

## Геодезическая гравиметрия 2019

### Домашнее задание № 3

Крайний срок сдачи: 31 марта 2019 г.

1. Пусть Земля — однородный шар радиусом  $R = 6371$  км. Геоцентрическая гравитационная постоянная  $GM = 3,986 \times 10^{14} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$ . (1 б.)

(a) Найти значение средней плотности Земли.

(b) Вычислить потенциал и силу притяжения на заданных расстояниях от центра планеты:

1.  $r_1 = 3,00 \times 10^6$  м (внутренняя точка),
2.  $r_2 = 6,371 \times 10^6$  м (точка на поверхности),
3.  $r_3 = 6,384 \times 10^6$  м (вершина вулкана Чимборасо),
4.  $r_4 = 6,42 \times 10^6$  м (50 км над поверхностью — верхняя граница стратосферы),
5.  $r_5 = 26,4 \times 10^6$  м (20000 км над поверхностью — высота полета спутников GPS).

2. Построить графики зависимости силы и потенциала притяжения от расстояния до притягиваемой точки для притягивающих однородных сферы, шара и шарового слоя. Рассматривать случай, когда расстояние непрерывно меняется от  $-4R$  до  $4R$ , где  $R$  — внешний радиус притягивающего тела. (1 б.)

3. По сейсмическим данным известно, что Землю приближённо можно представить состоящей из четырёх однородных шаровых слоёв: внутреннее ядро, внешнее ядро, мантия и кора. Написать выражения, необходимые для вычисления потенциала и силы притяжения каждого слоя на единичную массу, находящуюся на поверхности планеты (шара). Вычислить эти величины. Найти полный потенциал и результирующую силу. Проанализировать результат: какая составляющая вносит наибольший вклад в результирующую силу притяжения, а какая — наименьший? Данные взять из таблицы ( $R$  — внешний радиус слоя): (1 б.)

	Слой	$R$ , км	Средняя плотность, г/см <sup>3</sup>
1	Внутреннее ядро	1300	13
2	Внешнее ядро	3500	11
3	Мантия	6350	4,5
4	Кора	6371	2,7

4. Определить притяжение атмосферы на высоте  $H = 500 \times i$  м ( $i$  — вариант) над Землёй. Считать, что атмосфера состоит из сферических слоёв, плотность меняется по закону  $\delta = 1,3333e^{-0,13H}$  кг/м<sup>3</sup>. (2 б.)

5. Вычислить притяжение колец Сатурна на оси вращения планеты. Найти значение притяжения на высоте  $z = 100 \times i$  км ( $i$  — вариант). Масса колец Сатурна  $9,6 \times 10^{20}$  кг, внутренний радиус  $\rho_1 = 72000$  км, внешний  $\rho_2 = 139000$  км, толщиной колец пренебречь. Полярный радиус Сатурна 54400 км. (2 б.)

6. Получить формулы для вычисления потенциала и силы притяжения вулкана на его оси симметрии. Принять вулкан за конус с углом при вершине  $90^\circ$ . Сделать вычисления для вершины горы Фудзияма ( $H = 3776$  м), плотность  $\delta = 3300$  кг/м<sup>3</sup>. (2 б.)

7. Центр однородного шара радиуса  $R$  находится под землёй на глубине  $a$  ( $R < a$ ). Плотность шара  $\delta$  больше, чем плотность поверхностных слоёв Земли. Землю считать плоской. Начало прямоугольной системы координат выбрать в плоскости над центром шара: ось  $x$  направлена на восток, ось  $y$  — на север, ось  $z$  — в зенит. (3 б.)

- (a) Определить потенциал  $T$ , вызванный аномальной массой шара, на земной поверхности.
- (b) Определить производные потенциала  $\frac{\partial T}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial y}$  и  $\frac{\partial T}{\partial z}$ .
- (c) Определить вторые производные потенциала  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ ,  $\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z}$ ,  $\frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z}$ .
- (d) Построить графики  $T, T_z, T_{xz}, T_{zz}$  в плоскости  $(xz)$  в диапазоне  $-3a \leq x \leq +3a$ .

Исходные данные для вычислений:  $a = 60 + 2 \times i$  м,  $R = 50 + 2 \times i$  м,  $\delta = 5 + 0,1 \times i$  г/см<sup>3</sup>,  $\Delta = 1,9$  г/см<sup>3</sup> (песок).