

Modélisation et simulation numérique de matériaux à changement de phase

Aina Rakotondrandisa¹

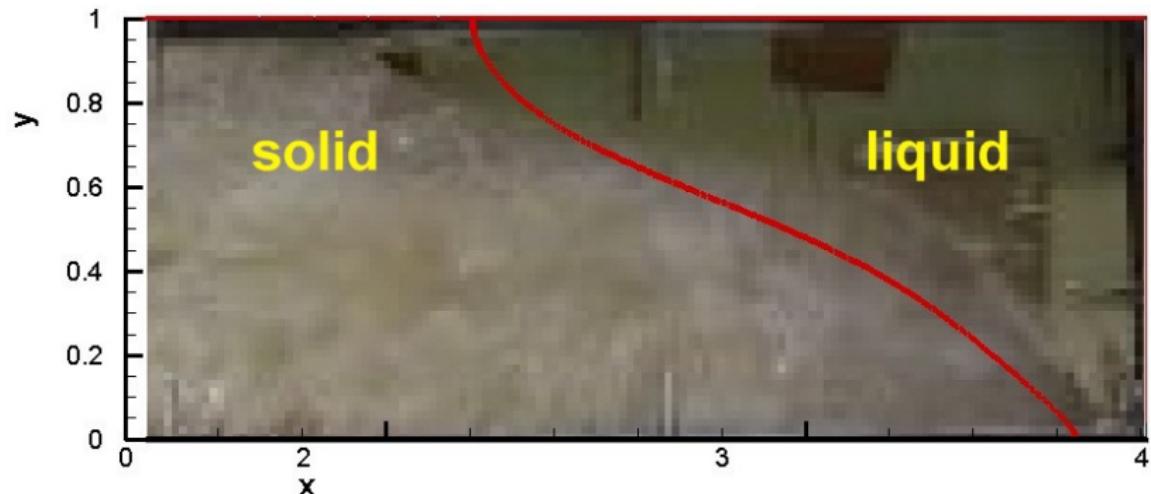
Directeur de thèse : Ionut Danaila¹

¹LMRS, Université de Rouen Normandie,

vendredi 27 septembre 2019



Problème physique et motivations

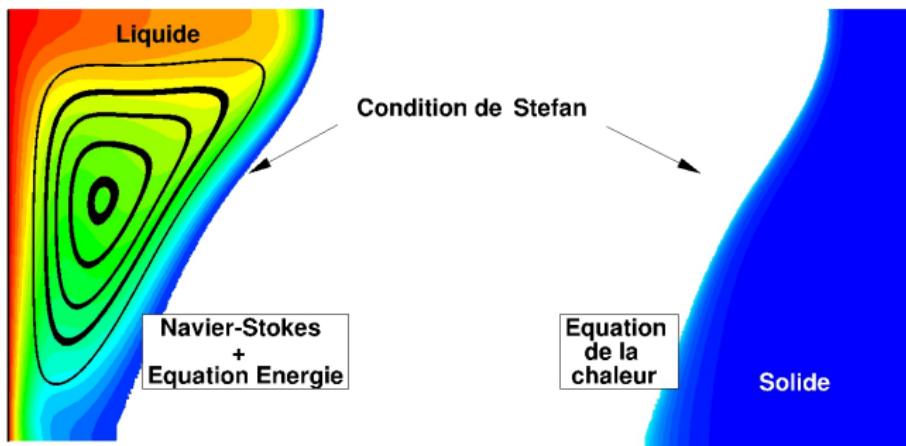


Orange labs, Lannion, France.

*MCP = Matériaux à Changement de Phase

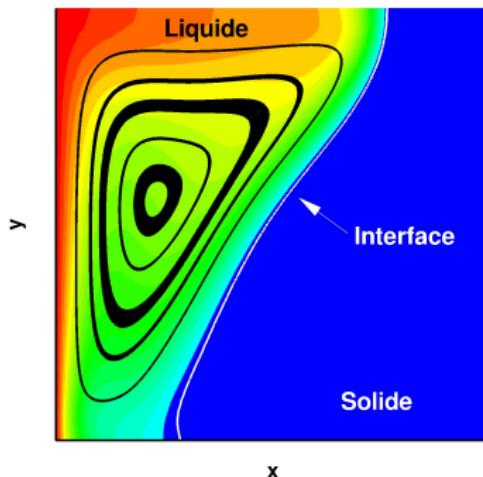
Méthodes de résolution existantes

Méthode de suivi d'interface.

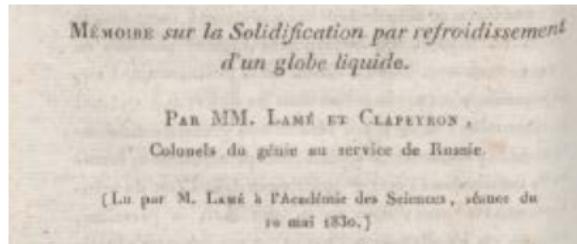


Méthodes de résolution existantes

Méthode mono-domaine.



Historique



G. Lamé and B. P. Clapeyron, Ann. Chem. Phys. (1831)

Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über
die Eisbildung im Polarmeere

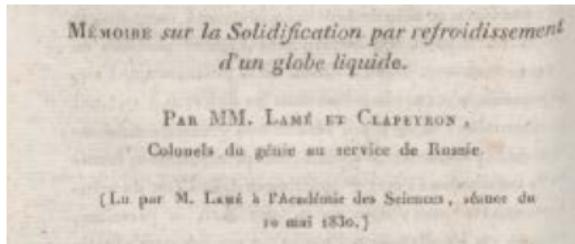
von
J. Stefan,
w. M. k. Akad.

J. Stefan, Ann. of Phys. and Chem. (1891)

* Sur la théorie de la formation de la glace dans les mers
polaires

- 1890 : Problème de Stefan
- 1980 : Regain d'intérêt
- 2000 : Développement de codes
- Actuelle : Intérêt pour le stockage d'énergie par changement de phase

Historique



G. Lamé and B. P. Clapeyron, Ann. Chem. Phys. (1831)

Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über
die Eisbildung im Polarmeere

von
J. Stefan,
w. M. k. Akad.

J. Stefan, Ann. of Phys. and Chem. (1891)

* Sur la théorie de la formation de la glace dans les mers
polaires

- 1890 : Problème de Stefan
- 1980 : Regain d'intérêt
- 2000 : Développement de codes
- Actuelle : Intérêt pour le stockage d'énergie par changement de phase

Applications



X. Kong et. al, *Energy and Buildings* (2014).

Applications

- bâtiment,
- stockage d'énergie,
- appareils électroniques,
- médecine,
- ...

Applications

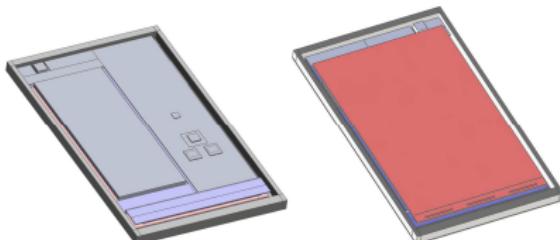


X. Kong et. al, *Energy and Buildings* (2014).

Applications

- bâtiment,
- stockage d'énergie,
- appareils électroniques,
- médecine,
- ...

Applications



D. Groulx, TFESC (2015)

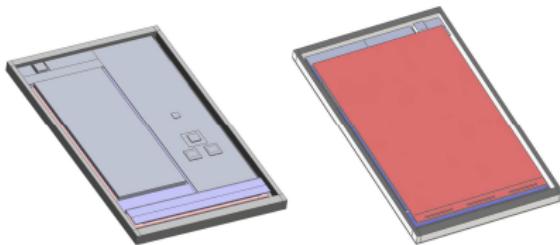


X. Kong et. al, *Energy and Buildings* (2014).

Applications

- bâtiment,
- stockage d'énergie,
- appareils électroniques,
- médecine,
- ...

Applications



D. Groulx, TFESC (2015)

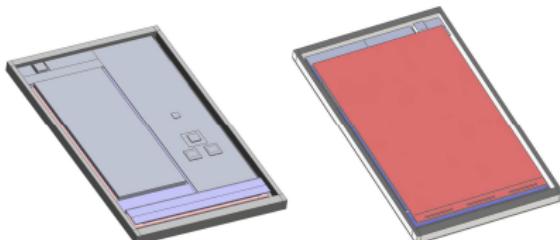


X. Kong et. al, *Energy and Buildings* (2014).

Applications

- bâtiment,
- stockage d'énergie,
- appareils électroniques,
- médecine,
- ...

Applications



D. Groulx, TFESC (2015)

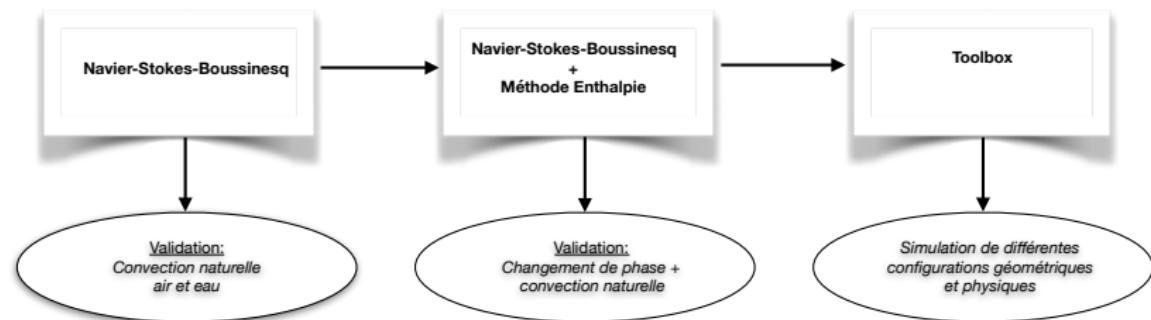


X. Kong et. al, *Energy and Buildings* (2014).

Applications

- bâtiment,
- stockage d'énergie,
- appareils électroniques,
- médecine,
- ...

Étapes de validation du code de calcul



Articles

- A. Rakotondrandisa, I. Danaila, L. Danaila, Numerical modelling of a melting-solidification cycle of a phase-change material with complete or partial melting. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2019.
- A. Rakotondrandisa, G. Sadaka, I. Danaila, A finite-element Toolbox for the simulation of solid-liquid phase-change systems with natural convection, *submitted to CPC, hal-02126697*, 2019
- G. Sadaka, A. Rakotondrandisa, F. Luddens, C. Lothodé, P-H. Tournier, I. Danaila, Parallel finite-element codes for the simulation of solid-liquid phase-change systems with natural convection, *to be submitted*, 2019

Conférences

Aina Rakotondrandisa, Georges Sadaka, Ionut Danaila, Corentin Lothodé, Francky Luddens, Pierre Jolivet, Pierre-Henri Tournier, Parallel 2D and 3D numerical simulations of melting with convection - workshop VAVIDEN - Rouen 2019.

A. Rakotondrandisa, I. Danaila, S. Le Masson, L. Danaila, Numerical simulations of melting - solidification problems with natural convection. Application to phase-change materials - *12th European Fluid Mechanics Conference* - Vienne 2018.

A. Rakotondrandisa, I. Danaila, F. Hecht, C. Lothodé, F. Luddens, P. H. Tournier, Modélisation et simulation de matériaux à changement de phase - *Congrès National d'Analyse Numérique - Cap d'Agde* 2018

A. Rakotondrandisa, I. Danaila, Simulations of phase change materials using a Finite Element method with mesh adaptivity - *Journée Maths-Physique-Industrie sur les matériaux à changement de phase* - Rouen 2016

Prix

Prix scientifique de l'École doctorale Mathématiques, Information, Ingénierie des Systèmes, Normandie Université. (2017)

Finaliste régionale "Ma thèse en 180 s", Caen 2017.



Articles

- A. Rakotondrandisa, I. Danaila, L. Danaila, Numerical modelling of a melting-solidification cycle of a phase-change material with complete or partial melting. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2019.
- A. Rakotondrandisa, G. Sadaka, I. Danaila, A finite-element Toolbox for the simulation of solid-liquid phase-change systems with natural convection, *submitted to CPC, hal-02126697*, 2019
- G. Sadaka, A. Rakotondrandisa, F. Luddens, C. Lothodé, P-H. Tournier, I. Danaila, Parallel finite-element codes for the simulation of solid-liquid phase-change systems with natural convection, *to be submitted*, 2019

Conférences

Aina Rakotondrandisa, Georges Sadaka, Ionut Danaila, Corentin Lothodé, Francky Luddens, Pierre Jolivet, Pierre-Henri Tournier, Parallel 2D and 3D numerical simulations of melting with convection - workshop VAVIDEN - Rouen 2019.

A. Rakotondrandisa, I. Danaila, S. Le Masson, L. Danaila, Numerical simulations of melting - solidification problems with natural convection. Application to phase-change materials - *12th European Fluid Mechanics Conference* - Vienne 2018.

A. Rakotondrandisa, I. Danaila, F. Hecht, C. Lothodé, F. Luddens, P. H. Tournier, Modélisation et simulation de matériaux à changement de phase - *Congrès National d'Analyse Numérique - Cap d'Agde* 2018

A. Rakotondrandisa, I. Danaila, Simulations of phase change materials using a Finite Element method with mesh adaptivity - *Journée Maths-Physique-Industrie sur les matériaux à changement de phase* - Rouen 2016

Prix

Prix scientifique de l'École doctorale Mathématiques, Information, Ingénierie des Systèmes, Normandie Université. (2017)

Finaliste régionale "Ma thèse en 180 s", Caen 2017.



Articles

- A. Rakotondrandisa, I. Danaila, L. Danaila, Numerical modelling of a melting-solidification cycle of a phase-change material with complete or partial melting. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2019.
- A. Rakotondrandisa, G. Sadaka, I. Danaila, A finite-element Toolbox for the simulation of solid-liquid phase-change systems with natural convection, *submitted to CPC, hal-02126697*, 2019
- G. Sadaka, A. Rakotondrandisa, F. Luddens, C. Lothodé, P-H. Tournier, I. Danaila, Parallel finite-element codes for the simulation of solid-liquid phase-change systems with natural convection, *to be submitted*, 2019

Conférences

Aina Rakotondrandisa, Georges Sadaka, Ionut Danaila, Corentin Lothodé, Francky Luddens, Pierre Jolivet, Pierre-Henri Tournier, Parallel 2D and 3D numerical simulations of melting with convection - workshop VAVIDEN - Rouen 2019.

A. Rakotondrandisa, I. Danaila, S. Le Masson, L. Danaila, Numerical simulations of melting - solidification problems with natural convection. Application to phase-change materials - *12th European Fluid Mechanics Conference* - Vienne 2018.

A. Rakotondrandisa, I. Danaila, F. Hecht, C. Lothodé, F. Luddens, P. H. Tournier, Modélisation et simulation de matériaux à changement de phase - *Congrès National d'Analyse Numérique - Cap d'Agde* 2018

A. Rakotondrandisa, I. Danaila, Simulations of phase change materials using a Finite Element method with mesh adaptivity - *Journée Maths-Physique-Industrie sur les matériaux à changement de phase* - Rouen 2016

Prix

Prix scientifique de l'École doctorale Mathématiques, Information, Ingénierie des Systèmes, Normandie Université. (2017)

Finaliste régionale "Ma thèse en 180 s", Caen 2017.



Plan

1 Modèle mathématique

- Navier-Stokes-Boussinesq
- Modèle de Carman-Kozeny
- Méthode d'enthalpie

2 Système numérique

- Formulation variationnelle
- Algorithme de Newton
- Test de convergence

3 Résultat des simulations numériques en 2D

- Fusion d'un MCP
- Cycle fusion/solidification d'un MCP
- Chauffage vertical d'un MCP

4 Résultat des simulations numériques en 3D

- Fusion d'un MCP dans une cavité cubique
- Formation d'un glaçon dans une cavité cubique



Plan

1 Modèle mathématique

- Navier-Stokes-Boussinesq
- Modèle de Carman-Kozeny
- Méthode d'enthalpie

2 Système numérique

- Formulation variationnelle
- Algorithme de Newton
- Test de convergence

3 Résultat des simulations numériques en 2D

- Fusion d'un MCP
- Cycle fusion/solidification d'un MCP
- Chauffage vertical d'un MCP

4 Résultat des simulations numériques en 3D

- Fusion d'un MCP dans une cavité cubique
- Formation d'un glaçon dans une cavité cubique

Navier-Stokes-Boussinesq

Approche mono-domaine :

Navier-Stokes-Boussinesq

Approche mono-domaine :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} - f_B(\theta) \mathbf{e}_y &= A(\theta) \mathbf{u}, \\ \frac{\partial (C\theta)}{\partial t} + \nabla \cdot (C\theta \mathbf{u}) - \frac{K}{Pr Re} \nabla^2 \theta + \frac{\partial (CS)}{\partial t} &= 0.\end{aligned}$$

Navier-Stokes-Boussinesq

Approche mono-domaine :

interface solide-liquide : iso-ligne de température $\theta = 0$.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} - f_B(\theta) \mathbf{e}_y &= A(\theta) \mathbf{u}, \\ \frac{\partial (C\theta)}{\partial t} + \nabla \cdot (C\theta \mathbf{u}) - \frac{K}{Pr Re} \nabla^2 \theta + \frac{\partial (CS)}{\partial t} &= 0.\end{aligned}$$

$$\mathbf{x} \rightarrow \frac{\tilde{\mathbf{x}}}{h}, \mathbf{u} \rightarrow \frac{\tilde{\mathbf{u}}}{V_{ref}}, \theta = \frac{T - T_f}{\delta T}, t \rightarrow \frac{V_{ref}}{h} t_\varphi, \delta T = T_h - T_f,$$

$$Re = \frac{V_{ref} h}{\nu_{liq}}, \quad Pr = \frac{\nu_l}{\alpha_l}, \quad Ra = \frac{g \beta h^3 \delta T}{\nu_l \alpha_l}, \quad Ste = \frac{c \delta T}{L}.$$

Re : nombre de Reynolds, Pr : nombre de Prandtl,
 Ra : nombre de Rayleigh, Ste : nombre de Stefan.



Modèle de Carman-Kozeny

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} - f_B(\theta) \mathbf{e}_y = A(\theta) \mathbf{u}$$

Modèle de Carman-Kozeny

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} - f_B(\theta) \mathbf{e}_y = A(\theta) \mathbf{u}$$

$$A(\theta) = -C_{\text{CK}} \frac{(1 - L_f(\theta))^2}{L_f(\theta)^3 + b},$$

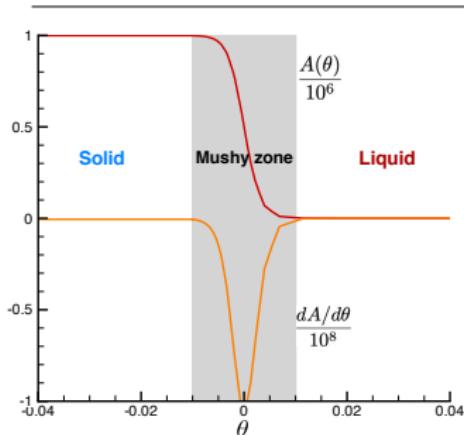
$$L_f(\theta) = 1 + \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh \left(\frac{\theta_f - \theta}{R_f} \right) \right\},$$

C_{CK} : constante de Carman-Kozeny,
 L_f : fraction liquide.



Modèle de Carman-Kozeny

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} - f_B(\theta) \mathbf{e}_y = A(\theta) \mathbf{u}$$



$$A(\theta) = -C_{CK} \frac{(1 - L_f(\theta))^2}{L_f(\theta)^3 + b},$$
$$L_f(\theta) = 1 + \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh \left(\frac{\theta_f - \theta}{R_f} \right) \right\},$$

C_{CK} : constante de Carman-Kozeny,
 L_f : fraction liquide.

Méthode d'enthalpie

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} - f_B(\theta) \mathbf{e}_y = A(\theta) \mathbf{u},$$

$$\frac{\partial (C\theta)}{\partial t} + \nabla \cdot (C\theta \mathbf{u}) - \frac{K}{Pr Re} \nabla^2 \theta + \frac{\partial (CS)}{\partial t} = 0.$$

⁽¹⁾ $H = c(s + T)$: chaleur latente + chaleur sensible.

$$S(\theta) = \frac{1}{Ste} - \frac{2}{Ste} \left\{ 1 + \tanh \left(-\frac{\theta}{R_s} \right) \right\},$$

⁽¹⁾ [Voller, IJHMT (1987)]



Plan

1 Modèle mathématique

- Navier-Stokes-Boussinesq
- Modèle de Carman-Kozeny
- Méthode d'enthalpie

2 Système numérique

- Formulation variationnelle
- Algorithme de Newton
- Test de convergence

3 Résultat des simulations numériques en 2D

- Fusion d'un MCP
- Cycle fusion/solidification d'un MCP
- Chauffage vertical d'un MCP

4 Résultat des simulations numériques en 3D

- Fusion d'un MCP dans une cavité cubique
- Formation d'un glaçon dans une cavité cubique

Système numérique

- Discretisation temporelle : schéma implicite d' ordre deux BDF2 (GEAR).
- Discretisation spatiale : éléments finis de Taylor Hood. \mathbb{P}_2 pour la vitesse et \mathbb{P}_1 pour la pression.
- Algorithme de Newton.
- Implémentation avec le logiciel élément fini FreeFem++.
- Adaptation de maillage à chaque pas de temps.
- 3D : librairie FFDDM. Décomposition de domaine.
- Adaptation de maillage 3D : MMG3D et MSHMET.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\Phi^{n+1} - 4\Phi^n + \Phi^{n-1}}{2\delta t}$$



Système numérique

- Discretisation temporelle : schéma implicite d' ordre deux BDF2 (GEAR).
- Discretisation spatiale : éléments finis de Taylor Hood. \mathbb{P}_2 pour la vitesse et \mathbb{P}_1 pour la pression.
- Algorithme de Newton.
- Implémentation avec le logiciel élément fini FreeFem++.
- Adaptation de maillage à chaque pas de temps.
- 3D : librairie FFDDM. Décomposition de domaine.
- Adaptation de maillage 3D : MMG3D et MSHMET.

Système numérique

- Discretisation temporelle : schéma implicite d' ordre deux BDF2 (GEAR).
- Discretisation spatiale : éléments finis de Taylor Hood. \mathbb{P}_2 pour la vitesse et \mathbb{P}_1 pour la pression.
- Algorithme de Newton.
- Implémentation avec le logiciel élément fini FreeFem++.
- Adaptation de maillage à chaque pas de temps.
- 3D : librairie FFDDM. Décomposition de domaine.
- Adaptation de maillage 3D : MMG3D et MSHMET.

Formulation variationnelle

$$\begin{aligned}
 b(\mathbf{u}^{n+1}, q) - \gamma(p^{n+1}, q) &= 0, \\
 \frac{3}{2\delta t} (\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}^{n+1}; \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) \\
 - (A(\theta^{n+1}) \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p^{n+1}) - (f_B(\theta^{n+1}) \mathbf{e}_y, \mathbf{v}) &= \\
 \frac{2}{\delta t} (\mathbf{u}^n, \mathbf{v}) - \frac{1}{2\delta t} (\mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{v}), \\
 \frac{3}{2\delta t} (\theta^{n+1} + S(\theta^{n+1}), \phi) - (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \phi, \theta^{n+1}) + \left(\frac{K}{RePr} \nabla \theta^{n+1}, \nabla \phi \right) &= \\
 \frac{2}{\delta t} (\theta^n + S(\theta^n), \phi) - \frac{1}{2\delta t} (\theta^{n-1} + S(\theta^{n-1}), \phi). &
 \end{aligned}$$

$$a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{V} = H_0^1(\Omega), a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 D_{ij}(\mathbf{u}) D_{ij}(\mathbf{v}),$$

$$b : \mathbf{V} \times Q \rightarrow \mathbb{R}, Q = \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q = 0 \right\}, b(\mathbf{u}, q) = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} q = - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \partial_i u_i \cdot q$$

$$c : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}, c(\mathbf{w}; \mathbf{z}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} [(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{z}] \cdot \mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} w_j (\partial_j z_i) v_i.$$



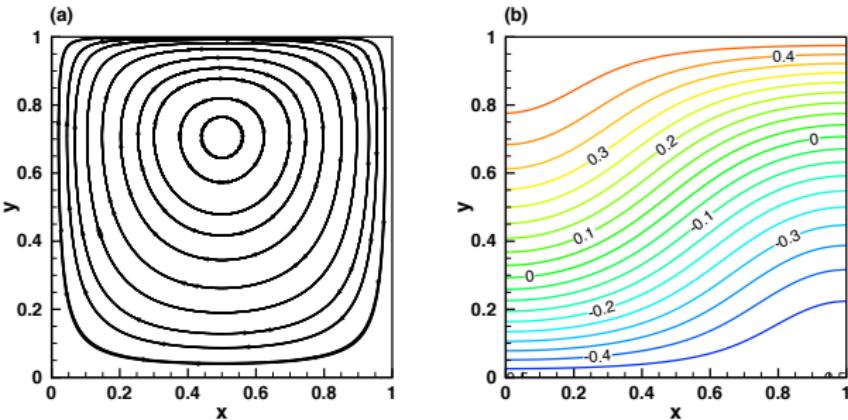
Résolution avec Newton

Avancement de t^n à t^{n+1} par un algorithme de Newton.

$$\begin{aligned} b \left(\mathbf{u}^{k+1}, q \right) - \gamma(p^{k+1}, q) &= 0, \\ \frac{3}{2\delta t} \left(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v} \right) + c \left(\mathbf{u}^{k+1}; \mathbf{u}^k, \mathbf{v} \right) &+ c \left(\mathbf{u}^k; \mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v} \right) \\ + a \left(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v} \right) - \left(\frac{dA}{d\theta}(\theta^k) \theta^{k+1} \mathbf{u}^k, \mathbf{v} \right) &- \left(A(\theta^k) \mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v} \right) + b \left(\mathbf{v}, p^{k+1} \right) \\ - \left(\frac{df_B}{d\theta}(\theta_k) \theta^{k+1} \mathbf{e}_y, \mathbf{v} \right) &= \frac{1}{\delta t} \left(2\mathbf{u}^n - \frac{1}{2}\mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{v} \right) \\ + c \left(\mathbf{u}^k; \mathbf{u}^k, \mathbf{v} \right) &- \left(\frac{dA}{d\theta}(\theta^k) \theta^k \mathbf{u}^k, \mathbf{v} \right), \\ \frac{3}{2\delta t} \left(\theta^{k+1} + \frac{dS}{d\theta}(\theta^k) \theta^{k+1}, \phi \right) - \left(\mathbf{u}^k \cdot \nabla \phi, \theta^{k+1} \right) &- \left(\mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla \phi, \theta^k \right) \\ + \left(\frac{K}{RePr} \nabla \theta^{k+1}, \nabla \phi \right) &= \frac{2}{\delta t} \left(\theta^n + S(\theta^n), \phi \right) \\ - \left(\mathbf{u}^k \cdot \nabla \phi, \theta^k \right) + \frac{1.5}{\delta t} \left(\frac{dS}{d\theta}(\theta^k) \theta^k - S(\theta^n), \phi \right) &- \frac{1}{2\delta t} \left(\theta^{n-1} + S(\theta^{n-1}), \phi \right). \end{aligned}$$



Burggraf : cavité entraînée



$$u_1(x, y) = \sigma g'(x)h'(y),$$

$$u_2(x, y) = -\sigma g''(x)h(y),$$

$$p(x, y) = \frac{\sigma}{Re} \left(h^{(3)}(y)g(x) + g''(x)h'(y) \right)$$

$$+ \frac{\sigma^2}{2} g'(x)^2 \left(h(y)h''(y) - h'(y)^2 \right),$$

$$T(x, y) = T_c + (T_h - T_c)y + a(x)b(y).$$

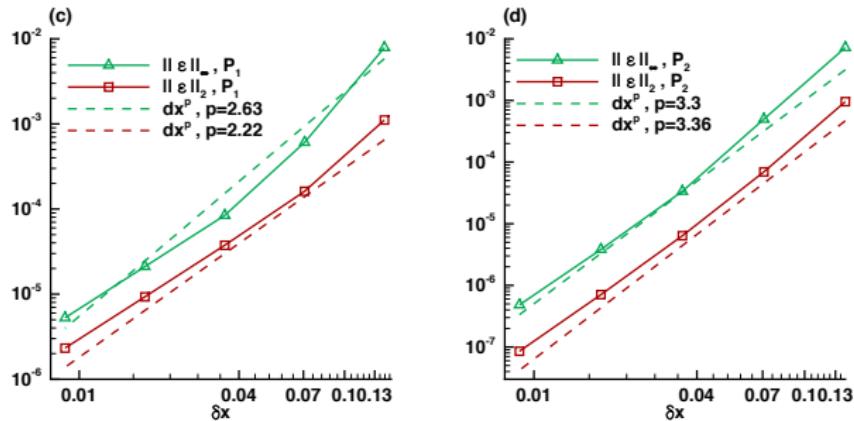
$$g(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3},$$

$$h(y) = y^4 - y^2,$$

$$a(x) = \cos(\pi x),$$

$$b(x) = y(1 - y).$$

Burggraf : cavité entraînée



$$u_1(x, y) = \sigma g'(x)h'(y),$$

$$u_2(x, y) = -\sigma g''(x)h(y),$$

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \frac{\sigma}{Re} \left(h^{(3)}(y)g(x) + g''(x)h'(y) \right) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2} g'(x)^2 \left(h(y)h''(y) - h'(y)^2 \right), \end{aligned}$$

$$T(x, y) = T_c + (T_h - T_c)y + a(x)b(y).$$

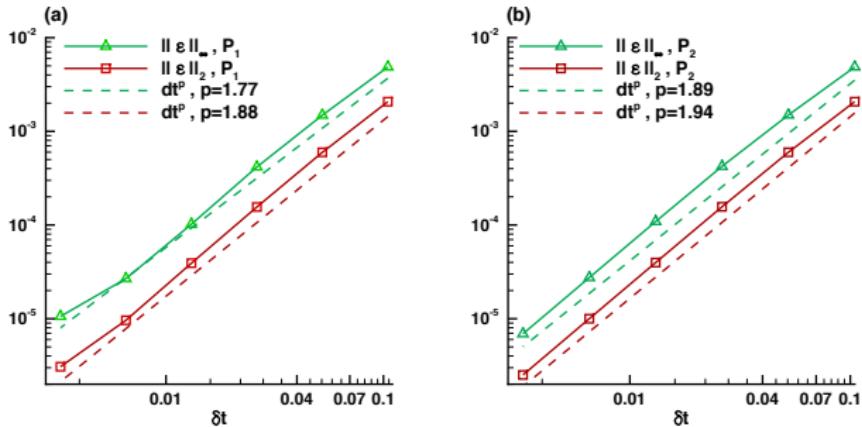
$$g(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3},$$

$$h(y) = y^4 - y^2,$$

$$a(x) = \cos(\pi x),$$

$$b(x) = y(1 - y).$$

Solution manufacturée, [Nourgaliev, JCP] (2016)



$$u_1(x, y, t) = (\delta U_0 + \alpha_u \sin(t)) \cos(x + \gamma_1 t) \sin(y + \gamma_2 t),$$

$$u_2(x, y, t) = -(\delta U_0 + \alpha_u \sin(t)) \sin(x + \gamma_1 t) \cos(y + \gamma_2 t),$$

$$T(x, y, t) = \bar{T} + (\delta T_0 + \alpha_t \sin(t)) \cos(x + \gamma_1 t) \sin(y + \gamma_2 t),$$

$$p(x, y, t) = \bar{P} + (\delta P_0 + \alpha_p \sin(t)) \sin(x + \gamma_1 t) \cos(y + \gamma_2 t),$$

γ_1	γ_2	\bar{P}	\bar{T}	δP_0	δT_0	δU_0	α_p	α_u	α_t
0.1	0.1	0	1.0	0.1	1.0	1.0	0.05	0.4	0.1

Plan

1 Modèle mathématique

- Navier-Stokes-Boussinesq
- Modèle de Carman-Kozeny
- Méthode d'enthalpie

2 Système numérique

- Formulation variationnelle
- Algorithme de Newton
- Test de convergence

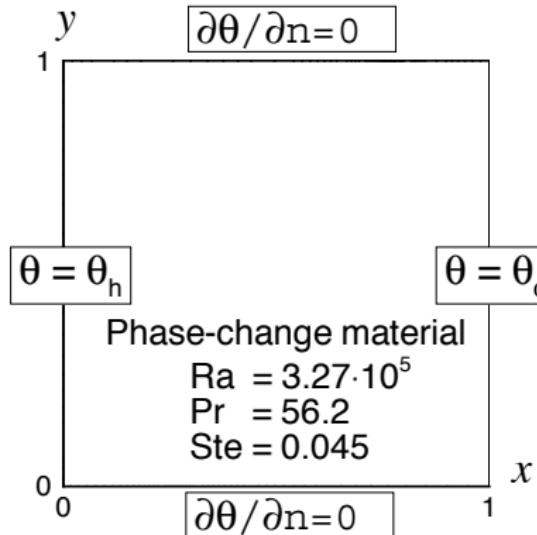
3 Résultat des simulations numériques en 2D

- Fusion d'un MCP
- Cycle fusion/solidification d'un MCP
- Chauffage vertical d'un MCP

4 Résultat des simulations numériques en 3D

- Fusion d'un MCP dans une cavité cubique
- Formation d'un glaçon dans une cavité cubique

Fusion d'un MCP : $\mathcal{R}a = 3.27 \times 10^5$



*Étude expérimentale de
[Okada, IJHMT (1984)].*

avec $\theta_h = 1$ et $\theta_c = -0.01$.

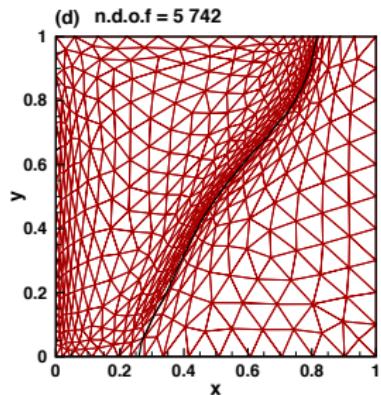
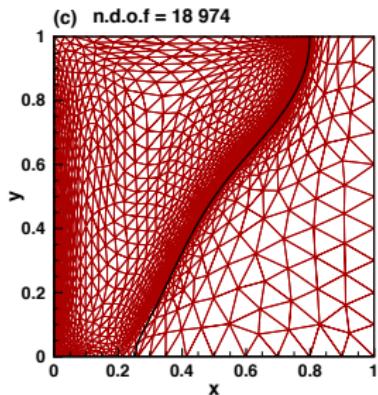
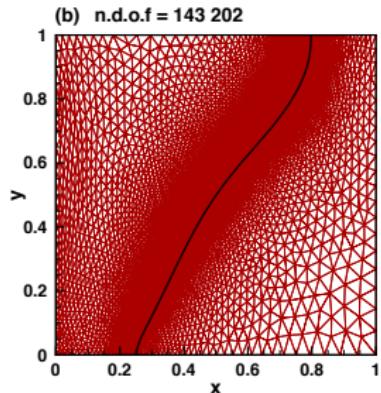
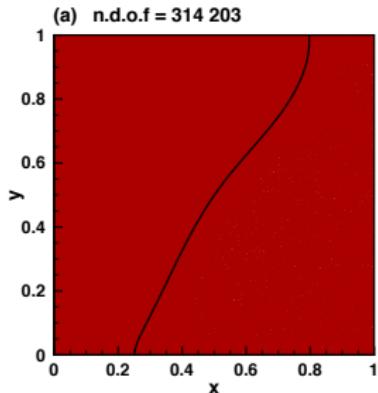
Influence du maillage

$$h_{min} = 10^{-3}$$
$$h_{max} = 10^{-1}$$

Ratio = 1.2

Ratio = 1.5

Ratio = 1.8



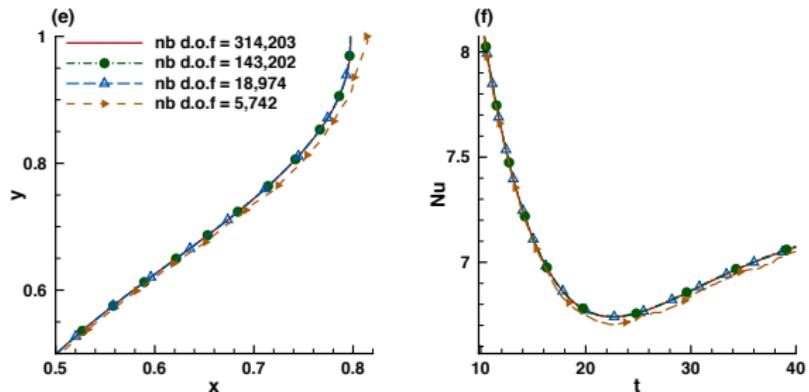
Influence du maillage

$$h_{min} = 10^{-3}$$
$$h_{max} = 10^{-1}$$

$$Ratio = 1.2$$

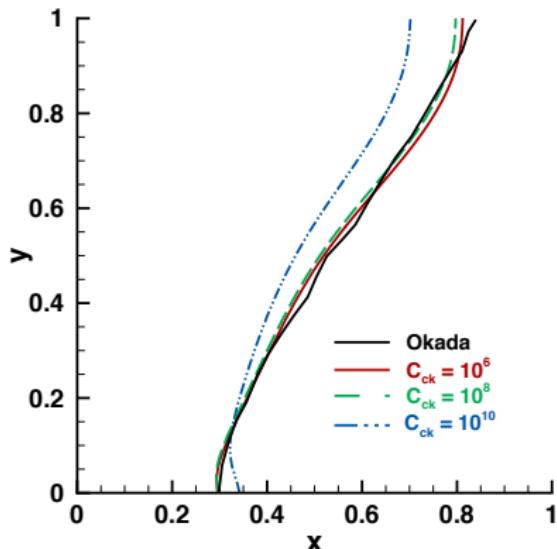
$$Ratio = 1.5$$

$$Ratio = 1.8$$



$$\mathcal{N}u = - \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} dy$$

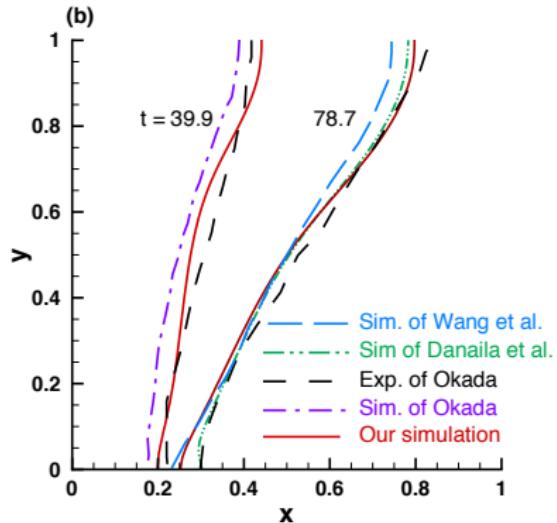
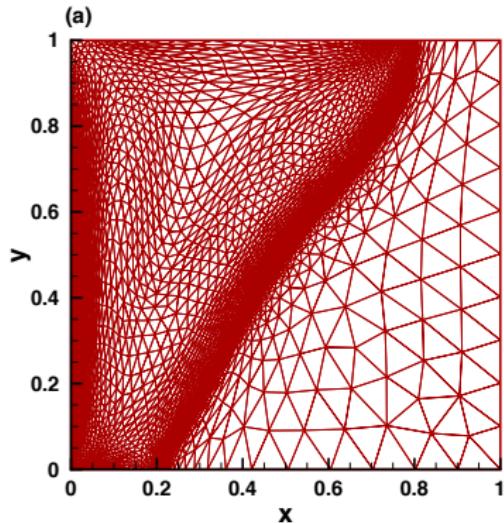
Influence de la constante de Carman-Kozeny



$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} - f_B(\theta) \mathbf{e}_y = A(\theta) \mathbf{u},$$

$$A(\theta) = -C_{ck} \frac{(1 - L_f(\theta))^2}{L_f(\theta)^3 + b}$$

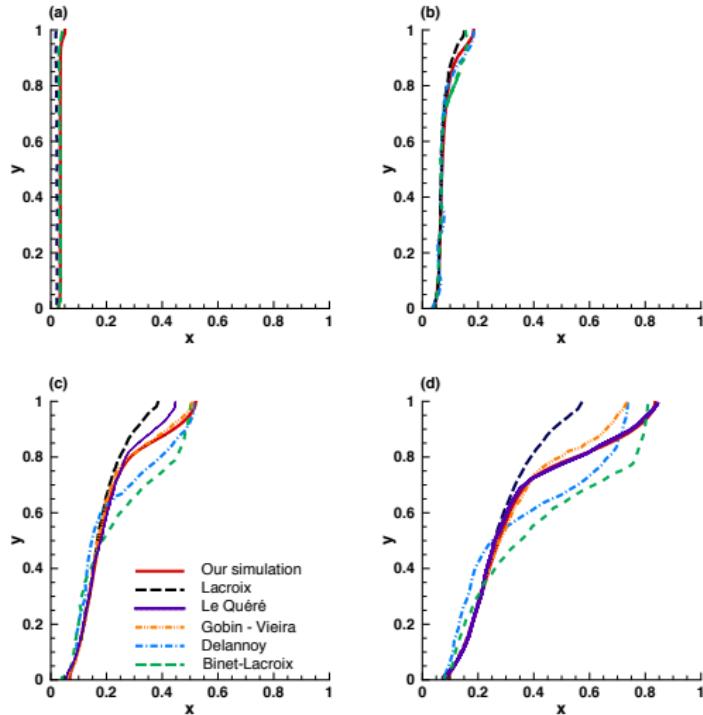
Position de l'interface solide-liquide



- Mesh : $h_{min} = 10^{-3}$, $h_{max} = 10^{-1}$, Ratio = 1.5.
- $C_{CK} = 10^6$.

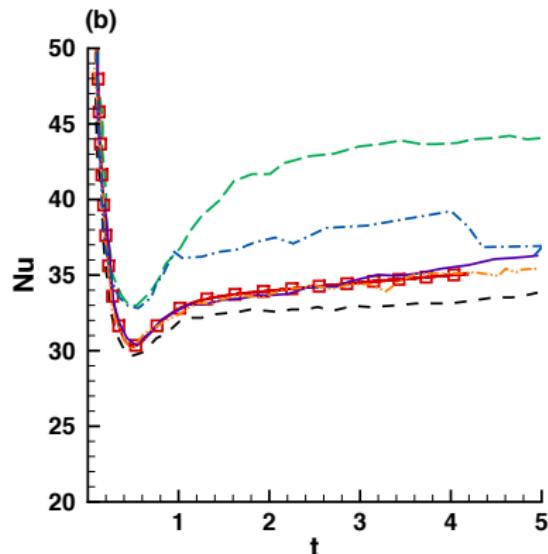
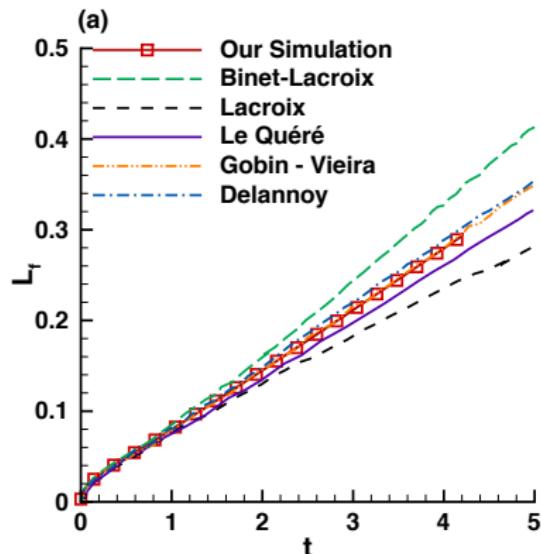
Comparaison avec les résultats expérimentaux de [Okada, IJHFF (1984)].

Fusion d'un MCP : $\mathcal{R}a = 10^8$



Comparaison avec [Bertrand, IJTS (1999)].

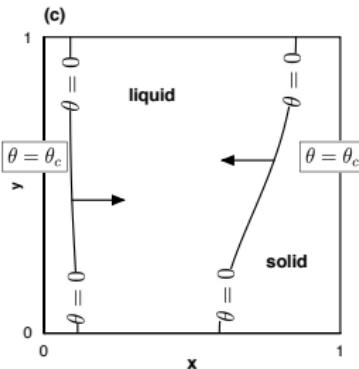
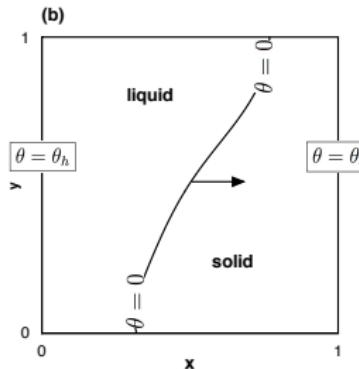
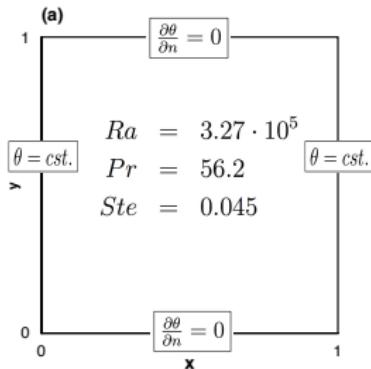
Fusion d'un MCP : $\mathcal{R}a = 10^8$



Comparaison avec [Bertrand, IJTS (1999)].

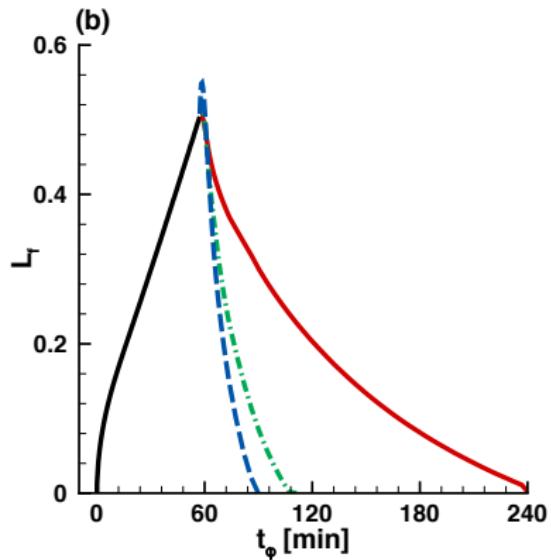
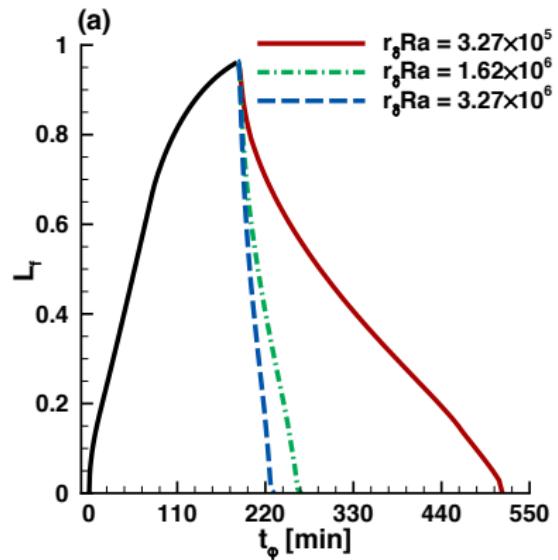
$$\mathcal{N}u = - \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} dy$$

Cycle complet fusion / solidification

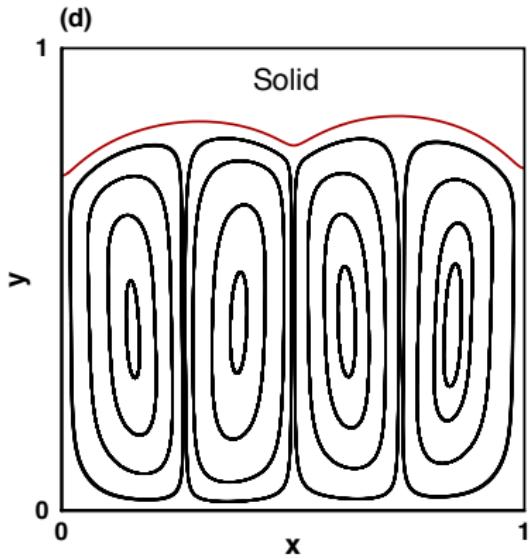
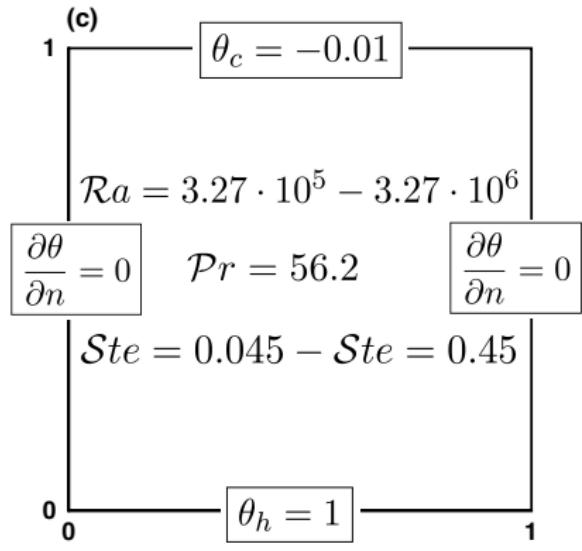


Cycle complet fusion / solidification

Cycle complet fusion / solidification

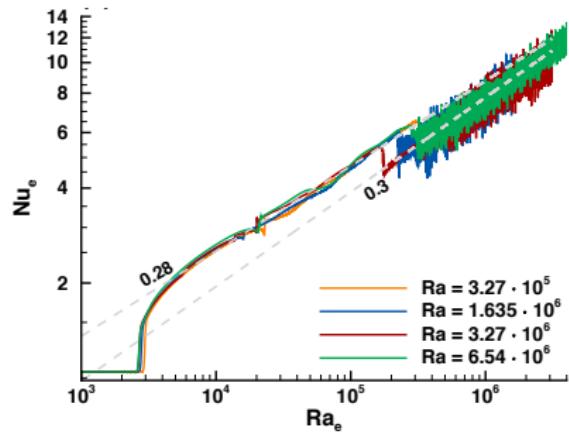


Chauffage vertical d'un MCP



Chaudage vertical d'un MCP

$$\mathcal{R}a = 3.27 \times 10^6$$



Plan

1 Modèle mathématique

- Navier-Stokes-Boussinesq
- Modèle de Carman-Kozeny
- Méthode d'enthalpie

2 Système numérique

- Formulation variationnelle
- Algorithme de Newton
- Test de convergence

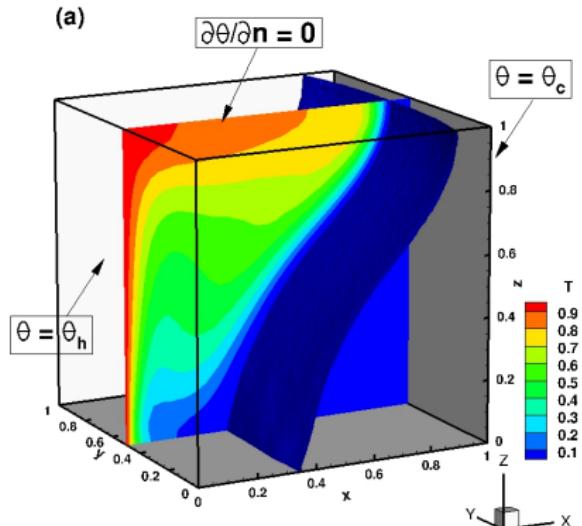
3 Résultat des simulations numériques en 2D

- Fusion d'un MCP
- Cycle fusion/solidification d'un MCP
- Chauffage vertical d'un MCP

4 Résultat des simulations numériques en 3D

- Fusion d'un MCP dans une cavité cubique
- Formation d'un glaçon dans une cavité cubique

Fusion d'un MCP dans une cavité cubique

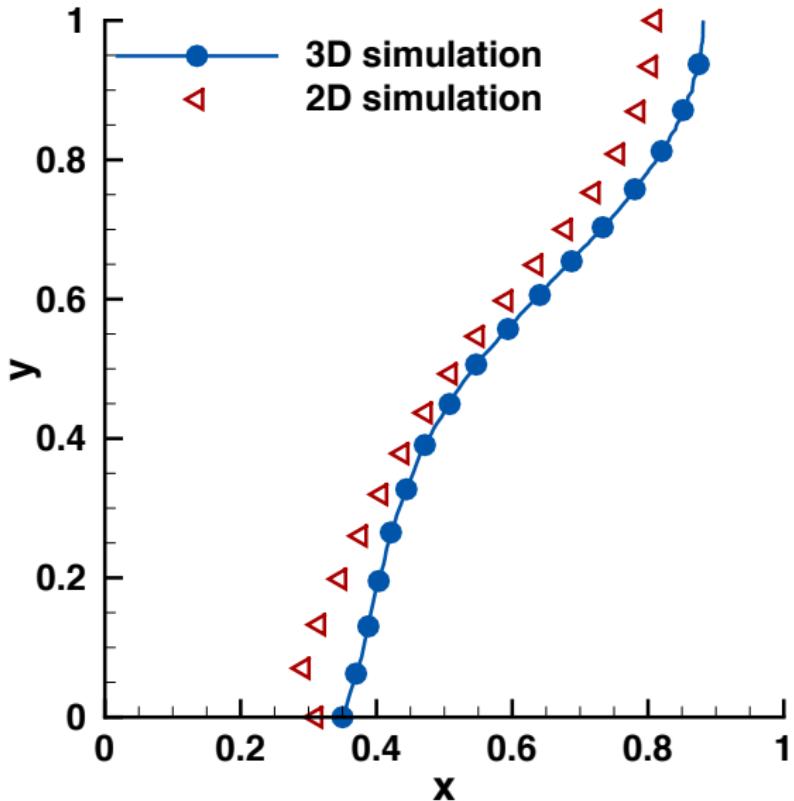


$$\mathcal{R}a = 3.27 \times 10^5$$

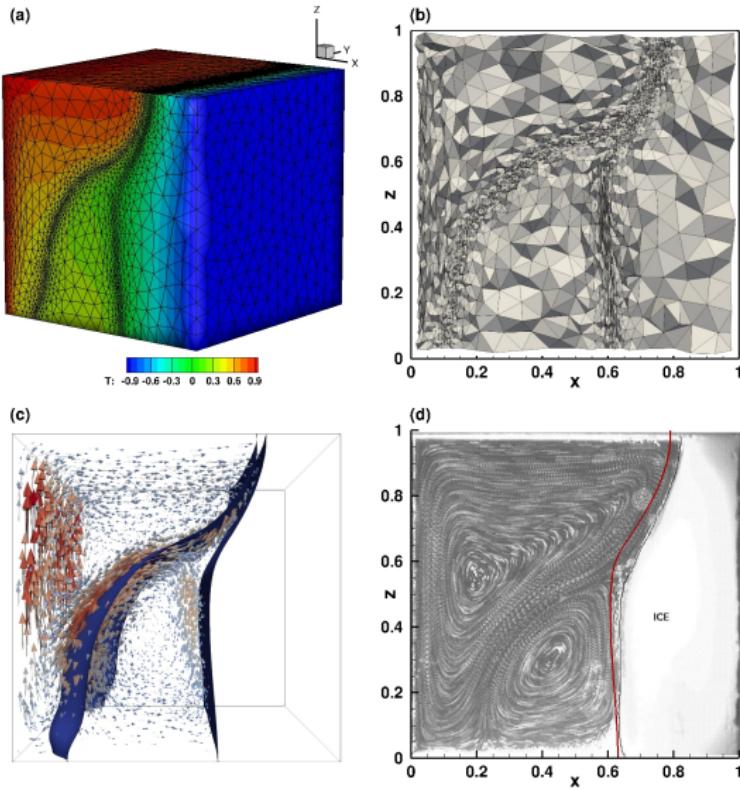
$$\mathcal{P}r = 56.2$$

$$\mathcal{S}te = 0.045$$

Fusion d'un MCP dans une cavité cubique



Formation d'un glaçon dans une cavité cubique



Conclusion

- Modélisation du changement de phase par une méthode d'enthalpy.
- Prise en compte de la convection naturelle par les équations de Navier-Stokes-Boussinesq.
- Pénalisation de la vitesse par le modèle de Carman-Kozeny.
- Utilisation d'un schéma implicit d'ordre 2.
- Adaptation du maillage à chaque pas de temps en 2D et 3D.
- Validation du code : fusion et solidification d'un MCP, formation d'un glaçon.

Perspectives

Amélioration du modèle physique

- Prise en compte de la surfusion
- Modélisation de mélanges binaires
- Masse volumique variable

Amélioration du système numérique

- Algorithme à pas de temps variable
- Tester d'autres préconditionneurs