$$F(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j EX^{i+j}}\cdot\frac{e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}{\beta(1+e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}})^2}\left(\sum_{i=0}^{k}\alpha_i x^i\right)^2 dx=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\beta\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j EX^{i+j}}}_{B}\cdot\int_{-\infty}^{t}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j x^{i+j}\cdot\frac{e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}})^2}dx=$$

Введем замену:

$$\frac{x-\alpha}{2\beta}=u\Rightarrow x=2\beta u+\alpha$$

$$dx=2\beta du$$

$$t\Rightarrow y=\frac{t-\alpha}{2\beta}$$

$$=B\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j\int_{-\infty}^{t}x^{i+j}\cdot\frac{e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}})^2}dx=$$

$$=B\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j\int_{-\infty}^{y}(2\beta u+\alpha)^{i+j}\cdot\frac{e^{-2u}}{(1+e^{-2u})^2}\cdot 2\beta du=$$

$$=B\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j\int_{-\infty}^{y}\sum_{k=0}^{i+j}C_{i+j}^{k}\alpha^{i+j-k}(2\beta)^k u^k\cdot\frac{e^{-2u}}{(1+e^{-2u})^2}(2\beta)du=$$

$$=\underbrace{B\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j\sum_{k=0}^{i+j}C_{i+j}^{k}\alpha^{i+j-k}(2\beta)^{k+1}}_{C}\int_{-\infty}^{y}\underbrace{u^k\frac{e^{-2u}}{(1+e^{-2u})^2}}du=(*)$$

функция симметрична относительно нуля если k нечетно, относительно оси y, если k четна

$$(*)=C\left((-1)^k\underbrace{\int_0^{\infty}u^k\frac{e^{-2u}}{(1+e^{-2u})^2}du}_{I_1}+(-1)^{k+I\{x<0\}}\int_0^{y}\underbrace{u^k\frac{e^{-2u}}{(1+e^{-2u})^2}du}_{I_1}\right)$$

$$I_1=\int u^k\frac{e^{2u}e^{-2u}}{e^{2u}(1+2e^{-2u}+e^{-4u})}du=\int u^k\frac{1}{(e^{2u}+2+e^{-2u})}du=$$

$$=\int u^k\frac{4}{(e^{u}+e^{-u})^2}\cdot\frac{1}{4}du=\int u^k\operatorname{sech}^2(u)\frac{1}{4}du=\frac{1}{4}\int u^k\operatorname{sech}^2 u\,du$$

$$(*)=\frac{1}{4}C\left((-1)^k\int_0^{\infty}\underbrace{u^k\operatorname{sech}^2u\,du}_{I_2}+(-1)^{k+I\{y<0\}}\int_0^{y}\underbrace{u^k\operatorname{sech}^2u\,du}_{I_2}\right)$$

$$I_2 = \int_0^y u^k \operatorname{sech}^2 u\,du$$

Обозначим для удобства $x = u$, $n = k$

$$= \int_0^y x^n \operatorname{sech}^2 x\,dx = \int_0^y x^n\,d\tanh x = y^n \tanh y - \int_0^y n x^{n-1} \tanh x\,dx$$

$$= y^n \tanh y - n\int_0^y x^{n-1}\,d\ln\cosh x = y^n \tanh y - n\Big(y^{n-1}\ln\cosh y - \int_0^y (n-1)x^{n-2}\ln\cosh x\,dx\Big) =$$

$n \geq 1$

$$= y^n \tanh y - n y^{n-1}\ln\cosh y + \underset{n>1}{n(n-1)}\int_0^y x^{n-2}\ln\cosh x\,dx = (*)$$

$$\ln\cosh x = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 = x + \ln(1+e^{-2x}) - \ln 2$$
$$= x - Li_1(-e^{-2x}) - \ln 2$$

$$(*) = y^n \tanh y - n y^{n-1+1} + n y^{n-1} Li_1(-e^{-2y}) + n y^{n-1}\ln 2 +$$
$$+ n(n-1)\int_0^y x^{n-2}\ln(1+e^{-2x})\,dx + \underbrace{n(n-1)\int_0^y x^{n-1}\,dx}_{(n-1)y^n} - \underbrace{n(n-1)\int_0^y x^{n-2}\ln 2\,dx}_{n y^{n-1}\ln 2} =$$

$$= y^n \tanh y - y^n + \ln 2\, I\{n=1\} +$$
$$+ n y^{n-1} Li_1(-e^{-2y}) + n(n-1)\underbrace{\int_0^y x^{n-2}\ln(1+e^{-2x})\,dx}_{I_3}$$

$$I_3 = \int_0^y x^{n-2}\ln(1+e^{-2x})\,dx = \int_0^y \ln(1+e^{-2x})\,d\frac{x^{n-1}}{n-1} = -\frac{y^{n-1}}{n-1}Li_1(-e^{-2x}) - \int_0^y \frac{x^{n-1}}{n-1}\,d\ln(1+e^{-2x}) =$$

$$= -\frac{y^{n-1}}{n-1}Li_1(-e^{-2x}) + \frac{1}{n-1}\int_0^y x^{n-1}\frac{1}{1+e^{2x}}\,d(2x)$$

$$I_2 = y^n \tanh y - y^n + \ln 2\, I\{n=1\} + n y^{n-1} Li_1(-e^{-2y}) - n y^{n-1} Li_1(-e^{-2y}) + n\int_0^y x^{n-1}\frac{1}{1+e^{2x}}\,d(2x) =$$

$$= y^n \tanh y - y^n + \ln 2\, I\{n=1\} + n\int_0^y x^{n-1}\frac{1}{1+e^{2x}}\,d(2x) =$$

Введём замену:
$t = 2x$
$x = \frac{1}{2}t$
$dx = \frac{1}{2}dt$

$$= y^n \tanh y - y^n + \ln 2\, I\{n=1\} + n\int_0^{2y} t^{n-1}\frac{1}{1+e^t}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}dt =$$

$$= y^n \tanh y - y^n + \ln 2\, I\{n=1\} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\underbrace{\int_0^{2y}\frac{t^{n-1}}{1+e^t}\,dt}_{I_4}$$

$$I_4 = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+e^t}\,dt \qquad\qquad \frac{1}{1+e^t} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} e^{-jt}$$

$$= \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{1+e^t}\,dt - \int_x^\infty \frac{t^{n-1}}{1+e^t}\,dt = -\underbrace{\int_x^\infty \frac{t^{n-1}}{1+e^t}\,dt}_{*} + \Gamma(n)(1-2^{1-n})\zeta(n)$$

$$(*) = \int_0^\infty \frac{(x+t)^{n-1}}{1+e^{x+t}}\,dt = \sum_{k=0}^{m-1} C_{n-1}^{k}\, x^{n-1-k} \underbrace{\int_0^\infty \frac{t^k}{1+e^{x+t}}\,dt}_{B}$$

$$B = \int_0^\infty t^k \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} e^{-j(x+t)}\,dt = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} e^{-jx} \int_0^\infty t^k e^{-jt}\,dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)(-1)^j (e^{-x})^j \int_0^\infty \frac{1}{j^{k+1}} \cdot (jt)^k e^{-(jt)}\, d(jt) =$$

Формулы:

$$\int_0^\infty t^z e^{-t}\,dt = \Gamma(z+1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^p} = Li_p(z)$$

$$= -1 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-e^{-x})^j}{j^{k+1}}\, \Gamma(k+1) = -1 \cdot \Gamma(k+1) \cdot Li_{k+1}(-e^{-x})$$

$$(*) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k)}\, x^{n-1-k}\, (-1)\cdot \Gamma(k+1)\, Li_{k+1}(-e^{-x}) =$$

$$= \Gamma(n)(-1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{n-1-k}}{\Gamma(n-k)}\, Li_{k+1}(-e^{-x})$$

$$I_4 = \Gamma(n)(1-2^{1-n})\zeta(n) + \Gamma(n) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{n-1-k}}{\Gamma(n-k)}\, Li_{k+1}(-e^{-x}) =$$

$$= \Gamma(n)\left((1-2^{1-n})\zeta(n) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{n-1-k}}{\Gamma(n-k)}\, Li_{k+1}(-e^{-x})\right)$$

$$= \Gamma(n)\left((1-2^{1-n})\zeta(n) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2y)^{n-1-k}}{\Gamma(n-k)}\, Li_{k+1}(-e^{-2y})\right)$$

Соберём снизу вверх:

$$I_2 = y^n \cdot \tanh y - y^n + \ln 2\, I\{n=1\} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\Gamma(n)\left((1-e^{1-n})\zeta(n) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2y)^{n-1-k}}{\Gamma(n-k)}\mathrm{Li}_{k+1}(-e^{-2y})\right)$$

$$(*) = \frac{1}{4}\beta\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j\sum_{k=0}^{i+j}C_{i+j}^{k}\,\alpha^{i+j-k}(2\beta)^{k+1}\left((-1)^k\Gamma(k)(1-e^{1-k})\zeta(k) + (-1)^{k+I\{y<0\}} I_2\right)$$

Вернёмся обратно: $y = \frac{t-\alpha}{2\beta}$

$$(*) = \frac{1}{4}\beta\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j\sum_{k=0}^{i+j}C_{i+j}^{k}\,\alpha^{i+j-k}(2\beta)^{k+1}\Bigg\{(-1)^k\Gamma(k)(1-2^{1-k})\zeta(k) +$$

$$+ (-1)^{k+I\{\frac{t-\alpha}{2\beta}<0\}}\left(\left(\frac{t-\alpha}{2\beta}\right)^k\tanh\frac{t-\alpha}{2\beta} - \left(\frac{t-\alpha}{2\beta}\right)^k + \ln 2\{k=1\} + k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\Gamma(k)\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left((1-2^{1-k})\zeta(k) + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)^{k-1-j}}{\Gamma(k-j)}\cdot\mathrm{Li}_{j+1}\left(-e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}\right)\right)\right)\Bigg) = F(t)$$

Изначально у меня логистическая регрессия в которой я заменяю плотность логистического распределения на плотность аппроксимации.

Наша задача найти плотность.

В функции $\ln L(\theta; xy) = \sum_{i=1}^{n} (y_i \ln \lambda(x_i^T\theta) + (1-y_i)\ln(1-\lambda(x_i^T\theta)))$

заменить $\lambda(x^T\theta)$ на

$F(x^T\theta)$, где $F(x^T\theta) = F(x) = \int_{\mathbb{R}} f_a(x)\,dx$

$$f_a(x) = \underbrace{\frac{1}{\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} \alpha_i \alpha_j E(X^{i+j})}}_{\text{константа}} \cdot \underbrace{f_Y(x)\left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i (x)^i\right)^2}_{\text{зависит от аргумента}}$$

Задача сводится к

$\int_{\mathbb{R}} f_Y(x)\left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^i\right)^2 dx$ где можно раскрыть формулу.

$k=2$ $\quad f_a(x) = \frac{1}{\psi} f_Y(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2)^2 =$

$$= \frac{1}{\psi} f_Y(x)(\alpha_0^2 + \alpha_1\alpha_0 x + \alpha_0\alpha_2 x^2 + \alpha_0\alpha_1 x + \alpha_1^2 x^2 + \alpha_1\alpha_2 x^3 + \alpha_0\alpha_2 x^2 + \alpha_1\alpha_2 x^3 + \alpha_2^2 x^4) =$$

$$= \frac{1}{\psi} f_Y(x)(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 x + (2\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1^2)x^2 + 2\alpha_1\alpha_2 x^3 + \alpha_2^2 x^4)$$

(1) переход первый

Далее задача упрощается до вида:

$\int_{\mathbb{R}} f_Y(x) \cdot x^n dx$, $n \in \mathbb{N} \cup 0$.

Обозначим $\int_{\mathbb{R}} f_Y(x) \cdot x^n dx = A$

Границы интегрирования — $(-\infty, x)$

Функция около нуля симметрична

Если n — нечетна то интеграл по $\mathbb{R}$ равен нулю,

иначе $\int_{\mathbb{R}} x^n \operatorname{sech}^2 x\,dx = 2\int_0^{\infty} x^n \operatorname{sech}^2 x\,dx$

Если n четно, то: $\begin{cases} \text{машинный кусочек + половина решенного}, & x>0 \\ \text{половина решения − машинный кусок}, & \text{иначе} \end{cases}$,

если n нечетна то меняем знаки.

К счастью полная функция уже посчитана.

Сама плотность логистического распределения выглядит очень неприятно и имеет другие константы

$$f_Y(x) = \frac{e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}{\beta(1+e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}})^2}dx$$

$$A = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}{\beta(1+e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}})^2}\cdot x^n dx =$$

тут мы как-то приходим к гиперболическому секансу $\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{e^x+e^{-x}}$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\cdot e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}}{(1+2e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}+e^{-\frac{2(x-\alpha)}{\beta}})\cdot e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}}\cdot\frac{x^n}{\beta}dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}+2+e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}\cdot\frac{x^n}{\beta}dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1\cdot x^n/\beta}{e^{2(\frac{x-\alpha}{2\beta})}+2\cdot e^{\frac{x-\alpha}{2\beta}-\frac{x-\alpha}{2\beta}}+e^{-2(\frac{x-\alpha}{2\beta})}}dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x^n}{\beta}\cdot\frac{1}{(e^{\frac{x-\alpha}{2\beta}}+e^{-\frac{x-\alpha}{2\beta}})^2}dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x^n}{4\beta}\operatorname{sech}^2(\frac{x-\alpha}{2\beta})dx$$

тут уже можно по частям

(2) константу вносим
переход 2

$$\int\limits_{\mathbb{R}} x^n\cdot\operatorname{sech}^2 x\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} x^n\,d\tanh x = \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= x^n\tanh x - \int \tanh x\,dx^n =$$

$$= x^n\tanh x - \int n x^{n-1}\tanh x\,dx$$

$n=0$ $\quad \tanh x$

$n=1$ $\quad x\tanh x - \int\tanh x\,dx = x\tanh x - \ln\operatorname{ch}x =$

$$= x\tanh x - \ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$n=2$ $\quad x^2\tanh x - \int 2x\tanh x\,dx = x^2\tanh x - 2\int x\tanh x\,dx =$

$$= x^2\tanh x - 2\int x\,d\ln\cosh x =$$

$$= x^2\tanh x - 2(x\ln\cosh x - \underbrace{\int\ln\cosh x\,dx}_{B}) =$$

$$= x^2\tanh x - 2x\ln\cosh x + 2B$$

$$B = \int\ln\cosh x\,dx = \int\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx = \int\ln(e^x+e^{-x})dx - \int\ln 2\,dx =$$

$$= \int\ln\frac{1+e^{-2x}}{e^{-x}}dx - x\ln 2 = \int\ln(1+e^{-2x})dx - \int\ln e^{-x}dx - x\ln 2 =$$

$$= \underbrace{\int\ln(1+e^{-2x})dx}_{\text{по частям}} + \frac{x^2}{2} - x\ln 2 = x\ln(1+e^{-2x}) - \int x\,d\ln(1+e^{-2x}) + \frac{x^2}{2} - x\ln 2 =$$

$= \frac{x^2}{2} - x\ln 2 + x\ln(1+e^{-2x}) - C$

~~Вот этого быть не должно~~

$C = \int x\, d\ln(1+e^{-2x}) = \int x \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}(-2)\,dx = 2\int \frac{x}{e^{2x}+1}\,dx = \quad \cdot(-1)$

Вот потерялся минус

$= 2\cdot\left(\frac{1}{4} Li_2(-e^{-2x}) - \frac{1}{2} x\ln(1+e^{-2x})\right) = \frac{1}{2} Li_2(-e^{-2x}) - x\ln(1+e^{-2x})$

$\cdot(-1) \qquad \cdot(-1)$

Вот этот кусок правильный но шли к нему неправильно пришли

Возвращаем C

$B = \frac{x^2}{2} - x\ln 2 + x\ln(1+e^{-2x}) \cancel{+} x\ln(1+e^{-2x}) + \frac{1}{2} Li_2(-e^{-2x})$

Подставляем B

$n=2 \qquad x^2\tanh x - 2x\ln\cosh x + x^2 - 2x\ln 2 \cancel{+4x\ln(1+e^{-2x})} + Li_2(-e^{-2x})$

$+$

$1+e^{-2x} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x}$

$\cancel{\ln(1+e^{-2x}) = \ln(e^x+e^{-x}) - x}$

$\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = \ln(e^x+e^{-x}) - \ln 2 =$

$= \ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{e^{-x}}\right) - \ln 2 =$

$= \ln(1+e^{-2x}) + x - \ln 2$

$x^2\tanh x - 2x\ln(1+e^{-2x}) - 2x^2 + 2x\ln 2 + x^2 - 2x\ln 2 \cancel{+4x\ln(1+e^{-2x})} + Li_2(-e^{-2x})$

$= \cancel{x^2\tanh x \underbrace{+ 2x\ln(1+e^{-2x})}_{(*)} - x^2 \underbrace{- Li_2(-e^{-2x})}_{(*)}} \quad x^2\tanh x - 2x\ln(1+e^{-2x}) - x^2 + Li_2(-e^{-2x})$

интеграл при $n=2$

(*) неправильные знаки

Здесь есть какой то принцип?

Общая формула

Большая часть слагаемых сокращается по ходу дела. Но пока решаешь можно найти принцип.

✓① Перепроверить, где я потеряла минус?

✓② Написать решение для $n=3$ и записать, что вылезает на каждом шаге

$n = 3$ $\quad x^3\tanh x - \int 3x^2\tanh x\,dx = x^3\tanh x - 3\int x^2\tanh x\,dx$

$= x^3\tanh x - 3\int x^2\,d\ln\cosh x =$

$= x^3\tanh x - 3\left(x^2\ln\cosh x - \int \ln\cosh x\cdot 2x\,dx\right) =$

$= x^3\tanh x - 3x^2\ln\cosh x + 6\int \ln\cosh x\cdot x\,dx =$

$= x^3\tanh x - 3x^2\ln(1+e^{-2x}) \overset{(-)}{\cancel{+}} 3x^3 + 3x^2\ln 2 + 6\underbrace{\int x\ln\cosh x\,dx}_{B}$

$B = \int x\ln(1+e^{-2x})\,dx + \int x^2\,dx - \int x\ln 2\,dx =$

$= \underbrace{\int x\ln(1+e^{-2x})\,dx}_{C} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\ln 2$

$C = \int x\ln(1+e^{-2x})\,dx = \frac{1}{4}\left(2x\,\mathrm{Li}_2(-e^{-2x}) + \mathrm{Li}_3(-e^{-2x})\right)$

$= \frac{x}{2}\mathrm{Li}_2(-e^{-2x}) + \frac{1}{4}\mathrm{Li}_3(-e^{-2x})$

Подставим в B

$B = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\ln 2 + \frac{x}{2}\mathrm{Li}_2(-e^{-2x}) + \frac{1}{4}\mathrm{Li}_3(-e^{-2x})$

Вернем B в исходное выражение

$x^3\tanh x - 3x^2\ln(1+e^{-2x}) + 3x^3 \cancel{+ 3x^2\ln 2} +$

$+ 2x^3 \cancel{- 3x^2\ln 2} + 3x\,\mathrm{Li}_2(-e^{-2x}) + \frac{3}{2}\mathrm{Li}_3(-e^{-2x})$

По Вольфрамму $B =$

(a) $\frac{x}{2}\mathrm{Li}_2(-e^{-2x}) + \frac{1}{4}\mathrm{Li}_3(-e^{-2x}) -$

$- \frac{x^2}{6}\left(x + 3\ln(1+e^{-2x}) - 3\ln\cosh x\right) =$

$(a) - \frac{x^3}{6} \overset{(-)}{\cancel{+}} \frac{x^2}{2}\ln(1+e^{-2x}) +$

$+ \frac{x^2}{2}\left(\ln(1+e^{-2x}) + x - \ln 2\right) =$

$= (a) - \frac{x^3}{6} \overset{(-)}{\cancel{+}} \frac{x^2}{2}\ln(1+e^{-2x}) +$

$+ \frac{x^2}{2}\ln(1+e^{-2x}) + \frac{3x^3}{6} - \frac{x^2}{2}\ln 2$

$= (a) + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\ln 2$

Ошибка в первой половине выражения

$x^3\tanh x - \int 3x^2\tanh x\,dx = x^3\tanh x - 3\int x^2\tanh x\,dx =$

$= x^3\tanh x - 3\int x^2\,d\ln\cosh x =$

$= x^3\tanh x - 3\left(x^2\ln\cosh x - \int \ln\cosh x\,dx^2\right) =$

$= x^3\tanh x - 3x^2\left(\ln(1+e^{-2x}) + x - \ln 2\right) + 3\int 2x\ln\cosh x\,dx =$

$= x^3\tanh x - 3x^2\ln(1+e^{-2x}) \overset{-}{\cancel{+}} 3x^2 + 3x^2\ln 2 + 6B =$

$= x^3\tanh x - 3x^2\ln(1+e^{-2x}) - 3x^2 \cancel{+ 3x^2\ln 2} + 2x^3 \cancel{- 3x^2\ln 2} + 3x\,\mathrm{Li}_2(-e^{-2x}) + \frac{3}{2}\mathrm{Li}_3(-e^{-2x})$

$= x^3\tanh x - x^3 + 3x\,\mathrm{Li}_2(-e^{-2x}) + \frac{3}{2}\mathrm{Li}_3(-e^{-2x}) - 3x^2\ln(1+e^{-2x})$

$n = 3$ $\quad x^3\tanh x - x^3 + 3x\,\mathrm{Li}_2(-e^{-2x}) + \frac{3}{2}\mathrm{Li}_3(-e^{-2x}) - 3x^2\ln(1+e^{-2x})$

$n=4$ $\quad x^4\tanh x - \int 4x^3 \tanh dx =$

$= x^4\tanh x - 4\int x^3 \, d\ln\cosh x = \cancel{x^4\tanh x - 4\int}$

$= x^4\tanh x - 4\left(x^3\ln\cosh x - \int 3x^2 \ln\cosh x\, dx\right) =$

$= x^4\tanh x - 4x^3\ln(1+e^{-2x}) - 4x^4 + 4x^3\ln 2 + 12\underbrace{\int x^2 \ln\cosh x\, dx}_{B}$

Множитель перед $B = n(n-1)$

Что из себя представляет B?

$n=2$ $\quad \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(-e^{-2x})$

$n=3$ $\quad \frac{6}{12}x\,\mathrm{Li}_2 + \frac{3}{12}\mathrm{Li}_3$

$n=4$ $\quad \frac{6}{12}x^2\mathrm{Li}_2 + \frac{6}{12}x\,\mathrm{Li}_3 + \frac{3}{12}\mathrm{Li}_4$

$n=5$ $\quad \frac{2}{4}x^3\mathrm{Li}_2 + \frac{3}{4}x^2\mathrm{Li}_3 + \frac{3}{4}x\,\mathrm{Li}_4 + \frac{3}{8}\mathrm{Li}_5$

$n=6$ $\quad \frac{30}{60}x^4\mathrm{Li}_2 + \frac{30}{60}x^3\mathrm{Li}_3 + \frac{90}{60}x^2\mathrm{Li}_4 + \frac{90}{60}x\,\mathrm{Li}_5 + \frac{45}{60}\mathrm{Li}_6$

$\quad\quad\quad \frac{6}{12} \quad \frac{18}{12} \quad \frac{18}{12} \quad \frac{18}{12} \quad \frac{9}{12}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{2}{4} \quad \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

$\frac{2}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

$\frac{2}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1.5}{4} = \frac{3}{8}$

$\cancel{\frac{2}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3}{4}}$

$\frac{2}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{6}{4} \quad \frac{6}{4} \quad \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

$\frac{2}{4} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{10}{4} \quad \frac{15}{4} \quad \frac{15}{4} \quad \frac{7.5}{4} = \frac{15}{8}$

Последний коэффициент в два раза меньше предыдущего.

Первый всегда $= \frac{1}{2}$

Природа полилогарифма:

$\mathrm{Li}_1(-e^{-2x}) = -\ln(1+e^{-2x})$

Полилогарифмы возникают из задачи $\int x^{n-2}\ln(1+e^{-2x})dx$

$\mathrm{Li}_1(x) = -\ln(1-x)$

$\ln(1+e^{-2x}) \quad t = -e^{-2x}$

~~$\ln t$~~

$\ln(-t) = -2x$

$x = -\frac{1}{2}\ln(-t)$

Необходимо понять коэффициент полилогарифма, а для этого нужно понять полилогарифм

Возникают из интеграла $\int x^{n-2}\ln(1+e^{-2x})dx$

$Li_1(-e^{-2x}) = -\ln(1+e^{-2x})$

$\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2} =$

$= \ln(e^x+e^{-x}) - \ln 2 =$

$= \ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{e^{-x}}\right) - \ln 2 =$

$= \ln(1+e^{-2x}) + x - \ln 2$

$4x = 6$

$x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Общая формула ответа:

$$x^n \tanh x - x^n - nx^{n-1} Li_1(1+e^{-2x})$$

$n=0 \quad \tanh x$

$n=1 \quad x\tanh x - \ln(\cosh x) =$

$\cancel{x\tanh x - x - Li_1(1+e^{-2x}) + \ln 2}$

$\cancel{n=2 \quad x^2\tanh x - x^2 - 2x Li_1(1+}$

$n=0 \quad \tanh x$

$n=1 \quad x\tanh x - x - Li_1(-e^{-2x}) + \ln 2$

$n=2 \quad x^2\tanh x - x^2 - 2x Li_1(-e^{-2x}) + Li_2(-e^{-2x})$

$n=3 \quad x^3\tanh x - x^3 - 3x^2 Li_1(-e^{-2x}) + 3x Li_2(-e^{-2x}) + \frac{3}{2} Li_3(-e^{-2x})$

$n=4 \quad x^4\tanh x - x^4 - 4x^3 Li_1(-e^{-2x}) + 6x^2 Li_2(-e^{-2x}) + 6x Li_3(-e^{-2x}) + 3 Li_4(-e^{-2x})$

$2\left(-x Li_1(-e^{-2x}) + \frac{1}{2} Li_2(-e^{-2x})\right)$

$3\left(-x^2 Li_1(-e^{-2x}) + x Li_2(-e^{-2x}) + \frac{1}{2} Li_3(-e^{-2x})\right)$

$4\left(-x^3 Li_1(-e^{-2x}) + \frac{3}{2}x^2 Li_2(-e^{-2x}) + \frac{3}{2}x Li_3(-e^{-2x}) + \frac{3}{4} Li_4(-e^{-2x})\right)$

1	$\frac{1}{2}$			
1	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$		
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	
1	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{4}$

$n=5 \quad x^5\tanh x - x^5 - 5x^4 Li_1(-e^{-2x}) + 10x^3 Li_2(-e^{-2x}) + 15x^2 Li_3(-e^{-2x}) +$

$+ 15x Li_4(-e^{-2x}) + \frac{15}{2} Li_5(-e^{-2x})$

1					
2	$\frac{2}{2}$				
3	3	$\frac{3}{2}$			
4	6	6	$\frac{6}{2}$		
5	10	15	15	$\frac{15}{2}$	
6	15	30	45	45	$\frac{45}{2}$

1				
2				
3	3			
2·2	2·3	2·3		
6	2·5	3·5	3·5	
2·3	3·5	2·3·5	3·3·5	3·3·5

$n(n-1)\int x^m \ln(1+e^{-2x})dx$

$$\int x^m \ln(1+e^{-2x})\,dx = \int \ln(1+e^{-2x})\,d\frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{x^{m+1}}{m+1}Li_1(-e^{-2x}) - \int \frac{x^{m+1}}{m+1}\cdot\frac{(-2)}{1+e^{-2x}}dx =$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}Li_1(-e^{-2x}) + \int 2\cdot\frac{x^{m+1}}{m+1}\cdot\frac{1}{1+e^{+2x}}dx = \left|\begin{matrix}-2x=t\\ x=\frac{1}{2}t(-1)\\ dx=-\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right| =$$

$$\cancel{= \frac{x^{m+1}}{m+1}Li_1(-e^{-2x}) + \int\frac{2}{m+1}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}t^{m+1}}{1+e^{-t}}\cdot\frac{1}{2}dt =}$$

$$\cancel{= \frac{x^{m+1}}{m+1}Li_1(-e^{-2x}) + \frac{2}{m+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2}\int\frac{t^{m+1}}{1+e^{-t}}dt}$$

эта функция Дирихле

$$\eta(p) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int\frac{t^{p-1}}{e^t+1}\cdot dt = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^p} = (1-2^{1-p})\underbrace{\zeta(p)}_{\text{Дзета функция Римана}} \qquad \eta(1)=\ln 2$$

$$\int\frac{t^{p-1}}{1+e^t}dt = \Gamma(p)(1-2^{1-p})\zeta(p)$$

$$\int\frac{t^{m+1}}{1+e}$$

$$\cancel{\int x^m \ln(1+e^{-2x})dx} = \cancel{\frac{x^{m+1}}{m+1}Li_1(-e^{-2x}) + \int\frac{2}{m+1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2}(-1)^{m+2}t^{m+1}}{1+e}}$$

$$\int x^m \ln(1+e^{-2x})\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}Li_1(-e^{-2x}) + \int\frac{2}{m+1}\,\frac{x^{m+1}}{1+e^{2x}}dx =$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}Li_1(-e^{-2x}) + \int\frac{2}{m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2}\frac{t^{m+1}}{1+e^t}dt =$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}Li_1(-e^{-2x}) + \frac{2}{m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2}\underbrace{\int\frac{t^{m+1}}{1+e^t}dt}_{\int\frac{t^{n-1}}{1+e^t}dt}$$

Мне кажется это ряд Тейлора

$$\int\frac{t^{n-1}}{1+e^t}dt = \Gamma(n)(1-2^{1-n})\zeta(n) \qquad n=m+2$$

$n=2$
$m=0$

Это действительно ряд Тейлора

① Откуда берут первую производную? ⟶ Посчитать ряд Тейлора руками

② какую роль в этом выводе играет дзета функция Римана?

Дзета функция появляется когда считают определенный интеграл

какие у него границы? $(-\infty; x)$

Адекватно ли? иначе куда

$$\int \frac{t^{n-1}}{1+e^t}dt = \underbrace{\Gamma(n)(1-2^{1-n})\zeta(n)}$$

это в случае
полной функции

Если интеграл неполный,
то добавляются
полилогарифмы

Помогает, что полилогарифм — есть производные зета функции

$$\eta(p) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int \frac{t^{p-1}}{1+e^t}dt = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^p} = (1-2^{1-p})\zeta(p) \qquad \eta(1) = \ln 2$$

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}$$ не хватает минуса

$$Li_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^n}$$ совпадают, если $z=1$,
но в моём случае $-e^{-2x}$
откуда?

Формула Гурвица

Это функция Дебая

Если уберу минус или свяжу с η функцией Дирихле,
ζ функцией Римана,
то все хорошо

$$\underline{\eta(p) = (1-2^{1-p})\zeta(p)}$$

$Li_n(e^w)$ и $Li_n(-e^w)$

(3)
третий переход

Задача сводится к
$$\int_0^x \frac{t^n}{1+e^t}\,dt$$

Ряд Тейлора экспоненты:
$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{1+e^t} = \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} = \text{почему-то } \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} e^{-kt} \qquad (a)$$

$$\int_0^x \frac{t^n}{1+e^t}dt = \underbrace{\int_0^\infty \frac{t^n}{1+e^t}dt}_{\text{Dirichlet Eta function}} - \int_x^\infty \frac{t^n}{1+e^t}dt$$

$$\int_x^\infty \frac{t^n}{1+e^t}dt \underset{\text{[illegible] переход}}{=} \int_0^\infty \frac{(t+x)^n}{1+e^{t+x}}dt \underset{\text{раскрыли сумму}}{=} \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} \underbrace{\int_0^\infty \frac{t^k}{1+e^{x+t}}dt}_{\substack{\text{так же,}\\ \text{как и здесь}\\ B}}$$

$$B = \int_0^\infty \frac{e^{-(x+t)}}{1+e^{-(x+t)}} t^k dt = \sum_{j=1}^\infty (-1)^{j-1} e^{-jx} \int_0^\infty t^k e^{-jt} dt = (*)$$

t^k остается из прошлого интеграла

сумму по этой части внесли

$$\frac{1}{1+e^x}$$

В Вольфраме:
$$\int_0^\infty \frac{k^s}{1+e^{k-\mu}}dk = -\Gamma(s+1)\,\mathrm{Li}_{s+1}(-e^{\mu})$$
Здесь в принципе то же самое, но переход какой-то смешной

$$\sum_{j=1}^\infty (-1)^{j-1} e^{-jx} \int_0^\infty t^k e^{-jt} dt =$$
$$= \sum_{j=1}^\infty (-1)^{j-1} \int_0^\infty t^k e^{-j(t+x)} dt = \int_0 t^k \sum_{j=1}^\infty e^{-j(t+x)} (-1)^{j-1} dt$$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt$$

$$(*) = \sum_{j=1}^\infty (-1)^{j-1} e^{-jx} \int_0^\infty (jt)^k e^{-jt} \frac{1}{j^k} dt =$$

$$\cancel{= \sum_{j=1}^\infty \frac{(-e^{-x})^j}{j^{k+1}} \Gamma(k+1)} \quad \cancel{\underbrace{\frac{1}{j^k}}_{\text{не умножается на сумму}} \sum_{j=1}^\infty (-1)(-1)^j (e^{-x})^j = -\frac{1}{j^k} \sum_{j=1}^\infty (-e^{-x})^j}$$

$$= \sum_{j=1}^\infty (-1)(-1)^j (e^{-x})^j \int_0^\infty (jt)^k e^{-jt} \frac{1}{j^{k+1}} d\,jt =$$

$$= -\underbrace{\sum_{j=1}^\infty \frac{(-e^{-x})^j}{j^{k+1}}}_{\substack{\text{полилогарифм}\\ \text{по определению}}} \Gamma(k+1) = -\Gamma(k+1)\,\mathrm{Li}_{k+1}(-e^{-x})$$

$$\mathrm{Li}_p(z) = \sum_{k=1}^\infty \frac{z^k}{k^p}, \quad |z|<1$$

Finally,
$$\int_0^x \frac{t^n}{1+e^t}dt = \Gamma(n+1)\left((1-2^{-n})\,\zeta(n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{\cancel{\Gamma(n+1)}\, x^{n-k}\, \cancel{\Gamma(k+1)}}{\cancel{\Gamma(k+1)}\,\Gamma(n-k+1)}\,\mathrm{Li}_{k+1}(-e^{-x})\right)$$