Теория фигур планет и гравиметрия 2018

Домашнее задание № 6

Абсолютные измерения силы тяжести

Крайний срок сдачи: 22 апреля 2018 г.

Основы баллистического метода

Теоретической основой баллистического метода определения абсолютного значения ускорения силы тяжести является закон ускоренного движения пробного тела в поле силы тяжести. Для системы координат, связанной с гравитационным полем ось z совпадает с направлением силы тяжести, поэтому можно записать

$$m\ddot{z} = mg\left(z\right),$$

где m — масса пробного тела, $\ddot{z} = \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$ (t — время), g — сила тяжести. В общем случае гравитационное поле Земли является неоднородным (то есть величина ускорения силы тяжести меняется с высотой), поэтому раскладывая $g\left(z\right)$ в ряд, получаем дифференциальное уравнение движения в неоднородном поле силы тяжести

$$\ddot{z} = g_0 + g_z z,$$

где g_0 — ускорение силы тяжести в начале координат при $z = 0$ и $t = 0$; $g_z = W_{zz} = \frac{\partial g}{\partial z}$ — вертикальный градиент силы тяжести.

Решая уравнение для начальных условий

$$z\left(0\right) = z_0, \quad \dot{z}\left(0\right) = 0, \quad g_z = const,$$

получаем

$$z\left(t\right) = \frac{g_0 t^2}{2} + z_0 \operatorname{ch} \sqrt{g_z} t + \frac{v_0}{\sqrt{g_z}} \operatorname{sh} \sqrt{g_z} t.$$

Разлагая гиперболические функции в ряд и пренебрегая членами, содержащими градиент во второй степени, получаем

$$z\left(t\right) = z_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g_0 t^2 + \frac{1}{2} g_z t^2 \left(z_0 + \frac{1}{3} v_0 t + \frac{1}{12} g_0 t^2\right),$$

или

$$z\left(t\right) = z_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g_0 t^2 + \frac{1}{6} g_z v_0 t^3 + \frac{1}{24} g_z g_0 t^4. \tag{1}$$

Уравнение связывает величину ускорения силы тяжести g_0 с параметрами движения пробной массы — пройденным путём z и временем t, которые могут быть измерены. Это исходное уравнение для всех баллистических гравиметров. Далее рассмотрим частный случай.

Вертикальный градиент силы тяжести g_z имеет нормальное значение $-308{,}6$ мкГал/м, однако это величина не постоянна на поверхности Земли. Градиент, как и сила тяжести, меняется из-за влияния близлежащих масс. На каждом гравиметрическом пункте он свой. Реальную величину g_z определяют из отдельных измерений со статическими гравиметрами, однако это делают не всегда или не всегда делают до момента начала абсолютных измерений.

Поэтому полезно избавиться от величины g_z в уравнении движения (1). Записываем упрощённо

$$z\left(t\right)=z_0^*+v_0^*t+\frac{1}{2}g_0^*t^2. \tag{2}$$

Высота, на которой сила тяжести равна величине g_0^* называется эффективной высотой и обычно обозначается как h_{eff}. Значение ускорения силы тяжести на эффективной высоте не зависит от вертикального градиента.

Если за время свободного падения произведено N измерений пути z_i и времени t_i отсчитываемых от одного момента времени, то получим набор из N функционально связанных зависимостей вида

$$z_i=z_0^*+v_0^*t_i+\frac{1}{2}g_0^*t_i^2+\varepsilon_i,$$

где ε — неучтенные (случайные) ошибки измерений времени и расстояния. Это простое уравнение можно решить методом полиномиальной регрессии (ε — нормально распределённая случайная величина с нулевым математическим ожиданием). Согласно методу наименьших квадратов

$$\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i^2\rightarrow\min,$$

а искомый вектор параметров $\mathbf{x}=\left[z_0^*,v_0^*,g_0^*\right]^T$ является решением нормального уравнения

$$\mathbf{x}=\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial z_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial z_2}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial z_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial z_3}{\partial x_3}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \dfrac{\partial z_N}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_N}{\partial x_2} & \dfrac{\partial z_N}{\partial x_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & t_1 & \frac{1}{2}t_1^2\\ 1 & t_2 & \frac{1}{2}t_2^2\\ 1 & t_3 & \frac{1}{2}t_3^2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & t_N & \frac{1}{2}t_N^2\end{bmatrix}$$

— матрица коэффициентов, $\mathbf{y}=\left[z_1,z_2,z_3,\ldots,z_N\right]$ — вектор измеренных расстояний. Решая уравнение (3), получим величины z_0^*, v_0^* и g_0^* на эффективной высоте.

Эффективная высота находится внутри интервала измерений и её нельзя непосредственно измерить. Для того, что бы связать её с измеренной высотой установки гравиметра над пунктом, необходимо вычислить расстояние между эффективной высотой и начальным положением пробного тела ($z=0$, $t=0$, $v=0$), высота h которого известна (измерена). Приближённо (существуют более точные, но и более громоздкие зависимости) это можно сделать так

$$h_{eff}=h-\underbrace{\frac{1}{2}\frac{v_0^{*2}}{g_0^*}}_{h_0}-\underbrace{\left(\frac{1}{3}\mathit{\Delta}z+\frac{1}{6}v_0^*\mathit{\Delta}t\right)}_{h_1},$$

где h_0 — расстояние от начального положения тела до начала измерений, h_1 — расстояние от начала измерений до эффективной высоты, $\mathit{\Delta}z$ — весь пройденный путь за полное время броска $\mathit{\Delta}t$.

Исходные данные

Исходными данными для домашнего задания служат результаты абсолютных измерений с лазерным баллистическим гравиметром ГБЛ–М на пункте Государственной фундаментальной гравиметрической сети (ГФГС) «ЦНИИГАиК» (Москва):

$\varphi\,[^\circ]$	$\lambda\,[^\circ]$	$H\,[\text{м}]$
55,85503	37,51604	153

Измерения выполнены несимметричным способом методом многих ($N = 5000$) станций. Для гравиметра типа ГБЛ–М время одного броска $\varDelta t \approx 0{,}2\,\text{с}$, за которое пробное тело проходит расстояние $\varDelta z \approx 0{,}66\,\text{м}$.

Значения g_0^* осреднены программой постобработки результатов измерений для отдельных серий измерений. Одна серия обычно составляет 100 бросков (единичных измерений) длительностью ≈ 17 минут. Каждый бросок обрабатывается отдельно, при этом каждый раз решается уравнение типа (3).

Для каждой серии измерений приведены

1. дата и среднее время серии (UTC+00);
2. среднее значение ускорения силы тяжести g_0^* по серии, мкГал;
3. стандартное отклонение $\sigma_{g_0^*}$ среднего значения, мкГал;
4. число бросков, принятых в обработку N (после отбраковки грубых вылетов);
5. среднее значение атмосферного давления P по серии, мм.рт.ст;
6. среднее значение скорости v_0^* в начале измерений, м/с;
7. остаточное давление в вакуумной камере B_i, 10^{-6} мм.рт.ст;
8. среднее значение поправки за прилив, мкГал;
9. эффективная высота h_{eff}, для которой определена величина g_0^*, м;

Содержание задания

Окончательная обработка результатов нескольких серий измерений на пункте и оценка точности.

Порядок обработки

1. Абсолютное значение силы тяжести на пункте из наблюдений в каждой серии вычисляется по формуле

   $$g = g_0^* + \varDelta g_B + \varDelta g_\lambda + \varDelta g_a + \varDelta g_{tide} + \varDelta g_{polar},$$

   где $\varDelta g_B$ — поправка за остаточное давление воздуха в баллистической камере; $\varDelta g_\lambda$ — поправка за конечность скорости света; $\varDelta g_a$ — поправка за изменение атмосферного давления; $\varDelta g_{tide}$ — поправка за прилив; $\varDelta g_{polar}$ — поправка за движение полюса.

   Поправку за остаточное давление находят по формуле

   $$\varDelta g_B = \underbrace{5{,}0}_{\alpha}\,B_i \quad [\text{мкГал}],$$

величина B_i выражена в единицах 10^{-6} мм.рт.ст, $\alpha = 5{,}0$ — коэффициент, определяемый экспериментально для каждого типа гравиметра.

Поправка за конечность скорость света (доплеровское сокращение длины волны) равна

$$\Delta g_\lambda = \frac{3}{c} g_0^* \left(v_0^* + \frac{1}{2} g_0^* \Delta t \right),$$

где $c = 299792458$ м/с — скорость света, g_0^* — вычисленное значение силы тяжести, v_0^* — скорость падающего тела в момент начала измерений; Δt — полное время измерений в броске.

Поправка за изменение атмосферного давления вычисляется по формуле

$$\Delta g_a = 0{,}4\,(P - P_0),$$

где P — атмосферное давление в **мм.рт.ст**, P_0 — нормальное (модельное) атмосферное давление в **мм.рт.ст**. которое вычисляется так

$$P_0 = 1013{,}25 \left(1 - \frac{0{,}0065 H}{288{,}15}\right)^{5.2599} \qquad [\textbf{мбар}],$$

где H — высота пункта над уровнем моря. Барометрический фактор $K = 0{,}4$ здесь изменён по сравнению с рекомендованным IAG значением $K = 0{,}3$ по причине того, что давление выражено в мм.рт.ст, а не в милибарах.

Поправка за движение полюса вычисляется по формуле

$$\Delta g_{polar} = -1{,}164 \times 10^8 \omega^2 a \sin 2\varphi \left(\frac{x_p}{\rho''} \cos\lambda - \frac{y_p}{\rho''} \sin\lambda \right) \quad [\text{мкГал}],$$

где ω — угловая скорость вращения Земли; a — большая полуось, φ, λ — широта и долгота пункта; x_p, y_p — координаты полюса; $\rho'' = \dfrac{360^\circ \times 60' \times 60''}{2\pi} \approx 206265''$.

Координаты полюса на заданную дату взять с сайта Международной службы вращения Земли (IERS):

`https://datacenter.iers.org/eop/-/somos/5Rgv/latest/9`

Описание данных:

`https://datacenter.iers.org/eop/-/somos/5Rgv/getMeta/9/finals2000A.all`.

Величина поправки за прилив приведена в задании.

2. Окончательный результат $\bar{g}$ находят как среднее из результатов n серий

$$\bar{g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g. \tag{4}$$

3. Для оценки точности сначала вычисляют выборочное стандартное отклонение (среднюю квадратическую ошибку)

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (g - \bar{g})^2}{n-1}}, \tag{5}$$

которое характеризует разброс значений g относительно среднего значения $\bar{g}$.

Затем находят выборочное стандартное отклонение среднего значения (средняя квадратическая ошибка среднего)

$$\sigma_{\bar{g}} = \frac{\sigma_g}{\sqrt{n}}. \tag{6}$$

4. Если точность окончательного результата оценивать только по внутренней сходимости измерений, то она может получиться существенно заниженной из-за неучета прочих источников ошибок, присущих всем измерениям с данным прибором на данном пункте. К ним относятся ошибки учёта влияния внешних условий (величина которых может меняться от пункта к пункту) и ошибки, связанные с конструкцией прибора. В геодезии такие ошибки часто называют «систематическими», однако в современной теории оценки точности этот термин почти не применяется в силу своей ограниченности, как, впрочем, и термин «ошибка».

   Оценкой стандартного отклонения результата измерения служит суммарная стандартная неопределенность u_c, которую получают из оценки стандартного отклонения результатов измерений каждой входной величины x_i в виде стандартных неопределённостей $u(x_i)$

   Каждую входную оценку x_i и связанную с ней стандартную неопределенность $u(x_i)$ получают из вероятностного распределения значений входной величины X_i. Это вероятностное распределение можно интерпретировать как частотную вероятность, основанную на серии k наблюдений $X_{i,k}$ величины X_i, или как априорное распределение. Оценки составляющие стандартной неопределенности по типу А основаны на частотном представлении вероятности, а по типу В — на априорных распределениях. Следует понимать, что в обоих случаях распределения отражают некоторое модельное представление знаний о случайной величине.

   Некоторые априорные составляющие суммарной стандартной неопределёности для гравиметра ГБЛ-М приведены в таблице.

Источник неопределённости	Величина $u(x_i)$, мкГал
Определение длины волны лазера	±1
Измерение интервалов времени	±1
Поправка за остаточное давления	±2
Поправка за изменение атмосферного давления	±0,5
Поправка за прилив	±2
Поправка за движение полюса	±0,5
Вращение пробного тела и ошибка дифракции	±2
Влияние электромагнитных сил	±1
Микросейсмы (при их низком уровне)	±2
Выставление вертикали	±1
Сумма, u_2	±4,5

   Сумма в последней строке априорных составляющих суммарной стандартной неопределённости (пользуясь более привычными терминами - сумма систематических составляющих) вычисляется стандартным методом по величинам $u\left(x_i\right)$, указанным в таблице

$$u_2 = \sqrt{\sum u^2(x_i)} \tag{7}$$

   Суммарная стандартная неопределённость, то есть оценка точности окончательного результата, вычисляется так

$$u_c = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \tag{8}$$

   где $u_1 = \sigma_{\bar{g}}$ вычисляется по формуле (6).

   В качестве окончательной оценки значения ускорения силы тяжести $\bar{g}$ принимается расширенная суммарная стандартная неопределенность

$$U_c = k u_c, \tag{9}$$

где k — коэффициент охвата, который обычно принимается равным 2, что соответствует интервалу доверия с уровнем, близким к 95%.

Дополнительно

Попробуйте изменить формулы (4) – (6) для учёта неравноточности измерений в сериях.