Álgebra Lineal - Práctica

Terminando Abril

1 Prácticas

1.1 Espacios Vectoriales - P2

Repasamos lo que era un **espacio vectorial**:
Sea V un conjunto no vacío de objetos llamados elementos, $\mathbb{K}$ un cuerpo de escalares y las operaciones:

$$\begin{array}{rl} + : V \times V \to V & \cdot : \mathbb{K} \times V \to V \\ (u, v) \to u + v & (\alpha, u) \to \alpha u \end{array}$$

decimos que $(V, \mathbb{K}, +, .)$ es un espacio vectorial si satisface los siguientes axiomas:

- Axiomas para la suma: 5 axiomas
- Axiomas para el producto por escalares: 3 axiomas
- Propiedades distributivas: 2 axiomas

Modelo a seguir:

1. El conjunto de números reales positivos ($\mathbb{R}^+$), con la suma $x + y$ definida como $x \cdot y$ y el producto cx como x^c.
   $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$ donde
   $$x + y = x \cdot y \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$
   $$cx = x^c \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall c \in \mathbb{R}$$

   Ahora vamos a verificiar los 10 axiomas para probar que es un espacio vectorial.

   - Sea $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+$?
     $x + y \underbrace{=}_{def.} x \cdot y \in \mathbb{R}^+$
   - Sea $\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \alpha \cdot x \in \mathbb{R}^+$?
     $\alpha \cdot x \underbrace{=}_{def.} x^\alpha \underbrace{=}_{prop.} e^{ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \cdot ln(x)} \in \mathbb{R}^+$
   - Así con los siguientes axiomas.

1.1.1 Analizar si los siguientes conjuntos con las operaciones definidas son un espacio vectorial.

1. **El conjunto de los números reales positivos ($\mathbb{R}^+$), con la suma y el producto por escalar usuales.**

(1) Cerrado bajo la suma:

Sea $u, v \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow u + v \in \mathbb{R}^+$?

$\underbrace{u}_{\in \mathbb{R}^+} + \underbrace{v}_{\in \mathbb{R}^+} \in \mathbb{R}^+$

(2) Asociatividad de la suma:

Sea $u, v, w \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow u + (v + w) = (u + v) + w$?

$u + (v + w) \underbrace{=}_{Asoc.de+} u + v + w \underbrace{=}_{Asoc.+} (u + v) + w$

(3) Conmutatividad de la suma:

Sea $u, v \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow u + v = v + u$

$u + v \underbrace{=}_{conm.de+} u + v$

(4) Elemento neutro de la suma:

Sea $v \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists \emptyset \in \mathbb{R}^+ / v + \emptyset = v$?

Tomando $\emptyset = 0$, tenemos que: $v + \emptyset \underbrace{=}_{def.\emptyset} v + 0 \underbrace{=}_{def.+} v$

(5) Elemento opuesto de la suma:

Sea $v \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists q \in \mathbb{R}^+ / v + q = \emptyset$?

Tomando $q = -v$, tenemos que: $v + q \underbrace{=}_{def.q} v + (-v) \underbrace{=}_{Arit.} v - v \underbrace{=}_{def.-} \emptyset$

(6) Cerrado bajo el producto:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \alpha v \in \mathbb{R}^+$?

Si $\alpha \geq 0 \Longrightarrow \alpha v \in \mathbb{R}^+$
Si $\alpha < 0 \Longrightarrow (1/\alpha) v \in \mathbb{R}^+$

(7) Asociatividad del producto:

$\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$?

$(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$

(8) Elemento neutro del producto:

Sea $v \in \mathbb{R}^+, \Rightarrow \exists s \in \mathbb{R} s.v = v$?

Tomando $s = 1$, tenemos que, $s.v \underbrace{=}_{def.s} 1.v = v$

(9) Del producto respecto de la suma de vectores:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$?

$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

(10) Del producto respecto de la suma de escalares:

$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$?

$(\alpha + \beta)v \underbrace{=}_{distr.respect.+} \alpha v + \beta v$

2. **El conjunto de números reales positivos ($\mathbb{R}^+$), con la suma $x + y$ definida como $x \cdot y$**

y el producto cx como x^c.

Sea $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$ donde:

$$x + y = x \cdot y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$
$$cx = x^c,\ \forall c \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Comenzaremos probando los 10 axiomas:

(1) Cerrado bajo la suma:

Sea $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}$?
$x + y \underbrace{=}_{def.} x \cdot y \in \mathbb{R}^+$

(2) Asociatividad de la suma:

Sea $u, v, w \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow u + (v + w) = (u + v) + w$?

$u + (v + w) \underbrace{=}_{def.} u + (v \cdot w) = u \cdot (v \cdot w) = u \cdot v \cdot w$
$(u + v) + w = (u \cdot v) + w = (u \cdot v) \cdot w = u \cdot v \cdot w$

(3) Conmutatividad de la suma:

Sea $u, v \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow u + v = v + u$

$u + v \underbrace{=}_{def.+} uv \underbrace{=}_{conm.delprod.} vu = v + u$

(4) Elemento neutro de la suma:

Sea $v \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists! \emptyset \in \mathbb{R}^+ / v + \emptyset = v$?

Sea $\emptyset = 1$, entonces tenemos que:
$v + \emptyset \underbrace{=}_{def.\emptyset} v + 1 \underbrace{=}_{def.+} v.1 \underbrace{=}_{Arit.} v$

(5) Elemento opuesto de la suma:

Sea $v \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists q \in \mathbb{R}^+ / v + q = \emptyset$?

Tomando $q = \dfrac{1}{v}$, entonces tenemos que:

$v + q \underbrace{=}_{def.q} v + (1/v) \underbrace{=}_{def.+} v \cdot (1/v) \underbrace{=}_{Arit.} 1$

(6) Cerrado bajo el producto:

Sea $v \in \mathbb{R}^+, \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha v \in \mathbb{R}^+$

$\alpha v = v^\alpha \in \mathbb{R}^+$, pues:

Si tomamos $\alpha \geq 0 \Rightarrow v^\alpha \in \mathbb{R}^+$
Si tomamos $\alpha < 0 \Rightarrow 1/(v^\alpha) \in \mathbb{R}^+$

(7) Asociatividad del producto:

Sea $v \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$?

$(\alpha\beta)v \underbrace{=}_{def.\cdot} (\beta^\alpha)v \underbrace{=}_{def.\cdot} v^{\beta^\alpha} \underbrace{=}_{Arit.} \alpha v^\beta \underbrace{=}_{def.\cdot} \alpha(\beta v)$

(8) Elemento neutro del producto:

Sea $v \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists s \in \mathbb{R}/sv = v$?

Tomando $s = 1$ tenemos que:
$sv \underbrace{=}_{def.s} 1.v \underbrace{=}_{def.\cdot} v^1 \underbrace{=}_{Arit.} v$

(9) Del producto respecto de la suma de vectores:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$?

$\alpha(u+v) = \alpha(uv) = (uv)^\alpha = u^\alpha \cdot v^\alpha$
$\alpha u + \alpha v \underbrace{=}_{def\cdot} u^\alpha + v^\alpha = u^\alpha \cdot v^\alpha$

(10) Del producto respecto de la suma de escalares:

Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$?

$(\alpha+\beta)v \underbrace{=}_{def.+} (\alpha\beta)v \underbrace{=}_{def\cdot} v^{\alpha\beta} \underbrace{=}_{prop\cdot en R} v^{\alpha+\beta} \neq v^\alpha v^\beta \underbrace{=}_{def\cdot} v^\alpha + v^\beta \underbrace{=}_{def+} \alpha v + \beta v$

Luego V no es un espacio vectorial, ya que no cumple el último axioma.

3. **El conjunto de las funciones pares, con la suma y producto por escalar usuales.**

Función par: $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$

Sea $(Fp, +, \cdot)$, donde

$$Fp = \{f/\text{f es par}\}$$
$$x + y = x + y$$
$$cx = cx$$

Probaremos los 10 axiomas:

(1) Cerrado bajo la suma:

Sea $f, g \in Fp \Rightarrow f + g \in Fp$?

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x)$

(2) Asociatividad de la suma:

Sea $f, g, h \in Fp \Longrightarrow f + (g+h) = (f+g) + h$?

$(f + (g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x)$

(3) Conmutatividad de la suma:

Sea $f, g \in Fp \Longrightarrow (f+g)(x) = (g+f)(x)$?

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$

(4) Elemento neutro de la suma:

Sea $f \in Fp \Longrightarrow \exists! \emptyset \in Fp/f + \emptyset = f$?

Tomamos a $\emptyset$ como $g(x) = 0, \forall x$
$f + \emptyset = f + 0 = f$

(5) Elemento opuesto de la suma:

4. **El conjunto de las funciones continuas, con el producto cf definido como (cf)(x) = f(cx) y la suma habitual de funciones.**

$Fc = \{f/\text{f es una función continua}\}$

(1) Cerrado bajo la suma:

Sea $f, g \in Fc \Rightarrow f + g \in Fc$?

O sea la suma de dos funciones continuas, ¿es una función continua?
$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \in Fc$

(2) Asociatividad de la suma:

Sea $f, g, h \in Fc \Rightarrow (f + (g + h))(x) = ((f + g) + h)(x)$

$(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) = ((f + g) + h)(x)$

(3) Conmutatividad de la suma:

Sea $f, g \in Fc \Rightarrow (f + g)(x) = (g + f)(x)$?

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (g + f)(x)$

(4) Elemento neutro de la suma:

Sea $f \in Fc$ y $s \in Fc \Rightarrow (f + s)(x) = f(x)$

Tomando $s = \{g/g(x) = 0\}$, entonces tenemos que

$(f + s)(x) \underbrace{=}_{def.s} (f + g)(x) = f(x) + g(x) \underbrace{=}_{def.g} f(x)$

(5) Elemento opuesto de la suma:

Sea $f \in Fc \Rightarrow \exists g \in Fc/(f + g)(x) = s$?

Tomando $g(x) = -f(x)$, tenemos que

$(f + g)(x) \underbrace{=}_{def.g} = (f + (-f)(x)) = f(x) - f(x) = s$

(6) Cerrado bajo el producto:

Sea $f \in Fc, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f \in Fc$?

$(\alpha f)(x) \underbrace{=}_{def.prod.} f(\alpha x) \in Fc$

(7) Asociatividad del producto:

Sea $\alpha, \beta \in Fc$ y $f \in Fc \Rightarrow ((\alpha\beta)f)(x) = (\alpha(\beta f))(x)$?

$(\alpha(\beta f))(x) = (\alpha(f(\beta x)) = f((\alpha\beta)x)$
$((\alpha\beta)f))(x) = f((\alpha\beta)x)$

(8) Elemento neutro del producto:

Sea $f \in Fc \Rightarrow \exists q \in \mathbb{R}/(q \cdot f)(x) = f(x)$

Tomando q = 1, entonces tenemos que:
$(q \cdot f)(x) \underbrace{=}_{def.q} (1 \cdot f)(x) \underbrace{=}_{def.\cdot} f(x \cdot 1) = f(x)$

(9) Del producto respecto de la suma de vectores:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f, g \in Fc \Rightarrow \alpha(f+g)(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x)$?

$(\alpha(f+g))(x) \underbrace{=}_{def.\cdot} (f+g)(\alpha x) = f(\alpha x) + g(\alpha x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x)$

(10) Del producto respecto de la suma de escalares:

Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f \in Fc \Rightarrow (\alpha + \beta)f)(x) = (\alpha f + \beta f)(x)$?

$((\alpha + \beta)f)(x) \underbrace{=}_{def.\cdot} f((\alpha + \beta)x) = f(\alpha x + \beta x) \underbrace{=}_{puedo?} f(\alpha x) + f(\beta x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f + \beta f)(x)$

Luego Fc es un espacio vectorial.

5. **El conjunto de las funciones biyecticas, con el producto por escalar habitual y la suma f+g definida como (f+g)(x) = f(g(x))**

$Fb = \{f/$f es biyectiva $\}$

(1) Cerrado bajo la suma:

Sea $f, g \in Fb \Rightarrow (f+g)(x) \in Fb$?

Es decir la suma de dos funciones biyectivas, ¿es una función biyectiva?

$(f+g)(x) \underbrace{=}_{def.+} f(g(x)) \in Fb$, ya que la composición de dos funciones biyectivas es biyectiva.

(2) Asociatividad de la suma:

Sea $f, g, h \in Fc \Rightarrow (f + (g+h))(x) = ((f+g)+h)(x)$

$(f + (g+h))(x) \underbrace{=}_{def.+} = f((g+h)(x)) = f(g(h(x))) \neq$
$((f+g)+h)(x) \underbrace{=}_{def.+} ((f+g)(h(x)) = f(h(x)) + g(h(x))$, ¿está bien desarrollado?

(3) Conmutatividad de la suma:

Sea $f, g \in Fc \Rightarrow (f+g)(x) = (g+f)(x)$?

$(f+g)(x) \underbrace{=}_{def.+} f(g(x)) \neq g(f(x)) = (g+f)(x)$

Luego no es un espacio vectorial.

6. **El conjunto de los polinomios a coeficientes reales de grado a lo sumo 2, incluído el polinomio nulo, con la suma y producto por escalar habituales.**

   Llamemos P_2 al conjunto de polinomios de grafo menor o igual que 2, incluyendo el polinomio nulo.

   (1) Cerrado bajo la suma:

   Sea $p, q \in P_2 \Rightarrow p + q \in P_2$?

   Sea $p(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ y $q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$

   $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + c_1 + c_2 \in P_2$

   (2) Asociatividad de la suma:

   Sea $p, q, r \in P_2 \Rightarrow p + (q + r) = (p + q) + r$?

   Sea $p(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ y $r(x) = a_3x^2 + b_3x + c_3$

   $(p + (q + r))(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1) + ((a_2x^2 + b_2x + c_2) + a_3x^2 + b_3x + c_3) = (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (b_1 + b_2 + b_3)x + (c_1 + c_2 + c_3)$

   $((p + q) + r)(x) = ((a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2)) + a_3x^2 + b_3x + c_3) = (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (b_1 + b_2 + b_3)x + (c_1 + c_2 + c_3)$

   (3) Conmutatividad de la suma:

   Sea $p, q \in P_2 \Rightarrow p + q = q + p$?

   $(p + q)(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 + a_2x^2 + b_2x + c_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2 + a_1x^2 + b_1x + c_1 = (q + p)(x)$

   (4) Elemento neutro de la suma:

   Sea $p \in P_2 \Rightarrow \exists s \in P_2 / p + s = p$?

   Tomando a $s = 0x^2 + 0x + 0$, tenemos que:

   $(p + s)(x) \underbrace{=}_{def.s} p(x) + (0x^2 + 0x + 0) = p(x)$

   (5) Elemento opuesto de la suma:

   Sea $p \in P_2 \Rightarrow \exists t \in P_2 / p + t = 0x^2 + 0x + 0$?

   Tomando a $t = (-1)p$, tenemos que:
   $p + t = (1)p + (-1)p = (1 - 1)p = 0p = 0ax^2 + 0bx + 0c = 0$

   (6) Cerrado bajo el producto:

   Sea $p \in P_2$ y $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha p \in P_2$?

   $(\alpha p)(x) = \alpha p(x) = \alpha(a_1x^2 + b_1x + c_1) = \alpha a_1x^2 + \alpha b_1x + \alpha c_1 \in P_2$

   (7) Asociatividad del producto:

   Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $p \in P_2 \Rightarrow (\alpha\beta)p = \alpha(\beta p)$?

   $((\alpha\beta)p)(x) = (\alpha\beta)p(x) = (\alpha\beta)(a_1x^2 + b_1x + c_1) = \alpha\beta a_1x^2 + \alpha\beta b_1x + \alpha\beta c_1 = \alpha(\beta a_1x^2 + \beta b_1x + \beta c_1) = \alpha\beta(a_1x^2 + b_1x + c_1) = (\alpha(\beta p))(x)$

(8) Elemento neutro del producto:

Sea $p \in P_2 \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / \alpha p = p$?

Tomando $\alpha = 1$
$(\alpha p)(x) \underbrace{=}_{def.\alpha} (1 \cdot p)(x) = p(x)$

(9) Del producto respecto de la suma de vectores:

Sea $p, q \in P_2$ y $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha(p+q) = \alpha p + \alpha q$?

$(\alpha(p+q))(x) = \alpha(p+q)(x) = \alpha(p(x)+q(x)) = \alpha p(x) + \alpha q(x)$

(10) Del producto respecto de la suma de escalares:

Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $p \in P_2 \Rightarrow (\alpha+\beta)p = \alpha p + \beta p$?

$((\alpha+\beta)p)(x) = (\alpha p + \beta p)(x) = (\alpha p)(x) + (\beta p)(x) = \alpha p(x) + \beta p(x)$

7. **$\mathbb{R}^2$ con el producto por escalar habitual y la suma de $x = (x_1, x_2)^T$ e $y = (y_1, y_2)^T$ definida como $x + y = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)^T$**

(1) Cerrado bajo la suma:

Sea $x, y \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^2$?

$x + y = (x_1, x_2)^T + (y_1, y_2)^T = (\underbrace{x_1 + y_1 + 1}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{x_2 + y_2 + 1}_{\in\mathbb{R}})^T \in \mathbb{R}^2$

(2) Asociatividad de la suma:

Sea $x, y, z \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x + (y+z) = (x+y) + z$?

$x + (y+z) = (x_1, x_2)^T + ((y_1, y_2)^T + (z_1, z_2)^T) = (x_1, x_2)^T + (y_1 + z_1 + 1, y_2 + z_2 + 1)^T =$
$(x_1 + y_1 + z_1 + 2, x_2 + y_2 + z_2 + 2)^T = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)^T + (z_1, z_2)^T = ((x_1, x_2)^T + (y_1, y_2)^T) + (z_1, z_2)^T)$

(3) Conmutatividad de la suma:

Sea $x, y \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x + y = y + x$?

$x + y = (x_1, x_2)^T + (y_1, y_2)^T = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)^T = (y_1, y_2)^T + (x_1, x_2)^T = y + x$

(4) Elemento neutro de la suma:

Sea $x \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{R}^2 / x + n = x$?

Tomando $n = (-1, -1)$, tenemos que:
$x + n = (x_1, x_2) + (-1, -1) = (x_1 + (-1) + 1, x_2 + (-1) + 1) = (x_1, x_2)$

(5) Elemento opuesto de la suma:

Sea $p \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists \emptyset \in \mathbb{R}^2 / p + \emptyset = (-1, -1)$?

Tomando $\emptyset = (-x_1 - 2, -x_2 - 2)$

$p + \emptyset \underbrace{=}_{def.\emptyset} (x_1, x_2) + (-x_1 - 2, -x_2 - 2) = (x_1 - x_1 - 2 + 1, x_2 - x_2 - 2 + 1) = (-1, -1)$

(6) Cerrado bajo el producto:

Sea $x \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x \in \mathbb{R}^2$?

$(\alpha x) = \alpha x = \alpha(x_1, x_2) = (\underbrace{\alpha x_1}_{\in R}, \underbrace{\alpha x_2}_{\in R})\mathbb{R}^2$

(7) Asociatividad del producto:

Sea $x \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$?

$(\alpha\beta)x = (\alpha\beta)(x_1, x_2) = (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2) = \alpha(\beta x_1, \beta x_2) = \alpha(\beta(x_1, x_2)) = \alpha(\beta x)$

(8) Elemento neutro del producto:

Sea $x \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists d \in \mathbb{R}/d \cdot x = x$?

Tomando d = 1, s $d \cdot x \underbrace{=}_{def.d} 1 \cdot x = x$

(9) Del producto respecto de la suma de vectores:

Sea $x, y \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$?

$\alpha(x + y) = \alpha((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = \alpha(x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1) = (\alpha(x_1 + y_1 + 1), \alpha(x_2 + y_2 + 1)) \neq (\alpha x_1 + \alpha y_1 + 1, \alpha x_2 + \alpha y_2 + 1) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) = \alpha(x_1, x_2) + \alpha(y_1, y_2) = \alpha x + \alpha y$

Luego no es un subespacio.

1.1.2 Sea (V,+,·) un espacio vectorial. En particular, sabemos que existe $0 \in V$ tal que $0 + x = x$ para todo $x \in V$; y que para todo $x \in V$ existe un vector $\overline{x}$ tal que $x + \overline{x} = 0$.

Estas son puras demostraciones que ni siquiera entran en la teoría, y muchas fueron desarrolladas en clases, más tarde lo completo.

1.1.3 Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son un subespacio de $\mathbb{R}^3$

1. **El conjunto formado por las 3-uplas (b_1, b_2, b_3) con $b_1 = 0$.**

$B = \{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : b_1 = 0\}$

(1) $(0, 0, 0) \in B$

(2) Cerrado bajo la producto:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}, v \in B \Rightarrow \alpha v \in B$?

$\alpha v = \alpha(0, b_2, b_3) = (0, \alpha b_2, \alpha b_3) \in B$

(3) Cerrado bajo el suma:

Sea $u, v \in B \Rightarrow u + v \in B$?

Sea $u = (0, a_2, a_3)$ y $v = (0, b_2, b_3)$
$u + v = (0, a_2, a_3) + (0, b_2, b_3) = (0, \underbrace{a_2 + b_2}_{\in R}, \underbrace{a_3 + b_3}_{\in R}) \in B$

Luego B es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

2. **El conjunto formado por las 3-uplas (b_1, b_2, b_3) con $b_1 = 1$.**

$A = \{b_1, b_2, b_3 : b_1 = 1\}$

(1) $(0,0,0) \notin B$

Luego A no es un subespacio de R^3

3. **El conjunto formado por las 3-uplas** (b_1, b_2, b_3) **con** $b_1 b_2 b_3 = 0$

   $C = \{(b_1, b_2, b_3) : b_1 b_2 b_3 = 0\}$

   (1) $(0,0,0) \in C$, ya que $0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
   (2) Cerrado bajo la suma:

   Sea $u, v \in C \Rightarrow u + v \in C$?

   No, ya que si tenemos $u = (0,1,1) \in C$ y $v = (1,0,0) \in C$ entonces $u + v = (1,1,1) \notin C$

   Luego no es un subespacio de R^3.

4. **El conjunto formado por las 3-uplas (x,y,z) tal que** $x + y - 2z = 4$**.**

   $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 4\}$

   (1) $0 \notin T$, pues $0 + 0 - 2 \cdot 0 \neq 4$
   (2) Cerrado bajo la suma:

   $u = \{(x_1, y_1, z_1) : x_1 + y_1 - 2z_1 = 4\}$ y $v = \{(x_2, y_2, z_2) : x_2 + y_2 - 2z_2 = 4\}$
   $u + v = (x_1 + y_1 - 2z_1) + (x_2 + y_2 - 2z_2) \neq 4$

   Luego T no es subespacio de R^3.

5. **El conjunto formado por las 3-uplas** (b_1, b_2, b_3) **que son combinación lineal de** $v = (1,4,0)$ **y** $w = (2,2,2)$

   $S = \{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : (b_1, b_2, b_3) = \alpha(1,4,0) + \beta(2,2,2)\}$

   (1) (0,0,0) = 0(1,4,0) + 0(2,2,2), luego $0 \in S$.
   (2) Cerrado bajo la suma:

   Sea $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$
   $(a_1, a_2, a_3) = \alpha(1,4,0) + \beta(2,2,2)$ y $(b_1, b_2, b_3) = \alpha_2(1,4,0) + \beta_2(2,2,2)$
   $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = \alpha(1,4,0) + \beta(2,2,2) + \alpha_2(1,4,0) + \beta_2(2,2,2) \in S$

   (3) Cerrado bajo el producto:

   Sea $v \in S \Rightarrow \alpha v \in S$?
   $\delta v = \delta(\alpha(1,4,0) + \beta(2,2,2)) = (\delta\alpha)(1,4,0) + (\delta\alpha)(2,2,2)$

6. **El conjunto formado por las 3-uplas** (b_1, b_2, b_3) **tal que** $b_1 + b_2 + b_3 = 0$

   Preguntar si se puede hacer de otra forma, el conjunto

   $B = \{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : b_1 + b_2 + b_3 = 0\}$

   (1) $(0,0,0) \in B$, pues $0 + 0 + 0 = 0$
   (2) Cerrado bajo la suma

   Sea $x = (-x_2, -x_3, x_2, x_3)$ e $y = (-y_2 - y_3, y_2, y_3)$

   $x + y = (-x_2 - x_3, x_2, x_3) + (-y_2 - y_3, y_2, y_3) = (((-x_2 - x_3) + (-y_2 - y_3)), x_2 + y_2, x_3 + y_3) =$

$(-x_2 - x_3 - y_2 - y_3, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in B$, ya que $(\cancel{-x_2} - x_3 - y_2 - y_3) + (\cancel{x_2} + y_2) + (x_3 + y_3) = 0$
ya que se cancenlan todos los términos.

(3) Cerrado bajo el producto

Sea $x \in B, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x \in B$?

$\alpha x = \alpha(x_2 - x_3, x_2, x_3) = (\alpha(x_2 - x_3), \alpha x_2, \alpha x_3) = (\alpha x_2 - \alpha x_3, \alpha x_2, \alpha x_3) \in B$,
ya que $\alpha x_2 - \alpha x_3 + \alpha x_2 + \alpha x_3 = 0$

7. **El conjunto formado por las 3-uplas** (b_1, b_2, b_3) **que verifican** $b_1 \leq b_2 \leq b_3$

$C = \{(b_1, b_2, b_3) : b_1 \leq b_2 \leq b_3\}$

(1) Cerrado bajo el producto:

Sea $x \in C, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x \in C$?

No, ya que tomando $\alpha = -1$ y $x = (1, 2, 3) \in C$, tenemos que:
$\alpha x = (-1)(1, 2, 3) = (-1, -2, -3) \notin C$, ya que $-1 \not\leq -2 \not\leq -3$.

No es un subconjunto de R^3

1.1.4 Mostrar que las dos propiedades que definen un subespacio vectorial (i.e. que la suma sea cerrada en el conjunto y que el producto por escalar también lo sea) son propiedades independientes una de otra. Para ello buscar un conjunto que sea cerrado bajo la suma pero no bajo el producto por escalar y otro conjunto que cumpla lo contrario.

COMPLETAR.

1.1.5 Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de R^{nxm}

a. **El conjunto de las matrices triangulares.**

Sea T el conjunto de las matrices triangulares.

(1) La matriz nula es una matriz triangular, por lo tanto $0 \in T$.

(2) Cerrado bajo la suma:

Sea A, B dos matrices triangulares entonces $A + B$ es una matriz triangular?
Sí, ya que la suma de dos matrices triangulares da una matriz triangular.

(3) Cerrado bajo el producto:

Sea A una matriz triangular y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces αA es una matriz triangular?
Sí, ya que una matriz triangular multiplicada por un escalar sigue siendo triangular.

b. **El conjunto de las matrices singulares.**

(1) La matriz nula pertenece al conjunto de las matrices singulares.

(2) Cerrado bajo la suma:

Sea A, B dos matrices singulares entonces $A + B$ es una matriz singular?

No, ya que tomando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in MS$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in MS$$

resulta:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in MS$$

que no es una matriz singular.

c. **El conjunto de las matrices simétricas.**

(1) La matriz nula pertenece al conjunto ya que $\emptyset = \emptyset^T$

(2) Cerrado bajo la suma:

Sea A, B matrices símetricas entonces $A + B$ es una matriz simétrica?

$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$

(3) Cerrado bajo el producto:

Sea A una matriz simétrica y $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha A$ es una matriz simétrica?

$(\alpha A)^T = \alpha(A^T) = \alpha A$

1.1.6 Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial y sean U y W subespacios de V. Probar que: $U + W = \{v \in V : v = u + w, u \in U, w \in W\}$ es un subespacio de V.

- $0 \in U + W$, ya que como los dos son subespacios entonces los dos conjuntos poseen al 0.
- Sea $x = (u_1, w_1), y = (u_2, w_2) \in (U + W) \Rightarrow x + y \in (U + W)$? entonces tenemos que:

  $x + y = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = ((u_1 + w_1) + u_2) + w_2 = ((\underbrace{u_1 + u_2}_{\in U}) + (\underbrace{w_1 + w_2}_{\in W})) \in U + W$

  Vale ya que como U y W son subespacios entonces cumplen la propiedades de cerrado bajo la suma entonces sabemos que $u_1 + u_2 \in U$ y $w_1 + w_2 \in W$.
- Sea $x = (u_1, w_1) \in U + W, \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha x \in U + W$?
  $\alpha x = \alpha(u_1, w_1) = (\alpha u_1, \alpha w_1) \in U + W$
  Pertenece a $U + W$ porque como U y W son subespacios de V entonces cumplen la condición de cerrado bajo el producto por lo tanto $\alpha u_1 \in U$ y $\alpha w_1 \in W$.

1.1.7 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. **Describir un subespacio de $\mathbb{R}^{2x2}$ que contenga a A y no a B.** Sea

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & 0 \end{bmatrix} : \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R} \right\}$$

2. **Si un subespacio de $\mathbb{R}^{2x2}$ contiene a A y a B, ¿debe contener también a I?**

   Obs: Contiene a A y a B por separado no a la suma de A+B.

   Armemos una matriz que contenga a A:

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

   Ahora armemos una matriz que contenga a B:

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} : \delta \in \mathbb{R} \right\}$$

   Y ahora armemos una matriz que contenga a A y a B:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} : \alpha, \delta \in \mathbb{R} \right\}$$

   Luego, U contiene a I.

1.1.8 Explicitar el espacio columna y el espacio nulo de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Qué carajo es el espacio columna?
Se denomina **espacio columna** al subespacio generado por las columnas, es decir el mínimo conjunto (LI):

Espacio Columna: $\mathcal{C}(A) = \{b \in \mathbb{R}^2 / Ax = b\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= b_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & b_1 \\ 2 & 4 & | & b_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & b_1 \\ 0 & 0 & | & b_2 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 - 2b_2 \end{bmatrix}$$

$Ax = b \iff A'x = b'$

$$A'x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$Ax = b$ tiene solución $A'x = b'$ tiene solución:

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \end{bmatrix} \iff \left\{ 0 = b_2 - 2b_1 \Rightarrow b_2 = 2b_1 \right.$$

Para que esto de una solución si o si $b_2 - 2b_1$ tiene que ser 0

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} b_1 \\ 2b_1 \end{bmatrix} : b_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Espacio nulo:

$\mathcal{N}(A) = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 / Ax = 0\Big\}$
Sabemos que $Ax = 0 \Rightarrow A'x = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2$$

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Espacio Columna: $\mathcal{C}(B) = \{c \in \mathbb{R}^2 : Bx = c\}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & c_1 \\ 2 & 6 & | & c_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & c_1 \\ 0 & 0 & | & c_2 - 2c_1 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad c' = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 - 2c_1 \end{bmatrix}$$

$$B'x = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sabemos que $Bx = c$ tiene solución si y sólo si $B'x = c'$, entonces tenemos que:

$$\begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 - 2c_1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \Big\{ c_2 - 2c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 2c_1$$

$$\mathcal{C}(B) = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 \\ 2c_1 \end{bmatrix} : c_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Espacio nulo:

$\mathcal{N}(B) = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 / Bx = 0\Big\}$
Sabemos que $Bx = 0 \Rightarrow B'x = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Big\{ x_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -3x_2$$

Luego $\mathcal{N}(B) = \left\{ \begin{bmatrix} -3x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_2 \in R \right\}$

Espacio columna: $\mathcal{C}(C) = \Big\{d \in \mathbb{R}^3 : Cx = d\Big\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & d_1 \\ 0 & 0 & | & d_2 \\ 0 & 0 & | & d_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & d_1 \\ 0 & 0 & | & d_2 \\ 0 & 0 & | & d_3 \end{bmatrix}$$

$$C'x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sabemos que $Cx = d \Rightarrow C'x = d'$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \Big\{ d_2 = 0, d_3 = 0$$

Luego, $\mathcal{C}(C) = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : d_1 \in \mathbb{R} \right\}$

Espacio nulo: $\mathcal{N}(C) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : Cx = 0 \right\}$

Sabemos que $Cx = 0 \Rightarrow C'x = 0$

$$C'x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 0$$

Luego, $\mathcal{N}(C) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$, acordate que estás buscando el x, ese es el espacio nulo.

Espacio Columna: $\mathcal{C}(E) = \left\{ b \in \mathbb{R}^3 / Ex = b \right\}$

Lo llevamos a una matriz más manejable:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & b_1 \\ 2 & 0 & | & b_2 \\ 0 & 0 & | & b_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & b_1 \\ 0 & 0 & | & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & | & b_3 \end{bmatrix}$$

$$E' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$E'x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora sabemos que $Ex = b$ entonces $E'x = b'$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ b_2 = 2b_1, b_3 = 0 \right.$$

Luego $\mathcal{C}(E) = \left\{ \begin{bmatrix} b_1 \\ 2b_1 \\ 0 \end{bmatrix} : b_1 \in \mathbb{R} \right\}$

Espacio nulo: $\mathcal{N}(E) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : Ex = 0 \right\}$

Sabemos que $Ex = 0 \Rightarrow E'x = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 0$$

Luego $\mathcal{N}(E) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

1.1.9 ¿Para qué vectores $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ los siguientes sistemas tienen solución?

$a.$ $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = & b_1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 & = & b_2 \\ -x_1 - 4x_2 - 2x_3 & = & b_3 \end{array} \right.$$

Armamos la matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & | & b_1 \\ 2 & 8 & 4 & | & b_2 \\ -1 & -4 & -2 & | & b_3 \end{bmatrix} \underbrace{\longrightarrow}_{f_3=f_3+f_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & | & b_1 \\ 2 & 8 & 4 & | & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & | & b_3+b_1 \end{bmatrix} \underbrace{\longrightarrow}_{f_2=f_2-2f_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & | & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & | & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & | & b_3+b_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} b_2 - 2b_1 = 0 \\ b_3 + b_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_2 = 2b_1 \\ b_3 = -b_1 \end{cases}$$

Conjunto solución $b = \left\{ \begin{bmatrix} b_1 \\ 2b_1 \\ -b_1 \end{bmatrix} : b_1 \in \mathbb{R} \right\}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = b_1 \\ 2x_1 + 9x_2 = b_2 \\ -x_1 - 4x_2 = b_3 \end{cases}$$

Armamos la matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & | & b_1 \\ 2 & 9 & | & b_2 \\ -1 & -4 & | & b_3 \end{bmatrix} \underbrace{\longrightarrow}_{f_3=f_3+f_1, f_2=f_2-2f_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & | & b_1 \\ 0 & 1 & | & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & | & b_3+b_1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \; 0 = b_3 + b_1 \right. \longrightarrow \left\{ \; -b_3 = b_1 \right.$$

El conjunto solución entonces es $b = \left\{ \begin{bmatrix} -b_3 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} : b_3, b_2 \in \mathbb{R} \right\}$

1.1.10 Dadas $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $B \in \mathbb{R}^{nxp}$ probar que el espacio columna de AB está contenido en el espacio columna de A. Dar un ejemplo donde dicha contención sea estricta.

COMPLETAR.

1.1.11 ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^\infty$?

a. $A = \{x = (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^\infty : |\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq 0\}| \text{ es finito } \}$.
Un conjunto es un subespacio de $\mathbb{R}^\infty$ si y sólo si cumple:
Que carajo significa $x_i \neq 0$

- $0 \in A$
- Sea $x, y \in A \Rightarrow x + y$
- Sea $x \in A, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x \in A$

b. $B = \{x = (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^\infty : \exists i_0 \in \mathbb{N} / x_i = 0 \forall i \geq i_0\}$
Ejemplo: $x = (1, 2, 3, 0, 0, 0, ...)$

- $0 \in B$, vale ya que $(0, 0, 0, ...) \in B$
- Sea $x, y \in B \Rightarrow x + y \in B$?
  Sí, se cumple. Supongamos:
  $x = (x_1, x_2, ..., \underbrace{x_i}_{=0}, 0, 0, ...), y = (y_1, y_2, ..., y_{j-1}, \underbrace{y_j}_{=0}, 0, 0...)$, con $j > i$, ahora tenemos que
  $$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., \underbrace{x_i}_{=0} + \underbrace{y_i}_{\neq 0}, \underbrace{x_{i+1}}_{=0} + \underbrace{y_{i+1}}_{\neq 0}, ..., y_{j-1}, \underbrace{y_j}_{=0}, 0, 0, ...) \in B$$

- Sea $x \in A, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x \in A$
  Sí cumple ya que, si tenemos $x \in A$ entonces sabemos que existe algún elemento $x_i = 0$ que después de ese son todos los demás 0. Si a este elemento lo multiplicamos por un $\alpha \neq 0$ la condición se sigue compliendo y si lo multiplicamos por $\alpha = 0$ también ya que obtendríamos $x = (0, 0, 0, ...)$ que pertenece a B.

  Analicemos los siguientes casos:

  $\alpha \neq 0$
  $\alpha(x_1, x_2, ..., \underbrace{x_i}_{=0}, 0, 0, ...) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_i, \alpha 0, \alpha 0, ...) \in B$

  $\alpha = 0$
  $0(x_1, x_2, ..., \underbrace{x_i}_{=0}, 0, 0, ...) = (0x_1, 0x_2, ..., 0x_i, 0, 0, ...) \in B$

Luego B es un subespacio de R^∞

c. $C = \{x = (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^\infty : x_i \geq x_{i+1} \forall i \in \mathbb{N}\}$ (conjunto de sucesiones decrecientes) Para ver que es un subespacio probaremos las siguientes cosas:

- $(0, 0, 0, ...) \in C$?. Sí, ya qué $0 \geq 0 \geq 0 \geq ... \geq 0$
- Cerrado bajo el producto:

  Sea $x \in C, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x \in C$?
  Supongamos $x = (2, 1, 0, ..., 0)$ y $\alpha = -1$, entonces tenemos que:

  $\alpha x = (-1)(2, 1, 0, ..., 0) = (-2, -1, 0, ..., 0) \notin C$, ya que $-2 \ngeq -1 \ngeq 0$
- Cerrado bajo la suma:

  Sea $x = (x_1, x_2, ..., x_i, 0, ..., 0)$, donde $x_1 \geq x_2 \geq ...$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_{j-1}, y_j, 0, ..., 0)$, donde $y_1 \geq y_2 \geq ...$ con $j > i$, tenemos que:
  $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_i + y_i, 0 + y_{i+1}, ..., y_{j-1}, y_j, 0, ..., 0) \in B$

Luego C no es un subespacio de R^∞ porque no es cerrado bajo el producto.

d. $D = \{x = (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^\infty : \exists \lim_{i \to \infty}(x_i)\}$

e. $E = \{x = (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^\infty : \exists c \in \mathbb{R} / x_{i+1} = c + x_i \forall i \in \mathbb{N}\}$

f. $F = \{x = (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^\infty : \exists c \in \mathbb{R} / x_{i+1} = cx_i \forall i \in \mathbb{N}\}$

2 PRÁCTICA 2 CONTINUACIÓN –

A lo largo de esta práctica $(V, \mathbb{K}, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales, salvo mención expresa.

2.0.1 Probar el siguiente enunciado: Sean $U_1, U_2 \subset V$ subespacios. Luego $V = U_1 \bigoplus U_2$ si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

- $V = U_1 + U_2$
- $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

Vamos a probar que $V = U_1 \bigoplus U_2 \Leftrightarrow V = U_1 + U_2$ y $0 = u_1 + u_2 \Rightarrow u_1 = u_2 = 0$

$\Rightarrow$: Supongamos $V = U_1 \bigoplus U_2$. Luego por definición resulta que $V = U_1 + U_2$. Además por la unicidad de la representación del 0 tenemos que $0 = u_1 + u_2 \Rightarrow u_1 = u_2 = 0$ pues $0 = 0 + 0$.

$\Leftarrow$: Puesto que $V = U_1 + U_2$ tenemos que $\forall v \in V \exists u_1, u_2 / v = u_1 + u_2$.
Sólo nos queda ver la unicidad. Supongamos que $v = w_1 + w_2 = u_1 + u_2$, luego
$0 = v - v = (u_1 + u_2) - (w_1 + w_2) = (u_1 - w_1) - (u_2 - w_2)$

Ahora vamos a probar que $V = U_1 \bigoplus U_2 \iff V = U_1 + U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

$\Rightarrow$: Supongamos $V = U_1 \bigoplus U_2$. Luego por definición resulta $V = U_1 + U_2$. Además por la unicidad de la representación del 0 tenemos que $0 = u_1 + u_2 \Rightarrow u_1 = u_2 = 0 \Rightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

$\Leftarrow$: Puesto que $V = U_1 + U_2$ tenemos que $\forall v \in V \exists u_1, u_2 / v = u_1 + u_2$.
Sólo nos queda ver la unicidad. Supongamos que $v = w_1 + w_2 = u_1 + u_2$, luego:

$0 = v - v = (u_1 + u_2) - (w_1 + w_2) = \underbrace{(u_1 - w_1)}_{\in U_1} - \underbrace{(u_2 - w_2)}_{\in U_2}$
y como $0 = u_1 + u_2 \Rightarrow u_1 = u_2 = 0$, sabemos que $u_1 - w_1 = 0 \Rightarrow u_1 = w_1$
No estoy seguro como comprobar que $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ y no puede haber otro elemento en común, pensarlo de nuevo, por ahora paso a otro.

Encontrar un contraejemplo para demostrar que este resultado no puede extenderse a m subespacios.

2.0.2 Para cada uno de los siguientes conjuntos determinar si es un subespacio de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ o explica por que no lo es:

a. $A = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$ Para verificar si es un subespacio tenemos que ver lo siguiente:

- $0 \in A$?
- Cerrado bajo la suma:
  Sea $f, g \in A \Rightarrow f + g \in A$?

  $(f + g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\leq 0} + \underbrace{g(x)}_{\leq 0} \leq 0 \in A$
- Cerrado bajo el producto:

  No se cumple, ya que tomando $\alpha = (-1)$

  $(\alpha f)(x) = \alpha \underbrace{f(x)}_{\leq 0} = \underbrace{(-1)f(x)}_{\geq 0} \notin A$

A no es un subespacio de $C(\mathbb{R})$

b. $B = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$

- $0 \in B$?
- Cerrado bajo la suma:
  Sean $f, g \in B \Rightarrow f + g \in B$?

  $(f + g)(0) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \underbrace{g(0)}_{=0} = 0 + 0 = 0 \in B$
- Cerrado bajo el producto:
  Sea $f \in B, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f \in B$?

  $(\alpha f)(0) = \alpha f(0) = \alpha 0 = 0 \in B$

c. $C = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(2) = 0\}$

- $0 \in C$?

- Cerrado bajo la suma:
  Sean $f, g \in C \Rightarrow f + g \in C$

  $(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 0 + 0 = 0 \in C$
- Cerrado bajo el producto:
  Sea $f \in C, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f \in C$?

  $(\alpha f)(2) = \alpha f(2) = \alpha 0 = 0 \in C$

d. El conjunto de funciones constantes.
$D = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(x) = c, c \in \mathbb{R}\}$

- $0 \in D$?
- Cerrado bajo la suma:
  Sean $f, g \in D \Rightarrow f + g \in D$?

  $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = c + c' \in D$
- Cerrado bajo el producto:
  Sea $f \in D, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f \in D$?

  $(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \underbrace{\alpha c}_{\in R} \in D$

e. No entiendo mucho esta forma de escribir la función:
$E = \{\alpha + \beta senx : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

- $0 \in E$?
- Cerrado bajo la suma:
  Sean $f, g \in E \Rightarrow f + g \in E$?

  $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (\alpha + \beta senx) + (\alpha' + \beta' senx) = ((\alpha + \beta senx) + \alpha') + \beta' senx = ((\alpha + \alpha') + \beta senx) + \beta' senx = (\alpha + \alpha') + \beta senx + \beta' senx = (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') senx$
- Cerrado bajo el producto:
  Sea $f \in E, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f \in E$?

  $(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha(\alpha + \beta senx) = \underbrace{\alpha^2}_{\in R} + \underbrace{\alpha\beta}_{\in R} senx \in E$

2.0.3 Dar un ejemplo de subespacio no vacío de $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que U sea cerrado bajo la multiplicación por escalares, pero que no sea un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Tengo que buscar un subespacio de $\mathbb{R}^2$ que cumpla la condición de cerrado bajo el producto, pero no cumpla la condición de ser cerrado bajo la suma:
$A = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_i \leq 0, i \in \{1, 2\}\}$

Cerrado bajo la suma:
Sean $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$
$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \underbrace{=}_{suma.R^2} (\underbrace{x_1 + y_1}_{\leq 0}, \underbrace{x_2 + y_2}_{\leq 0}) \in A$
Es decir la suma de dos números negativos siempre dará un número negativo.

Cerrado bajo el producto:
No cumple, ya que si tomamos $x = (-1, -3)$ y $\alpha = -1$, tenemos que:
$\alpha x \underbrace{=}_{def.\alpha} (-1)x = (-1)(-1, -3) = ((-1)(-1), (-1)(-3)) = (1, 3) \notin A$

2.0.4 Sea $\mathbb{K}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$, y sea U el subespacio de $\mathbb{K}[x]$ dado por:

$$U = \{ax^2 + bx^5 : a, b \in \mathbb{K}\}$$

Encontrar un subespacio W de $\mathbb{K}[x]$ tal que $\mathbb{K}[x] = U \bigoplus W$.

$$W = \{\delta x^4 + \lambda x^3 + \gamma x : \delta, \lambda, \gamma \in \mathbb{K}\}$$

Cualquier polinomio que no comparta las mismas potencias cumple la condición que posee el polinomio U, es decir:

$W = \langle\{x^i : i \in \mathbb{N}_0 - \{2,5\}\}\rangle = \sum_{i \in I} a_i x_i,\ I \subseteq \mathbb{N}_0 - \{2,5\}$

Vemos que:
$\mathbb{K}[x] = U + W$

$\subseteq /p \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \underbrace{(a_2x^2 + a_5x^5)}_{\in U} + \underbrace{(a_0 + a_1x + a_3x^3 + a_4x^4 + a_6x^6 + ...)}_{\in W}$

$\mathbb{K}[x] \subseteq U + W$

$\supseteq /p = p_1 + p_2, p_1 \in U$ y $p_2 \in W \Rightarrow p = \overbrace{ax^2 + bx^5}^{p_1} + \overbrace{\sum_{i \in I} a_i x_i}^{p_2},\ I \subseteq \mathbb{N}_0 - \{2,5\} \Rightarrow p \in \mathbb{K}[x]$

2.0.5 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y sean W_1, W_2, W_3 son subespacios de V. Determinar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

Acá nos sirve tomar $V = \mathbb{R}^2$ y pensarlo como vectores en el plano.

- Si $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$ luego $W_1 = W_2$.
  Sea $W_1 = \langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rangle$, $W_2 = \langle\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rangle$, $W_3 = \langle\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\rangle$
  Vemos que $W_1 \neq W_2$, ahora probaremos que $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$:
  $\subseteq$ / Sea $x \in W_1 + W_3 \Rightarrow x = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{\beta}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\in W_2} + \underbrace{\frac{\beta}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\in W_3} \in W_2 + W_3$

  $\supseteq$ / Sea $x \in W_2 + W_3 \Rightarrow x = \underbrace{\alpha\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\in W_2} + \underbrace{\gamma\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\in W_3} = \underbrace{(\alpha\gamma)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\in W_3} + \underbrace{\beta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\in W_1} \in W_1 + W_3$

- Si $W_1 \bigoplus W_3 = W_2 \bigoplus W_3$ luego $W_1 = W_2$.

  $V = W_1 \bigoplus W_2 \Leftrightarrow V = W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

  Tomando $V = R^2$, $W_1 = \langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rangle$, $W_2 = \langle\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\rangle$, $W_3 = \langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle$
  Veamos que $W_1 \neq W_2$:
  Probaremos que $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$
  $\mathbb{R}^2 = \langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rangle \oplus \langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle \underbrace{=}_{?} \langle\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\rangle \oplus \langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle$

  $$\mathbb{R}^2 = \langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rangle \oplus \langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathbb{R}^2 = \langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rangle + \langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle \\ \langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rangle \cap \langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle = \{0\} \end{cases}$$

$i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \beta \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta \end{cases} \Longrightarrow x = \alpha + y \Rightarrow x - y = \alpha$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x - y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Después sigo con este.

2.0.6 Sean A y B matrices tales que $AB = 0$. Demostrar que el espacio columna de B está contenido en el espacio nulo de A. ¿Qué sucede con el espacio fila de A y el espacio nulo de B^T?

$\mathcal{C}(B) = \Big\{ b \in \mathbb{R}^n : Bx = b \Big\}, \mathcal{N}(A) = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \Big\}$

$\mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{N}(A)$

$\mathcal{C}(AB) = \Big\{ b \in R^n : ABx = b \Big\} = \{ b \in R^n : 0x = b \}$

2.0.7 Sean W_1, W_2 subespacios de V. Demostrar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$. Comparar con el ejercicio 6 de la primera parte de la práctica.

$\Rightarrow$: Supongamos lo contrario, es decir que $W_1 \not\subset W_2$ y $W_2 \not\subset W_1$. Esto quiere decir que $\exists u \in W_1 / u \notin W_2$ y $\exists v \in W_2 / u \notin W_1$.

Consideremos ahora el vector $u + v \in W_1 \cup W_2$, luego $u + v \in W_1$ o $u + v \in W_2$.

- Si $u + v \in W_1$ entonces por existencia del opuesto y clausura bajo la suma $u + v - u = u \in W_1$. Contradicción.
- Análogamente para $u + v \in W_2$.

$\Leftarrow$: Trivial pues si $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$ entonces $W_1 \cup W_2 = W_1$ o bien $W_1 \cup W_2 = W_2$.

2.0.8 Considere el espacio vectorial V de todas las funciones con dominio y codominio igual a $\mathbb{R}$ (con la suma y producto por escalares usuales).

Sean $V_i = \{ f \in V : f \text{ es una función impar} \}$ y $V_p = \{ f \in V : f \text{ es una función par} \}$. Probar que:

- V_i y V_p son subespacios de V.

  Vamos a probar que V_i es un subespacio, para que esto se de se tienen que verificar 3 condiciones:

  - $0 \in V_i$, vale ya que f(-0)=-f(0)
  - Cerrado bajo la suma:
    Sea $f, g \in V_i \Rightarrow f + g \in V_i$?

    Entonces tenemos que $f(-x) = -f(x)$ y $g(-x) = -g(x)$ por ser funciones impares
    $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = f(-1 \cdot x)+g(-1 \cdot x) = (-1)f(x)+(-1)g(x) = (-1)(f+g)(x) = -(f+g)(x)$
  - Cerrado bajo el producto:
    Sea $f \in V_i, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f \in V_i$?

    Sea f una función impar entonces tenemos que $f(-x) = -f(x)$

$$(\alpha f)(-x) = (\alpha f)(-1 \cdot x) = \alpha(f(-1 \cdot x)) \underbrace{=}_{f.imp} \alpha((-1)f(x)) = \alpha(-f(x)) = -\alpha f(x)$$

Ahora vamos a probar que V_j es un subespacio:

- $0 \in V_j$, vale ya que f(-0)=f(0)
- Cerrado bajo la suma:
  Sea $f, g \in V_j \Rightarrow f + g \in V_j$?

  $$(f+g)(-x) = (f+g)(-1 \cdot x) = f(-1 \cdot x) + g(-1 \cdot x) \underbrace{=}_{f.par} f(x) + g(x) \in V_j$$
- Cerrado bajo el producto:
  Sea $f \in V_j, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f \in V_j$?

  Sea f una función par entonces tenemos que $f(-x) = f(x)$
  $(\alpha f)(-x) = (\alpha f)(-1 \cdot x) = \alpha(f(-1 \cdot x)) = \alpha f(x)$

- $V_i + V_p = V$.

  $\subseteq / f \in V_i + V_p \Rightarrow f = f_i + f_p \Rightarrow f = f_i + f_p, f_i \in V_I, f_p \in V_p$
  $f_i, f_p \in V \Rightarrow f \in V.$

  $\supseteq / f \in V$, ¿$\exists f_i \in V_I, f_p \in V_p / f = f_i + f_p$?

  $$f(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(x)}{2} = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(x)}{2} + \frac{f(-x)}{2} - \frac{f(-x)}{2} = \underbrace{\left[\frac{f(x)}{2} + \frac{f(-x)}{2}\right]}_{f_p(x)} + \underbrace{\left[\frac{f(x)}{2} - \frac{f(-x)}{2}\right]}_{f_i(x)}$$

  $$f_p(-x) = \left[\frac{f(-x)}{2} + \frac{f(-(-x))}{2}\right] = \left[\frac{f(-x)}{2} + \frac{f(x)}{2}\right] = \left[\frac{f(x)}{2} + \frac{f(-x)}{2}\right] = f(x)$$

  $$f_i(-x) = \left[\frac{f(-x)}{2} - \frac{f(-(-x))}{2}\right] = \left[\frac{f(-x)}{2} - \frac{f(x)}{2}\right] = \left[-\left(\frac{f(x)}{2} - \frac{f(-x)}{2}\right)\right] = -f_i(x)$$

- $V_i \cap V_p = \left\{0\right\}$

  $\subseteq$ / Sea $f \in V_i \cap V_p \Rightarrow f \in V_i \wedge f \in V_p$

  Luego
  $$f(-x) = -f(x) \quad \wedge \quad f(-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$$

  $$-f(x) = f(x)$$
  $$2f(x) \Rightarrow f(x) = 0$$

  $\supseteq$ / $\overline{0} \in V_I \wedge \overline{0} \in V_p$ pues son sub.e.v. $\Rightarrow \overline{0} \in V_I \cap V_p$

2.0.9 En el espacio vectorial de las matrics reales de orden 3, describir el subespacio generado por cada uno de los siguientes conjuntos:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

El espacio generado por la matriz A es:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 + \delta A_4 + \epsilon A_5 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \gamma & \delta \\ 0 & \epsilon & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\langle A \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix} \beta & \gamma & \delta \\ 0 & \epsilon & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R} \right\}$$

El espacio generado por la matriz B es:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \beta_3 B_3 + \beta_4 B_4$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & -\beta_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta_2 & 0 \\ -\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta_4 \\ 0 & 0 & 2\beta_4 \\ \beta_4 & -2\beta_4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_2 & \beta_3 - \beta_4 \\ -\beta_2 & 0 & \beta_1 + 2\beta_4 \\ -\beta_3 + \beta_4 & -\beta_1 - 2\beta_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\langle B \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \beta_2 & \beta_3 - \beta_4 \\ -\beta_2 & 0 & \beta_1 + 2\beta_4 \\ -\beta_3 + \beta_4 & -\beta_1 - 2\beta_4 & 0 \end{bmatrix} : \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

2.0.10 Sea $\langle S \rangle$ el subespacio generado por un subconjunto S de V. Demostrar las siguientes propiedades:

a. Si $S \subset T$, entonces $\langle S \rangle \subset \langle T \rangle$.

Sea $S = \sum_{i=0}^{n} s_i$ y $T = \sum_{i=0}^{n} t_i$

b. $S \subset \langle S \rangle$

$S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, $\langle S \rangle = \{\alpha_1 s_1, \alpha_2 s_2, ..., \alpha_n s_n : \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}\}$

Tengo que probar que cada elemento de S se puede escribir como una combinación lineal de S.
En particular si tomo: $\alpha_i = 1$ y $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = ... = \alpha_n = 0$

$s_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i$

Es decir cada elemento del conjunto, se puede escribir como una combinación lineal de cada elemento de S.

c. Si $S \subset T$ y T es un subespacio de V, entonces $\langle S \rangle \subset T$. Es decir que $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.

Primero de todo, sabemos que T es un subespacio entonces se cumplen los 10 axiomas de un espacio vectorial, en particular:

- Cerrado bajo la suma: $u, v \in \mathbb{T} \Rightarrow u + v \in \mathbb{T}$
- Cerrado bajo el producto: $u \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in \mathbb{T}$

Sabemos que $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\} \subset T$
Tenemos que probar que $\langle S \rangle = \{\alpha_1 s_1, \alpha_2 s_2, ..., \alpha_n s_n : \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\} \subset T$

$\subset$ / Sea $x \in \langle S \rangle \Rightarrow x = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_n + ... + \alpha_n s_n \underbrace{=}_{S \subset T} \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + ... + \alpha_n t_n \subset \mathbb{T}$, ya que T es un subespacio por lo tanto se cumple que es cerrado bajo el producto.

d. S es un subespacio de V si y sólo si $\langle S \rangle = S$.

$\Rightarrow$ / Suponemos que S es un subespacio de V entonces sabemos que se cumple que:

- $0 \in S$
- $s, r \in S \Rightarrow s + r \in S$
- $s \in S, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha s \in S$

Ahora tenemos que probar que $\langle S \rangle = \{\alpha_1 s_1, \alpha_2 s_2, ..., \alpha_n s_n : \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}\} =$ S

$\subset$ / Sea $x \in \langle S \rangle \Rightarrow x = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + ... + \alpha_n s_n \in S$, ya que $\alpha_i s_i \in S$ por ser S un subespacio de V y la suma de dos elementos pertenecientes a S también pertenecen a S.

$\supset$ / Sea $x \in S$ entonces tenemos que $\alpha_i s_i \in S$ y $s_i + s_j \in S$, luego $S \subset \langle S \rangle$

$\Leftarrow$ / Ahora tenemos que $\langle S \rangle = S$ y queremos llegar a que S es un subespacio.
Si $\langle S \rangle = S$ entonces tenemos verificar si se cumplen las siguientes condiciones:

- ¿$0 \in S$? Si se cumple ya que si tomamos $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ entonces $0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i$
- Sea $u, v \in \langle S \rangle \Rightarrow u + v \in \langle S \rangle$?
  Sea $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i$ y $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i s_i$, entonces tenemos que:

  $$u + v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i s_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i s_i + \beta_i s_i) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\alpha_i \beta_i)}_{\in \mathbb{R}} s_i \in \langle S \rangle.$$
- Sea $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha u \in S$?

  $\gamma u = \gamma \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma \alpha_i s_i = \sum_{i=1}^{n} (\gamma \alpha_i) s_i \in \langle S \rangle$

Luego $\langle S \rangle$ es un subespacio de V.

e. Si $\langle S \rangle = U \Longrightarrow \langle U \rangle = U$

$\Rightarrow$ / Supongamos que $\langle S \rangle = U$
Entonces U es un subespacio generado por S, ahora tenemos que probar $\langle U \rangle = U$.

- $\supset$ / Tenemos que probar que todo elemento de U se puede escribir como una combinación lineal de U.
  En particular tomando $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = ... = \alpha_n = 0$ y $\alpha_i = 1$, tenemos que: $u_i = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$
- $\subseteq$ / Ahora tenemos que probar que $\langle U \rangle \subseteq U$
  Ahora tomamos $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = ... = \alpha_n = 0$ y $\alpha_i = 1$, tenemos que:
  Sea $x \in \langle U \rangle \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = u_i \in U$

f. Sea $W \subset S$. Entonces
i. $\langle S \cup W \rangle \subset \langle S \rangle \cup \langle W \rangle$
ii. $\langle S \cap W \rangle \subset \langle S \rangle + \langle W \rangle$

i. Supongamos $W \subset S \Rightarrow \langle S \cup W \rangle \subset \langle S \rangle \cup \langle W \rangle$

Si $W \subset S$ entonces $S \cup W = S$ y también $\langle S \rangle \cup \langle W \rangle = \langle S \rangle$
Entonces tenemos que probar $\langle S \rangle \subset \langle S \rangle$ que es trivial.

ii. Sabemos que como $W \subset S \Rightarrow W \cap S = W$, por lo tanto $\langle W \cap S \rangle = \langle W \rangle$
Entonces tenemos que probar que: $\langle W \rangle \subset \langle S \rangle + \langle W \rangle$

$W = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$
Sea $x \in \langle W \rangle \Rightarrow x = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_n w_n = 0s_1 + 0s_2 + ... + 0s_n + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_n w_n \in \langle S \rangle + \langle W \rangle$

g. Valen las contenciones inversas en los ítems a) y f).
Es decir:

- Si $S \supset T$, entonces $\langle S \rangle \subset \langle T \rangle$ o
  Si $S \subset T$, entonces $\langle S \rangle \supset \langle T \rangle$
- WTF

2.0.11 Describir el menor subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{2x2}$ que contenga a

Tenemos que comprobar que los conjuntos sean linealmente independientes, si son linealmente dependientes entonces debemos remover elementos del conjunto hasta que el conjunto resultante sea linealmente independiente.

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

  El menor subespacio que contiene a estas dos matrices es el generado por las dos matrices:
  $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

  El menor subespacio es: $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

  $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha + \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

2.0.12 Sea V el espacio vectorial de los polinomios de $\mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual a 3. Considere lo siguientes polinomios:

$p_1(x) = x^3 + 2x^2 + 4, \qquad p_4(x) = 3x^3 + 6x^2 + 9x + 12$
$p_2(x) = 2x^3 + 5x^2 + 11x + 8, \qquad p_5(x) = x^3 + 3x^2 + 8x + 13$
$p_3(x) = x^2 + 5x$

Para $j \in \{4, 5\}$ determinar si $p_j \in \langle \{p_1, p_2, p_3\} \rangle$

Vamos a ver si p_4 se puede escribir como combinación lineal de p_1, p_2 y p_3.
$\{\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(x^3 + 2x^2 + 4) + \beta(2x^3 + 5x^2 + 11x + 8) + \gamma(x^2 + 5x) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$
$= (\alpha + 2\beta)x^3 + (2\alpha + 5\beta + \gamma)x^2 + (11\beta + 5\gamma)x + 4\alpha + 8\beta$

Ahora para ver si p_4 se puede escribir como una combinación lineal de p_1, p_2 y p_3, tenemos que:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta &= 3 \\ 2\alpha + 5\beta + \gamma &= 6 \\ 11\beta + 5\gamma &= 9 \\ 4\alpha + 8\beta &= 12 \end{cases}$$

$\alpha = 3 - 2\beta$
$2(3-2\beta) + 5\beta + \gamma = 6 \Longrightarrow 6 - 4\beta + 5\beta + \gamma = 6 \Longrightarrow 6 + \beta + \gamma = 6 \Longrightarrow \beta + \gamma = 0 \Longrightarrow \beta = -\gamma \Longrightarrow \beta = \frac{3}{2}$
$11(-\gamma) + 5\gamma = 9 \Longrightarrow -6\gamma = 9 \Longrightarrow \gamma = \frac{-3}{2}$
$\alpha = 3 - 2(\frac{3}{2}) \Longrightarrow \alpha = 3 - 3 \Longrightarrow \alpha = 0$

Luego existe una combinación lineal de α, β, γ tal que da como resultado p_4.

Ahora hagamos lo mismo con p_5:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha + 2\beta & = & 1 \\ 2\alpha + 5\beta + \gamma & = & 3 \\ 11\beta + 5\gamma & = & 8 \\ 4\alpha + 8\beta & = & 13 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - 2\beta \\ 4(1-2\beta) + 8\beta = 13 \Rightarrow 4\cancel{-8\beta + 8\beta} = 13 \Rightarrow 4 = 13 \end{cases}$$

Luego no existe una combinación lineal que de como resultado al polinomio p_5.

2.0.13 Analizar si los siguientes vectores son linealmente independientes

- $(1,1,0,0); (1,0,1,0); (0,0,1,1); (0,1,0,1)$

  $\alpha(1,1,0,0) + \beta(1,0,1,0) + \gamma(0,0,1,1) + \epsilon(0,1,0,1) = (\alpha+\beta, \alpha+\epsilon, \beta+\gamma, \gamma+\epsilon) = (0,0,0,0)$

  $$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \epsilon = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma + \epsilon = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \epsilon = -\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R} \\ \gamma = \alpha \end{cases}$$

  Luego es linealmente independiente.

- $(1,1,0); (1,0,0); (0,1,1); (x,y,z)$ para x, y, z cualquiera.
  $\alpha(1,1,0) + \beta(1,0,0) + \gamma(0,1,1) + \delta(x,y,z) = (\alpha + \beta + \underbrace{\delta x}_{\omega}, \alpha + \gamma + \underbrace{\delta y}_{\omega'}, \gamma + \delta z)$

  $$\begin{cases} \alpha + \beta + \omega = 0 \Rightarrow \beta = -\omega'' + \omega' - \omega \\ \alpha + \gamma + \omega' = 0 \Rightarrow \alpha = \omega'' - \omega' \\ \gamma + \omega'' = 0 \Rightarrow \gamma = -\omega'' \end{cases}$$

  Sea $\delta = 1, \omega'' = 1, \omega' = 2, \omega = 3$

  $$\begin{cases} \gamma = -1 \\ \alpha = 1 - 2 \Rightarrow \alpha = -1 \\ \beta = -1 + 2 - 3 \Rightarrow \beta = -1 - 3 \Rightarrow \beta = -2 \end{cases}$$

  $-1(1,1,0) - 2(1,0,0) - 1(0,1,1) + 1(3,2,1) = (-1,-1,0) + (-2,0,0) + (0,-1,-1) + (3,2,1) = (-3,-1,0) + (3,1,0) = (0,0,0)$

  Luego es linealmente dependiente ya que existe una combinación de escalares que hacen que dan el vector nulo.
  Si x, y, z toma cualquier valor entonces nunca será un vector li.

2.0.14 Sea $P = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z - t = 0\}$. Verificar que P es un espacio vectorial y hallar 3 vectores linealmente independientes en P.

Para verificar que P es un espacio vectorial deberíamos comprobar los 10 axiomas pero podemos verificar si P es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ que para eso sólo deberíamos verificar 3 axiomas.

- $0 \in P$?.
  Sí, ya que $0 - 2 \cdot 0 + 0 - 0 = 0$

- Cerrado bajo la suma:
  Sea $p = (2y - z + t, y, z, t)$ y $q = (2y' - z' + t', y', z', t')$
  $p + q = \underbrace{(2y - z + t, y, z, t)}_{0} + \underbrace{(2y' - z' + t', y', z', t')}_{0} = (2y - z + t + 2y' - z' + t', y + y', z + z', t + t') = 0 \in P$

- Cerrado bajo el producto: Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $p \in P \Rightarrow \alpha p \in P$?
  Sea $p = (2y - z + t, y, z, t), \alpha p = \alpha \underbrace{(2y - z + t, y, z, t)}_{0} = (\alpha(2y - z + t), \alpha y, \alpha z, \alpha t) = 0 \in P$

2.0.15 Probar que

- Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo es $l.d.$
- Si S es $l.i.$ entonces T es $l.i. \forall T \subset S$.
- Si S es $l.d.$ entonces T es $l.d. \forall T \supset S$.

2.0.16 Si $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ es un conjunto $l.i.$, probar que $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ también es $l.i.$

COMPLETAR.

3 PRÁCTICA 3 – TRANSFORMACIONES LINEALES

3.0.1 Para cada una de las siguientes funciones $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ determinar si se trata de una transformación lineal y en caso afirmativo: obtener $nul(T)$ y $img(T)$, calcular su dimensión y determinar si T es inversible.

a. $T((x, y)^t) = (y, x)^t$

Cerrado bajo la suma:
Sea $u, v \in \mathbb{R}^2$
$T(u + v) = T((x, y)^t + (x', y')^t) = T((x + x', y + y')^t) = (y + y', x + x')^t = (y, x)^t + (y', x')^t = T((x, y)^t) + T((x', y')^t) = T(u) + T(v)$

Cerrado bajo el producto: Sea $u \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$
$T(\alpha u) = T(\alpha(x, y)^t) = T((\alpha x, \alpha y)^t) = (\alpha y, \alpha x)^t = \alpha(y, x)^t = \alpha T(u)$

Luego es una transformación lineal.

Ahora vamos a obtener $nul(T) = \{(0, 0)^t \in \mathbb{R}^2 : T((x, y)^t) = (0, 0)^t\}$
$T((x, y)^t) = (y, x)^t = (0, 0)^t \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
$\mathcal{N}(T) = (0, 0), dim(\mathcal{N}(T)) = 0$

$img(T) = \{(a, b)^t \in \mathbb{R}^2 : T((x, y)^t) = (a, b)^t, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$T((x, y)^t) = (y, x)^t = (a, b)^t \Rightarrow \begin{cases} y = a \\ x = b \end{cases}$
$img(T) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow dim(img(T)) = 2$
La imágen es $\mathbb{R}^2$ ya que para cada y existe un a y para cada x existe un b, supongo.

b. $T((x, y)^t) = (x^2, y^2)^t$
Cerrado bajo la suma:
No vale, ya que tomando $u = (-1, 3)^t$ y $v = (-1, -1)^t \in \mathbb{R}^2$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{rcl} T((-1, 3)^t + (-1, -1)^t) & = & T((-2, 2)^t) = (4, 4)^t \\ T((-1, 3)^t) + T((-1, -1)^t) & = & (1, 9)^t + (1, 1)^t = (2, 10) \end{array}\right\} \neq$$

Cerrado bajo el producto:
Sea $u \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$
No vale ya que tomando, $u = (-1,-1)^t \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha = -1 \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcl} T(\alpha u) & = & T(\alpha(-1,-1)^t) = T(-1 \cdot (-1,-1)^t) = T((1,1)^t) = (1,1)^t \\ \alpha T(u) & = & -1 \cdot T((-1,-1)^t) = -1(1,1) = (-1,-1) \end{array}\right\} \neq$$

No es una transformación lineal.

c. $T((x,y)^t) = (x,-y)^t$
Cerrado bajo la suma:
Sea $u = (x,y)^t$ y $v = (x',y')^t \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{rcl} T(u+v) & = & T((x,y)^t + (x',y')^t) = T((x+x', y+y')^t) = (x+x', -y-y')^t \\ T(u)+T(v) & = & T((x,y)^t) + T((x',y')^t) = (x,-y)^t + (x',-y')^t = (x+x', -y-y')^t \end{array}$$

Cerrado bajo el producto:
Tomando $u = (x,y)^t \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} T(\alpha \cdot (x,y)^t) & = & T((\alpha x, \alpha y)^t) = (\alpha x, -\alpha y)^t \\ \alpha \cdot T((x,y)^t) & = & \alpha \cdot (x,y)^t = \alpha \cdot (x,-y)^t = (\alpha x, -\alpha y)^t \end{array}$$

Es una transformación lineal.

Ahora calcularemos $\mathcal{N}(T) = \{(0,0)^t \in \mathbb{R}^2 : T((x,y)^t) = (0,0)^t\}$:
$T((x,y)^t) = (x,-y)^t \Rightarrow (x,-y)^t = (0,0)^t \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
$\mathcal{N}(T) = \{0,0\}, dim(\mathcal{N}(T)) = 0$

Sabemos que $dim(V) = dim(img(T)) + dim(\mathcal{N}(T)) \Rightarrow 2 = dim(img(T)) + 0 \Rightarrow dim(img(T)) = 2$

$img(T) = \{(a,b)^t \in \mathbb{R}^2 / T((x,y)^t) = (a,b)^t\}$

$T((x,y)^t) = (x,-y)^t \Rightarrow (x,-y)^t = (a,b)^t \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = -b \end{cases}$
Luego, dado $(a,b)^t \in \mathbb{R}^2, \exists (x,y) = (a,-b) \in \mathbb{R}^2 / T(x,y) = (a,b)$
$img(T) = \mathbb{R}^2, dim(img(T)) = 2$

d. $T((x,y)^t) = (x,0)^t$
Cerrado bajo la suma:
Sea $u, v \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{rcl} T(u+v) & = & T((x,y)^t + (x',y')^t) = T((x+x', y+y')^t) = (x+x', 0)^t \\ T(u)+T(v) & = & T((x,y)^t) + T((x',y')^t = (x,0)^t + (x',0) = (x+x',0)^t \end{array}$$

Cerrado bajo el producto:
Sea $u \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} T(\alpha u) & = & T(\alpha(x,y)^t) = T((\alpha x, \alpha y)^t) = (\alpha x, 0)^t \\ \alpha T(u) & = & \alpha T((x,y)^t) = \alpha(x,0)^t = (\alpha x, 0)^t \end{array}$$

Es una transformación lineal.

$\mathcal{N}(T) = \{(0,0)^t \in \mathbb{R}^2 : T((x,y)^t) = (0,0)^t\}$
$T((x,y)^t) = (x,0)^t = (0,0)^t \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$
Luego $dim(\mathcal{N}(T)) = 0$
$dim(V) = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(img(T))$

$img(T) = \{(a,b)^t \in \mathbb{R}^2 : T((x,y)^t) = (a,b)^t\}$

$T((x,y)^t) = (x,0)^t = (a,b)^t \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ b = 0 \end{cases}$
$img(T) \neq \mathbb{R}^2, dim(img(T)) = 1$

3.0.2 Sea $V = \mathbb{R}^n$, fijamos la base canónica $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Para cada $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hallar A_i tal que $A_i x = T_i(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, i = 1, ..., 4$.

$e_1 = (1,0,0,...,0), e_2 = (0,1,0,...,0), ..., e_n = (0,0,...,0)$

a. $A_1 x = T_1(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$
$T_1(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

b. $T_2(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

3.0.3 Consideramos la base canónica de $V = \mathbb{R}^2$ dada por $B = \{e_1, e_2\}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que aplica los vectores e_1 y e_2 como sigue:

$$T(e_1) = e_1 + e_2, \qquad T(e_2) = 2 \cdot e_1 - e_2$$

Obtener

a. $T(3 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2)$ y $T^2(3 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2)$.

$T(3\cdot e_1 - 4\cdot e_2) \underbrace{=}_{T(u+v)=Tu+Tv} T(3\cdot e_1) + T(-4\cdot e_2) \underbrace{=}_{T(au)=aTu} 3\cdot T(e_1) + (-4)\cdot T(e_2) \underbrace{=}_{def.T} 3\cdot(e_1+e_2) - 4\cdot(2\cdot e_1 - e_2) =$
$3 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 - 8e_1 + 4e_2 = 7e_2 - 5e_1 = 7 \cdot (0,1) - 5 \cdot (1,0) = (0,7) - (5,0) = (-5,7)$

$T^2(3\cdot e_1 - 4\cdot e_2) \underbrace{=}_{def.T^2} T(T(3\cdot e_1 - 4\cdot e_2)) \underbrace{=}_{Clausura} T(T(3\cdot e_1) + T(-4\cdot e_2)) \underbrace{=}_{T(a.u)=aTu} T(3\cdot T(e_1) - 4T(e_2)) = T(7e_2 -$
$5e_1) = T(7e_2) + T(-5e_1) = 7\cdot T(e_2) + (-5)\cdot T(e_1) = 7(2\cdot e_1 - e_2) - 5\cdot(e_1 + e_2) = 14\cdot e_1 - 7e_2 - 5\cdot e_1 - 5\cdot e_2 = 9\cdot e_1 - 12\cdot e_2$

b. Las matrices asociadas a T y T^2 en la base B.

Lo que piden son las representaciones matriciales de las transformaciones lineales T y T^2.

Para esto hay que recordar, ¿qué significa la representación matricial de una transformación lineal $T : V \to W$ respecto a una base ordenada $(e_1, e_2, ..., e_n)$ para V y $(w_1, w_2, ..., w_n)$ para W?
Es una matriz tal que su columna i-ésima, son las componentes de $T(e_i)$ respecto a la base ordenada $(w_1, w_2, ..., w_m)$, $i = 1, 2, ..., n$, en este caso $V = W = \mathbb{R}^2$ y se está tomando la misma base B.

Teniendo $T(e_1) = e_1 + e_2$ y $T(e_2) = 2e_1 - e_2$

Se arma la matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Y para $T^2 = T \circ T$, se tiene en cuenta que la compuesta es también lineal y la matriz de la compuesta, es el producto de las matrices de ambas transformaciones $m(T^2) = m(T)m(T)$

Entonces calcularemos: $T(T(e_1)) = T(e_1 + e_2)$ y $T(T(e_2)) = T(2e_1 - e_2)$
$T(T(e_1)) = T(e_1 + e_2) = T(e_1) + T(e_2) = (e_1 + e_2) + (2e_1 - e_2) = 3e_1$
$T(T(e_2)) = T(2e_1 - e_2) = T(2e_1) + T(-e_2) = 2T(e_1) - T(e_2) = 2(e_1 + e_2) - (2e_1 - e_2) = \cancel{2e_1} + 2e_2 - \cancel{2e_1} + e_2 = 3e_2$
Teniendo $T^2(e_1) = 3e_1$ y $T^2(e_2) = 3e_2$

Se arma la matriz: $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Tenemos que $m(T)m(T) = m(T^2)$

c. $T(v), \forall v \in V$.

Sea $v \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} v = xe_1 + ye_2 \\ [v]_B = (x, y) \end{cases}$

$T(v) = T(xe_1 + ye_2) = T(xe_1) + T(ye_2) = xT(e_1) + yT(e_2) = x(e_1 + e_2) + y(2e_1 - e_2) =$
$xe_1 + xe_2 + 2ye_1 - ye_2 = (x + 2y)e_1 + (x - y)e_2$.

Luego $[T(v)]_B = \begin{cases} x + 2y \\ x - y \end{cases}$

3.0.4 Sean $T_{1,2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T_1((x,y,z)^t) = (x,y,0)^t$ y $T_2((x,y,z)^t) = (x,y,y)^t$. Hallar $T_1 \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1$.

$T_1 \circ T_2((x,y,z)^t) = T_1[T_2(x,y,z)^t] = T_1[(x,y,y)^t] = (x,y,0)^t$

$T_2 \circ T_1((x,y,z)^t) = T_2[T_1(x,y,z)^t] = T_2[(x,y,0)^t] = (x,y,y)^t$.

Analizar si son epimorfismos, monomorfismos, isomorfismos o ninguna de ellas.

Una transformación lineal T es **inyectiva** si y sólo si $\mathcal{N} = \{0\}$
$\mathcal{N}(T_1 \circ T_2) = \{(0,0,0) \in \mathbb{R}^3 : (T_1 \circ T_2)((x,y,z)^t) = (0,0,0)^t\}$

$(T_1 \circ T_2)((x,y,z)^t) = T_1[T_2(x,y,z)^t] = T_1[(x,y,y)^t] = (x,y,0)^t \Rightarrow (x,y,0)^t = (0,0,0)^t \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Luego $\mathcal{N}(T) = \{0,0,0\}, dim(\mathcal{N}(T)) = 0$
Por lo tanto $(T_1 \circ T_2)$ es inyectiva.

Analizamos si $T_1 \circ T_2$ es **sobreyectiva**:
$img(T_1 \circ T_2) = \{(a,b,c)^t \in \mathbb{R}^3 : (T_1 \circ T_2)((x,y,z)^t) = (a,b,c)^t, (x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3\}$

$(T_1 \circ T_2)((x,y,z)^t) = (x,y,0)^t \Rightarrow (x,y,0)^t = (a,b,c) \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \\ c = 0 \end{cases}$

$img(T_1 \circ T_2) = \mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^3, dim(img(T_1 \circ T_2)) = 2$
Luego no es epimorfo.

¿$T_1 \circ T_2$ es **isomorfo**?, no ya que no es biyectiva.

$T_2 \circ T_1$ es **inyectiva** si $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1) = \{0\}$
$\mathcal{N}(T_2 \circ T_2) = \{(0,0,0)^t \in \mathbb{R}^3 : (x,y,y)^t = (0,0,0)^t\}$

$(x,y,y)^t = (0,0,0)^t \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
Luego $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1) = \{0,0,0\}, dim(\mathcal{N}(T_2 \circ T_1)) = 0$

Analizamos si $T_2 \circ T_1$ es **sobreyectiva**:
$img(T_2 \circ T_1) = \{(a,b,c)^t \in \mathbb{R}^3 : T_2 \circ T_1((x,y,z)^t) = (a,b,c)^t\}$

$(T_2 \circ T_1)((x,y,z)^t) = (x,y,y)^t = (a,b,c)^t \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \\ y = c \end{cases}$
Pero no te pueden dar dos valores distintos la y, o sea que para que esto valga deberían ser b y c iguales

Luego $img(T_2 \circ T_1) = \mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^3, dim(img(T_2 \circ T_1)) = 2$.

Analizamos si $T_2 \circ T_1$ es **biyectiva**:
No, ya que para que sea biyectiva se tiene que cumplir que sea sobreinyectiva e inyectiva al mismo tiempo pero en este caso no se da la sobreyectividad por lo tanto no vale.

3.0.5 Definimos $\mathbb{R}_n[x] = \{$p : p polinomio a coeficientes reales grad(p) $\leq n, x \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$. Sea

$T : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}_3[x]$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to T\Big(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Big) = 2dx^3 + (a+b)x^2 + (a-c)x + 2(c+d).$$

a. Probar que T es lineal.
Cerrado bajo la suma:
Sea $u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$
$T\Big(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\Big) = T\Big(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Big) + T\Big(\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\Big) = 2dx^3 + (a+b)x^2 + (a-c)x + 2(c+d) + 2d'x^3 + (a'+b')x^2 + (a'-c')x + 2(c'+d') = (2d+2d')x^3 + (a+b+a'+b')x^2 + (a-c+a'-c')x + 2(c+d) + 2(c'+d') = (2d+2d')x^3 + (a+b+a'+b')x^2 + (a-c+a'-c')x + 2(c+d+c'+d') \in \mathbb{R}_3[x]$

Cerrado bajo el producto:
Sea $u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$
$T\Big(\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Big) = T\Big(\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}\Big) = 2(\alpha d)x^3 + (\alpha a + \alpha b)x^2 + (\alpha a - \alpha c)x + 2(\alpha c + \alpha d) = \alpha(2dx^3 + (a+b)x^2 + (a-c)x + 2(c+d)) = \alpha T(u)$

$0 \in R_n[x]$

b. Hallar una base para $nul(T)$ y una para $img(T)$
$\mathcal{N}(T) = \Big\{\overline{0} \in \mathbb{R}_3[x] : T\Big(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Big) = \overline{0}\Big\} =$
$T\Big(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Big) = 2dx^3 + (a+b)x^2 + (a-c)x + 2(c+d)$

$$\Rightarrow 2dx^3 + (a+b)x^2 + (a-c)x + 2(c+d) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \Rightarrow \begin{cases} 2d = 0 \\ a+b = 0 \\ a-c = 0 \\ 2c+2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = -b \\ a = c \\ c = -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$img(T) = \Big\{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \in \mathbb{R}_3[x] : 2dx^3 + (a+b)x^2 + (a-c)x + 2(c+d) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta\Big\}$

$$\begin{cases} 2d = \alpha \\ a+b = \beta \\ a-c = \gamma \\ 2c+2d = \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \dfrac{\alpha}{2} \\ a-b = \beta \\ a = \gamma + c \\ c = \dfrac{\delta}{2} - d \end{cases}$$

c. Determinar si T es un isomorfismo.
Es isomorfo ya que es inyectiva y sobre.

3.0.6 Sea $T_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : T_w(z) = z + w\overline{z}$, donde $w = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$.

a. Considerar $w = 1 + i$ y calcular $T_w(2+3i)$
$T_w(2+3i) = T_w(2) + T_w(3i) = 2 + (1+i) \cdot 0i + 3 \cdot T_w(i) = 2 + 3 \cdot (i + (1+i) \cdot (-i)) = 2 + 3 \cdot (i - i - i^2)$
$= 2 + 3 \cdot (i - i + 1) = 2 + 3(1) = 2 + 3 = 5$

b. Comprobar que T_w es una TL entre espacios vectoriales.

c. Si $B = \{1, i\}$ es base de $\mathbb{C}$, hallar la matriz de T_w en dicha base.

Sea $B = \{1, i\}$ base de $\mathbb{C}$, hallar $[T_w]_B$
Cómo T_w es una TL $\Rightarrow \exists A : [T_n(z)]_B = A[z]_B$
Si recordamos de los ejercicios anteriores teníamos que la representación matricial de una TL es una matriz tal que su columna i-ésima son las componentes $T(e_i)$ respecto a la base ordenada
Obs: $\overline{z} = a - ib \Leftrightarrow z = a + ib$
Entonces tenemos que $A = \begin{bmatrix} | & | \\ [T_w(1)]_B & [T_w(i)]_B \\ | & | \end{bmatrix}$
$T_w(1) = 1 + (a + ib) \cdot 1 = 1 + a + ib \Rightarrow [T_w(1)]_B = \begin{bmatrix} 1 + a \\ b \end{bmatrix}$
$T_w(i) = i + (a + ib)\overline{i} = i - ia - i^2 b = i - ia + b = (1 - a)i + b \Rightarrow [T_w(i)]_B = \begin{bmatrix} b \\ 1 - a \end{bmatrix}$
Luego $A = \begin{bmatrix} 1 + a & b \\ b & 1 - a \end{bmatrix}$

d. Probar que T_w es isomorfo si y sólo si $a^2 + b^2 \neq 1$
T_w es isomorfo si es biyectiva.
Supongamos que $a^2 + b^2 = 1$ entonces se sigue cumpliendo la inyectividad probada anteriormente.
Ahora vamos a probar si T_w es sobreyectiva.
$img(T_w) = \{a + ib \in \mathbb{C} : T_w(z) = a + ib\}$
$T_w(z) = z + w\overline{z} = a + ib \Rightarrow \begin{cases} z = a \\ w\overline{z} = b \end{cases}$

3.0.7 Sea $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ tal que $T(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) = a_0 + a_1(x + 1) + ... + a_n(x + 1)^n$. Probar que T es isomorfismo.

Tenemos que probar que T es inyectiva y sobreyectiva a la vez entonces lo que tenemos que hacer es primero verificar si
$\mathcal{N}(T) = \{0 + 0x + ... + 0x^n \in \mathbb{R}_n[x] : T(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) = 0\}$
$T(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) = a_0 + a_1(x + 1) + ... + a_n(x + 1)^n \Rightarrow a_0 + a_1(x + 1) + ... + a_n(x + 1)^n = 0 + 0x + ... + 0x^n$
$\Rightarrow a_i = 0i$
Luego $\mathcal{N}(T) = \{a_i = 0 : a_i \in \mathbb{R}\}$, luego T es inyectiva.

Ahora nos quedaría probar si es sobreyectiva:
$img(T) = \{b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n \in \mathbb{R}_n[x] : T(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n\}$
$T(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) = a_0 + a_1(x + 1) + ... + a_n(x + 1)^n \Rightarrow a_0 + a_1(x + 1) + ... + a_n(x + 1)^n = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n$
$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1(x + 1) = b_1 x \\ a_n(x + 1)^n = b_n x^n \end{cases}$

3.0.8 Sea $T : \mathbb{R}_n[x] \Rightarrow \mathbb{R}_n[x]$ tal que $T(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) = a_0 + a_1(x + 1) + ... + a_n(x + 1)^n$. Probar que T es isomorfo.

Para ver que es isomorfo tenemos que ver que sea inyectiva y sobreyectiva para esto vamos a definir una función f de la siguiente forma:

$f : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$
$p(x) \to f(p(x)) = p(x - 1)$

Primero ver que f es lineal (COMPLETAR).

$T \circ f = id_{R_n[x]}$
$T(f(p(x)) = T(p(x-1)) = p(x-1+1) = p(x) = id(p(x))$

$f \circ T = id_{\mathbb{R}_n[x]}$

Luego $T^{-1} = f$, T es isomorfo.

3.0.9 Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (x+y, x+z, \alpha(v))^t$ donde $v = (x, y, z)^t$ y $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Determinar, si es posible, α de modo que T resulte lineal.

Tomando α:
$\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$u \to \alpha((x, y, z)^t) =$

T es lineal si es cerrado bajo la suma y bajo el producto.
Es decir $T(u + v) = T(u) + T(v)$ y $T(\alpha u) = \alpha T(u)$
Cerrado bajo la suma:
Sea $u = (x, y, z)^t, v = (a, b, c)^t \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow T(u + v) = T.u + T.v$?
$T(u+v) = T((x, y, z)^t + (a, b, c)^t)) = T((x+a, y+b, z+c)^t) = T((x+a+y+b, x+a+z+c, \alpha(u+v)^t),$
esto debería ser igual a:
$T(u) + T(v) = (x+y, x+z, \alpha(u)) + (a+b, a+c, \alpha(v))^t = (x+y+a+b, x+z+a+c, \alpha(u)+\alpha(v))^t$

Cerrado bajo el producto:
Debería darse que $T(\beta u) = \beta T(u)$

$T(\beta u) = T(\beta(x, y, z)^t) = T((\beta x, \beta y, \beta z)^t) = T((\beta x + \beta y, \alpha x + \alpha z, \alpha(\beta u))^t)$
$\beta T(u) = \beta T((x, y, z)^t) = \beta(x+y, x+z, \alpha(u)^t) = (\beta(x+y), \beta(x+z), \beta(\alpha(u))^t$

La conclusión de todo esto es que de la primera ecuación se tiene que $\alpha(u) + \alpha(v) = \alpha(u+v)$. Y de la segunda obtenemos que $\beta(\alpha(u)^t) = \alpha(\beta u)^t$

Entonces α debe ser una transformación lineal.

3.0.10 Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal tal que

$T((0,0,1)^t) = (2,3,5)^t, \qquad T((0,1,1)^t) = (1,0,0)^t, \qquad T((1,1,1)^t) = (0,1,-1)^t$

a. Probar que con esta información es posible obtener $T(v), \forall v \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{Sea } v \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \begin{cases} v = x \cdot ((1,1,1)^t - (0,1,1)^t) + y \cdot ((0,1,1)^t - (0,0,1)^t) + z \cdot (0,0,1)^t \\ [v]_B = (x, y, z) \end{cases}$$

$T(v) = T((x \cdot (1,1,1)^t - (0,1,1)^t) + y \cdot ((0,1,1)^t - (0,0,1)^t) + z \cdot (0,0,1)^t)$
$T(x \cdot (1,1,1)^t - (0,1,1)^t) + T(y \cdot ((0,1,1)^t - (0,0,1)^t)) + T(z \cdot (0,0,1)^t) =$
$x \cdot T((1,1,1)^t - (0,1,1)^t) + y \cdot T((0,1,1)^t - (0,0,1)^t) + z \cdot T(0,0,1)^t =$
$x \cdot (T(1,1,1)^t - T(0,1,1)^t) + y \cdot (T(0,1,1)^t - T(0,0,1)^t) + z \cdot T(0,0,1)^t =$
$x \cdot ((0,1,-1)^t - (1,0,0)^t) + y \cdot ((1,0,0)^t - (2,3,5)^t) + z \cdot (2,3,5)^t =$
$x \cdot (-1,1,-1)^t + y \cdot (-1,-3,-5)^t + z \cdot (2,3,5)^t$

$(-1,1,-1)^t = (0,0,-1)^t + (0,0,-3)$

En vez de complicarse tanto también podríamos hacerlo de la siguiente manera:
En efecto puesto que dichos 3 vectores son linealmente independientes resulta que generan todo el espacio, es decir, que para todo v resulta $v = \alpha(0,0,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,1,1)$. Además como T es lineal $T(v) = \alpha(2,3,5) + \beta(1,0,0) + \gamma(0,1,-1)$.

$T(v) = x \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x-y+2z \\ x-3y+3z \\ -x-5y+5z \end{bmatrix}$

Luego se expresa como combinación lineal de la base canónica B:

$T(v) = (-x-y+2z) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (x-3y+3z) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-x-5y+5z) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

b. Observemos que $e_1 = (1,1,1)^t - (0,1,1)^t, e_2 = (0,1,1)^t - (0,0,1)^t$ y $e_3 = (0,0,1)^t$, luego $T(e_1) = T(1,1,1)^t - T(0,1,1)^t = (-1,1,-1)^t$ $T(e_2) = (-1,-3,-5)^t$ y $T(e_3) = (2,3,5)^t$. Finalmente $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$.

c. Utilizando (9b), obtener $dim(nul(T))$ y $rang(T)$.

Escribiremos la matriz de la transformación o la matriz del sistema de ecuaciones de la TL

$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{N}(T) = \{0\}$

Esto nos da cero ya que nos quedaría $-2z = 0$, $5y = 0$ y por último $-x = 0$.

d. Determinar si T es inversible.

Sí, ya que $\mathcal{N}(T) = \{0\}$

La matriz asociada a esta transformación es: $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ como $|A| \neq 0$, resulta A invertible por lo tanto T es invertible también.

3.0.11 Determinar, si existe, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que verifique: $T((1,-1,1)^t) = (1,0)^t$ y $T((1,1,1)^t) = (0,1)^t$

Observaciones:

- Una aplicación lineal queda inequívocamente determinada si se conocen las imágenes de los vectores de una base; es decir dada una base y sus imágenes siempre existe una única aplicación lineal con estas características.
- Si se conoce la imagen de ciertos vectores linealmente independientes (pero que no llegan a formar una base) entonces existen infinitas transformaciones lineales en estas condiciones; para construir una basta, por ejemplo, **completar los vectores independientes hasta una base y elegir las imágenes de los vectores añadidos arbitrariamente**. Luego aplicar 1.
- Si se conoce la imagen de algunos vectores pero estos tienen relaciones de dependencia, sólo existe alguna aplicación lineal con esas características si las imágenes propuestas cumplen exactamente las mismas relaciones de dependencia que los vectores originales. Una forma de comprobar esto (siempre que conozcamos las coordenadas de todos los vectores implicados en alguna base, por ejemplo, las canónicas) es colocar los vectores originales como filas de una matriz; luego los vectores originales y sus imágenes como filas de otra matriz (ampliada). Si los rangos de ambas matrices coinciden, entonces si existe la aplicación lineal propuesta.

Yo tengo estos dos vectores $(1,-1,1)$ y $(1,1,1)$ lo que pasa es que estos vectores no forman una base entonces para quede definida una única transformación lineal lo que debería hacer es buscar un vector que sea linealmente independiente con $(1,1,1)$ y $(1,-1,1)$ logrando así crear una base para después elegir una imagen cualquiera a ese vector linealmente independiente añadido logrando así crear una base para después elegir

Entonces, ¿cómo buscamos un vector linealmentei independiente al resto?

$\alpha(1,-1,1) + \beta(1,1,1) + \gamma(0,5,1) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta \\ -\alpha + \beta + 5\gamma = 0 \Rightarrow 2\beta + 5\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$

Entonces si armamos la matriz ampliada y hacemos reducción por filas tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 1 & 5 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma = \beta = \alpha = 0$$

Luego de todo esto resulta que $\{(0,5,1),(1,-1,1),(1,1,1)\}$ es un conjunto linealmente independiente.
Procederemos entonces a buscar una imagen para el mismo.
$T((0,5,1)^t) = (4,1)$. Ahora todo $v \in \mathbb{R}^3$ se debería poder escribir como $v = \alpha(1,-1,1) + \beta(1,1,1) + \gamma(0,5,1)$

Entonces tenemos $B = \{(1,-1,1),(1,1,1),(0,5,1)\}$ base ordenada de $\mathbb{R}^3$ luego la TL queda inequívocamente determinada ya que se conocen los vectores de la base y sus imágenes.
La matriz asociada a la transformación es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3.0.12 Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Probar que para $T_{1,2} \in \mathcal{L}(V,W)$

- $A = \{v \in V : T_1(v) = T_2(v)\}$ es un subespacio de V.
  Para probar que es un subespacio verificaremos los siguientes axiomas:

  Cerrado bajo la suma:
  Sea $v_1, v_2 \in A \Rightarrow v_1 + v_2 \in A$?
  $T_1(v_1+v_2) = T_1(v_1) + T_1(v_2) = T_2(v_1) + T_2(v_2) = T_2(v_1+v_2)$
  Cerrado bajo el producto:
  Sea $\alpha, v_1 \in A \Rightarrow \alpha v_1 \in A$?
  $T_1(\alpha v_1) = \alpha T_1(v_1) = \alpha T_2(v_1) = T_2(\alpha v_1) \in A$

- Si $V = \langle U \rangle$ y $T_1(u) = T_2(u), \forall u \in U$ entonces $T_1(v) = T_2(v), \forall v \in V$

  Sabemos que cada vector $v \in V$ se puede expresar como $v = a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n$ y también sabemos que existe una transformación lineal $T_1(u) = T_2(u), \forall u \in U$.
  Entonces $T_1(v) = T_1(a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n) = T_1(a_1u_1) + T_1(a_2u_2) + ... + T_1(a_nu_n) \Rightarrow$
  $a_1T_1(u_1) + a_2T_1(u_2) + ... + a_nT_1(u_n) = a_1T_2(u_1) + a_2T_2(u_2) + ... + a_nT_2(u_n) = T_2(a_1u_1) + ... + T_2(a_nu_n) =$
  $T_2(a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n) = T_2(v)$

3.0.13 Sean V y W espacios vectorailes de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Probar que:

i. Si T inyectiva, entonces T transforma conjuntos l.i. de V en conjuntos l.i. de W.

ii. Si T sobreyectiva, entonces T transforma conjuntos generadores de V en conjuntos generadores de W.

iii. T isomorfismo si y sólo si T transforma bases de V en bases de W.

3.0.14 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y supongamos que existe una aplicación lineal $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que tanto $nul(T)$ como $img(T)$ son subespacios de dimensión finita. Probar que V también debe ser de dimensión finita.

Trivial utilizando el teo. de $dim(V) = \underbrace{dim(nul(T))}_{n} + \underbrace{dim(img(T))}_{m}$?

Luego $dim(V) = n + m$

3.0.15 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Probar que:

- $T \circ S$ es inversible si y sólo si S y T son inversibles.
  $(T \circ S)^{-1} = T(S(x))^{-1} =$
  $T^{-1} \circ S^{-1} = (T^{-1} \circ S^{-1}) =$

- Para I la función identidad en V, $T \circ S = I$ si y sólo si $S \circ T = I$.

3.0.16 Sea V el espacio vectorial de los números complejos y $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales. Con las operaciones usuales, V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Describir explícitamente un isomorfismo de este espacio con $\mathbb{R}^2$

Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ definida como $T(z) = (Re(z), Im(z))$, veamos que es biyectiva:

- Inyectiva: $T(z_1) = T(z_2) \iff (Re(z_1), Im(z_1)) = (Re(z_2), Im(z_2)) \iff Re(z_1) = Re(z_2) \wedge Im(z_1) = Im(z_2) \iff z_1 = z_2$.
- Sobreyectiva: Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, luego para $a + b_i \in \mathbb{C}$ resulta $T(a + bi) = (a, b)$.

Veamos que es lineal: ...

4 Vamos completando lo anterior y repasando de nuevo esta práctica

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Probar que:

i. Si T inyectiva, entonces T transforma conjuntos l.i. de V en conjuntos l.i. de W.

Supongamos que T es inyectiva y sea $S \subset V$ un conjunto linealmente independiente, definimos $S' = \{T(s) : s \in s\}$ y supongamos que existe unos vectores y escalares tal que $\alpha_1 T_1(s) + ... + \alpha_n T_n(s) = 0$, entonces como T es lineal tenemos que:

$$\alpha_1 T(s_1) + ... + \alpha_n T(s_n) = 0 \Rightarrow T(\alpha_1 s_1) + ... + T(\alpha_n s_n) = 0 \Rightarrow T(\alpha_1 s_1 + ... + \alpha_n s_n) = 0$$

Entonces como T es inyectiva se sigue que $\alpha_1 s_1 + ... + \alpha_n s_n = 0$ y luego como S es linealmente independiente tenemos que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Luego S' es linealmente independiente.

ii. Si T es sobreyectiva, entonces T transforma conjuntos generadores de V en conjuntos gneradores de W.

Sea $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V / \langle\{v_1, ..., v_n\}\rangle = V$, nos preguntamos si $\langle\{T(v_1), ..., T(v_n)\}\rangle = W$:

- $\subseteq$: $x \in \langle\{T(v_1), ..., T(v_n)\}\rangle \Rightarrow x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i) \Rightarrow x \in W$
- $\supset$: $x \in W \Rightarrow \exists v \in V / T(v) = x \Rightarrow \exists v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i / T(v) = x \Rightarrow$
  $T\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\Big) = x \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i T(v_i) = x \Rightarrow x \in \langle\{T(v_1), ..., T(v_n)\}\rangle = W$.

iii. T es isomorfismo si y sólo si T transforma bases de V en bases de W.
Obs.: Decimos que una transformación lineal es un isomorfismo cuando es biyectiva.
$\Rightarrow$: Supongamos que T es un isomorfismo, entonces V y W tienen la misma dimensión. Esto es suficiente para demostrar que la imagen de la base de V es linealmente independiente.
$\Leftarrow$: Si T transforma bases de V en bases de W, entonces sus dimensiones son iguales, luego T debería ser un isomorfismo.

4.0.1 Probar que V es isomorfo a W si y sólo si $dimV = dimW$

Si $T : V \to W$ es una transformación lineal y $\langle\{v_1, ..., v_n\}\rangle = V$ entonces $\langle\{T(v_1), ..., T(v_n)\}\rangle = W$. Observemos que, si $v \in V$ entonces $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$ entonces $T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n)$.

$\Rightarrow$: Si $T : V \to W$ es una transformacion lineal inyectiva y $\{v_1, ..., v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente entonces $\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ es un conjunto linealmente independiente de W. Por lo tanto, si

$$0 = \alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_n T(v_n) \Rightarrow T(0) = T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n)$$

y por la inyectividad tenemos que $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$ entonces $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$ ya que $\{v_1, .., v_n\}$ es un conjunto l.i.
Ahora, sea $T : V \to W$ una transformación lineal biyectiva. Si $\{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V, que es a la vez un conjunto generador de V y un conjunto linealmente independiente. Entonces $\langle\{T(v_1), ..., T(v_n)\}\rangle = W$ pues T es sobreyectiva y es linealmente independiente ya que T es inyectiva. Luego $dim(V) = dim(W)$.

$\Leftarrow$: Repaso: Una aplicación lineal queda inequívocamente determinada si se conocen las imágenes de los vectores de una base; es decir dada un base y sus imágenes siempre existe una única aplicación lineal con estas características.

Asignando las imágenes para los vectores de la base de V se define inequívocamente una transformación lineal. Entonces, si $\{v_1, ..., v_n\}$ y $\{w_1, ..., w_n\}$ son bases de V y W, tomamos la única transformación lineal $T : V \to W$ tal que

$$T(v_k) = w_k \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Entonces T es sobreyectiva, porque el conjunto generador para la imagen de T es una base de W. Luego aplicando $dim(W) + dim(\mathcal{N}(T)) = dim(V)$, tenemos que $dim(\mathcal{N}(T)) = 0$ ya que por hipótesis la $dim(V) = dim(W)$, luego T es inyectiva.

4.0.2 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y supongamos que existe una aplicación lineal $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que tanto $\mathcal{N}(T)$ como $img(T)$ son subespacios de dimensión finita. Probar que V también debe ser de dimensión finita.

No hay muchas formas de dmostrar que un espacio vectorial tiene dimensión finita. Una es demostrar que existe un conjunto generador finito o probar que el espacio es (isomorfo a) un subespacio que es de dimensión finita (ya que si es isomorfo es porque poseen la misma dimensión).

En este caso, lo que haremos será buscar un conjunto de generador finito.

Sea $\mathcal{B}_0 = \{r_1, ..., r_n\}$ una base de la imagen de la transformación lineal T (o un conjunto generador si preferís), no habría problema de suponer esto ya que sabemos que la dimensión de la imagen de T es finita. Ahora consideraremos $\mathcal{B}_1 = \{v_1, ..., v_n\}$ tal que $Tv_i = r_i$.

Ahora, para cada $v \in V$, sabemos que $Tv = \alpha_1 r_1 + ... + \alpha_n r_n$, sea $v' = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, entonces $Tv = Tv'$, entonces $v - v'$ pertenece al espacio nulo. Si $w_1, ..., w_m$ es un conjunto generador para el espacio nulo, entonces tenemos que $v - v' = \beta_1 w_1 + ... + \beta_m w_m$, luego

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n + \beta_1 w_1 + ... + \beta_m w_m$$

y, como v es un vector cualquiera, concluímos que $\{v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m\}$ es un conjunto generador finito de V.

4.0.3 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, y $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Probar que:

i. $T \circ S$ es inversible si y sólo si S y T son inversibles.

Supongamos que TS es inversible. Sea $S(v) = 0$. $TS(v) = T(S(v)) = T(0) = 0$, esto implica que $v = 0$, entonces S es inyectiva, luego S es inversible.

($\Rightarrow$). Supongamos que ST es invertible y $S(v_1) = S(v_2)$ donde v_1 y v_2 son vectores cualquiera de V, entonces se sigue de que $TS(v_1) = TS(v_2)$ pero como TS es invertible entonces por un teorema sabemos que es inyectiva luego $v_1 = v_2$ (inyectividad: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$) lo que implica que S es inyectiva y por el teo. inversible.

($\Leftarrow$). Supongamos que $v \in V$, como T es sobreyectiva, $\exists b \in V$ tal que $v = Tb$. Como $b \in V$, entonces por sobreyectividad de S, $\exists a \in V$ tal que $b = Sa$. Por lo tanto vemos que para cada $v \in V$ existe $a \in V$ tal que $v = Tb = TSa$.

ii. Para I la función identidad en $V, T \circ S = I$ si y sólo si $S \circ T = I$.

Si $T \circ S = I$ entonces $T \circ S$ es inversible, entonces S, T son invertibles. Por lo tanto $T = S^{-1}$ entonces $S \circ T = S \circ S^{-1} = I$. Igualmente, si $S \circ T = I$ entonces $S \circ T$ es invertible por lo que S y T son invertibles y $T = S^{-1}$.

4.0.4 Sea V el espacio vectorial de los números complejos y $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales. Con las operaciones usuales, V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Describir explícitamente un isomorfismo de este espacio con $\mathbb{R}^2$.

Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, definida como $T(z) = (Re(z), Im(z))$, veamos que es biyectiva:

- Inyectividad definición:
  $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

  Inyectividad: $T(z_1) = T(z_2) \Rightarrow (Re(z_1), Im(z_1)) = (Re(z_2), Im(z_2)) \Rightarrow Re(z_1) = R(z_2) \wedge Im(z_1) = Im(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$
  Sobreyectividad: Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow a + bi \in \mathbb{C} \Rightarrow T(a + bi) = (a, b)$

- Ahora probaremos que T es lineal.
  $T((a+bi)+(c+di)) = T(a+bi+c+di) = T(a+c+(b+d)i) = (a+c, b+d) = (a, b)+(c, d) = T(a+bi)+T(c+di)$
  $T(\alpha(a + bi)) = T(\alpha a + \alpha bi) = (\alpha a, \alpha b) = \alpha(a, b) = \alpha T(a + bi)$

4.0.5 Mostrar que $\mathbb{K}^{m\times n}$ es isomorfo a $\mathbb{K}^{mn}$.

Sea $T : \mathbb{K}^{m\times x} \to \mathbb{K}^{mn}$, $T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}\right) = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, ..., a_{mn})$

Ahora tenemos que verificar que es biyectiva a K^{mn}

- Verificamos que es **inyectiva**:
  $T(a) = T(b) \Rightarrow T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow$
  $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, ..., a_{mn}) = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}, b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n}, \dots, b_{m1}, ..., b_{mn}) \Rightarrow$
  $a_{11} = b_{11} \wedge \dots \wedge a_{1n} = b_{1n} \wedge \dots a_{2n} = b_{2n} \wedge \dots a_{m1} = b_{m1} \wedge \dots \wedge a_{mn} = b_{mn}$

  Verificamos ahora que es **sobreyectiva**:
  COMPLETAR.

- Ahora deberíamos verificar que T es lineal.
  COMPLETAR.

4.0.6 Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1)$$

i. Si $\mathcal{B}$ es la base ordenada estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}'$ es la base ordenada estándar para $\mathbb{R}^2$, determinar la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ii. Si $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(0, 1), (1, 0)\}$. ¿Cuál es la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$?

4.0.7 Sea T un operador lineal sobre $\mathbb{K}^n$ y sea A la matriz de T relativa a la base estándar de $\mathbb{K}^n$. Sea W el subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado por los vectores columnas de A. ¿Qué relación existe entre W y T?

Recordemos que $img(T) = \{Ax/x \in \mathbb{K}^n\}$. Veremos que $\mathcal{C}(A) = img(T)$:

- $(\subseteq)$: $v \in \mathcal{C}(A) \Rightarrow v = x_1A_1 + \cdots + x_nA_n = A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{K}^n} \in img(T)$.

- $(\supset)$: $v \in img(T) \Rightarrow v = Ax = A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{K}^n} = x_1A_1 + \cdots + x_nA_n \in \mathcal{C}(A)$

4.0.8 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo $\mathbb{K}$ y sean S y T operadores lineales sobre V. Probar que existen dos bases ordenadas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ en V tales que $[S]_\mathcal{B} = [T]_{\mathcal{B}'}$ si y sólo si existe un operador lineal inversible U sobre V tal que $T = \mathcal{U}\mathcal{S}\mathcal{U}^{-1}$

- $(\Rightarrow)$: Sean $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ las bases de la hipótesis. Recordemos que un operador lineal queda completamente definido por como actúa sobre los vectores de una base. Sea entonces $U : V \to V$ dado por $U(v_i) = w_i$. Como U lleva base en base, sabemos que es isomorfo, luego $U(v_i) = w_i \iff U^{-1}(w_i) = v_i$. Como por hipótesis $[S]_\mathcal{B} = [T]_{\mathcal{B}'}$ entonces la i-ésima columna de $S(S_i)$ ha de ser igual a la i-ésima columna de T (T_i) para todo i, es decir:

  $$S_i = [S(v_i)]_\mathcal{B} = [T(w_i)]_{\mathcal{B}'} = T_i = (x_1, \ldots, x_n)$$

  Tenemos $S(v_i) = \sum_{j=1}^n x_jv_j$ y $T(w_i) = \sum_{j=1}^n x_jw_j$, luego:

  a) $T(w_i) = T(U(v_i)) = \sum_{j=1}^n x_jw_j$.

  b) $US(v_i) = U\Big(\sum_{j=1}^n x_jv_j\Big) = \sum_{j=1}^n x_jU(v_j) = \sum_{j=1}^n x_jw_j$

  De lo anterior se sigue que $US(v_i) = TU(v_i)$ por lo tanto $US = TU \iff USU^{-1} = T$

- $(\Leftarrow)$: COMPLETAR.

4.0.9 En $\mathcal{R}^3$, sean $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2)$ y $v_3 = (-1, -1, 0)$.

i. Si f es un funcional lineal sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $f(v_1) = 1, f(v_2) = -1$ y $f(v_3) = 3$ y si $v = (a, b, c)$, hallar $f(v)$.

   Sea $f(a, b, c) = \alpha a + \beta b + \gamma c$, luego resulta $f(v_1) = \alpha + \gamma = 1$, $f(v_2) = \beta + 2\gamma = -1$ y $f(v_3) = -\alpha - \beta = 3$.
   Resolviendo el sistema: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ -1 & -1 & 0 & | & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 3 & | & 3 \end{bmatrix}$
   resulta $\gamma = 1, \beta = -3$ y $\alpha = 0$. Luego $f(v) = -3b + c$.

ii. Describir explícitamente un funcional lineal f sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $f(v_1) = f(v_2) = 0$ pero $f(v_3) \neq 0$.

   Sea $f(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$, luego $f(v_1) = \alpha + \gamma = 0$, $f(v_2) = \beta + 2\gamma = 0$ y $f(v_3) = -\alpha - \beta \neq 0$

   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ -1 & -1 & 0 & | & \omega \end{bmatrix}$$
   $$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = -\gamma \\ \beta + 2\gamma = 0 \Rightarrow \beta = -2\gamma \\ -\alpha - \beta \neq 0 \Rightarrow -\beta \neq \alpha \Rightarrow -2\alpha \neq \alpha \Rightarrow \alpha \neq 0 \end{cases}$$
   resulta $f(v) = -x - 2y + z$

iii. Sea f cualquier funcionar lineal tal que $f(v_1) = f(v_2) = 0$ pero $f(v_3) \neq 0$. Si $v = (2, 3, -1)$, muestre que $f(v) \neq 0$.

Notemos que $v = -v_1 - 3v_3$, luego $f(v) = \cancel{-f(v_1)} - 3f(v_3) \Rightarrow -3f(v_3) \neq 0$.

4.0.10 Sea $\mathcal{B} = \{(1,0,-1), (1,1,1), (2,2,0)\}$ una base de $\mathcal{C}^3$. Hallar la base dual de $\mathcal{B}$.

Observemos primero que $V = (\mathcal{C}^3, \mathcal{C}, +, .)$ y sea $v = (z_1, z_2, z_3) = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3$, luego $z_1 = \alpha + \beta + 2\gamma$, $z_2 = \beta + 2\gamma$ y $z_3 = -\alpha + \beta$.

- $f_1(v) = \alpha = z_1 - z_2$
- $f_2(v) = \beta = z_1 - z_2 + z_3$
- $f_3(v) = \gamma = \frac{1}{2}(-z_1 + 2z_2 - z_3)$

4.0.11 Sean $v_1 = \{(1,0,-1,2)\}$ y $v_2 = (2,3,1,1)$ y sea $W = \langle\{v_1, v_2\}\rangle$. ¿Qué funcionales lineales de la forma $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$ están en el anulador de W?.

Buscamos $f / f(1,0,-1,2) = f(2,3,1,1) = 0$, es decir:

$$c_1 - c_3 + 2c_4 = 0 = 2c_1 + 3c_2 + c_3 + c_4$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

luego $c = \alpha(-2,1,0,1) + \beta(1,-1,1,0)$, por lo tanto:

$$W^0 = \{f(x) = x \cdot c / c \in \langle\{(-2,1,0,1), (1,-1,1,0)\}\rangle$$

4.0.12 Sea $V = M_{2x2}(\mathbb{R})$ y sean

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea W el subespacio de V que consiste en todas las matrices A tales que $AB = 0$. Sea f un funcional lineal sobre V que está en el anulador de W. Supongamos que $f(I) = 0$ (I matriz identidad) y $f(C) = 3$. Hallar $f(B)$.

Observemos primero que $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 2a-b & -2a+b \\ 2c-d & -2c+d \end{bmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d : 2a = b \wedge 2c = d \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a \\ c & 2c \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\}$. Luego $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + 3I$

por lo tanto $f(B) = f(x) + 3f(I) = 0$.

4.0.13 Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita:

a. Probar que $(W_1 + W_2)^0 = {W_1}^0 \cap {W_2}^0$
b. Probar que $(W_1 \cap W_2)^0 = {W_1}^0 + {W_2}^0$

4.0.14 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y sea W un subespacio de V. Si f es un funcional lineal sobre W, pruebe que existe un funcional lineal g sobre V tal que $g(v) = f(v), \quad \forall v \in W$.

Sea B_V una base de V y B_W una base de W tales que $B_W \subseteq B_V$. Toda transformación lineal (en particular los funcionales lineales) queda determinada por como actúa sobre los vectores de la base, luego podemos definir a $g(v) = f(v)$ para cada vector B_W y $g(v) = 0$ para cada vector en $B_V - B_W$.

5 Actovectores y autovalores

5.0.1 i. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^2)$ definida por $T(u,v) = (v,u)$ para $u, v \in \mathbb{K}$. Calcular los autovalores y los autovectores asociados para T.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .B = A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$

$|B| = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \iff \lambda = 1 \vee \lambda = -1.$

- $\lambda = 1 : B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} .Bx = 0 \iff x \in \langle\{(1,1)\}\rangle.$
- $\lambda - 1 : B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .Bx = 0 \iff x \in \langle\{(1,-1)\}\rangle.$

5.0.2 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3, \mathbb{K}^2)$ definida por $T(u,v,w) = (2v, 0, 5w)$ para $u, v, w \in \mathbb{K}$. Calcular los autovalores y sus autovectores asociados para T.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} .B = A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$

$|B| = (2-\lambda)(-\lambda)(5-\lambda) = 0 \iff \lambda = 2 \vee \lambda = 0 \vee \lambda = 5.$

- $\lambda = 2 : B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad Bx = 0 \iff x \in \langle\{(1,0,0)\}\rangle$
- $\lambda = 0 : B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} .B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5. \end{bmatrix} \quad Bx = 0 \iff x \in \langle\{(0,1,0)\}\rangle$
- $\lambda = 5 : B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .Bx = 0 \iff x \in \langle\{(0,0,1)\}\rangle$

5.0.3 Para $n \in \mathbb{N}$ sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ definida por

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n, \ldots, x_1 + \cdots + x_n)$$

Calcular los autovalores y sus autovectores asociados para T.

5.0.4 Encontrar los autovalores y autovectores asociados para los operadores lineales sobre $\mathbb{K}^2$ dados por las siguientes matrices

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

$H = A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{bmatrix}. \quad |H| = (3-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \iff \lambda = 3 \vee \lambda = -1.$

- $\lambda = 3 : H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} .Hx = 0 \iff x \in \langle\{(1,2)\}\rangle.$
- $\lambda = -1 : H = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} .Hx = 0 \iff x \in \langle\{(0,1)\}\rangle.$

$B = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

$H = B - \lambda I = \begin{bmatrix} 10-\lambda & -9 \\ 4 & -2-\lambda \end{bmatrix}$. $|H| = (-20 - 10\lambda + 2\lambda + \lambda^2) + 36 = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 4$.

- $\lambda = 4 : H = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$. $Hx = 0 \Longleftrightarrow x \in \langle\{(3/2, 1)\}\rangle$.

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$H = C - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$. $|H| = (1 - \lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1$.

- $\lambda = 1 : H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $Hx = 0 \Longleftrightarrow x \in \langle\{(1, 0), (0, 1)\}\rangle$.

$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$H = D - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}$. $|H| = \lambda^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$.

- $\lambda = 0 : H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $Hx = 0 \Longleftrightarrow x \in \langle\{(1, 0), (0, 1)\}\rangle$

5.0.5 Encontrar el autoespacio correspodiente de cada autovalor

$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \lambda = 10$

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$. $Hx = 0 \Longleftrightarrow x \in \langle\{(\frac{-1}{3}, 1)\}\rangle$.

$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9, \lambda = 3 \end{bmatrix}$

$B - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. $Hx = 0 \Longleftrightarrow x \in \langle\{(-3, 0, 1), (-2, 1, 0)\}\rangle$.

5.0.6 Para cada matriz dada, encontrar los autovalores para el operador T sobre $\mathbb{K}^n$ sin realizar cálculos. Describir los autovectores $v \in \mathbb{K}^n$ asociados a cada autovalor λ analizando las soluciones de la ecuación mastricial $(A - \lambda I)v = 0$.

$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

$\lambda_1 = \frac{-1}{3}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \frac{1}{2}$. $v_1 = (x_1, x_2, 0, 0), v_2 = (0, 0, x_3, 0), v_3 = (0, 0, 0, x_4)$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \dfrac{1}{2}, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 2.$ $\quad v_1 = (x_1, 0, 0, 0), v_2 = (-6x_2, x_2, 0, 0), v_3 = (11x_3, -6x_3, x_3, 0), v_4 = (53x_4, \dfrac{28}{3}x_4, 2x_4, x_4)$

5.0.7 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$. Un espacio vectorial $\mathcal{U}$ se dice invariante bajo T si $T(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$. Supongamos que $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ son dos subespacios invariantes bajo T. Probar que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ también es invariante bajo T.

5.0.8 Sea V un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{K}, T \in \mathcal{L}(V)$ inversible y $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$. Probar que λ es autovalor de A si y sólo si λ^{-1} es autovalor de T^{-1}.

Sea $x \in V / T(x) = \lambda x \iff Ax = \lambda x \iff A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x \iff x = A^{-1}\lambda x \iff \lambda^{-1}x = A^{-1}x.$

5.0.9 Sea V un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{K}, A \in \mathbb{M}(\mathbb{K})$ matriz inversible y $\lambda \in \mathbb{K}$. Probar que λ es autovalor de A si y sólo si λ es autovalor de A^t.

Notemos que $(A - \lambda I)^t = A^t - \lambda I$ luego como $|X| = |X|^t$ resulta:

$$|A - \lambda I| = |(A - \lambda I)^t| = |A^t - \lambda I|$$

5.0.10 Sea V un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ con la propiedad de que todo $v \in V - \{0\}$ es un autovector asociado al mismo autovalor para T. Probar que T debe ser igual a un escalar por la identidad en V.

5.0.11 Considerar a una matriz $n \times n$ con la propiedad de que todas las sumas de sus filas son iguales a un mismo número β. Mostrar que β es un autovalor de A.

COMPLETAR

5.0.12 Considerar una matriz $n \times n$ con la propiedad de que todas las sumas de sus columnas son iguales a un mismo número β. Mostrar que β es un autovalor de A.

Trivial, por el ejercicio 5.0.9.

Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encontrar h tal que el autoespacio correspondiente a $\lambda = 5$ sea bidimensional.

5.0.13 sd