

# MAT2410 (응용수학I)

## 과제 1-1

박수현 (20181634)

서강대학교 컴퓨터공학부

### 1 확률

#### 1.1 사건

2. 다음 상황에 맞는 표본공간을 구하라.

- (1) “1”의 눈이 나올 때까지 공정한 주사위를 반복하여 던진 횟수
- (2) 영하 5도에서 영상 7.5도까지 24시간 동안 연속적으로 기록된 온도계의 눈금의 위치
- (3) 형광등을 교체한 후로부터 형광등이 나갈 때까지 걸리는 시간

*Solution.*

- (1)  $S = \{x | x \geq 1\}$
- (2)  $S = \{x | -5 \leq x \leq 7.5\}$
- (3)  $S = \{x | x \geq 0\}$

5. 주머니 안에 빨간색과 파란색의 공깃돌이 두 개씩 들어 있는 주머니에서 공깃돌 두 개를 차례로 꺼낸다.

- (1) 나올 수 있는 공깃돌의 색에 대한 표본공간을 구하라.
- (2) 공깃돌 두 개가 서로 다른 사건을 구하라.
- (3) 파란색이 많아야 한 개인 사건을 구하라.
- (4) 첫 번째 공깃돌이 빨간색이고, 두 번째 공깃돌이 파란색인 사건을 구하라.

*Solution.* 빨간색 공깃돌이 나오는 사건을  $R$ , 파란색 공깃돌이 나오는 사건을  $B$ 라 하자.

- (1)  $S = \{RR, RB, BR, BB\}$
- (2)  $S = \{RB, BR\}$
- (3)  $S = \{RR, RB, BR\}$
- (4)  $S = \{RB\}$

## 1.2 확률

6. 어느 모임의 구성원을 살펴보면 부자가 7%, 저명인사가 10% 그리고 부자이면서 저명인사가 3%라고 한다. 이 모임에서 어느 한 사람을 임의로 선정하여 회장으로 추대하고자 한다.

- (1) 부자가 아닌 사람이 회장으로 추대될 확률을 구하라.
- (2) 부자는 아니지만 저명인사가 회장이 될 확률을 구하라.
- (3) 부자 또는 저명인사가 회장이 될 확률을 구하라.

*Solution.* 부자가 회장이 되는 사건을  $A$ , 저명인사가 회장이 되는 사건을  $B$ 라고 하자.

- (1)  $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.07 = 0.93$
- (2)  $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.10 - 0.03 = 0.07$
- (3)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.07 + 0.10 - 0.03 = 0.14$

7. 앞면이 나올 가능성이  $\frac{2}{3}$ 인 찌그러진 동전을 두 번 반복하여 던진다.

- (1) 앞면이 한 번도 나오지 않을 확률을 구하라.
- (2) 앞면이 한 번 나올 확률을 구하라.
- (3) 앞면이 두 번 나올 확률을 구하라.

*Solution.*

- (1)  $\binom{2}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = 1 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$
- (2)  $\binom{2}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^1 = 2 \times \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$
- (3)  $\binom{2}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^0 = 1 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$

10. 공정한 주사위를 독립적으로 반복해서 던지는 실험에서 2 또는 3의 눈이 나오면 주사위 던지기를 멈춘다고 한다.

- (1) 처음 던진 후에 멈출 확률을 구하라.
- (2) 5번 던진 후에 멈출 확률을 구하라.
- (3)  $n$ 번 던진 후에 멈출 확률을 구하라.

*Solution.* 공정한 주사위에서 2 또는 3의 눈이 나올 확률은  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이다.

- (1)  $\frac{1}{3}$   
 (2) 처음 4번은 2 또는 3의 눈이 나오지 않아야 하며, 마지막 한 번은 2 또는 3의 눈이 나와야 한다.  
 따라서  $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \frac{1}{3}$   
 (3) 처음  $n-1$ 번은 2 또는 3의 눈이 나오지 않아야 하며, 마지막 한 번은 2 또는 3의 눈이 나와야 한다.  
 따라서  $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3}$

**13.** 지난해에 어떤 단체의 스포츠 관람 습성에 대한 조사 결과, 그들 중에서 체조와 야구 그리고 축구를 관람한 사람은 각각 28%, 29%, 그리고 19%이었다. 한편 체조와 야구를 관람한 사람은 14%, 야구와 축구를 관람한 사람은 12% 그리고 체조와 축구를 관람한 사람은 10%이었으며, 세 개의 스포츠 모두를 관람한 사람은 8%이었다. 세 개의 스포츠 중 어느 것도 관람하지 않은 사람의 비율을 구하라.

*Solution.* 체조를 관람한 사람의 집합을  $A$ , 야구를 관람한 사람의 집단을  $B$ , 축구를 관람한 사람의 집단을  $C$ 라 하자. 단체의 전체 사람 수를  $n$ 이라고 할 때,  $|A| = 0.28n$ ,  $|B| = 0.29n$ ,  $|C| = 0.19n$ ,  $|A \cap B| = 0.14n$ ,  $|B \cap C| = 0.12n$ ,  $|C \cap A| = 0.10n$ ,  $|A \cap B \cap C| = 0.08n$ 이므로 어느 것도 관람하지 않은 사람의 수는

$$\begin{aligned} & |(A \cup B \cup C)^c| \\ &= n - |A \cup B \cup C| \\ &= n - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|) \\ &= n - (0.28 + 0.29 + 0.19 - 0.14 - 0.12 - 0.10 + 0.08)n \\ &= 0.52n \end{aligned}$$

이다. 따라서 어느 것도 관람하지 않은 사람의 비율은 52%이다.

## 1.3 조건부 확률

6. 공정한 주사위를 5번 반복해서 던지는 게임을 한다.

- (1) 5번 모두 짝수의 눈이 나올 확률을 구하라.
- (2) 5번 모두 서로 다른 눈이 나올 확률을 구하라.

*Solution.*

- (1) 공정한 주사위에서 짝수의 눈이 나올 확률은  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 이므로, 5번 모두 짝수의 눈이 나올 확률은  $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ 이다.
- (2) 2번째 시행에서 1번째와 다른 눈이 나올 확률은  $\frac{5}{6}$ , 3번째 시행에서 1-2번째와 다른 눈이 나올 확률은  $\frac{4}{6}$ , 4번째 시행에서 1-3번째와 다른 눈이 나올 확률은  $\frac{3}{6}$ , 5번째 시행에서 1-4번째와 다른 눈이 나올 확률은  $\frac{2}{6}$ 이다. 따라서 구하고자 하는 확률은  $\frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{54}$ 이다.

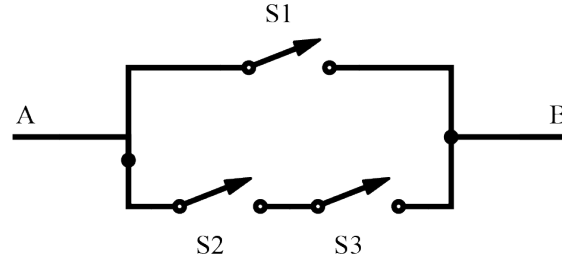
9. 주머니 안에 흰색 바둑돌이 4개, 검은색 바둑돌이 6개 들어있다. 꺼낸 바둑돌을 다시 주머니에 넣지 않는 방법으로 이 주머니에서 차례로 바둑돌 3개를 꺼낼 때, 다음을 구하라.

- (1) 3개 모두 흰색일 확률
- (2) 차례로 흰색, 검은색, 그리고 흰색일 확률

*Solution.*

- (1) 1번째, 2번째, 3번째 시행에서 흰색 바둑돌을 고를 확률은 각각  $\frac{4}{10}$ ,  $\frac{3}{9}$ ,  $\frac{2}{8}$ 이다. 따라서 구하고자 하는 확률은  $\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$ 이다.
- (2) 1번째, 2번째, 3번째 시행에서 차례로 흰색, 검은색, 그리고 흰색 바둑돌을 고를 확률은 각각  $\frac{4}{10}$ ,  $\frac{6}{9}$ ,  $\frac{3}{8}$ 이다. 따라서 구하고자 하는 확률은  $\frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{10}$ 이다.

11. 다음 회로의 각 스위치는 독립적으로 작동하며 1번 스위치가 ON이 될 확률은 0.95, 2번 스위치와 3번 스위치가 ON이 될 확률은 각각 0.94, 0.86이라고 한다. 이 회로에 대하여 A와 B 두 지점에 전류가 흐를 확률을 구하여라.



*Solution.* 1번 스위치가 작동하거나, 2번과 3번 스위치가 동시에 작동하면 된다. 따라서 1번 스위치가 작동하는 사건을  $S_1$ , 2번 스위치가 작동하는 사건을  $S_2$ , 3번 스위치가 작동하는 사건을  $S_3$ 이라고 하면 구하고자 하는 확률은

$$\begin{aligned}
 &P[S_1 \cup (S_2 \cap S_3)] \\
 &= P(S_1) + P(S_2 \cap S_3) - P[S_1 \cap (S_2 \cap S_3)] \\
 &= 0.95 + (0.94 \times 0.86) - (0.95 \times 0.94 \times 0.86) \\
 &= 0.99042
 \end{aligned}$$

이다.

**12.** 위성 시스템은 두 개의 독립적인 백업용 컴퓨터(computer 2, computer 3)를 가진 컴퓨터(computer 1)에 의하여 조정된다. 정상적으로 computer 1은 시스템을 조정하지만 이 컴퓨터가 고장 나면 자동적으로 computer 2가 작동하고, computer 2가 고장 나면 computer 3이 작동한다. 그리고 세 컴퓨터가 모두 고장 나면 위성 시스템은 멈춘다고 한다. 그리고 각 컴퓨터들이 멈출 확률은 0.01이고, 이 컴퓨터들이 멈추는 것은 역시 독립적이다. 이 때 각 컴퓨터들이 작동할 확률을 구하라. 그리고 위성 시스템이 멈출 확률을 구하라.

*Solution.* 컴퓨터 1이 작동할 확률은 0.99이다.

컴퓨터 2가 작동할 확률은 컴퓨터 1이 작동하지 않으면서 컴퓨터 2가 정상적으로 작동할 확률이므로,  $0.01 \times 0.99 = 0.0099$ 이다.

컴퓨터 3이 작동할 확률은 컴퓨터 1과 2가 작동하지 않으면서 컴퓨터 3이 정상적으로 작동할 확률이므로,  $0.01 \times 0.01 \times 0.99 = 0.000099$ 이다.

위성 시스템이 멈출 확률은 컴퓨터가 모두 작동하지 않을 확률이므로,  $0.01^3 = 0.000001$ 이다.

**17.** AIDS 검사로 널리 사용되는 방법으로 ELISA 검사가 있다. 이 방법에 의하여 100,000명이 검사를 받았으며, 검사 결과 다음 표를 얻었다고 한다. 검사를 받은 사람들 중에서 임의로 한 명을 선정하였을 때, 다음을 구하라.

	AIDS 균 보균자	AIDS 균 미보균자
양성반응	4,535	5,255
음성반응	125	90,085
계	4,660	95,340

- (1) 선정된 사람이 미보균자일 때, 이 사람이 양성반응을 보일 확률  
 (2) 선정된 사람이 보균자일 때, 이 사람이 음성반응을 보일 확률

*Solution.*

- (1)  $\frac{5255}{95340} \approx 0.05511$   
 (2)  $\frac{125}{4660} \approx 0.02682$

**19.** 의학 보고서에 따르면 전체 국민의 7.5%가 폐질환을 앓고 있으며, 그들 중 90%가 흡연가라고 한다. 그리고 폐질환을 갖지 않은 사람 중에 25%가 흡연가라 한다.

- (1) 임의로 선정된 사람이 흡연가일 확률을 구하여라.  
 (2) 임의로 선정된 흡연가가 폐질환을 가질 확률을 구하여라.

*Solution.* 임의로 선정된 사람이 흡연가인 사건을  $A$ , 폐질환을 앓고 있는 사건을  $B$ 라고 하자. 그러면 문제에서  $P(B) = 0.075$ ,  $P(A|B) = 0.90$ ,  $P(A|B^c) = 0.25$ 이다.

$$\text{따라서 } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.90 \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = 0.90P(B) = 0.0675$$

$$\text{이고, 또한 } P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = 0.25 \text{이므로}$$

$$P(A \cap B^c) = 0.25P(B^c) = 0.25(1 - 0.075) = 0.23125$$

임을 알 수 있다.

- (1) 임의로 선정된 사람이 흡연가일 확률  $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = 0.0675 + 0.23125 = 0.29875$   
 (2) 임의로 선정된 흡연가가 폐질환을 가질 확률  $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.0675}{0.29875} \approx 0.22594$

20. 세 공장 A, B, 그리고 C에서 각각 40%, 30%, 30%의 비율로 제품을 생산한다. 그리고 이 세 공정 라인에서 불량품이 제조될 가능성은 각각 2%, 3%, 5%라 한다. 어떤 제품 하나를 임의로 선정했을 때, 다음을 구하라.

- (1) 이 제품이 불량품일 확률
- (2) 임의로 선정된 제품이 불량품이었을 때, 이 제품이 A에서 만들어졌을 확률과 B에서 만들어졌을 확률
- (3) 임의로 선정된 제품이 불량품이었을 때, 이 제품이 A 또는 B에서 만들어졌을 확률

*Solution.* 임의로 선정한 제품이 불량품인 사건을  $X$ 라고 하자. 그리고 임의로 선정한 제품이 각각의 공장에서 만들어졌을 사건을  $A, B, C$ 라고 하자.

- (1)  $P(A)P(X|A) + P(B)P(X|B) + P(C)P(X|C) = 0.40 \times 0.02 + 0.30 \times 0.03 + 0.30 \times 0.05 = 0.032$
- (2)  $P(A|X) = \frac{P(A \cap X)}{P(X)} = \frac{0.40 \times 0.02}{0.032} = 0.25, P(B|X) = \frac{P(B \cap X)}{P(X)} = \frac{0.30 \times 0.03}{0.032} = 0.28125$
- (3) 사건 A와 B는 독립이므로,  $P(A \cup B|X) = P(A|X) + P(B|X) = 0.53125$

23. 두 기계 A와 B에 의하여 컴퓨터 칩이 생산되며, 기계 A의 불량률은 0.08이고 기계 B의 불량률은 0.05라고 한다. 두 기계로부터 각각 하나의 컴퓨터 칩을 선정하였을 때, 다음을 구하여라.

- (1) 두 개 모두 불량품일 확률
- (2) 두 개 모두 양호품일 확률
- (3) 정확히 하나만 불량품일 확률
- (4) (3)의 경우에 대하여, 이 불량품이 기계 A에서 생산되었을 확률

*Solution.* A에서 불량품을 선택한 사건을 A, B에서 불량품을 선택한 사건을 B라고 하자. 이 때  $P(A) = 0.08, P(B) = 0.05$ 이다. 또한 A와 B는 독립사건이다.

- (1) A와 B는 독립이므로,  $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.004$
- (2)  $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c) = 0.874$
- (3) 정확히 하나만 불량품일 확률은 (1)의 사건과 (2)의 사건의 여사건이다. 따라서  $1 - 0.004 - 0.874 = 0.122$
- (4) A에서 불량품이, B에서 양호품이 각각 생산될 확률은  $0.08 \times 0.95 = 0.076$ 이다. 따라서 (3)이 일어났을 때 이런 상황이 발생할 확률은  $\frac{0.076}{0.122} \approx 0.623$ 이다.

## 2 확률변수

### 2.1 이산확률변수

5. 10원짜리 동전 5개와 100원짜리 동전 3개가 들어 있는 주머니에서 동전 3개를 임의로 꺼낸다고 하자. 이 때 임의로 추출된 동전 3개에 포함된 100원짜리 동전의 개수에 대한 확률질량함수와 분포함수를 구하라.

*Solution.* 100원짜리 동전의 갯수를 확률변수  $X$ 로 두면, 확률질량함수  $f$ 는

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{\binom{5}{3}\binom{3}{0}}{\binom{8}{3}} = \frac{10}{56} \\ f(1) &= \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{30}{56} \\ f(2) &= \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{56} \\ f(3) &= \frac{\binom{5}{0}\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56} \end{aligned}$$

이고, 따라서 분포함수  $F$ 는

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{10}{56} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{40}{56} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{55}{56} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

이다.

6. 1의 눈이 나올 때까지 반복하여 주사위를 던지는 게임에서 주사위 던진 횟수를  $X$ 라 할 때, 다음을 구하라.



- (1)  $X$ 의 확률질량함수  $f(x)$
- (2) 처음부터 세 번 이내에 1의 눈이 나올 확률
- (3) 적어도 다섯 번 이상 던져야 1의 눈이 나올 확률

*Solution.*

- (1)  $x$ 번 던졌을 때 1의 눈이 처음으로 나왔을 확률은  $x-1$ 번째까지 1의 눈이 나오지 않다가  $x$ 번째에 1의 눈이 나왔을 확률이므로,

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{6}\right) & x \geq 1, x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

이다.

- (2) 처음부터 세 번 이내에 1의 눈이 나올 확률은  $P(X \leq 3) = f(1) + f(2) + f(3) = \frac{91}{216}$ 이다.
- (3) 적어도 다섯 번 이상 던져야 1의 눈이 나올 확률은 네 번 이내에 1이 나오는 사건의 여사건의 확률이다. 따라서

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] = \frac{625}{1296}$$

이다.

- 9.** 두 사람이 주사위를 던져서 먼저 1의 눈이 나오면 이기는 게임을 한다. 그러면 먼저 던지는 사람과 나중에 던지는 사람 중에서 누가 더 유리한지 구하라.

*Solution.* 주사위 던진 횟수를  $X$ 라 할 때, 확률질량함수는 문제 6의  $f(x)$ 과 같다.

먼저 던지는 사람이 이길 확률은

$$\begin{aligned} & f(1) + f(3) + f(5) + \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} f(2i-1) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2i-2} \left(\frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{25}{36}\right)^i \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{36}{11} = \frac{6}{11} \end{aligned}$$

이고, 나중에 던지는 사람이 이기는 사건은 먼저 던지는 사람이 이기는 사건의 여사건이므로 나중에 던지는 사람이 이길 확률은  $\frac{5}{11}$ 이다. 따라서 먼저 던지는 사람이 더 유리하다.

10. 확률변수  $X$ 의 확률질량함수가 다음과 같을 때,  $X$ 가 홀수일 확률을 구하라.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3^x} & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

*Solution.*  $x$ 가 홀수일 확률은

$$\begin{aligned} & f(1) + f(3) + f(5) + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} f(2i-1) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2i-1}} \\ &= 6 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{9^i} \\ &= \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

이다.

11. 복원추출에 의하여 52장의 카드가 들어 있는 주머니에서 임의로 세 장의 카드를 꺼낼 때, 세 장의 카드 안에 포함된 하트의 수를 확률변수  $X$ 라 한다.

- (1)  $X$ 의 확률질량함수를 구하라.
- (2) 분포함수를 구하라.

*Solution.* 복원추출의 경우 하트가 그려진 카드를 뽑을 확률은 항상  $\frac{1}{4}$ 이다. 세 장의 카드를 꺼내면  $X$ 는 이항분포  $B\left(\frac{1}{4}, 3\right)$ 을 따른다.

- (1)  $B\left(\frac{1}{4}, 3\right)$ 의 확률질량함수는

$$f(x) = \begin{cases} \binom{3}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{3-x} & x = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

이다.

(2)  $f(x)$ 를 통해  $F(x)$ 를 계산하면,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{27}{64} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{54}{64} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{63}{64} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

를 얻을 수 있다.

## 2.2 연속확률변수

2. 함수  $f(x) = \frac{k}{1+x^2}$ 이 모든 실수 범위에서 확률밀도함수가 되기 위한 상수  $k$ 를 구하고, 확률  $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \leq X \leq 1\right)$ 을 구하라.

*Solution.* 모든 실수 범위에서  $f(x)$ 가 확률밀도함수가 되려면,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{1+x^2} dx \\ &= k \left[ \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \right] \\ &= k \left[ \lim_{t \rightarrow -\infty} \tan^{-1} x \Big|_{-\infty}^0 + \lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1} x \Big|_0^t \right] \\ &= k\pi \end{aligned}$$

$k\pi = 1$ 이므로,  $k = \frac{1}{\pi}$ 이다.

또한 이 때  $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \leq X \leq 1\right)$ 은

$$\begin{aligned} & P\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \leq X \leq 1\right) \\ &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \tan^{-1} x \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

이 된다.

5. 다음 확률밀도함수에 대한 분포함수  $F(x)$ 를 구하고, 확률  $P(3 \leq X \leq 7)$ 을 구하라.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

*Solution.* 분포함수  $F(x)$ 는 밀도함수  $f$ 를 적분해 얻을 수 있다. 따라서

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{10} & 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & 10 \leq x \end{cases}$$

이다. 또한  $P(3 \leq X \leq 7)$ 은  $\int_3^7 f(x) dx = \frac{2}{5}$ 이다.

8. 생명보험에 가입한 어떤 가입자는 의사로부터 평균 100일 정도 살 수 있다는 통보를 받았다. 그리고 이 환자가 사망할 때까지 걸리는 시간  $X$ 는 다음과 같은 확률밀도함수를 갖는다고 한다.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} & x > 0 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

- (1) 이 환자가 150일 이내에 사망할 확률을 구하라.
- (2) 이 환자가 200일 이상 생존할 확률을 구하라.

*Solution.* 이 함수의 누적분포함수  $F(x)$ 는 다음과 같다.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{100}} & x > 0 \end{cases}$$

- (1) 150일 이내에 사망할 확률:  $P(X < 150) = F(150) = 1 - e^{-1.5} \approx 0.7769$
- (2) 200일 이상 생존할 확률:  $P(X \geq 200) = 1 - P(X < 200) = 1 - F(200) = e^{-2} \approx 0.1353$

12. 전기회로의 가변저항  $X$ 는 다음과 같은 확률밀도함수를 갖는다고 한다.

$$f(x) = \begin{cases} kx^2(1-x^2) & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

- (1) 상수  $k$ 를 구하라.
- (2) 분포함수  $F(x)$ 를 구하라.
- (3) 이 전기저항이 1.05와 1.65 사이일 확률을 구하라.

*Solution.*

(1)

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\
 &= \int_1^2 kx^2(1-x^2) dx \\
 &= k \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_1^2 \\
 &= -\frac{15}{58}k = 1
 \end{aligned}$$

$-\frac{15}{58}k = 1$ 이므로  $k = -\frac{58}{15}$ 이다.

(2) (1)의 적분 과정을 이용하면

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{3}{58}x^5 - \frac{5}{58}x^3 + \frac{1}{29} & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

이다.

$$(3) P(1.05 \leq X \leq 1.65) = F(1.05) - F(1.65) \approx 0.2791$$

**14.** 확률변수  $X$ 의 분포함수가 다음과 같을 때, 다음 확률을 구하라.

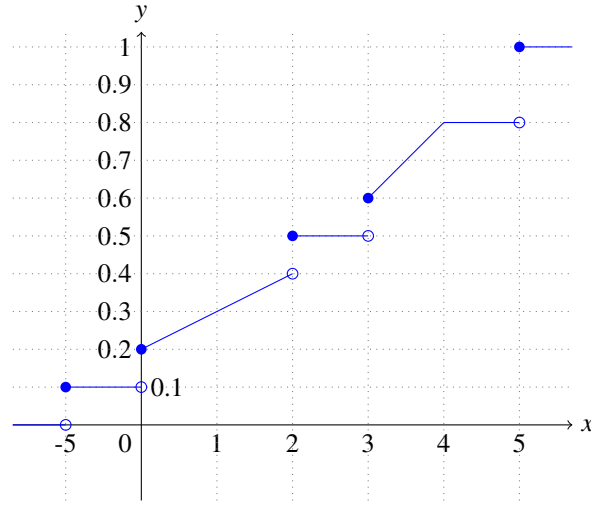
(1)  $P(X = 0)$

(2)  $P(0 < X \leq 3)$

(3)  $P(0 < X < 3)$

(4)  $P(4 < x \leq 5)$

(5)  $P(X \geq 1)$



*Solution.*

- (1) 0.1
- (2) 0.4
- (3) 0.3
- (4) 0.2
- (5) 0.7

15. 다음 분포함수를 갖는 확률변수  $X$ 에 대하여 밀도함수  $f(x)$ 와 확률  $P(X = 1)$ ,  $P(X < 1.5)$ 을 구하라.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{x^2 - 2x + 2}{2} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

*Solution.*  $\lim_{t \rightarrow 1^-} F(t) = 0$ ,  $F(1) = \frac{1}{2}$ 이고,  $\lim_{t \rightarrow 2^-} F(t) = 1$ ,  $F(2) = 1$ 임을 통해  $F$ 는  $x = 1$ 에서 불연속임을 알 수 있다. 따라서  $f(1) = F(1) - \lim_{t \rightarrow 1^-} F(t) = \frac{1}{2}$ 이고, 나머지 구간에서는  $F$ 를 미분해  $f$ 의 값을 구할 수 있다.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ x - 1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

그러므로  $P(X = 1) = f(1) = 0.5$ ,  $P(X < 1.5) = f(1) + \int_1^{1.5} f(x) dx = 0.625$ 이다.



## 2.3 기댓값

3. 10원짜리 동전 5개와 100원짜리 동전 3개가 들어 있는 주머니에서 동전 3개를 임의로 꺼낸다고 하자. 이 때 임의로 추출된 동전 3개에 포함된 100원짜리 동전의 개수에 대한 기댓값을 구하라.

*Solution.* 꺼낸 100원짜리 동전의 갯수를 확률변수  $X$ 라 하자.

$$P(X=0) = \binom{3}{0} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{10}{56}$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{30}{56}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{15}{56}$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$$

이 때  $E(X) = \sum_{x=0}^3 xP(X=x)$ 이므로

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^3 xP(X=x) \\ &= \frac{0 \times 10 + 1 \times 30 + 2 \times 15 + 3 \times 1}{56} \\ &= \frac{9}{8} = 1.125 \end{aligned}$$

4. 1~6의 숫자가 적힌 카드가 들어 있는 주머니에서 두 카드를 임의로 비복원추출할 때, 나온 카드의 수에 대한 차의 절댓값의 기댓값을 구하라.

*Solution.* 나온 카드에 적힌 수에 대한 차의 절댓값을 확률변수  $X$ 라 하자. 세로줄을 첫 번째 뽑은 카드에 적힌 수, 가로줄을 두 번째 뽑은 카드에 적힌 수라고 할 때 가능한 모든 사건은 다음과 같다.

$X$	1	2	3	4	5	6
1	-	1	2	3	4	5
2	1	-	1	2	3	4
3	2	1	-	1	2	3
4	3	2	1	-	1	2
5	4	3	2	1	-	1
6	5	4	3	2	1	-

따라서 다음과 같은 확률질량함수를 얻을 수 있다.

$x$	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{10}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$

그러므로 기댓값  $E(X) = \sum_{x=1}^5 xP(X=x)$ 는

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{x=1}^5 xP(X=x) \\
 &= \frac{1 \times 10 + 2 \times 8 + 3 \times 6 + 4 \times 4 + 5 \times 2}{30} \\
 &= \frac{7}{3} \approx 2.333
 \end{aligned}$$

이다.

9. 이산확률변수  $X$ 의 확률표가 다음과 같다.

$x$	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

- (1)  $X$ 의 평균을 구하라.
- (2) 분산의 정의  $Var(X) = E[(X - E(X))^2]$ 을 이용하여 분산을 구하라.
- (3) 분산의 간편계산방법  $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ 을 이용하여 분산을 구하라.

*Solution.*

$$(1) E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$$

$$(2) \text{Var}(X) = E \left[ \left( X - \frac{4}{3} \right)^2 \right]$$

$X - E(X)$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
$(X - E(X))^2$	$\frac{16}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{25}{9}$
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$\therefore \text{Var}(X) = \frac{16}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{6} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{25}{9} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{9}$$

(3)

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \sum_{x=0}^3 x^2 f(x) - \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ &= \left[ 0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{6} \right] - \frac{16}{9} \\ &= \frac{11}{9} \end{aligned}$$

18. 확률변수  $X$ 의 분포함수가  $F(x) = \frac{x^2}{16}$ ,  $0 \leq x \leq 4$ 이다.

- (1) 기댓값  $E(X)$ 와 분산  $\sigma^2$ 를 구하라.  
 (2) 중앙값과 최빈값을 구하라.

*Solution.* 확률밀도함수  $f(x) = \frac{x}{8}$ ,  $0 \leq x \leq 4$ 이다.

(1)

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^4 x f(x) dx \\ &= \int_0^4 \frac{x^2}{8} dx \\ &= \frac{x^3}{24} \Big|_0^4 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \int_0^4 x^2 f(x) dx \\
 &= \int_0^4 \frac{x^3}{8} dx \\
 &= \frac{x^4}{32} \Big|_0^4 = 8
 \end{aligned}$$

따라서  $\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = 8 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9}$

(2) 중앙값은  $F(M_e) = \frac{1}{2}$  일 때이므로,

$$\frac{M_e^2}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow M_e = 2\sqrt{2}$$

이다.

최빈값은  $f$ 가 최대일 때이므로,  $M_o = 4$ 이다.

**24.** 연속확률변수  $X$ 의 분포함수가 다음과 같을 때,  $X$ 의 기댓값과 분산을 구하라.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$

*Solution.*  $F$ 의 각 구간을 미분해 밀도함수  $f$ 를 얻을 수 있다.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}$$

기댓값  $E(X)$ 는

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 xf(x)dx \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} 2x^2dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x}{2}dx \\
 &= \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{x^2}{4} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{13}{48}
 \end{aligned}$$

분산  $Var(X)$ 는

$$\begin{aligned}
 Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 f(x)dx - \left(\frac{13}{48}\right)^2 \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} 2x^3dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2}{2}dx - \left(\frac{13}{48}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{2}x^4 \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{x^3}{6} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \left(\frac{13}{48}\right)^2 \\
 &= \frac{17}{96} - \left(\frac{13}{48}\right)^2 = \frac{239}{2304}
 \end{aligned}$$

25. 장거리 전화통화 시간  $X$ 는 다음과 같은 확률밀도함수를 갖는다고 한다.

$$f(x) = \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} \quad x \geq 0$$

- (1)  $X$ 의 기댓값과 분산을 구하라.
- (2)  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ 와  $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$ 를 구하라.

*Solution.*

(1) 기댓값  $\mu$ 는

$$\begin{aligned}
\mu &= \int_0^{\infty} xf(x) dx \\
&= \frac{1}{10} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t xe^{-\frac{x}{10}} dx \\
&= -\frac{1}{10} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ (10x + 100) e^{-\frac{x}{10}} \right]_0^t \\
&= -\frac{1}{10} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ (10t + 100) e^{-\frac{t}{10}} - (100) e^0 \right] \\
&= -\frac{1}{10} (-100) = 10
\end{aligned}$$

분산  $\sigma^2$ 는

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2 \\
&= \frac{1}{10} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^2 e^{-\frac{x}{10}} dx - 100 \\
&= -\frac{1}{10} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ (10x^2 + 200x + 2000) e^{-\frac{x}{10}} \right]_0^t - 100 \\
&= -\frac{1}{10} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ (10t^2 + 200t + 2000) e^{-\frac{t}{10}} - (2000) e^0 \right] - 100 \\
&= -\frac{1}{10} (-2000) - 100 = 100
\end{aligned}$$

표준편차  $\sigma$ 는  $\sqrt{100} = 10$ 이다.

(2)

$$\begin{aligned}
&P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \\
&= P(0 \leq X \leq 20) \\
&= \int_0^{20} f(x) dx \\
&= \frac{1}{10} \int_0^{20} e^{-\frac{x}{10}} dx \\
&= 1 - e^{-2} \approx 0.8647
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \\
&= P(-10 \leq X \leq 30) \\
&= \int_0^{30} f(x) dx \\
&= \frac{1}{10} \int_0^{30} e^{-\frac{x}{10}} dx \\
&= 1 - e^{-3} \approx 0.9502
\end{aligned}$$

**26.** 패스트푸드점에서 음식이 나오는 시간은 평균 63초, 표준편차 6.5초 걸린다고 한다. 체비쇼프 (Chebyshev) 부등식을 이용하여 음식이 나올 확률이 75%와 89% 이상일 시구간을 구하여라.

*Solution.* 체비쇼프 부등식에서, 어떤 확률변수  $X$ 가  $\mu \pm 2\sigma$ 에 놓일 확률은 75%,  $\mu \pm 3\sigma$ 에 놓일 확률은 89%이다. 따라서 음식이 나올 확률이 75%인 시구간은  $[50, 76]$ 초, 89%인 시구간은  $[43.5, 82.5]$ 초이다.

### 3 결합확률분포

#### 3.1 결합확률분포

4. 53장의 카드가 들어 있는 주머니에서 비복원추출에 의하여 카드 두 장을 꺼낸다고 하자. 하트의 개수를  $X$ , 스페이드의 개수를  $Y$ 라 한다.

- (1)  $X$ 와  $Y$ 의 결합질량함수를 구하라.
- (2)  $X$ 와  $Y$ 의 주변질량함수를 구하라.
- (3)  $X$ 의 평균과 분산을 구하라.

*Solution.* (1), (2):

$X / Y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	$\frac{26}{52} \times \frac{25}{51}$	$2 \times \frac{13}{52} \times \frac{26}{51}$	$\frac{13}{52} \times \frac{12}{51}$	$\frac{1482}{2652}$
1	$\frac{26}{52} \times \frac{13}{51}$	$2 \times \frac{13}{52} \times \frac{13}{51}$	0	$\frac{1014}{2652}$
2	$\frac{13}{52} \times \frac{12}{51}$	0	0	$\frac{156}{2652}$
$f_Y(y)$	$\frac{1482}{2652}$	$\frac{1014}{2652}$	$\frac{156}{2652}$	1

(3)  $E(X) = 0.5, E(X^2) \approx 0.6176, \text{Var}(X) \approx 0.3676$

5. 문제 4에서 복원추출을 할 경우, (1)~(3)을 구하라.

*Solution.* (1), (2):

$X / Y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	$\frac{25}{102}$	$\frac{26}{102}$	$\frac{6}{102}$	$\frac{57}{102}$
1	$\frac{26}{102}$	$\frac{13}{102}$	0	$\frac{39}{102}$
2	$\frac{6}{102}$	0	0	$\frac{6}{102}$
$f_Y(y)$	$\frac{57}{102}$	$\frac{39}{102}$	$\frac{6}{102}$	1

(3)  $E(X) = 0.5, E(X^2) \approx 0.6176, \text{Var}(X) \approx 0.3676$



7.  $X$ 와  $Y$ 의 확률질량함수가 다음과 같다.

$$f(x, y) = \frac{x+y}{110} \quad x = 1, 2, 3, 4, y = 1, 2, 3, 4, 5$$

- (1)  $X$ 와  $Y$ 의 주변질량함수를 구하라.
- (2)  $E(X), E(Y)$ 를 구하라.
- (3)  $P(X < Y)$
- (4)  $P(Y = 2X)$
- (5)  $P(X + Y = 5)$
- (6)  $P(3 \leq X + Y \leq 5)$

*Solution.*

$$(1) f_X(x) = \sum_{y=1}^5 \frac{x+y}{110} = \frac{x+3}{22}$$

$$f_Y(y) = \sum_{x=1}^4 \frac{x+y}{110} = \frac{2y+5}{55}$$

$$(2) E(X) = \sum_{x=1}^4 \sum_{y=1}^5 x \cdot \frac{x+y}{110} = \frac{30}{11}$$

$$E(Y) = \sum_{x=1}^4 \sum_{y=1}^5 y \cdot \frac{x+y}{110} = \frac{37}{11}$$

$$(3) P(X < Y) = \sum_{y=2}^5 \sum_{x=1}^{y-1} \frac{x+y}{110} = \frac{6}{11}$$

$$(4) P(Y = 2X) = f(1, 2) + f(2, 4) = \frac{9}{110}$$

$$(5) P(X + Y = 5) = f(1, 4) + f(2, 3) + f(3, 2) + f(4, 1) = \frac{2}{11}$$

$$(6) P(3 \leq X + Y \leq 5) = f(1, 2) + f(2, 1) + f(1, 3) + f(2, 2) + f(3, 1) + f(1, 4) + f(2, 3) + f(3, 2) + f(4, 1) = \frac{3}{11}$$

11. 연속확률변수  $X$ 와  $Y$ 의 결합밀도함수가 다음과 같을 때,  $X$ 와  $Y$ 의 주변밀도함수를 구하라.

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

*Solution.*  $X$ 의 주변밀도함수  $f_X$ :

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^{\infty} f(x,y) dy \\
&= \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} dy \\
&= e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-y} dy \\
&= e^{-x} \lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-y} \Big|_0^t \\
&= e^{-x} \lim_{t \rightarrow \infty} (-e^{-t} + e^0) \\
&= e^{-x} \quad 0 < x < \infty
\end{aligned}$$

$Y$ 의 주변밀도함수  $f_Y$ 는 같은 방법으로  $0 < y < \infty$ 에서  $f_Y(y) = e^{-y}$ 이다.

13. 연속확률변수  $X$ 와  $Y$ 의 결합분포함수가  $F(x,y) = (1 - e^{-2x})(1 - e^{-3y})$ ,  $0 < x < \infty, 0 < y < \infty$ 이다.

- (1)  $X$ 와  $Y$ 의 결합밀도함수를 구하라.
- (2)  $X$ 와  $Y$ 의 주변분포함수와 주변밀도함수를 구하라.
- (3) 확률  $P(1 \leq X \leq 2, 0 \leq Y \leq 1)$ 을 구하라.

*Solution.*

- (1)  $X$ 와  $Y$ 의 결합밀도함수  $f(x,y)$ :

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-3y}) \\
&= (2e^{-2x})(3e^{-3y}) \\
&= 6e^{-2x-3y} \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty
\end{aligned}$$

- (2)  $X$ 의 주변분포함수  $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x,y) = 1 - e^{-2x} \quad 0 < x < \infty$   
 $X$ 의 주변밀도함수  $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = 2e^{-2x} \quad 0 < x < \infty$

- (3)

$$\begin{aligned}
&P(1 \leq X \leq 2, 0 \leq Y \leq 1) \\
&= F(2,1) - F(2,0) - F(1,1) + F(1,0) \\
&= (1 - e^{-4})(1 - e^{-3}) - (1 - e^{-4})(1 - e^0) - (1 - e^{-2})(1 - e^{-3}) + (1 - e^{-2})(1 - e^0) \\
&= (1 - e^{-4})(1 - e^{-3}) - (1 - e^{-2})(1 - e^{-3}) \\
&= e^{-7} - e^{-5} - e^{-4} + e^{-2} \approx 0.1112
\end{aligned}$$

15. 연속확률변수  $X$ 와  $Y$ 의 결합밀도함수가  $f(x,y) = \frac{3}{16}, x^2 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq 2$ 이다.

- (1)  $X$ 와  $Y$ 의 주변밀도함수를 구하라.  
 (2)  $P(1 \leq X \leq \sqrt{2}, 1 \leq Y \leq 2)$   
 (3)  $P(2X > Y)$

*Solution.*

- (1)  $X$ 의 주변밀도함수  $f_X$ :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{x^2}^4 f(x,y) dy \\ &= \int_{x^2}^4 \frac{3}{16} dy \\ &= \frac{3}{16} (4 - x^2) \quad 0 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

$Y$ 의 주변밀도함수  $f_Y$ :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y) dx \\ &= \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{3}{16} dx \\ &= \frac{3}{16} (2 - \sqrt{y}) \quad 0 \leq y \leq 4 \end{aligned}$$

- (2)

$$\begin{aligned} &P(1 \leq X \leq \sqrt{2}, 1 \leq Y \leq 2) \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^2 f(x,y) dy dx \\ &= \frac{3}{16} \int_1^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^2 dy dx \\ &= \frac{3}{16} \int_1^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx \\ &= \frac{3}{16} \left[ 2x - \frac{x^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{4\sqrt{2} - 5}{16} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 P(2X > Y) &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x, y) dy dx \\
 &= \frac{3}{16} \int_0^2 2x - x^2 dx \\
 &= \frac{3}{16} \left[ x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

21. 두 확률변수  $X$ 와  $Y$ 의 결합밀도함수가 다음과 같다.

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy & 0 < y < 1-x, 0 < x < 1 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

(1)  $X$ 와  $Y$ 의 주변밀도함수를 구하라.

(2)  $P(X > Y)$ 를 구하라.

*Solution.*  $0 < y < 1-x \Rightarrow 0 < x < 1-y$

(1)  $X$ 의 주변밀도함수  $f_X$ :

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \int_0^{1-x} f(x, y) dy \\
 &= \int_0^{1-x} 24xy dy \\
 &= 12xy^2 \Big|_0^{1-x} \\
 &= 12x(1-x)^2 \quad 0 < x < 1
 \end{aligned}$$

같은 방법으로  $0 < y < 1$ 에서  $Y$ 의 주변밀도함수  $f_Y(y) = 12y(1-y)^2$ 이다.

(2)

$$\begin{aligned}
P(X > Y) &= \int_0^1 \int_0^{\min(x, 1-x)} f(x, y) dy dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^x f(x, y) dy dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-x} f(x, y) dy dx \\
&= 24 \left[ \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^x xy dy dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-x} xy dy dx \right] \\
&= 24 \left[ \int_0^{\frac{1}{2}} x \int_0^x y dy dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x \int_0^{1-x} y dy dx \right] \\
&= 24 \left[ \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \frac{x^2}{2} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x \cdot \frac{(1-x)^2}{2} dx \right] \\
&= 24 \left[ \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \frac{x^2}{2} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x) \cdot \frac{x^2}{2} dx \right] \\
&= 24 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2} dx \\
&= 4 x^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

26. 두 확률변수  $X$ 와  $Y$ 의 결합밀도함수가  $f(x, y) = 3e^{-x-3y}, x > 0, y > 0$ 이다.

(1) 결합분포함수  $F(x, y)$ 를 구하라.

(2)  $X$ 와  $Y$ 의 주변밀도함수를 구하라.

(3)  $P(x < y)$ 를 구하라.

*Solution.*

(1) 결합분포함수  $F(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \int_0^x \int_0^y f(u, v) dv du \\
&= 3 \int_0^x \int_0^y e^{-u-3v} dv du \\
&= 3 \int_0^x e^{-u} \int_0^y e^{-3v} dv du \\
&= -(e^{-3y} - 1) \int_0^x e^{-u} du \\
&= (e^{-x} - 1)(e^{-3y} - 1) \quad x > 0, y > 0
\end{aligned}$$

(2)  $X$ 의 주변밀도함수  $f_X$ :

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^\infty f(x, y) dy \\
&= \int_0^\infty 3e^{-x-3y} dy \\
&= 3e^{-x} \int_0^\infty e^{-3y} dy \\
&= 3e^{-x} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-3y} dy \\
&= -e^{-x} \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-3t} - e^0) \\
&= e^{-x} \quad 0 < x < \infty
\end{aligned}$$

 $Y$ 의 주변밀도함수  $f_Y$ :

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^\infty f(x, y) dx \\
&= \int_0^\infty 3e^{-x-3y} dx \\
&= 3e^{-3y} \int_0^\infty e^{-x} dx \\
&= 3e^{-3y} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x} dx \\
&= -3e^{-3y} \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-t} - e^0) \\
&= 3e^{-3y} \quad 0 < y < \infty
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 P(x < y) &= \int_0^\infty \int_x^\infty f(x, y) dy dx \\
 &= \int_0^\infty \int_x^\infty 3e^{-x-3y} dy dx \\
 &= \int_0^\infty 3e^{-x} \int_x^\infty e^{-3y} dy dx \\
 &= \int_0^\infty 3e^{-x} \left( \frac{1}{3} e^{-3x} \right) dx \\
 &= \int_0^\infty e^{-4x} dx \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

**31.** 보험회사는 대단히 많은 운전자를 가입자로 가지고 있다. 자동차 충돌에 의한 보험회사의 손실을 확률변수  $X$ 라 하고, 책임보험에 의한 손실을  $Y$ 라고 하자. 두 확률변수의 결합밀도함수가 다음과 같을 때, 두 손실의 총액이 적어도 1 이상일 확률을 구하라.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x+2-y}{4} & 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

*Solution.* 구하고자 하는 값은  $P(X+Y \geq 1)$ 이다.  $P(X+Y \geq 1) = 1 - P(X+Y < 1)$ 이므로, 구하고자 하는 확률은  $P(X+Y < 1)$ 을 구해 해결할 수 있다.  $x+y < 1$ 이면  $y < 1-x$ 이다.

$$\begin{aligned}
 P(X+Y < 1) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{2x+2-y}{4} dy dx \\
 &= \int_0^1 \left[ \frac{4xy+4y-y^2}{8} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{-5x^2+2x+3}{8} dx \\
 &= \frac{1}{8} \left[ -\frac{5}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_0^1 \\
 &= \frac{7}{24}
 \end{aligned}$$

따라서  $P(X+Y \geq 1) = 1 - P(X+Y < 1) = \frac{17}{24}$ 이다.



### 3.2 조건부 확률분포

4. 연속확률변수  $X$ 와  $Y$ 의 결합분포함수가 다음과 같다.

$$F(x, y) = (1 - e^{-2x})(1 - e^{-3y}) \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty$$

- (1)  $X$ 와  $Y$ 의 주변분포함수를 구하라.
- (2)  $X$ 와  $Y$ 의 독립성을 조사하라.
- (3) 확률  $P(1 < X \leq 2, 0 < Y \leq 1)$ 을 구하라.

*Solution.*

(1)  $X$ 의 주변분포함수  $F_X$ :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-3y}) \\ &= 1 - e^{-2x} \quad 0 < x < \infty \end{aligned}$$

같은 방법으로  $0 < y < \infty$ 에서  $F_Y(y) = 1 - e^{-3y}$ 이다.

- (2)  $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ 이므로  $X$ 와  $Y$ 는 독립이다.
- (3)  $X$ 와  $Y$ 가 독립이므로

$$\begin{aligned} P(1 < X \leq 2, 0 < Y \leq 1) &= P(1 < X \leq 2)P(0 < Y \leq 1) \\ &= [F_X(2) - F_X(1)][F_Y(1) - F_Y(0)] \\ &= [(1 - e^{-4}) - (1 - e^{-2})][(1 - e^{-3}) - (1 - e^0)] \\ &= (e^{-2} - e^{-4})(1 - e^{-3}) \approx 0.1112 \end{aligned}$$

5. 연속확률변수  $X$ 와  $Y$ 가 다음의 결합밀도함수를 갖는다.

$$f(x, y) = \begin{cases} 15y & x^2 \leq y \leq x \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

- (1)  $X$ 의 주변밀도함수  $f_X(x)$ 를 구하라.
- (2)  $X = 0.5$ 일 때,  $Y$ 의 조건부 밀도함수를 구하라.
- (3) (2)의 조건 아래서  $0.3 \leq Y \leq 0.4$ 일 조건부 확률을 구하여라.

*Solution.*  $x^2 \leq y \leq x \Rightarrow y \leq x \leq \sqrt{y}$

(1)  $X$ 의 주변밀도함수  $f_X$ :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{x^2}^x 15y dy \\ &= \frac{15}{2} y^2 \Big|_{x^2}^x \\ &= \frac{15}{2} (x^2 - x^4) \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(y|x=0.5) &= \frac{f(0.5, y)}{f_X(0.5)} \\ &= \frac{32}{3} y \quad \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} P(0.3 \leq Y \leq 0.4 | X = 0.5) &= \int_{0.3}^{0.4} f(y|x=0.5) dy \\ &= \int_{0.3}^{0.4} \frac{32}{3} y dy \\ &= \frac{16}{3} y^2 \Big|_{0.3}^{0.4} \approx 0.3733 \end{aligned}$$

9. 두 확률변수  $X$ 와  $Y$ 의 결합확률밀도함수가 다음과 같다.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y^2 & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

- (1)  $X$ 와  $Y$ 의 주변확률밀도함수를 구하라.
- (2)  $X$ 와  $Y$ 는 독립인지 보여라.
- (3) 사건  $\{X < 1\}$ 과  $\left\{Y \geq \frac{1}{2}\right\}$ 은 독립인지 보여라.

*Solution.*

(1)  $X$ 의 주변밀도함수  $f_X$ :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 \frac{3}{2}y^2 dy \\ &= \frac{1}{2}y^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \quad 0 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

$Y$ 의 주변밀도함수  $f_Y$ :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^2 \frac{3}{2}y^2 dx \\ &= 3y^2 \quad 0 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

(2)  $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ 이므로 독립이다.

$$(3) P(X < 1) = \int_0^1 f_X(x) dx = \frac{1}{2},$$

$$P\left(Y \geq \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^1 f_Y(y) dy = \frac{7}{8},$$

$$P\left(X < 1, Y \geq \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x, y) dy dx = \frac{7}{16} \text{에서}$$

$$P\left(X < 1, Y \geq \frac{1}{2}\right) = P(X < 1)P\left(Y \geq \frac{1}{2}\right) \text{임을 얻을 수 있다. 따라서 두 사건은 독립이다.}$$

11. 두 확률변수  $X$ 와  $Y$ 가 결합밀도함수

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy & 0 < y < 1-x, 0 < x < 1 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

을 갖는다고 하자. 이 때  $P\left(Y < X \mid X = \frac{1}{3}\right)$ 을 구하라.

*Solution.*  $0 < x < 1$ 에서  $f_X(x) = \int_0^{1-x} 24xy dy = 12x(1-x)^2$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} & P\left(Y < X \middle| X = \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{P\left(Y < X, X = \frac{1}{3}\right)}{P\left(X = \frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{9}{16} \int_0^{\frac{1}{3}} 8y dy \\ &= \frac{9}{16} 4y^2 \Big|_0^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

15.  $X$ 와  $Y$ 의 결합확률밀도함수가 다음과 같다.

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x^2 - 2)y & 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

- (1) 상수  $k$ 를 구하라.
- (2)  $X$ 와  $Y$ 의 주변확률밀도함수를 구하라.
- (3)  $X$ 와  $Y$ 는 독립인지 보여라.
- (4)  $Y = 3$ 일 때,  $X$ 의 조건부 확률밀도함수를 구하라.

*Solution.*

(1)

$$\begin{aligned} & \int_1^4 \int_0^4 f(x, y) dy dx \\ &= k \int_1^4 \int_0^4 (x^2 - 2)y dy dx \\ &= k \int_1^4 (x^2 - 2) \times \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^4 dx \\ &= 8k \int_1^4 x^2 - 2 dx \\ &= 8k \left[ \frac{1}{3}x^3 - 2x \right]_1^4 \\ &= 15 \times 8k = 1 \\ \therefore k &= \frac{1}{120} \end{aligned}$$

(2)  $X$ 의 주변밀도함수  $f_X$ :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^4 f(x,y) dy \\ &= \int_0^4 \frac{1}{120} (x^2 - 2)y dy \\ &= \frac{1}{15} (x^2 - 2) \quad 1 \leq x \leq 4 \end{aligned}$$

$Y$ 의 주변밀도함수  $f_Y$ :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_1^4 f(x,y) dx \\ &= \int_1^4 \frac{1}{120} (x^2 - 2)y dx \\ &= \frac{1}{8}y \quad 0 \leq y \leq 4 \end{aligned}$$

(3)  $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ 이므로  $X$ 와  $Y$ 는 독립이다.

(4)

$$\begin{aligned} f(x|y=3) &= \frac{f(x,3)}{f_Y(3)} \\ &= \frac{\frac{1}{40} (x^2 - 2)}{\frac{3}{8}} \\ &= \frac{1}{40} (x^2 - 2) \times \frac{8}{3} \\ &= \frac{1}{15} (x^2 - 2) \quad 1 \leq x \leq 4 \end{aligned}$$

16. 두 확률변수  $X$ 와  $Y$ 의 결합확률밀도함수가 다음과 같다.

$$f(x,y) = \begin{cases} ke^{x+y} & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

- (1) 상수  $k$ 를 구하라.
- (2)  $X$ 와  $Y$ 의 주변밀도함수를 구하라.
- (3)  $X$ 와  $Y$ 는 i.i.d. 확률변수인지 보여라.
- (4)  $P(0.2 \leq X \leq 0.8, 0.2 \leq Y \leq 0.8)$ 을 구하라.
- (5)  $Y = \frac{1}{2}$ 일 때,  $X$ 의 조건부 밀도함수를 구하라.

*Solution.*

(1)

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 k e^{x+y} dy dx \\
 &= k \int_0^1 e^x dx \int_0^1 e^y dy \\
 &= k(e-1)^2 = 1 \\
 \therefore k &= (e-1)^{-2}
 \end{aligned}$$

(2)  $X$ 의 주변밀도함수  $f_X$ :

$$\begin{aligned}
 & f_X(x) \\
 &= \int_0^1 f(x, y) dy \\
 &= (e-1)^{-2} e^x \int_0^1 e^y dy \\
 &= \frac{e^x}{e-1} \quad 0 < x < 1
 \end{aligned}$$

같은 방법으로  $0 < y < 1$ 에서  $Y$ 의 주변밀도함수  $f_Y(y) = \frac{e^y}{e-1}$ 이다.

(3) 우선  $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ 이므로  $X$ 와  $Y$ 는 독립이고,  $f_X(x) = f_Y(x)$ 이므로 항등분포를 이룬다. 따라서  $X$ 와  $Y$ 는 i.i.d. 확률변수이다.

(4) (3)에서 보인 것과 같이  $X$ 와  $Y$ 는 i.i.d. 확률변수이므로

$$\begin{aligned}
 & P(0.2 \leq X \leq 0.8, 0.2 \leq Y \leq 0.8) \\
 &= [P(0.2 \leq X \leq 0.8)]^2 \\
 &= \left[ \int_{0.2}^{0.8} f_X(x) dx \right]^2 \\
 &= \left[ \int_{0.2}^{0.8} \frac{e^x}{e-1} dx \right]^2 \\
 &= \left( \frac{e^{0.8} - e^{0.2}}{e-1} \right)^2 \approx 0.3415
 \end{aligned}$$

(5) 역시  $X$ 와  $Y$ 는 i.i.d. 확률변수이므로  $f\left(x \middle| y = \frac{1}{2}\right) = \frac{e^x}{e-1}$ 이다.

## 3.3 결합분포에 대한 기댓값

2. 확률변수  $X$ 와  $Y$ 가 다음 결합확률질량함수를 갖는다고 한다.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (x, y) = (0, 1), (1, 0), (2, 1) \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

- (1)  $X$ 와  $Y$ 의 독립성을 조사하라.  
 (2)  $X$ 와  $Y$ 의 공분산을 구하라.

*Solution.*

(1)  $X$ 의 주변확률함수는

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$Y$ 의 주변확률함수는

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & y = 0 \\ \frac{2}{3} & y = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

인데,  $f(0, 0) \neq f_X(0)f_Y(0)$ 이므로  $X$ 와  $Y$ 는 독립이 아니다.

(2)  $E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1$ 이고  $E(Y) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ 이다. 또한  $E(XY) = 0 \times 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 이다.  $X$ 와  $Y$ 의 공분산  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ 으로 주어지므로, 공분산은 0이다.

4. 연속확률변수  $X$ 와  $Y$ 의 결합밀도함수가 다음과 같다.

$$f(x, y) = \frac{3}{16} \quad x^2 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq 2$$

- (1)  $X$ 와  $Y$ 의 평균과 표준편차를 구하라.  
 (2)  $X$ 와  $Y$ 의 공분산을 구하라.  
 (3)  $X$ 와  $Y$ 의 상관계수를 구하라.

*Solution.*  $x^2 \leq y \leq 4 \Rightarrow x \leq \sqrt{y}$

(1)  $X$ 의 평균:

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 x f(x, y) dy dx \\
 &= \frac{3}{16} \int_0^2 \int_{x^2}^4 x dy dx \\
 &= \frac{3}{16} \int_0^2 x(4 - x^2) dx \\
 &= \frac{3}{16} \left[ 2x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 \\
 &= \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

$X^2$ 의 평균:

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 x^2 f(x, y) dy dx \\
 &= \frac{3}{16} \int_0^2 \int_{x^2}^4 x^2 dy dx \\
 &= \frac{3}{16} \int_0^2 x^2(4 - x^2) dx \\
 &= \frac{3}{16} \left[ \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2 \\
 &= \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

$Y$ 의 평균:

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 y f(x, y) dy dx \\
 &= \frac{3}{16} \int_0^2 \int_{x^2}^4 y dy dx \\
 &= \frac{3}{16} \int_0^2 8 - \frac{1}{2}x^4 dx \\
 &= \frac{3}{16} \left[ 8x - \frac{1}{10}x^5 \right]_0^2 \\
 &= \frac{12}{5}
 \end{aligned}$$



$Y^2$ 의 평균:

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 y^2 f(x,y) dy dx \\
 &= \frac{3}{16} \int_0^2 \int_{x^2}^4 y^2 dy dx \\
 &= \frac{1}{16} \int_0^2 64 - x^6 dx \\
 &= \frac{1}{16} \left[ 64x - \frac{1}{7}x^7 \right]_0^2 \\
 &= \frac{48}{7}
 \end{aligned}$$

따라서  $X$ 와  $Y$ 의 평균과 표준편차는 다음과 같다.

	$X$	$Y$
$\mu$	$\frac{4}{3}$	$\frac{12}{5}$
$\sigma^2$	$\frac{19}{80}$	$\frac{192}{175}$
$\sigma$	$\frac{\sqrt{95}}{20}$	$\frac{8\sqrt{21}}{35}$

(2)  $XY$ 의 평균:

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 xy f(x,y) dy dx \\
 &= \frac{3}{16} \int_0^2 \int_{x^2}^4 xy dy dx \\
 &= \frac{3}{16} \int_0^2 x \left( 8 - \frac{1}{2}x^4 \right) dx \\
 &= \frac{3}{16} \left[ 4x^2 - \frac{1}{12}x^6 \right]_0^2 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

따라서  $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{5}$ 이다.

$$(3) \text{Corr}(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sqrt{1995}}{114} \approx 0.3918$$

5.  $E(X) = 3, E(Y) = 2, E(X^2) = 13, E(Y^2) = 7$  그리고  $E(XY) = 3$ 이다.

- (1) 공분산  $\text{Cov}(X,Y)$ 를 구하라.
- (2) 공분산  $\text{Cov}(X-Y, X+Y)$ 를 구하라.
- (3)  $X$ 와  $Y$ 의 상관계수를 구하라.

*Solution.*

$$(1) \operatorname{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -3$$

(2)

$$\begin{aligned} & \operatorname{Cov}(X - Y, X + Y) \\ &= E((X - Y)(X + Y)) - E(X - Y)E(X + Y) \\ &= E(X^2 - Y^2) - [E(X) - E(Y)][E(X) + E(Y)] \\ &= E(X^2) - E(Y^2) - [E(X)^2] + [E(Y)^2] \\ &= 13 - 7 - 9 + 4 = 1 \end{aligned}$$

$$(3) \sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 4, \sigma_Y^2 = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 3 \text{ 이므로 } \operatorname{Corr}(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 이다.}$$

7. 두 확률변수  $X$ 와  $Y$ 의 결합확률밀도함수가 다음과 같다.

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

- (1)  $X$ 와  $Y$ 의 공분산을 구하라.
- (2)  $X$ 와  $Y$ 의 상관계수를 구하고, 상관관계를 확인하라.
- (3) 기댓값  $E(X - 2Y)$ 와 분산  $\operatorname{Var}(X - 2Y)$ 를 구하라.

*Solution.*  $X$ 의 평균:

$$\begin{aligned} & E(X) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 x f(x, y) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 x(x + y) dy dx \\ &= \int_0^1 x \left( x + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

$X^2$ 의 평균:

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \int_0^1 \int_0^1 x^2 f(x, y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 x^2 (x+y) dy dx \\
 &= \int_0^1 x \left( x^2 + \frac{1}{2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

$X$ 의 분산은  $\frac{11}{144}$ 이다. 같은 방법으로  $Y$ 의 평균은  $\frac{7}{12}$ ,  $Y$ 의 분산은  $\frac{11}{144}$ 이다.

(1)  $XY$ 의 평균:

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 xy f(x, y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 xy (x+y) dy dx \\
 &= \int_0^1 x \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \right) dx \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

이므로,  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{144}$ 이다.

(2)  $\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = -\frac{1}{11}$ 이다.  $X$ 와  $Y$ 는 음의 상관관계를 가진다.

(3)  $E(X - 2Y) = E(X) - 2E(Y) = -\frac{7}{12}$ ,  $\text{Var}(X - 2Y) = \text{Var}(X) + 4\text{Var}(Y) - 4\text{Cov}(X, Y) = \frac{59}{144}$