Плотность функции распределения

1.

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{k}\sum\limits_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j \mathsf{E}X^{i+j}} \frac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{\beta(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2} (\sum_{i=0}^{k}\alpha_i t^i)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{\beta\sum\limits_{i=0}^{k}\sum\limits_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j \mathsf{E}X^{i+j}} \int\limits_{-\infty}^{x} \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j t^{i+j} \frac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2} dt =$$

$$= \mathsf{C}_1 \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\alpha_j \int\limits_{-\infty}^{x} t^{i+j} \frac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2} dt =$$

$$= \mathsf{C}_1 \begin{pmatrix}\alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{I}^{\mathsf{t}}_0 \\ \mathsf{I}^{\mathsf{t}}_1 \\ \vdots \\ \mathsf{I}^{\mathsf{t}}{}_{2k+1} \end{pmatrix}$$

2.

$$\mathsf{I}^{\mathsf{t}}{}_l = \int\limits_{-\infty}^{x} t^l \frac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2} dt =$$

Введем замену: $\frac{t-\alpha}{\beta} = u \Longrightarrow t = \beta u + \alpha$, $y = \frac{x-\alpha}{\beta}$

$$= \int\limits_{-\infty}^{y} \beta(\beta u + \alpha)^l \frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2} du = \beta \int\limits_{-\infty}^{y} \sum_{i=0}^{l} C_l^i \alpha^{l-i}\beta^i u^i \frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2} du =$$

$$= \sum_{i=0}^{l} C_l^i \alpha^{l-i}\beta^{i+1} \int\limits_{-\infty}^{y} u^i \frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2} du =$$

$$= \begin{pmatrix} C_l^0\alpha^l\beta & C_l^1\alpha^{l-1}\beta^2 & \dots & C_l^l\beta^{l+1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{I}^{\mathsf{u}}_0 \\ \mathsf{I}^{\mathsf{u}}_1 \\ \vdots \\ \mathsf{I}^{\mathsf{u}}{}_{2k+1} \end{pmatrix}$$

3.

$$\mathsf{I}^{\mathsf{u}}{}_m = \int\limits_{-\infty}^{y} u^m \frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2} du =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{y} u^m \frac{e^u e^{-u}}{e^u(1+2e^{-u}+e^{-2u})} du = \int\limits_{-\infty}^{y} u^m \frac{1}{(e^u+2+e^{-u})} du = \int\limits_{-\infty}^{y} u^m \frac{1}{4} \frac{4}{(e^{\frac{u}{2}}+e^{-\frac{u}{2}})^2} du =$$

$$= \frac{1}{4} \int\limits_{-\infty}^{y} u^m \operatorname{sech}^2 \frac{u}{2} du$$

Функция симметрична относительно начала координат, если m нечетно, симметрична относительно оси Oy, если m четно.

$$\mathsf{I^u}_m = (-1)^m \tfrac{1}{4}\int\limits_0^{\infty} u^m \operatorname{sech}^2 \tfrac{u}{2} du + (-1)^{[m\equiv 0 \pmod 2][y<0]} \tfrac{1}{4}\int\limits_0^{|y|} u^m \operatorname{sech}^2 \tfrac{u}{2} du =$$

Обозначим $\mathsf{I^v}_m = \int\limits_0^{v} u^m \operatorname{sech}^2 \frac{u}{2} du$,

$$= (-1)^m \tfrac{1}{4} \mathsf{I^{v=inf}}_m + (-1)^{[m\equiv 0 \pmod 2][y<0]} \tfrac{1}{4} \mathsf{I^{v=|y|}}_m$$

4. Пусть m = 0

$$\mathsf{I^v}_0 = \int\limits_0^{v} \operatorname{sech}^2 \tfrac{u}{2} du = 2\int\limits_0^{v} d \tanh \tfrac{u}{2} = 2 \tanh \tfrac{v}{2}$$

5. Пусть m = 1

$$\mathsf{I^v}_1 = \int\limits_0^{v} u \operatorname{sech}^2 \tfrac{u}{2} du =$$

$$= 2\int\limits_0^{v} u d \tanh \tfrac{u}{2} = 2v \tanh \tfrac{v}{2} - 4\int\limits_0^{v} \tfrac{1}{2} \tanh \tfrac{v}{2} du = 2v \tanh \tfrac{v}{2} - 4 \ln \cosh \tfrac{v}{2} =$$

$$= 2v \tanh \tfrac{v}{2} - 2v + 4 \operatorname{Li}_1(-e^{-v}) + 4 \ln 2$$

6. Пусть $m \geq 2$

$$\mathsf{I^v}_m = \int\limits_0^{v} u^m \operatorname{sech}^2 \tfrac{u}{2} du =$$

$$= 2\int\limits_0^{v} u^m d \tanh \tfrac{u}{2} = 2v^m \tanh \tfrac{v}{2} - 2\int\limits_0^{v} m u^{m-1} \tanh \tfrac{u}{2} du =$$

$$= 2v^m \tanh \tfrac{v}{2} - 4m\int\limits_0^{v} u^{m-1} d \ln \cosh \tfrac{u}{2} =$$

$$= 2v^m \tanh \tfrac{v}{2} - 4mv^{m-1} \ln \cosh \tfrac{v}{2} + 4m\int\limits_0^{v} (m-1) u^{m-2} \ln \cosh \tfrac{u}{2} du =$$

$$= 2v^m \tanh \tfrac{v}{2} - 4mv^{m-1}(\tfrac{v}{2} - \operatorname{Li}_1(-e^{-v}) - \ln 2) + 4m(m-1)\int\limits_0^{v} u^{m-2}(\tfrac{u}{2} - \operatorname{Li}_1(-e^{-u}) - \ln 2) du =$$

$$= 2v^m \tanh \tfrac{v}{2} - 2v^m + 4mv^{m-1} \operatorname{Li}_1(-e^{-v}) - 4m(m-1)\int\limits_0^{v} u^{m-2} \operatorname{Li}_1(-e^{-u}) du =$$

$$= 2v^m \tanh \tfrac{v}{2} - 2v^m + 4mv^{m-1} \operatorname{Li}_1(-e^{-v}) - 4m(m-1)\int\limits_0^{v} \operatorname{Li}_1(-e^{-u}) d\tfrac{u^{m-1}}{m-1} =$$

$$= 2v^m \tanh \tfrac{v}{2} - 2v^m + 4mv^{m-1} \operatorname{Li}_1(-e^{-v}) - 4mu^{m-1} \operatorname{Li}_1(-e^{-u}) - 4m(m-1)\int\limits_0^{v} \tfrac{u^{m-1}}{m-1} d \ln(1+e^{-u}) =$$

$$= 2v^m \tanh \tfrac{v}{2} - 2v^m + 4m\int\limits_0^{v} u^{m-1} \tfrac{1}{1+e^u} du =$$

Обозначим $\mathsf{I^f}_m = \int\limits_0^v u^m \frac{1}{1+e^u} du$

$$= 2v^m \tanh\frac{v}{2} - 2v^m + 4m\mathsf{I^f}_{m-1}$$

7.

$$\mathsf{I^f}_m = \int\limits_0^v u^m \frac{1}{1+e^u} du =$$

$$= \int\limits_0^\infty u^m \frac{1}{1+e^u} du - \int\limits_v^\infty u^m \frac{1}{1+e^u} du =$$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) - \int\limits_v^\infty u^m \frac{1}{1+e^u} du =$$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) - \int\limits_0^\infty (v+u)^m \frac{1}{1+e^{v+u}} du =$$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) - \sum_{i=0}^{m} C_m^i v^{m-i} \int\limits_0^\infty u^i \frac{1}{1+e^{v+u}} du =$$

Заметим, что $\frac{1}{1+e^u} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} e^{-ju}$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) - \sum_{i=0}^{m} C_m^i v^{m-i} \int\limits_0^\infty u^i \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} e^{-j(v+u)} du =$$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) - \sum_{i=0}^{m} C_m^i v^{m-i} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} e^{-jv} \int\limits_0^\infty u^i e^{-ju} du =$$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) - \sum_{i=0}^{m} C_m^i v^{m-i} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)(-1)^j (e^{-v})^j \int\limits_0^\infty \frac{1}{j^{i+1}} (ju)^i e^{-ju} d(ju) =$$

Поскольку $\int\limits_0^\infty u^i e^{-u} du = \Gamma(i+1)$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) + \sum_{i=0}^{m} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(m-i+1)} v^{m-i} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-e^{-v})^j}{j^{i+1}} \Gamma(i+1) =$$

По определению $\mathrm{Li_p(z)} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j^p}$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) + \Gamma(m+1) \sum_{i=0}^{m} \frac{v^{m-i}}{\Gamma(m-i+1)} \mathrm{Li_{i+1}}(-e^{-v})$$

8. Если $v \longrightarrow \infty$, то

$$\mathsf{I^v}_m = \int\limits_0^v u^m \operatorname{sech}^2 \frac{u}{2} du$$

$$\lim_{v\to\infty} \frac{1}{4}\mathsf{I^v}_0 = \lim_{v\to\infty} \frac{1}{2} \tanh\frac{v}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{v\to\infty} \tfrac{1}{4}\mathsf{I^v}_1 = \lim_{v\to\infty} (\tfrac{1}{2}v\tanh\tfrac{v}{2} - \tfrac{1}{2}v + \mathrm{Li}_1(-e^{-v}) + \ln 2) = \ln 2$$

$$\lim_{v\to\infty} \tfrac{1}{4}\mathsf{I^v}_m = \lim_{v\to\infty} (\tfrac{1}{2}v^m\tanh\tfrac{v}{2} - \tfrac{1}{2}v^m) + m\Gamma(m)(1-2^{1-m})\zeta(m) = m\Gamma(m)(1-2^{1-m})\zeta(m)$$

9. Обозначим $\mathsf{C_m} = m\Gamma(m)(1-2^{1-m})\zeta(m)$

$$\mathsf{I^u}_m = (-1)^m\mathsf{C_m} +$$
$$(-1)^{[m\equiv 0 \pmod 2][y<0]}\left(\tfrac{1}{2}|y|^m\tanh\tfrac{|y|}{2} - \tfrac{1}{2}|y|^m + \mathsf{C_m} + \Gamma(m)\sum_{i=0}^{m-1}\tfrac{|y|^{m-i-1}}{\Gamma(m-i)}\mathrm{Li_{i+1}}(-e^{-|y|})\right) =$$

$$= \mathsf{C_m}\left((-1)^m + (-1)^{[m\equiv 0 \pmod 2][y<0]}\right) +$$
$$(-1)^{[m\equiv 0 \pmod 2][y<0]}\left(\tfrac{1}{2}|y|^m(\tanh\tfrac{|y|}{2} - 1) + \Gamma(m)\sum_{i=0}^{m-1}\tfrac{|y|^{m-i-1}}{\Gamma(m-i)}\mathrm{Li_{i+1}}(-e^{-|y|})\right) =$$

Обозначим $\mathsf{C^y_m} = (-1)^{[m\equiv 0 \pmod 2][y<0]}$, $\mathsf{C^{inf}_m} = (-1)^m$

$$= \mathsf{C_m}(\mathsf{C^{inf}_m} + \mathsf{C^y_m}) + \mathsf{C^y_m}\left(\tfrac{1}{2}|y|^m(\tanh\tfrac{|y|}{2} - 1) + \Gamma(m)\sum_{i=0}^{m-1}\tfrac{|y|^{m-i-1}}{\Gamma(m-i)}\mathrm{Li_{i+1}}(-e^{-|y|})\right)$$