbb{R}^3$, sean $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,2)$ y $v_3 = (-1,-1,0)$.
    (a) Si f es un funcional lineal sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $f(v_1) = 1$, $f(v_2) = -1$ y $f(v_3) = 3$ y si $v = (a,b,c)$, hallar $f(v)$.
    (b) Describir explícitamente un funcional lineal f sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $f(v_1) = f(v_2) = 0$ pero $f(v_3) \neq 0$.
    (c) Sea f cualquier funcional lineal tq. $f(v_1) = f(v_2) = 0$ pero $f(v_3) \neq 0$. Si $v = (2,3,-1)$, muestre que $f(v) \neq 0$.

    Lo primero que hay que saber antes de resolver esto es como calcular un funcional lineal: $f(x,y,z) = a_1x + a_2y + a_3z$ o escrito de otra forma $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, x \in \mathbb{R}^3$.

    (a) $f(x_1,x_2,x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$.

    $f(v_1) = f(1,0,1) = a_1 + a_3 = 1 \Longrightarrow a_1 = 1 - a_3 \Rightarrow a_1 = 1 - 1 \Rightarrow a_1 = 0$
    $f(v_2) = f(0,1,2) = a_2 + 2a_3 = -1 \Rightarrow a_2 = -1 - 2a_3 \Rightarrow a_2 = -1 - 2\cdot 1 \Rightarrow a_2 = -3$
    $f(v_3) = f(-1,-1,0) = -a_1 - a_2 = 3 \Rightarrow -(1-a_3) - (-1-2a_3) = 3 \Rightarrow -1 + a_3 + 1 + 2a_3 = 3 \Rightarrow 3a_3 = 3 \Rightarrow a_3 = 1$

    O de otra forma haciendo eliminación por filas:

    $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a_1 + a_3 &= 1 \\ a_2 + 2a_3 &= -1 \\ 3a_3 &= 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_1 &= 1 - 1 \Rightarrow a_1 = 0 \\ a_2 &= -1 - 2\cdot 1 \Rightarrow a_2 = -3 \\ a_3 &= 1 \end{cases}$$

    De esta forma el funcional lineal queda determinado por $f(x,y,z) = -0x - 3y + z$.

    (b) $f(1,0,1) = a_1 + a_3 = 0$
    $f(0,1,2) = a_2 + 2a_3 = 0$
    $f(-1,-1,0) = -a_1 - a_2 \neq 0$

    $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

    $$\begin{cases} a_1 + a_3 &= 0 \\ a_2 + 2a_3 &= 0 \\ 3a_3 &= 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 + \frac{1}{3} &= 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{3} \\ a_2 &= -\frac{2}{3} \\ a_3 &= \frac{1}{3} \end{cases}$$

    Luego $f(x,y,z) = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z$.

    (c) $(2,3,-1) = a(1,0,1) + b(0,1,2) + c(-1,-1,0)$

    $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a &= -1 \\ b &= 0 \\ c &= -3 \end{cases}$$

    Luego $(2,3,-1) = -(1,0,1) - 3(-1,-1,0)$, entonces $f(2,3,-1) = -\underbrace{f(1,0,1)}_{\neq 0} - 3\underbrace{f(-1,-1,0)}_{=0} \neq 0$

23. Sea $\mathcal{B} = \{(1,0,-1),(1,1,1),(2,2,0)\}$ una base de $\mathcal{C}^3$. Hallar la base dual de $\mathcal{B}$.
    https://www.youtube.com/watch?v=KrU1UdmooFM (Explica perfectamente cómo buscar la base dual).

24. Sea $v_1 = (1, 0, -1, 2)$ y $v_2 = (2, 3, 1, 1)$ y sea $W = \langle\{v_1, v_2\}\rangle$. ¿Qué funcionales lineales de la forma $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$ están en el anulador de W?

Recordar $f(x, y, z, w) = ax + by + cz + dw$

$f(1, 0, -1, 2) = a - c + 2d = 0 \Rightarrow a - c + 2d = 0 \Rightarrow a + 2d = c \Rightarrow \boxed{-b + d = c}$
$f(2, 3, 1, 1) = 2a + 3b + c + d \Rightarrow 0 \Longrightarrow 2a + 3b + a + 2d + d = 0 \Rightarrow 3a + 3b + 3d = 0 \Rightarrow \boxed{a = -b - d}$

$$\begin{bmatrix} -b-d \\ b \\ -b+d \\ d \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O de otra forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$a_1 - a_3 + 2a_4 = 0 \Rightarrow a_1 - a_3 + 2a_2 + 2a_3 = 0 \Rightarrow a_3 + a_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = -2a_2 - a_3 \Rightarrow$
$a_2 + a_3 - a_4 = 0 \Rightarrow a_2 + a_3 = a_4$

$$\begin{bmatrix} -2a_2 - a_3 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_2 + a_3 \end{bmatrix} = a_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W^0 = \left\{ f(x) = x \cdot c \mid c \in \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right\}$$

$W^0 = \langle\{f_1, f_2\}\rangle$, donde $f_1(x, y, z, w) = -2x + y + w$ y $f_2(x, y, z, w) = -x + z + w$

25. Sea $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y sean

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea W el subespacio de V que consiste de todas las matrices A tales que $AB = 0$. Sea f, un funcional lineal sobre V que está en el anulador de W. Supongamos que $f(I) = 0$ (I matriz identidad) y $f(C) = 3$. Hallar $f(B)$.

$$W = \left\{ A \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} 2a & = b \\ 2a & = b \\ d & = 2c \\ 2c & = d \end{cases}$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a \\ c & 2c \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$f(W) = 0$
$f(I) = 0$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3; f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}}_{=0} + 3\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=0} = 0$$

$$f(B) = \left(\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = f\left(\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}}_{=0} + 3\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=0}\right) = 0$$

26. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita.

(a) Probar que $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$.

(b) Probar que $(W_1 \cap W_2) = W_1^0 + W_2^0$

27. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y sea W un subespacio de V. Si f es un funcional lineal sobre W, pruebe que existe un funcional lineal g sobre V tal que $g(v) = f(v), \forall v \in W$.

Sea B_V una base de V y B_W una base de W tales que $B_W \subseteq B_V$. Toda transformación lnieal (en particular los funcionales lineales) queda determinada por como actúa sobre los vectores de la base, entonces podemos definir a $g(v) = f(v)$ para cada vector B_W y $g(v) = 0$ para cada vector $B_V - B_W$.

Parcial 2

Las consignas están en el repositorio de github nisteeklod/examenesLCC

1.

(a) Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita con producto interno $\langle , \rangle$. Sean w_1, w_2 dos vectores ortonormales de V. Definimos la función $T : V \to V$ por $T(v) = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2$.

Para probar que es una transformación lineal
$T(\alpha v) = \langle \alpha v, w_1 \rangle w_1 + \langle \alpha v, w_2 \rangle w_2 = \alpha \langle v, w_1 \rangle w_1 + \alpha \langle v, w_2 \rangle w_2 = \alpha \langle v, w_1 \rangle w_1 + \alpha \langle v, w_2 \rangle w_2 = \alpha(\langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2) = \alpha T(v)$
$T(u+v) = \langle u+v, w_1 \rangle w_1 + \langle u+v, w_2 \rangle w_2 = \langle u, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle u, w_2 \rangle w_2 + \langle v, w_2 \rangle w_2 = T(u) + T(v)$.

(b) $T(w_1) = \langle w_1, w_1 \rangle w_1 + \langle w_1, w_2 \rangle w_2 = \langle w_1, w_1 \rangle w_1 = w_1$
$T(w_2) = \underbrace{\langle w_2, w_1 \rangle}_{=0} w_1 + \underbrace{\langle w_2, w_2 \rangle}_{=1} w_2 = \langle w_2, w_2 \rangle w_2 = w_2$

(c) $\boxed{\subseteq}$ Sea v$\in nul(T)$ y $W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}$
Como $v \in nul(T) \Rightarrow T(v) = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 = 0 \Longrightarrow \langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle = 0 \Rightarrow v \in W^\perp$.
$\boxed{\supseteq}$ $v \in W^\perp \Rightarrow \langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_1 \rangle = 0 \Longrightarrow T(v) = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 = 0 \Longrightarrow v \in nul(T)$.

$\therefore nul(T) = W^\perp$

(d) $dim(W) + dim(W^\perp) = dim(V) \Longrightarrow$
$\Rightarrow dim(W^\perp) = n - \underbrace{dim(W)}_{=2} \Rightarrow dim(W^\perp) = n - 2 \Longrightarrow$
$dim(V) = dim(nul(T)) + dim(img(T)) \Longrightarrow$
$n = n - 2 + dim(img(T)) \Longrightarrow n - n + 2 = dim(img(T)) \Rightarrow dim(img(T)) = 2$.

2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) $N(A) = \{0\}, \quad C(A) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$

(b) Determinar si la función T de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por $T(x) = x^t A x$ es un isomorfismo.
$T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow$
$T(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$
No es un isomorfismo ya que no cumple el axioma de clausura del producto por lo tanto no es una transformación lineal.
Tomando $\alpha = -1$ y $v \in \mathbb{R}^2, \quad v = (1, 0)$ tenemos que:
$T(-1(1,0)) = T(-1, 0) = (-1)^2 + 2.0^2 = 1 \neq -1 = (-1)1 = (-1)T(1,0)$

(c) $S : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \to S(x, y) = (Ax)^t (Ay)$

i. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
ii. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
iii. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
iv. $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

i. $\langle x, y\rangle = S(x,y) = (Ax)^t(Ay) = x_1x_2 + 4y_1y_2$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\right)^t\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix}x_1\\2y_1\end{bmatrix}\right)^t\begin{bmatrix}x_2\\2y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1 & 2y_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\2y_2\end{bmatrix} = x_1x_2 + 4y_1y_2$$

$\overline{\langle y, x\rangle} = \langle y, x\rangle = S(y,x) = (Ay)^t(Ax) = x_2x_1 + 4y_2y_1$

ii. ...

iii. ...

iv. ...

3.

(a) $\begin{cases} f_1(p_1) & = 1\\ f_2(p_1) & = 0\\ f_3(p_1) & = 0\end{cases}$ $\begin{cases} f_1(p_2) & = 0\\ f_2(p_2) & = 1\\ f_3(p_2) & = 0\end{cases}$ $\begin{cases} f_1(p_3) & = 0\\ f_2(p_3) & = 0\\ f_3(p_3) & = 1\end{cases}$

$p(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$

$f_1(p_1) = \int_0^1 (a_1x^2 + b_1x + c_1) = \int_0^1 a_1x^2 + \int_0^1 b_1x + \int_0^1 c_1 = a_1\int_0^1 x^2 + b_1\int_0^1 x + c_1\int_0^1 1$

Análogamente con f_2, f_3

$1 = a_1\frac{1}{3}x^3 \mid_0^1 + b_1\frac{1}{2}x^2 \mid_0^1 + c_1x \mid_0^1 = \frac{a_1}{3} + \frac{b_1}{2} + c_1$
$0 = a_1\frac{1}{3}x^3 \mid_0^2 + b_1\frac{1}{2}x^2 \mid_0^2 + c_1x \mid_0^2 = \frac{a_1}{3}x^3 \mid_0^2$
$0 = a_1\frac{1}{3}x^3 \mid_0^{-1} + b_1\frac{1}{2}x^2 \mid_0^{-1} + c_1x \mid_0^{-1}$

(b) $S = \langle\{p_1, p_2\}\rangle; S^0 = \{f \in V^* \mid f(s) = 0, \forall s \in S\} = \{f \in V^* \mid f(p_2) = 0 \land f(p_1) = 0\}$
Simplemente tomo los funcionales lineales que me dieron 0 en el anterior ejercicio:
$dim(S) + dim(S^0) = dim(V) \Rightarrow dim(S^0) = 3 - 2 = 1$
$S = \langle\{f_3\}\rangle$ ya que cumple $f_3(p_1) = 0$ y $f_3(p_2) = 0$

4. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal cuya matriz asociada respecto a las bases $\beta_1 = \{(-1,0)^t, (1,2)^t\}$ y $\beta_2 = (1, 2x, -x^2 + x\}$ es

$$A = \begin{bmatrix}2 & 0\\3 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

Hallar la matriz de T respecto a las bases $\beta_1' = \{(2,1)^t, (2,0)^t\}$ y $\beta_2' = \{2, 1-x, 1+x^2\}$

Como $A = [T]_{B_1B_2}$, resulta

$T(-1,0) = (2,3,-1); T(1,2) = (0,1,1)$

$T[(-1,0)]_{B_2} = (2,3,-1)_{B_2} = 2(1) + 3(2x) - 1(-x^2 + x) = x^2 + 5x + 2.$

$T[(1,2)]_{B_2} = (0,1,1)_{B_2} = 0(1) + 1(2x) + 1(-x^2 + x) = 2x - x^2 + x = -x^2 + 3x$

Ahora para calcular la matriz de la transformación lineal respecto de las otras bases, re-escribir los vectores de la base β_1' como vectores de la otra base, ya que sabemos cuanto vale la transformación lineal ahí.

Por otro lado: $T(\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}) = T\left((-2)\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\right) = -2T(-1,0) = \underbrace{-2x^2 - 10x - 4}_{\textit{está en la base canoníca}} \Rightarrow$ Calculamos la matriz cambio de base:

$P_{B_2' \leftarrow B}\ [[1]_{B_2'} \quad [x]_{B_2'} \quad [x^2]_{B_2'}]$

$[1]_{B_2'} = \frac{1}{2}(2)$
$[x]_{B_2'} = \frac{1}{2}(2) - 1(1-x)$
$[x^2]_{B_2'} = -\frac{1}{2}(2) + 0(1-x) + (1)(1+x^2)$

$$\begin{bmatrix}1/2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\10\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\10\\-2\end{bmatrix} \Rightarrow T(2,0)_{B_2} = \begin{bmatrix}4\\-10\\2\end{bmatrix}$$

$(2,1) = \alpha(-1,0) + \beta(1,2) = \begin{bmatrix} \beta - \alpha \\ 2\beta \end{bmatrix} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2} \Longrightarrow$

$T(2,1) = -\frac{3}{2}T(-1,0) + \frac{1}{2}T(1,2) = -2x^2 - 6x - 3$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow T(2,1)_{B_2} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [T]_{B_1' B_2'} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & 4 \\ 6 & -10 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$