Álgebra Lineal Final Teórico

- Conjuntos linealmente independientes
  Un conjunto es linealmente independiente si $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$.

- Conjunto linealmente dependientes
  Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, entonces $S \subset V$ se dice linealmente dependiente si existe $v_1, \ldots, v_n \in S$ distintos y escalares $\alpha_1, \ldots, a_n$ no todos nulos t ales que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$.

- Suma directa

  La suma de dos subespacios es directa si y sólo si la intersección de los subespacios es el vector nulo.
  Sean U_1 y U_2 subespacios de V, luego las siguientes proposiciones son equivalentes:

  - $V = U_1 \bigoplus U_2$
  - $V = U_1 + U_2$ y $0 = u_1 + u_2 \Rightarrow u_1 = u_2 = 0$
  - $V = U_1 + U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

- Demostrar que S es LI si y sólo si el generado de S es suma directa de los espacios generados de los vectores de S.
  Sea $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$

  - $\Rightarrow$ Supongo que S es un conjunto linealmente independiente entonces existen vectores $s_1, \cdots, s_n \in S$ distintos y escalares $a_1 + \cdots + a_n$ tales que $a_1s_1 + \cdots + a_ns_n = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$.
    Luego se cumple que $s_i + s_j = 0 \Rightarrow s_i = s_j = 0, con\ i \neq j$, por lo tanto se cumple que $\langle S \rangle = \displaystyle\sum_{s \in S} \alpha_s s$.
  - $\Leftarrow$ Supongo que S es suma directa de los espacios generados de los vectores de S.
    Entonces se cumple que $s_1 + \cdots + s_n = 0 \Rightarrow s_1 = \cdots = s_n = 0$ por lo tanto S es un conjunto linealmente independiente.

- Lema de Schur
  Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea $S = \{U_1, \cdots, U_n\}$ un conjunto de operadores de V. Si V es un S-espacio simple y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $TU_i = U_iT$ para toda $U_i \in S$, entonces T es invertible o T es la aplicación nula.

  Demostración

  Supongamos $T \neq 0$. Por la proposición 1 sabemos que $img(T)$ y $nul(T)$ son subespacios invariantes. Además como V es un S-espacio simple sus únicos subespacios invariantes son V y $\{0\}$ por lo que $img(T) = V$ y $nul(T) = \{0\}$. Esto implica que T es sobreyectiva e inyectiva, luego es invertible.

- Proceso de Gram-Schmidt

  Dada una base $\{w_1, \cdots, w_p\}$ para un subespacio W de $\mathbb{R}^n$, definiendo:

  - $v_1 = w_1$
  - $v_2 = w_2 - \frac{w_2v_1}{v_1v_1}v_1$
  - $v_3 = w_3 - \frac{w_3v_1}{v_1v_1}v_1 - \frac{w_3v_2}{v_2v_2}v_2$
  - $\vdots$
  - $v_p = w_p - \frac{w_pv_1}{v_1v_1}v_1 - \frac{w_pv_2}{v_2v_2}v_2 - \cdots - \frac{w_pv_p}{v_pv_p}v_p$

  entonces $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es base ortogonal de $W_k = \langle\{w_1, \cdots w_k\}\rangle$ para $1 \leq k \leq p$.

  Demostración

  - Caso Base: Trivial pues $v_1 = w_1$.
  - Paso Inductivo: Supongamos que se probó el resultado para k, es decir que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es base ortogonal de $W_k = \langle\{w_1, \ldots, w_k\}\rangle$.
    Veamos que $B = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$ es ortogonal. Para $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ con $i \neq j$ resulta $v_i \perp v_j$ por hipótesis inductiva.
    Además
    $v_{k+1}v_i = \left(w_{k+1} - \frac{w_{k+1}v_1}{v_1v_1}v_1 - \cdots - \frac{w_{k+1}v_k}{v_kv_k}v_k\right)v_i = w_{k+1}v_i - \frac{w_{k+1}v_i}{v_iv_i}v_iv_i = 0$
    luego $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$ es ortogonal y en consecuencia también es linealmente independiente. Como además $|B| = |W_{k+1}|$ resulta que también es base.

- Teoremas de Pitágoras
  $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \Leftrightarrow x \cdot y = 0$

  Demostración

  - $\boxed{\Longrightarrow}$ $||x+y||^2 - ||x|| - ||y||^2 = 0 \Leftrightarrow 2(xy) = 0 \Leftrightarrow xy = 0$
  - $\boxed{\Longleftarrow}$ $||x+y||^2 = xx + \underbrace{xy}_{=0} + \underbrace{yx}_{=0} + yy = ||x||^2 + ||y||^2$

- Producto Interno
  Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, un producto interno en V es una función
  $V \times V \to \mathbb{K}$
  $(u,v) \to u \cdot v = u \times v = \langle u, v\rangle$

  que satisface los siguientes:

  - $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$
  - $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$
  - $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$
  - $\langle u, u\rangle \geq 0$
  - $\langle u, u\rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

- Teorema de Jordan
  Sea $V \neq \{0\}$ un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y sea $T : V \to V$ un operador lineal, entonces V se puede expresar como una suma directa de subespacios cíclicos $T-$invariantes.

- Definición de matrices semejantes
  Sean 2 matrices cuadradas A y B sobre $\mathbb{K}$,se dice que B es semejante o similar a A si existe una matriz P innversible tal que $B = P^1 AP$.

- Definición de polinomio característico
  La ecuación $|A - \lambda I| = 0$ se llama ecuación característica de A. Al polinomio $P(\lambda) = |A - \lambda I|$ se lo llama polinomio característico.

- Definición de autovalor, autovector
  Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea T un operador linenal sobre V, un autovalor de T es un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe un vector no nulo $v \in V$ que verifica $T(v) = \lambda v$. Si λ es un autovalor de T entonces:

  - Cualquier vector $v/T(v) = \lambda v$ se llama autovector de T asociado al autovalor λ.
  - La colección de todos los autovectores asociados a un determinado autovalor λ se llama autoespacio de T asociado a λ.

- Condición necesaria y suficiente para diagonalizar una matriz.
  Una matriz A es diagonalizable si y sólo si A tiene n autovectores linealmente independientes. Es más, $A = PDP^{-1}$ con D diagonal si y sólo si las columnas de P son n autovectores linealmente independientes de A. En este caso las entradas diagonales de D son los autovalores de A que corresponden a los respectivos autovectores.

- Probar que los autovalores de dos matrices semajantes son iguales.
  Sea $Ax = \lambda x$; $B = M^{-1}AM$
  $A\underbrace{MM^1}_{=I} x = \lambda x$
  $\underbrace{(M^{-1}AM)}_{B} M^{-1}x = \lambda M^{-1}x$
  $BM^{-1}x = \lambda M^{-1}x$ (el autovector no es el mismo, pero si el autovalor)

- Dada la siguiente afirmación "A es inversible" enuncie 3 proposiciones equivalentes y demuestre su equivalencia
  Decir que A *inversible*, es lo mismo que decir que $N(A) = \{0\}$ las columnas son linealmente independientes, y el determinante distinto a 0.

  ~~Supongo que $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es inversible entonces sabemos que $|A| \neq 0$ y las columnas son linealmente independientes por lo tanto no posee filas nulas luego de la eliminación por filas, es decir, el rango es igual al número de columnas y sabiendo que $dim(N(A)) = n - r$, se tiene que $dim(N(A)) = n - n$ entonces $N(A) = \{0\}$.~~

- Teorema de descomposición ortogonal
  Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$,entonces todo $y \in \mathbb{R}^n$ puee escribirse de forma única como $y = \hat{y} + z$ donde $\hat{y} \in W$ y $z \in W^{\perp}$. De hecho si $\{u_1, \dots, u_p\}$ es cualquier base ortogonal de W entonces:

$$\hat{y} = \frac{yu_1}{u_1u_1}u_1 + \cdots + \frac{yu_p}{u_pu_p}u_p$$

- **Sea V un espacio vectorial, $T : V \to V$. Definir cuando un espacio V es cíclico (enunciar todo lo necesario para dar la definición).**
  Vector Cíclico
  Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $T : V \to V$ un operador lineal, $\alpha \in \mathbb{K}$ y v$\in V$un vector no nulo, diremos que v es $(T - \alpha I)$ cíclico si existe un entero $r \geq 1$ tal que $(T - \alpha I)^r v = 0$.
  El mínimo entero positivo r que tiene esta propiedad recibe el nombre de período de v relativo a $T - \alpha I$ o $A - \alpha I$.
  Espacio Cíclico
  Un espacio vectorial V de dimensión r se conoce como cíclico, si existe algún número α y un vector $v \in V$ que es $(T - \alpha I)$ cíclico de orden r, para alguna transformación lineal T.

- Definir base de Jordan y demostrar que es base.
  Si V es cíclico entonces $\{(T - \alpha I)^{r-1}v, (T - \alpha I)^{r-2}v, \dots, (T - \alpha I)v, v\}$ es una base de V llamada base de Jordan.