Плотность функции распределения

1.

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{k}\sum\limits_{j=0}^{k} \alpha_i\alpha_j \mathsf{E}X^{i+j}} \frac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{\beta(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2} (\sum_{i=0}^{k} \alpha_i t^i)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{\beta\sum\limits_{i=0}^{k}\sum\limits_{j=0}^{k} \alpha_i\alpha_j \mathsf{E}X^{i+j}} \int\limits_{-\infty}^{x} \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} \alpha_i\alpha_j t^{i+j} \frac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2} dt =$$

$$= \mathsf{C}_1 \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} \alpha_i\alpha_j \int\limits_{-\infty}^{x} t^{i+j} \frac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2} dt =$$

$$= \mathsf{C}_1 \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{I}^{\mathsf{t}}_0 \\ \mathsf{I}^{\mathsf{t}}_1 \\ \vdots \\ \mathsf{I}^{\mathsf{t}}{}_{2k} \end{pmatrix}$$

2.

$$\mathsf{I}^{\mathsf{t}}{}_l = \int\limits_{-\infty}^{x} t^l \frac{e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}}{(1+e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}})^2} dt =$$

Введем замену: $\frac{t-\alpha}{\beta} = u \Longrightarrow t = \beta u + \alpha$, $y = \frac{x-\alpha}{\beta}$

$$= \int\limits_{-\infty}^{y} \beta(\beta u + \alpha)^l \frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2} du = \beta \int\limits_{-\infty}^{y} \sum_{i=0}^{l} C_l^i \alpha^{l-i} \beta^i u^i \frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2} du =$$

$$= \sum_{i=0}^{l} C_l^i \alpha^{l-i} \beta^{i+1} \int\limits_{-\infty}^{y} u^i \frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2} du =$$

$$= \begin{pmatrix} C_l^0 \alpha^l \beta & C_l^1 \alpha^{l-1} \beta^2 & \dots & C_l^l \beta^{l+1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{I}^{\mathsf{u}}_0 \\ \mathsf{I}^{\mathsf{u}}_1 \\ \vdots \\ \mathsf{I}^{\mathsf{u}}{}_{2k} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \mathsf{I}^{\mathsf{t}}_0 \\ \mathsf{I}^{\mathsf{t}}_1 \\ \vdots \\ \mathsf{I}^{\mathsf{t}}{}_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0^0 \alpha^0 \beta & 0 & \dots & 0 \\ C_1^0 \alpha \beta & C_1^1 \alpha^0 \beta^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{2k}^0 \alpha^{2k} \beta & C_{2k}^1 \alpha^{2k-1} \beta^2 & \dots & C_{2k}^{2k} \alpha^0 \beta^{2k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{I}^{\mathsf{u}}_0 \\ \mathsf{I}^{\mathsf{u}}_1 \\ \vdots \\ \mathsf{I}^{\mathsf{u}}{}_{2k} \end{pmatrix}$$

3.

$$\mathsf{I}^{\mathsf{u}}{}_m = \int\limits_{-\infty}^{y} u^m \frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2} du =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{y} u^m \frac{e^u e^{-u}}{e^u(1+2e^{-u}+e^{-2u})} du = \int\limits_{-\infty}^{y} u^m \frac{1}{(e^u+2+e^{-u})} du = \int\limits_{-\infty}^{y} u^m \frac{1}{4} \frac{4}{(e^{\frac{u}{2}}+e^{-\frac{u}{2}})^2} du =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{y} u^m \operatorname{sech}^2\frac{u}{2}du$$

Функция симметрична относительно начала координат, если m нечетно, симметрична относительно оси Oy, если m четно.

$$\mathsf{I^u}_m = (-1)^m\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\infty} u^m \operatorname{sech}^2\frac{u}{2}du + (-1)^{[m\equiv 0 \pmod 2][y<0]}\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{|y|} u^m \operatorname{sech}^2\frac{u}{2}du =$$

Обозначим $\mathsf{I^v}_m = \int\limits_0^v u^m \operatorname{sech}^2\frac{u}{2}du$,

$$= (-1)^m\frac{1}{4}\mathsf{I^{v=inf}}_m + (-1)^{[m\equiv 0 \pmod 2][y<0]}\frac{1}{4}\mathsf{I^{v=|y|}}_m$$

4. Пусть m $=0$

$$\mathsf{I^v}_0 = \int\limits_0^v \operatorname{sech}^2\frac{u}{2}du = 2\int\limits_0^v d\tanh\frac{u}{2} = 2\tanh\frac{v}{2}$$

5. Пусть m $=1$

$$\mathsf{I^v}_1 = \int\limits_0^v u \operatorname{sech}^2\frac{u}{2}du =$$

$$= 2\int\limits_0^v u d\tanh\frac{u}{2} = 2v\tanh\frac{v}{2} - 4\int\limits_0^v \frac{1}{2}\tanh\frac{v}{2}du = 2v\tanh\frac{v}{2} - 4\ln\cosh\frac{v}{2} =$$

$$= 2v\tanh\frac{v}{2} - 2v + 4\operatorname{Li}_1(-e^{-v}) + 4\ln 2$$

6. Пусть $m \geq 2$

$$\mathsf{I^v}_m = \int\limits_0^v u^m \operatorname{sech}^2\frac{u}{2}du =$$

$$= 2\int\limits_0^v u^m d\tanh\frac{u}{2} = 2v^m\tanh\frac{v}{2} - 2\int\limits_0^v mu^{m-1}\tanh\frac{u}{2}du =$$

$$= 2v^m\tanh\frac{v}{2} - 4m\int\limits_0^v u^{m-1}d\ln\cosh\frac{u}{2} =$$

$$= 2v^m\tanh\frac{v}{2} - 4mv^{m-1}\ln\cosh\frac{v}{2} + 4m\int\limits_0^v (m-1)u^{m-2}\ln\cosh\frac{u}{2}du =$$

$$= 2v^m\tanh\frac{v}{2} - 4mv^{m-1}(\frac{v}{2} - \operatorname{Li}_1(-e^{-v}) - \ln 2) + 4m(m-1)\int\limits_0^v u^{m-2}(\frac{u}{2} - \operatorname{Li}_1(-e^{-u}) - \ln 2)du =$$

$$= 2v^m\tanh\frac{v}{2} - 2v^m + 4mv^{m-1}\operatorname{Li}_1(-e^{-v}) - 4m(m-1)\int\limits_0^v u^{m-2}\operatorname{Li}_1(-e^{-u})du =$$

$$= 2v^m\tanh\frac{v}{2} - 2v^m + 4mv^{m-1}\operatorname{Li}_1(-e^{-v}) - 4m(m-1)\int\limits_0^v \operatorname{Li}_1(-e^{-u})d\frac{u^{m-1}}{m-1} =$$

$$= 2v^m\tanh\frac{v}{2} - 2v^m + 4mv^{m-1}\operatorname{Li}_1(-e^{-v}) - 4mu^{m-1}\operatorname{Li}_1(-e^{-u}) - 4m(m-1)\int\limits_0^v \frac{u^{m-1}}{m-1}d\ln(1+e^{-u}) =$$

$$= 2v^m \tanh\tfrac{v}{2} - 2v^m + 4m\int\limits_0^v u^{m-1}\tfrac{1}{1+e^u}du =$$

Обозначим $\mathsf{I^f}_m = \int\limits_0^v u^m \tfrac{1}{1+e^u}du$

$$= 2v^m \tanh\tfrac{v}{2} - 2v^m + 4m\mathsf{I^f}_{m-1}$$

7.

$$\mathsf{I^f}_m = \int\limits_0^v u^m \tfrac{1}{1+e^u}du =$$

$$= \int\limits_0^\infty u^m \tfrac{1}{1+e^u}du - \int\limits_v^\infty u^m \tfrac{1}{1+e^u}du =$$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) - \int\limits_v^\infty u^m \tfrac{1}{1+e^u}du =$$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) - \int\limits_0^\infty (v+u)^m \tfrac{1}{1+e^{v+u}}du =$$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) - \sum_{i=0}^m C_m^i v^{m-i}\int\limits_0^\infty u^i \tfrac{1}{1+e^{v+u}}du =$$

Заметим, что $\tfrac{1}{1+e^u} = \sum\limits_{j=1}^\infty (-1)^{j-1}e^{-ju}$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) - \sum_{i=0}^m C_m^i v^{m-i}\int\limits_0^\infty u^i \sum_{j=1}^\infty (-1)^{j-1}e^{-j(v+u)}du =$$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) - \sum_{i=0}^m C_m^i v^{m-i}\sum_{j=1}^\infty (-1)^{j-1}e^{-jv}\int\limits_0^\infty u^i e^{-ju}du =$$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) - \sum_{i=0}^m C_m^i v^{m-i}\sum_{j=1}^\infty (-1)(-1)^j(e^{-v})^j\int\limits_0^\infty \tfrac{1}{j^{i+1}}(ju)^i e^{-ju}d(ju) =$$

Поскольку $\int\limits_0^\infty u^i e^{-u}du = \Gamma(i+1)$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) + \sum_{i=0}^m \tfrac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(m-i+1)}v^{m-i}\sum_{j=1}^\infty \tfrac{(-e^{-v})^j}{j^{i+1}}\Gamma(i+1) =$$

По определению $\mathrm{Li_p(z)} = \sum\limits_{j=1}^\infty \tfrac{z^j}{j^p}$

$$= \Gamma(m+1)(1-2^{-m})\zeta(m+1) + \Gamma(m+1)\sum_{i=0}^m \tfrac{v^{m-i}}{\Gamma(m-i+1)}\mathrm{Li_{i+1}}(-e^{-v})$$

8. Если $v \longrightarrow \infty$, то

$$\mathsf{I^v}_m = \int\limits_0^v u^m \operatorname{sech}^2\tfrac{u}{2}du$$

$$\lim_{v\to\infty} \tfrac{1}{4}\mathsf{I^v}_0 = \lim_{v\to\infty} \tfrac{1}{2}\tanh\tfrac{v}{2} = \tfrac{1}{2}$$

$$\lim_{v\to\infty} \tfrac{1}{4}\mathsf{I^v}_1 = \lim_{v\to\infty} (\tfrac{1}{2}v\tanh\tfrac{v}{2} - \tfrac{1}{2}v + \mathrm{Li}_1(-e^{-v}) + \ln 2) = \ln 2$$

$$\lim_{v\to\infty} \tfrac{1}{4}\mathsf{I^v}_m = \lim_{v\to\infty} (\tfrac{1}{2}v^m\tanh\tfrac{v}{2} - \tfrac{1}{2}v^m) + m\Gamma(m)(1-2^{1-m})\zeta(m) = m\Gamma(m)(1-2^{1-m})\zeta(m)$$

9. Обозначим $\mathsf{C_m} = m\Gamma(m)(1-2^{1-m})\zeta(m)$

$$\mathsf{I^u}_m = (-1)^m\mathsf{C_m} +$$
$$(-1)^{[m\equiv 0 \pmod 2][y<0]}\left(\tfrac{1}{2}|y|^m\tanh\tfrac{|y|}{2} - \tfrac{1}{2}|y|^m + \mathsf{C_m} + m\Gamma(m)\sum_{i=0}^{m-1}\tfrac{|y|^{m-i-1}}{\Gamma(m-i)}\,\mathrm{Li_{i+1}}(-e^{-|y|})\right) =$$

$$= \mathsf{C_m}\left((-1)^m + (-1)^{[m\equiv 0 \pmod 2][y<0]}\right) +$$
$$(-1)^{[m\equiv 0 \pmod 2][y<0]}\left(\tfrac{1}{2}|y|^m(\tanh\tfrac{|y|}{2} - 1) + m\Gamma(m)\sum_{i=0}^{m-1}\tfrac{|y|^{m-i-1}}{\Gamma(m-i)}\,\mathrm{Li_{i+1}}(-e^{-|y|})\right) =$$

Обозначим $\mathsf{C^y_m} = (-1)^{[m\equiv 0 \pmod 2][y<0]}$, $\mathsf{C^{inf}_m} = (-1)^m$

$$= \mathsf{C_m}(\mathsf{C^{inf}_m} + \mathsf{C^y_m}) + \mathsf{C^y_m}\left(\tfrac{1}{2}|y|^m(\tanh\tfrac{|y|}{2} - 1) + m\Gamma(m)\sum_{i=0}^{m-1}\tfrac{|y|^{m-i-1}}{\Gamma(m-i)}\,\mathrm{Li_{i+1}}(-e^{-|y|})\right)$$

$$\mathsf{I^u}_0 = \lim_{y\to\infty} \tfrac{1}{2}|y|^m\tanh\tfrac{|y|}{2} + \tfrac{1}{2}|y|^m\tanh\tfrac{|y|}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \mathsf{I^u_1} \\ \mathsf{I^u_2} \\ \vdots \\ \mathsf{I^u}_{2k} \end{pmatrix} = \mathsf{C} \circ (\mathsf{C^{inf}} + \mathsf{C^y}) + \mathsf{C^y} \circ \left(\frac{1}{2}\tanh\frac{|y|}{2} - \frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} |y|^1 \\ |y|^2 \\ \vdots \\ |y|^{2k} \end{pmatrix} + \mathsf{C^y} \circ \begin{pmatrix} \Gamma(1) \\ 2\Gamma(2) \\ \vdots \\ 2k\Gamma(2k) \end{pmatrix} \circ \mathsf{C^{Li}}$$

Где $\circ$ – символ поэлементного умножения,

$$\mathsf{C^{Li}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{|y|}{\Gamma(2)} & \frac{1}{\Gamma(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \frac{|y|^{2k-1}}{\Gamma(2k)} & \frac{|y|^{2k-2}}{\Gamma(2k-1)} & \dots & \frac{1}{\Gamma(1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{Li_1}(-e^{-|y|}) \\ \mathrm{Li_2}(-e^{-|y|}) \\ \vdots \\ \mathrm{Li_{2k}}(-e^{-|y|}) \end{pmatrix}$$