Плотность функции распределения

1.

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{k}\sum\limits_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j\mathsf{E}X^{i+j}}\frac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{\beta(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2}(\sum_{i=0}^{k}\alpha_i t^i)^2dt=$$

$$=\frac{1}{\beta\sum\limits_{i=0}^{k}\sum\limits_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j\mathsf{E}X^{i+j}}\int\limits_{-\infty}^{x}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j t^{i+j}\frac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2}dt=$$

$$=\mathsf{C}_1\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{\beta}t^{i+j}\frac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2}dt=$$

$$=\mathsf{C}_1\begin{pmatrix}\alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k & 0 & \dots & 0\\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathsf{I}^{\mathsf{t}}_0\\ \mathsf{I}^{\mathsf{t}}_1\\ \vdots\\ \mathsf{I}^{\mathsf{t}}{}_{2k}\end{pmatrix}$$

2.

$$\mathsf{I}^{\mathsf{t}}{}_l=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{\beta}t^l\frac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2}dt=$$

Введем замену: $\frac{t-\alpha}{\beta}=u\Longrightarrow t=\beta u+\alpha$, $y=\frac{x-\alpha}{\beta}$

$$=\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{1}{\beta}\beta(\beta u+\alpha)^l\frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2}du=\int\limits_{-\infty}^{y}\sum_{i=0}^{l}C_l^i\alpha^{l-i}\beta^i u^i\frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2}du=$$

$$=\sum_{i=0}^{l}C_l^i\alpha^{l-i}\beta^i\int\limits_{-\infty}^{y}u^i\frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2}du=$$

$$=\begin{pmatrix}C_l^0\alpha^l & C_l^1\alpha^{l-1}\beta^1 & \dots & C_l^l\beta^l & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathsf{I}^{\mathsf{u}}_0\\ \mathsf{I}^{\mathsf{u}}_1\\ \vdots\\ \mathsf{I}^{\mathsf{u}}{}_{2k}\end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix}\mathsf{I}^{\mathsf{t}}_0\\ \mathsf{I}^{\mathsf{t}}_1\\ \vdots\\ \mathsf{I}^{\mathsf{t}}{}_{2k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_0^0\alpha^0\beta^0 & 0 & \dots & 0\\ C_1^0\alpha\beta^0 & C_1^1\alpha^0\beta & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_{2k}^0\alpha^{2k}\beta^0 & C_{2k}^1\alpha^{2k-1}\beta & \dots & C_{2k}^{2k}\alpha^0\beta^{2k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathsf{I}^{\mathsf{u}}_0\\ \mathsf{I}^{\mathsf{u}}_1\\ \vdots\\ \mathsf{I}^{\mathsf{u}}{}_{2k}\end{pmatrix}$$

3.

$$\mathsf{I}^{\mathsf{u}}{}_m=\int\limits_{-\infty}^{y}u^m\frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2}du=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{y}u^m\frac{e^u e^{-u}}{e^u(1+2e^{-u}+e^{-2u})}du=\int\limits_{-\infty}^{y}u^m\frac{1}{(e^u+2+e^{-u})}du=\int\limits_{-\infty}^{y}u^m\frac{1}{4}\frac{4}{(e^{\frac{u}{2}}+e^{-\frac{u}{2}})^2}du=$$

$$= \frac{1}{4} \int\limits_{-\infty}^{y} u^m \operatorname{sech}^2 \frac{u}{2} du$$

Функция симметрична относительно начала координат, если m нечетно, симметрична относительно оси Oy, если m четно.

$$\mathsf{I^u}_m = (-1)^m \frac{1}{4} \int\limits_0^{\infty} u^m \operatorname{sech}^2 \frac{u}{2} du + (-1)^{[m \equiv 0 \pmod 2][y<0]} \frac{1}{4} \int\limits_0^{|y|} u^m \operatorname{sech}^2 \frac{u}{2} du =$$

Обозначим $\mathsf{I^v}_m = \int\limits_0^{v} u^m \operatorname{sech}^2 \frac{u}{2} du$,

$$= (-1)^m \frac{1}{4} \mathsf{I^{v=inf}}_m + (-1)^{[m \equiv 0 \pmod 2][y<0]} \frac{1}{4} \mathsf{I^{v=|y|}}_m$$

4. Пусть m $= 0$

$$\mathsf{I^v}_0 = \int\limits_0^{v} \operatorname{sech}^2 \frac{u}{2} du = 2 \int\limits_0^{v} d \tanh \frac{u}{2} = 2 \tanh \frac{v}{2}$$

5. Пусть m $= 1$

$$\mathsf{I^v}_1 = \int\limits_0^{v} u \operatorname{sech}^2 \frac{u}{2} du =$$

$$= 2 \int\limits_0^{v} u d \tanh \frac{u}{2} = 2v \tanh \frac{v}{2} - 4 \int\limits_0^{v} \frac{1}{2} \tanh \frac{v}{2} du = 2v \tanh \frac{v}{2} - 4 \ln \cosh \frac{v}{2} =$$

$$= 2v \tanh \frac{v}{2} - 2v + 4 \operatorname{Li}_1(-e^{-v}) + 4 \ln 2$$

6. Пусть $m \geq 2$

$$\mathsf{I^v}_m = \int\limits_0^{v} u^m \operatorname{sech}^2 \frac{u}{2} du =$$

$$= 2 \int\limits_0^{v} u^m d \tanh \frac{u}{2} = 2v^m \tanh \frac{v}{2} - 2 \int\limits_0^{v} m u^{m-1} \tanh \frac{u}{2} du =$$

$$= 2v^m \tanh \frac{v}{2} - 4m \int\limits_0^{v} u^{m-1} d \ln \cosh \frac{u}{2} =$$

$$= 2v^m \tanh \frac{v}{2} - 4mv^{m-1} \ln \cosh \frac{v}{2} + 4m \int\limits_0^{v} (m-1) u^{m-2} \ln \cosh \frac{u}{2} du =$$

$$= 2v^m \tanh \frac{v}{2} - 4mv^{m-1} (\frac{v}{2} - \operatorname{Li}_1(-e^{-v}) - \ln 2) + 4m(m-1) \int\limits_0^{v} u^{m-2} (\frac{u}{2} - \operatorname{Li}_1(-e^{-u}) - \ln 2) du =$$

$$= 2v^m \tanh \frac{v}{2} - 2v^m + 4mv^{m-1} \operatorname{Li}_1(-e^{-v}) - 4m(m-1) \int\limits_0^{v} u^{m-2} \operatorname{Li}_1(-e^{-u}) du =$$

$$= 2v^m \tanh \frac{v}{2} - 2v^m + 4mv^{m-1} \operatorname{Li}_1(-e^{-v}) - 4m(m-1) \int\limits_0^{v} \operatorname{Li}_1(-e^{-u}) d \frac{u^{m-1}}{m-1} =$$

$$= 2v^m \tanh \frac{v}{2} - 2v^m + 4mv^{m-1} \operatorname{Li}_1(-e^{-v}) - 4mu^{m-1} \operatorname{Li}_1(-e^{-u}) - 4m(m-1) \int\limits_0^{v} \frac{u^{m-1}}{m-1} d \ln(1+e^{-u}) =$$

$$= 2v^m \tanh\tfrac{v}{2} - 2v^m + 4m\int\limits_0^v u^{m-1}\tfrac{1}{1+e^u}du =$$

Обозначим $\mathsf{I^f}_m = \int\limits_0^v u^m \tfrac{1}{1+e^u}du$

$$= 2v^m \tanh\tfrac{v}{2} - 2v^m + 4m\mathsf{I^f}_{m-1}$$

7.

$$\mathsf{I^f}_m = \int\limits_0^v u^m \tfrac{1}{1+e^u}du =$$

$$= \int\limits_0^\infty u^m \tfrac{1}{1+e^u}du - \int\limits_v^\infty u^m \tfrac{1}{1+e^u}du =$$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) - \int\limits_v^\infty u^m \tfrac{1}{1+e^u}du =$$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) - \int\limits_0^\infty (v+u)^m \tfrac{1}{1+e^{v+u}}du =$$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) - \sum_{i=0}^m C_m^i v^{m-i}\int\limits_0^\infty u^i \tfrac{1}{1+e^{v+u}}du =$$

Заметим, что $\frac{1}{1+e^u} = \sum\limits_{j=1}^\infty (-1)^{j-1}e^{-ju}$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) - \sum_{i=0}^m C_m^i v^{m-i}\int\limits_0^\infty u^i \sum_{j=1}^\infty (-1)^{j-1}e^{-j(v+u)}du =$$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) - \sum_{i=0}^m C_m^i v^{m-i}\sum_{j=1}^\infty (-1)^{j-1}e^{-jv}\int\limits_0^\infty u^i e^{-ju}du =$$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) - \sum_{i=0}^m C_m^i v^{m-i}\sum_{j=1}^\infty (-1)(-1)^j(e^{-v})^j\int\limits_0^\infty \tfrac{1}{j^{i+1}}(ju)^i e^{-ju}d(ju) =$$

Поскольку $\int\limits_0^\infty u^i e^{-u}du = \Gamma(i+1)$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) + \sum_{i=0}^m \tfrac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(m-i+1)}v^{m-i}\sum_{j=1}^\infty \tfrac{(-e^{-v})^j}{j^{i+1}}\Gamma(i+1) =$$

По определению $\mathrm{Li_p(z)} = \sum\limits_{j=1}^\infty \frac{z^j}{j^p}$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) + \Gamma(m+1)\sum_{i=0}^m \tfrac{v^{m-i}}{\Gamma(m-i+1)}\,\mathrm{Li_{i+1}}(-e^{-v})$$

8. Если $v \longrightarrow \infty$, то

$$\mathsf{I^v}_m = \int\limits_0^v u^m \operatorname{sech}^2\tfrac{u}{2}du$$

$$\lim_{v\to\infty}\tfrac{1}{4}\mathsf{I^v}_0=\lim_{v\to\infty}\tfrac{1}{2}\tanh\tfrac{v}{2}=\tfrac{1}{2}$$

$$\lim_{v\to\infty}\tfrac{1}{4}\mathsf{I^v}_1=\lim_{v\to\infty}(\tfrac{1}{2}v\tanh\tfrac{v}{2}-\tfrac{1}{2}v+\mathrm{Li}_1(-e^{-v})+\ln 2)=\ln 2$$

$$\lim_{v\to\infty}\tfrac{1}{4}\mathsf{I^v}_m=\lim_{v\to\infty}(\tfrac{1}{2}v^m\tanh\tfrac{v}{2}-\tfrac{1}{2}v^m)+m\Gamma(m)(1-2^{1-m})\zeta(m)=m\Gamma(m)(1-2^{1-m})\zeta(m)$$

9. Обозначим $\mathsf{C_m}=m\Gamma(m)(1-2^{1-m})\zeta(m)$

$$\mathsf{I^u}_m=(-1)^m\mathsf{C_m}+$$
$$(-1)^{[m\equiv 0\pmod 2][y<0]}\left(\tfrac{1}{2}|y|^m\tanh\tfrac{|y|}{2}-\tfrac{1}{2}|y|^m+\mathsf{C_m}+m\Gamma(m)\sum_{i=0}^{m-1}\tfrac{|y|^{m-i-1}}{\Gamma(m-i)}\mathrm{Li_{i+1}}(-e^{-|y|})\right)=$$

$$=\mathsf{C_m}\left((-1)^m+(-1)^{[m\equiv 0\pmod 2][y<0]}\right)+$$
$$(-1)^{[m\equiv 0\pmod 2][y<0]}\left(\tfrac{1}{2}|y|^m(\tanh\tfrac{|y|}{2}-1)+m\Gamma(m)\sum_{i=0}^{m-1}\tfrac{|y|^{m-i-1}}{\Gamma(m-i)}\mathrm{Li_{i+1}}(-e^{-|y|})\right)=$$

Обозначим $\mathsf{C^y_m}=(-1)^{[m\equiv 0\pmod 2][y<0]}$, $\mathsf{C^{inf}_m}=(-1)^m$

$$=\mathsf{C_m}(\mathsf{C^{inf}_m}+\mathsf{C^y_m})+\mathsf{C^y_m}\left(\tfrac{1}{2}|y|^m(\tanh\tfrac{|y|}{2}-1)+m\Gamma(m)\sum_{i=0}^{m-1}\tfrac{|y|^{m-i-1}}{\Gamma(m-i)}\mathrm{Li_{i+1}}(-e^{-|y|})\right)$$

$$\mathsf{I^u}_0=\lim_{y\to\infty}\tfrac{1}{2}|y|^m\tanh\tfrac{|y|}{2}+\mathsf{C^y_m}\tfrac{1}{2}|y|^m\tanh\tfrac{|y|}{2}$$

$$\begin{pmatrix}\mathsf{I^u_1}\\ \mathsf{I^u_2}\\ \vdots\\ \mathsf{I^u}_{2k}\end{pmatrix}=\mathsf{C}\circ(\mathsf{C^{inf}}+\mathsf{C^y})+\mathsf{C^y}\circ\left(\frac{1}{2}\tanh\frac{|y|}{2}-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}|y|^1\\ |y|^2\\ \vdots\\ |y|^{2k}\end{pmatrix}+\mathsf{C^y}\circ\begin{pmatrix}\Gamma(1)\\ 2\Gamma(2)\\ \vdots\\ 2k\Gamma(2k)\end{pmatrix}\circ\mathsf{C^{Li}}$$

Где $\circ$ – символ поэлементного умножения,

$$\mathsf{C^{Li}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\Gamma(1)}&0&\dots&0\\ \frac{|y|}{\Gamma(2)}&\frac{1}{\Gamma(1)}&\dots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&0\\ \frac{|y|^{2k-1}}{\Gamma(2k)}&\frac{|y|^{2k-2}}{\Gamma(2k-1)}&\dots&\frac{1}{\Gamma(1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{Li}_1(-e^{-|y|})\\ \mathrm{Li}_2(-e^{-|y|})\\ \vdots\\ \mathrm{Li_{2k}}(-e^{-|y|})\end{pmatrix}$$

10. Моменты

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j\mathsf{E}X^{i+j}=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_0&\alpha_1&\dots&\alpha_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0&\alpha_1&\dots&\alpha_k&0&\dots&0\\ 0&\alpha_0&\alpha_1&\dots&\alpha_k&\dots&0\\ \vdots&&\vdots&&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&0&\alpha_0&\alpha_1&\dots&\alpha_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathsf{E}X^0\\ \mathsf{E}X^1\\ \vdots\\ \mathsf{E}X^{2k}\end{pmatrix}$$

$$\mathsf{E}X^q=\int_{-\infty}^{\infty}x^q\frac{e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}{\beta(1+e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}})^2}dx$$

Введем замену: $\frac{x-\alpha}{\beta}=y\Longrightarrow x=\beta y+\alpha$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{\beta}\beta(\beta y+\alpha)^q \tfrac{e^{-y}}{(1+e^{-y})^2}dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{q} C_q^i \alpha^{q-i}\beta^i y^i \tfrac{e^{-y}}{(1+e^{-y})^2}dy =$$

$$= \sum_{i=0}^{q} C_q^i \alpha^{q-i}\beta^i \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^i \tfrac{e^{-y}}{(1+e^{-y})^2}dy =$$

$$= \begin{pmatrix} C_q^0\alpha^q & C_q^1\alpha^{q-1}\beta^1 & \dots & C_q^q\beta^q & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+(-1)^0\frac{1}{2} \\ \ln 2 + (-1)^1 \ln 2 \\ \vdots \\ 2k\Gamma(2k)(1-2^{2k})\zeta(2k) + (-1)^{2k} 2k\Gamma(2k)(1-2^{2k})\zeta(2k) \end{pmatrix}$$

11. Градиент

$$L(\alpha, w; x, y) = -\sum_{i=0}^{l} y_i \ln F(\alpha, \langle w, x_i\rangle) + (1-y_i)\ln\left(1 - F(\alpha, \langle w, x_i\rangle)\right)$$

Пусть $\theta = (\alpha, w)$, обозначим $\mathsf{F_i} = F(\alpha, \langle w, x_i\rangle)$

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta} L(\alpha, w; x, y) = -\sum_{i=0}^{l} \tfrac{\partial}{\partial\theta}\left(y_i \ln \mathsf{F_i} + (1-y_i)\ln(1-\mathsf{F_i})\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{l} \tfrac{-y_i}{\mathsf{F_i}} \tfrac{\partial}{\partial\theta}\mathsf{F_i} + \tfrac{1-y_i}{1-\mathsf{F_i}} \tfrac{\partial}{\partial\theta}\mathsf{F_i} = \sum_{i=0}^{l} \tfrac{-y_i + y_i\mathsf{F_i} + \mathsf{F_i} - y_i\mathsf{F_i}}{\mathsf{F_i}(1-\mathsf{F_i})} \tfrac{\partial}{\partial\theta}\mathsf{F_i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{l} \tfrac{\mathsf{F_i} - y_i}{\mathsf{F_i}(1-\mathsf{F_i})} \tfrac{\partial}{\partial\theta}\mathsf{F_i} = \sum_{i=0}^{l} \tfrac{\mathsf{F_i} - y_i}{\mathsf{F_i}(1-\mathsf{F_i})} \left(\tfrac{\partial}{\partial\alpha}\mathsf{F_i}\,, \tfrac{\partial}{\partial w}\mathsf{F_i}\right)$$

12.

$$\tfrac{\partial}{\partial\alpha}\mathsf{F_i} = \tfrac{\partial}{\partial\alpha} \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{k}\sum\limits_{j=0}^{k} \alpha_i\alpha_j \mathsf{E}X^{i+j}} \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} \alpha_i\alpha_j \int\limits_{-\infty}^{\langle w\,, x_\mathsf{i}\rangle} \tfrac{1}{\beta} t^{i+j} \frac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2} dt =$$

$$= \tfrac{\partial}{\partial\alpha} \frac{\sum\limits_{i=0}^{k}\sum\limits_{j=0}^{k} \alpha_i\alpha_j \mathsf{I}^{\mathsf{ti}}{}_{i+j}}{\sum\limits_{i=0}^{k}\sum\limits_{j=0}^{k} \alpha_i\alpha_j \mathsf{E}X^{i+j}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} \alpha_i\alpha_j \mathsf{I^t}{}_{i+j} = (2\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \mathsf{I^t}{}_{i+j})_{i=0}^{k} = 2 \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{I^t_0} \\ \mathsf{I^t_1} \\ \vdots \\ \mathsf{I^t}{}_{2k} \end{pmatrix} = \mathsf{A}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} \alpha_i\alpha_j \mathsf{E}X^{i+j} = (2\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \mathsf{E}X^{i+j})_{i=0}^{k} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{E}X^0 \\ \mathsf{E}X^1 \\ \vdots \\ \mathsf{E}X^{2k} \end{pmatrix} = \mathsf{E}$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\alpha}\mathsf{F_i} = \mathsf{AC_1} - \mathsf{EC_1}{}^2 \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} \alpha_i\alpha_j \mathsf{I^t}{}_{i+j} =$$

$$= \mathsf{AC_1} - \mathsf{EC_1}^2 \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{I}^{\mathsf{t}}_0 \\ \mathsf{I}^{\mathsf{t}}_1 \\ \vdots \\ \mathsf{I^t}_{2k} \end{pmatrix}$$

13. Для случая $\langle w\,, x_{\mathsf{i}}\rangle \geq 0$

$$\tfrac{\partial}{\partial w}\mathsf{F_i} = \tfrac{\partial}{\partial w}\mathsf{C_1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j\int\limits_{-\infty}^{\langle w\,,x_{\mathsf{i}}\rangle}\tfrac{1}{\beta}t^{i+j}\tfrac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2}dt =$$

$$= \mathsf{C_1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j\tfrac{\partial}{\partial w}\int\limits_{-\infty}^{\langle w\,,x_{\mathsf{i}}\rangle}\tfrac{1}{\beta}t^{i+j}\tfrac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2}dt =$$

$$= \mathsf{C_1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j\tfrac{1}{\beta}\langle w\,, x_{\mathsf{i}}\rangle^{i+j}\tfrac{e^{-\frac{\langle w\,,x_{\mathsf{i}}\rangle-\alpha}{\beta}}}{\left(1+e^{-\frac{\langle w\,,x_{\mathsf{i}}\rangle-\alpha}{\beta}}\right)^2}\tfrac{\partial}{\partial w}\langle w\,, x_{\mathsf{i}}\rangle =$$

$$= \tfrac{e^{-\frac{\langle w\,,x_{\mathsf{i}}\rangle-\alpha}{\beta}}}{\beta\left(1+e^{-\frac{\langle w\,,x_{\mathsf{i}}\rangle-\alpha}{\beta}}\right)^2}x_{\mathsf{i}}\mathsf{C_1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j\langle w\,, x_{\mathsf{i}}\rangle^{i+j}$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\mathsf{F_i} = \frac{e^{-\frac{\langle w\,,x_{\mathsf{i}}\rangle-\alpha}{\beta}}}{\beta\left(1+e^{-\frac{\langle w\,,x_{\mathsf{i}}\rangle-\alpha}{\beta}}\right)^2}x_{\mathsf{i}}\mathsf{C_1}\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle w\,, x_{\mathsf{i}}\rangle^0 \\ \langle w\,, x_{\mathsf{i}}\rangle^1 \\ \vdots \\ \langle w\,, x_{\mathsf{i}}\rangle^{2k} \end{pmatrix}$$

14. Для случая $\langle w\,, x_{\mathsf{i}}\rangle < 0$

$$\tfrac{\partial}{\partial w}\mathsf{F_i} = \tfrac{\partial}{\partial w}\mathsf{C_1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j\int\limits_{-\infty}^{\langle w\,,x_{\mathsf{i}}\rangle}\tfrac{1}{\beta}t^{i+j}\tfrac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2}dt =$$

$$= \mathsf{C_1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j\tfrac{\partial}{\partial w}\int\limits_{-\infty}^{\langle w\,,x_{\mathsf{i}}\rangle}\tfrac{1}{\beta}t^{i+j}\tfrac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2}dt$$

Если $i + j$ четно, то функция симметрична относительно оси ординат.

$$\int\limits_{-\infty}^{\langle w\,,x_{\mathsf{i}}\rangle}\tfrac{1}{\beta}t^{i+j}\tfrac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2}dt = \int\limits_{-\infty}^{0}\tfrac{1}{\beta}t^{i+j}\tfrac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2}d - \int\limits_{0}^{\langle w\,,x_{\mathsf{i}}\rangle}\tfrac{1}{\beta}t^{i+j}\tfrac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2}dt$$

$$\tfrac{\partial}{\partial w}\int\limits_{-\infty}^{\langle w\,,x_{\mathsf{i}}\rangle}\tfrac{1}{\beta}t^{i+j}\tfrac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2}dt = -\tfrac{\partial}{\partial w}\int\limits_{0}^{\langle w\,,x_{\mathsf{i}}\rangle}\tfrac{1}{\beta}t^{i+j}\tfrac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2}dt = -\tfrac{1}{\beta}x_{\mathsf{i}}\langle w\,, x_{\mathsf{i}}\rangle^{i+j}\tfrac{e^{-\frac{\langle w\,,x_{\mathsf{i}}\rangle-\alpha}{\beta}}}{\left(1+e^{-\frac{\langle w\,,x_{\mathsf{i}}\rangle-\alpha}{\beta}}\right)^2}$$

Если $i + j$ нечетно, то это соответствует ситуации $\langle w\,, x_{\mathsf{i}}\rangle \geq 0$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial w}\mathsf{F_i} = \frac{e^{-\frac{\langle w\,, x_\mathsf{i}\rangle - \alpha}{\beta}}}{\beta\left(1+e^{-\frac{\langle w\,, x_\mathsf{i}\rangle - \alpha}{\beta}}\right)^2} x_\mathsf{i}\mathsf{C_1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j(-1)^{[(i+j)\equiv 0 \pmod 2][\langle w\,, x_\mathsf{i}\rangle<0]}\langle w\,, x_\mathsf{i}\rangle^{i+j}$$

15. В конечном итоге имеем

Обозначим $\mathsf{C}_{\mathsf{i+j}}^{\langle \mathsf{w}\,, \mathsf{x_i}\rangle} = (-1)^{[(i+j)\equiv 0 \pmod 2][\langle w\,, x_\mathsf{i}\rangle<0]}$

$$\frac{\partial}{\partial w}\mathsf{F_i} = \frac{e^{-\frac{\langle w\,, x_\mathsf{i}\rangle - \alpha}{\beta}}}{\beta\left(1+e^{-\frac{\langle w\,, x_\mathsf{i}\rangle - \alpha}{\beta}}\right)^2} x_\mathsf{i}\mathsf{C_1}\begin{pmatrix}\alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k & 0 & \dots & 0\\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k\end{pmatrix}\mathsf{C}^{\langle \mathsf{w}\,, \mathsf{x_i}\rangle}\circ\begin{pmatrix}\langle w\,, x_\mathsf{i}\rangle^0\\ \langle w\,, x_\mathsf{i}\rangle^1\\ \vdots\\ \langle w\,, x_\mathsf{i}\rangle^{2k}\end{pmatrix}$$