Práctica 3: TRANSFORMACIONES LINEALES

1. Para cada una de las siguientes funciones $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ determinar si se trata de una transformación lineal y en caso afirmativo: obtener $nul(T)$ y $img(T)$, calcular su dimensión y determinar si T es inversible.

   a) $T((x,y)^t) = (y,x)^t$.
   b) $T((x,y)^t) = (x^2,y^2)^t$.
   c) $T((x,y)^t) = (x,-y)^t$.
   d) $T((x,y)^t) = (x,0)^t$.

2. . Sea $V = \mathbb{R}^n$, fijamos la base canónica $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. Para cada $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hallar A_i tal que $A_i x = T_i(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, i = 1, \cdots, 4$.

   a) $T_1(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
   b) $T_2(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
   c) $T_3(x) = c \cdot x, c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
   d) $T_4(x) = y$, donde $y = (y_k)_{k=1}^n$ con $y_k = x_k, i \neq k \neq j$, $y_k = x_i, k = j$ y $y_k = x_j, k = i$

3. Consideremos la base canónica de $V = \mathbb{R}^2$ dada por $B = \{e_1, e_2\}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que aplica los vectores e_1 y e_2 como sigue:

$$T(e_1) = e_1 + e_2, \qquad T(e_2) = 2 \cdot e_1 - e_2.$$

   Obtener

   a) $T(3 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2)$ y $T^2(3 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2)$.
   b) las matrices asociadas a T y T^2 en la base B.
   c) $T(v), \forall v \in V$.

4. Sean $T_{1,2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T_1((x,y,z)^t) = (x,y,0)^t$ y $T_2((x,y,z)^t) = (x,y,y)^t$. Hallar $T_1 \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1$. Analizar si son epimorfismos, monomorfismos, isomorfismos o ninguna de ellas.

5. Definimos $\mathbb{R}_n[x] = \{p : p\, polinomio\, a\, coeficientes\, reales\, grad(p) \leqslant n, x \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$. Sea

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^{2\times 2} & \to & \mathbb{R}_3[x], \\ & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \mapsto & T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2dx^3 + (a+b)x^2 + (a-c)x + 2(c+d). \end{array}$$

   a) Probar que T es lineal.
   b) Hallar una base para $nul(T)$ y una para $img(T)$.
   c) Determinar si T es un isomorfismo.

6. Sea $T_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C} / T_w(z) = z + w\bar{z}$, donde $w = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$.

   a) Considerar $w = 1 + i$ y calcular $T_w(2 + 3i)$.
   b) Comprobar que T_w es una transformación lineal entre espacios vectoriales.
   c) Si $B = \{1, i\}$ es base de $\mathbb{C}$, hallar la matriz de T_w en dicha base.
   d) Probar que T_w es isomorfismo si y sólo si $a^2 + b^2 \neq 1$.

7. Sea $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ tal que $T(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = a_0 + a_1(x+1) + \cdots + a_n(x+1)^n$. Probar que T es isomorfismo.

8. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (x+y, x+z, \alpha(v))^t$, donde $v = (x,y,z)^t$ y $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Determinar, si es posible, α de modo que T resulte lineal.

9. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal tal que

$$T((0,0,1)^t) = (2,3,5)^t, \qquad T((0,1,1)^t) = (1,0,0)^t, \qquad T((1,1,1)^t) = (0,1,-1)^t.$$

   a) Probar que con esta información es posible obtener $T(v), \forall v \in \mathbb{R}^3$.

   b) Determinar, fijada la base canónica en $\mathbb{R}^3$, la matriz de T.

   c) Utilizando (9*b*), obtener $\dim(nul(T)$ y $rang(T)$.

   d) Determinar si T es inversible.

10. Determinar, si existe, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que verifique: $T((1,-1,1)^t) = (1,0)^t$ y $T((1,1,1)^t) = (0,1)^t$.

11. Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $\mathcal{L}(V,W) = \{T : V \to W : T\, transformación\, lineal\}$. Probar que para $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V,W)$
    i) $\{v \in V : T_1(v) = T_2(v)\} \underset{s.e.}{\subset} V$.
    ii) Si $V = \langle U \rangle$ y $T_1(u) = T_2(u), \forall u \in U$, entonces $T_1(v) = T_2(v), \forall v \in V$.

12. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Probar que:
    i) Si T inyectiva, entonces T transforma conjuntos *l.i.*. de V en conjuntos *l.i.* de W.
    ii) Si T sobreyectiva, entonces T transforma conjuntos generadores de V en conjuntos generadores de W.
    iii) T isomorfismo si y solo si T transforma bases de V en bases de W.

13. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y supongamos que existe una aplicación lineal $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que tanto $nul(T)$ como $img(T)$ son subespacios de dimensión finita. Probar que V también debe ser de dimensión finita.

14. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, y $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Probar que:
    i) $T \circ S$ es inversible si y solo si S y T son inversibles.
    ii) Para I la función identidad en V, $T \circ S = I$ si y solo si $S \circ T = I$.

15. Sea V el espacio vectorial de los números complejos y $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales. Con las operaciones usuales, V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Describir explícitamente un isomorfismo de este espacio con $\mathbb{R}^2$.

16. Una matriz $n \times n$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ con entradas en $\mathbb{C}$ tal que $A = \overline{A}^t$, i.e. $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, para todos $i, j = 1, \cdots, n$ se dice *Hermitiana*.
    Sea W el conjunto de todas las matrices Hermitianas 2×2.
    i) Verificar que W es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
    ii) Verificar que la aplicación

$$(x, y, z, t) \mapsto \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$

    es un isomorfismo de $\mathbb{R}^4$ en W.

17. Mostrar que $\mathbb{K}^{m \times n}$ es isomorfo a $\mathbb{K}^{mn}$.

18. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. Probar que V y W son isomorfos si y sólo si $\dim V = \dim W$.

19. Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1).$$

    i) Si $\mathcal{B}$ es la base ordenada estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}'$ es la base ordenada estándar para $\mathbb{R}^2$, determinar la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
    ii) Si $\mathcal{B} = \{(1,0,-1), (1,1,1), (1,0,0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(0,1), (1,0)\}$ ¿Cuál es la matriz de T relativa a al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

20. Sea T un operador lineal sobre $\mathbb{K}^n$ y sea A la matriz de T relativa a la base estándar de $\mathbb{K}^n$. Sea W el subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado por los vectores columnas de A. ¿Qué relación existe entre W y T?

21. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo $\mathbb{K}$ y sean S y T operadores lineales sobre V. Probar que existen dos bases ordenadas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ en V tales que $[S]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}'}$ si y sólo si existe un operador lineal inversible U sobre V tal que $T = USU^{-1}$.

22. En $\mathbb{R}^3$, sean $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2)$ y $v_3 = (-1, -1, 0)$.
i) Si f es un funcional lineal sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $f(v_1) = 1$, $f(v_2) = -1$ y $f(v_3) = 3$ y si $v = (a, b, c)$, hallar $f(v)$.
ii) Describir explícitamente un funcional lineal f sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $f(v_1 = f(v_2) = 0$ pero $f(v_3) \neq 0$.
iii) Sea f cualquier funcional lineal tal que $f(v_1) = f(v_2) = 0$ pero $f(v_3) \neq 0$. Si $v = (2, 3, -1)$, muestre que $f(v) \neq 0$.

23. Sea $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ una base de $\mathbb{C}^3$. Hallar la base dual de $\mathcal{B}$.

24. Sean $v_1 = (1, 0, -1, 2)$ y $v_2 = (2, 3, 1, 1)$ y sea $W =< \{v_1, v_2\} >$. ¿Qué funcionales lineales de la forma $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$ están en el anulador de W?.

25. Sea $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y sean
$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Sea W el subespacio de V que consiste de todas las matrices A tales que $AB = 0$. Sea f, un funcional lineal sobre V que está en el anulador de W. Supongamos que $f(I) = 0$ (I matriz identidad) y $f(C) = 3$. Hallar $f(B)$.

26. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita.
i) Probar que $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$.
ii) Probar que $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$.

27. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y sea W un subespacio de V. Si f es un funcional lineal sobre W, pruebe que existe un funcional lineal g sobre V tal que $g(v) = f(v), \forall v \in W$.

28. Sea $v \in V$ espacio vectorial, entonces v induce un funcional lineal L_v en V^* definido por
$$\begin{array}{rccc} L_v: & V^* & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & L_v(f) = f(v) \end{array}$$
   a) Mostrar que L_v es lineal.
   b) Probar que si V es de dimensión finita y $v \neq 0$, entonces existe un funcional lineal f tal que $f(v) \neq 0$.
   c) Probar que si V es de dimensión finita, la aplicación $v \mapsto L_v$ es un isomorfismo de V en V^{**}. V^{**} se conoce como el *doble dual de* V.
   d) Probar que si L es un funcional lineal sobre el espacio dual V^* del espacio vectorial V de dimensión finita, entonces existe un único vector $v \in V$ tal que $L(f) = f(v)$ para todo $f \in V^*$.
   e) Mostrar que en un espacio vectorial V de dimensión finita, toda base de V^* es la dual de alguna base de V.