六轴机器人空间运动学入门

杨爱平

November 16, 2018

首先，如果空间坐标中，两不同坐标系如果原点重合，但是两坐标系在空间上存在角度的错位，A系与B系内的点相互转换存在转换关系：

$$X_A = X_B cos(X_A, X_B) + Y_B cos(cosX_A, Y_B) + Z_B cos(X_A, Z_B)$$

$$Y_A = X_B cos(Y_A, X_B) + Y_B cos(cosY_A, Y_B) + Z_B cos(Y_A, Z_B)$$

$$Z_A = X_B cos(Z_A, X_B) + Y_B cos(cosZ_A, Y_B) + Z_B cos(Z_A, Z_B)$$

通过矩阵对上式进行表达，可表示为：

$$r_A = R_B^A r_B$$

其中,

$$R_B^A = \begin{pmatrix} cos(X_A, X_B) & cos(X_A, Y_B) & cos(X_A, Z_B) \\ cos(Y_A, X_B) & cos(Y_A, Y_B) & cos(Y_A, Z_B) \\ cos(Z_A, X_B) & cos(Z_A, Y_B) & cos(Z_A, Z_B) \end{pmatrix}$$

$$r_A = (X_A, Y_A, Z_A)^T$$

$$r_B = (X_B, Y_B, Z_B)^T$$

若系A为参考系，我们称R_B^A为机器人关节的姿态矩阵。 此外，若A系与B系的原点不重合，从A 系原点坐标到B系原点坐标可表示为：

$$P_B^A = (X_B^A, Y_B^A, Z_B^A)$$

我们称P_B^A机器人关节的位置矩阵。 因此，从B系转换到A参考系的位置空间转换可表示为：

$$r_A = R_B^A r_B + P_A^B$$

合并后表示为：

$$r_A = T_B^A r_B$$

其中,

$$T_B^A = \begin{pmatrix} cos(X_A, X_B) & cos(X_A, Y_B) & cos(X_A, Z_B) & X_B^A \\ cos(Y_A, X_B) & cos(Y_A, Y_B) & cos(Y_A, Z_B) & Y_B^A \\ cos(Z_A, X_B) & cos(Z_A, Y_B) & cos(Z_A, Z_B) & Z_B^A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

我们称这里的T_B^A为位姿矩阵，它结合了空间位置矩阵与姿态矩阵。
此外,

$$r_A = (X_1, X_2, X_3, X_4)$$

我们称这里的r_A为空间齐次坐标，与一般空间坐标存在以下关系：

$$X = \frac{X_1}{X_4}, Y = \frac{X_2}{X_4}, Z = \frac{X_3}{X_4}$$

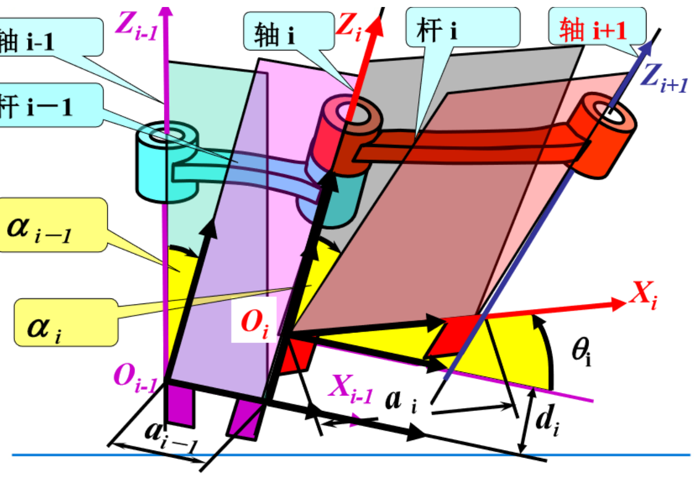

Figure 1: D-H

在机器人学中，我们习惯将X_4取为1方便计算。

设空间六连杆机器人每两个连杆之间的位姿变换关系为矩阵A，则其末端关节相对于基础参考系的位姿矩阵可表示为T_6，其中，

$$T_6 = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$$

其表示形式为：

$$T_6 = \begin{pmatrix} n_X & o_X & a_X & p_X \\ n_Y & o_Y & a_Y & p_Y \\ n_Z & o_Z & a_Z & p_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

现在为了确定空间中机器人两连杆之间的位姿矩阵，引入了D-H参数,D-H参数包含四个，确定了它们，也就确定了两连杆之间的位姿矩阵，如图1，

（1）坐标系的建立：

1）Zi轴在i杆的小标号轴线上；

2）Zi轴为i杆两个轴的公垂线，由小标号指向大标号。

（2）D-H参数的规定：

1) i杆的杆长ai为i杆公垂线长度，标量；

2) i杆的扭转角αi为Zi轴到Zi+1轴，绕Xi轴，代数量；

3) i杆相对于i-1杆的转角θi 为Xi-1轴到Xi轴，绕Zi轴，代数量；

4) i杆相对于i-1杆的安装距离di为Xi-1轴到Xi轴，沿Zi轴，代数量。

在建立了D-H参数后，便可以通过该参数求出机器人关节之间的位姿变换矩阵，其变换关系为：

$$T_i^{I-1} = Rot(x, \alpha_{i-1})Trans(\alpha_{i-1}, 0, 0)Trans(0, 0, d_i)Rot(z, \theta_i)$$

$$= \begin{pmatrix} cos(\theta_i) & -sin(\theta_i) & 0 & \alpha_{i-1} \\ cos(\alpha_{i-1})sin(\theta_i) & cos(\alpha_{i-1})cos(\theta_i) & -sin(\alpha_{i-1}) & -d_i sin(\alpha_{i-1}) \\ sin(\alpha_{i-1})sin(\theta_i) & sin(\alpha_{i-1})cos(\theta_i) & cos(\alpha_{i-1}) & d_i cos(\alpha_{i-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

通过将由D-H参数求得的位姿矩阵带入$T_6 = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，最后求出的T_6就是末端关节的位姿矩阵，代入各关节参数便求出来末端位置。