

Геодезическая гравиметрия 2018
Домашнее задание № 6
Абсолютные измерения силы тяжести

Крайний срок сдачи: 17 апреля 2018 г.

Основы баллистического метода

Теоретической основой баллистического метода определения абсолютного значения ускорения силы тяжести является закон ускоренного движения пробного тела в поле силы тяжести. Для системы координат, связанной с гравитационным полем ось z совпадает с направлением силы тяжести, поэтому можно записать

$$m\ddot{z} = mg(z),$$

где m — масса пробного тела, $\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}$ (t — время), g — сила тяжести. В общем случае гравитационное поле Земли является неоднородным (то есть величина ускорения силы тяжести меняется с высотой), поэтому раскладывая $g(z)$ в ряд, получаем дифференциальное уравнение движения в неоднородном поле силы тяжести

$$\ddot{z} = g_0 + g_z z,$$

где g_0 — ускорение силы тяжести в начале координат при $z = 0$ и $t = 0$; $g_z = W_{zz} = \frac{\partial g}{\partial z}$ — вертикальный градиент силы тяжести.

Решая уравнение для начальных условий

$$z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = 0, \quad g_z = \text{const},$$

получаем

$$z(t) = \frac{g_0 t^2}{2} + z_0 \operatorname{ch} \sqrt{g_z} t + \frac{v_0}{\sqrt{g_z}} \operatorname{sh} \sqrt{g_z} t.$$

Разлагая гиперболические функции в ряд и пренебрегая членами, содержащими градиент во второй степени, получаем

$$z(t) = z_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g_0 t^2 + \frac{1}{2} g_z t^2 \left(z_0 + \frac{1}{3} v_0 t + \frac{1}{12} g_0 t^2 \right),$$

или

$$z(t) = z_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g_0 t^2 + \frac{1}{6} g_z v_0 t^3 + \frac{1}{24} g_z g_0 t^4. \quad (1)$$

Уравнение связывает величину ускорения силы тяжести g_0 с параметрами движения пробной массы — пройденным путём z и временем t , которые могут быть измерены. Это исходное уравнение для всех баллистических гравиметров.

Вертикальный градиент силы тяжести g_z имеет нормальное значение $-308,6$ мкГал/м, однако это величина не постоянна на поверхности Земли. Градиент, как и сила тяжести, меняется из-за влияния близлежащих масс. На каждом гравиметрическом пункте он свой. Реальную величину g_z определяют из отдельных измерений со статическими гравиметрами, однако это делают не всегда или не всегда делают до момента начала абсолютных измерений.

Поэтому полезно избавиться от величины g_z в уравнении движения (1). Записываем упрощённо

$$z(t) = z_0^* + v_0^* t + \frac{1}{2} g_0^* t^2. \quad (2)$$

Высота, на которой сила тяжести равна величине g_0^* называется эффективной высотой и обычно обозначается как h_{eff} . Значение ускорения силы тяжести на эффективной высоте не зависит от вертикального градиента.

Если за время свободного падения произведено N измерений пути z_i и времени t_i отсчитываемых от одного момента времени, то получим набор из N функционально связанных зависимостей вида

$$z_i = z_0^* + v_0^* t_i + \frac{1}{2} g_0^* t_i^2 + \varepsilon_i,$$

где ε — неучтенные (случайные) ошибки измерений времени и расстояния. Это простое уравнение можно решить методом полиномиальной регрессии (ε — нормально распределённая случайная величина с нулевым математическим ожиданием). Согласно методу наименьших квадратов

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 \rightarrow \min,$$

а искомый вектор параметров $\mathbf{x} = [z_0^*, v_0^*, g_0^*]^T$ является решением нормального уравнения

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \frac{\partial z_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \frac{\partial z_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial z_3}{\partial x_1} & \frac{\partial z_3}{\partial x_2} & \frac{\partial z_3}{\partial x_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial z_N}{\partial x_1} & \frac{\partial z_N}{\partial x_2} & \frac{\partial z_N}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \frac{1}{2} t_1^2 \\ 1 & t_2 & \frac{1}{2} t_2^2 \\ 1 & t_3 & \frac{1}{2} t_3^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_N & \frac{1}{2} t_N^2 \end{bmatrix}$$

— матрица коэффициентов, $\mathbf{y} = [z_1, z_2, z_3, \dots, z_N]$ — вектор измеренных расстояний. Решая уравнение (3), получим величины z_0^* , v_0^* и g_0^* на эффективной высоте.

Эффективная высота находится внутри интервала измерений и её нельзя непосредственно измерить. Для того, что бы связать её с измеренной высотой установки гравиметра над пунктом, необходимо вычислить расстояние между эффективной высотой и начальным положением пробного тела ($z = 0, t = 0, v = 0$), высота h которого известна (измерена). Приблизённо (существуют более точные, но и более громоздкие зависимости) это можно сделать так

$$h_{eff} = h - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{v_0^{*2}}{g_0^*}}_{h_0} - \underbrace{\left(\frac{1}{3} \Delta z + \frac{1}{6} v_0^* \Delta t \right)}_{h_1},$$

где h_0 — расстояние от начального положения тела до начала измерений, h_1 — расстояние от начала измерений до эффективной высоты, Δz — весь пройденный путь за полное время броска Δt .

Исходные данные

Исходными данными для домашнего задания служат результаты абсолютных измерений с лазерным баллистическим гравиметром ГБЛ–М на пункте Государственной фундаментальной гравиметрической сети (ГФГС) «ЦНИИГАиК» (Москва):

$\varphi [^\circ]$	$\lambda [^\circ]$	$H [м]$
55,85503	37,51604	153

Измерения выполнены несимметричным способом методом многих ($N = 5000$) станций. Для гравиметра типа ГБЛ–М время одного броска $\Delta t \approx 0,2$ с, за которое пробное тело проходит расстояние $\Delta z \approx 0,66$ м.

Значения g_0^* осреднены программой постобработки результатов измерений для отдельных серий измерений. Одна серия обычно составляет 100 бросков (единичных измерений) длительностью ≈ 17 минут. Каждый бросок обрабатывается отдельно, при этом каждый раз решается уравнение типа (3).

Для каждой серии измерений приведены

1. дата и среднее время серии (UTC+00);
2. среднее значение ускорения силы тяжести g_0^* по серии, мкГал;
3. стандартное отклонение $\sigma_{g_0^*}$ среднего значения, мкГал;
4. число бросков, принятых в обработку N (после отбраковки грубых вылетов);
5. среднее значение атмосферного давления P по серии, мм.рт.ст;
6. среднее значение скорости v_0^* в начале измерений;
7. остаточное давление в вакуумной камере B_i ;
8. среднее значение поправки за прилив, мкГал;
9. эффективная высота h_{eff} , для которой определена величина g_0^* , м;

Содержание задания

Окончательная обработка результатов нескольких серий измерений на пункте и оценка точности.

Порядок обработки

1. Абсолютное значение силы тяжести на пункте из наблюдений в каждой серии вычисляется по формуле

$$g = g_0^* + \Delta g_B + \Delta g_\lambda + \Delta g_a + \Delta g_{tide} + \Delta g_{polar},$$

где Δg_B — поправка за остаточное давление воздуха в баллистической камере; Δg_λ — поправка за конечность скорости света; Δg_a — поправка за изменение атмосферного давления; Δg_{tide} — поправка за прилив; Δg_{polar} — поправка за движение полюса.

Поправку за остаточное давление находят по формуле

$$\Delta g_B = \underbrace{5,0}_\alpha B_i \quad [\text{мкГал}],$$

величина B_i выражена в единицах 10^{-8} Па, $\alpha = 5,0$ — коэффициент, определяемый экспериментально.

Поправка за конечность скорость света (доплеровское сокращение длины волны) равна

$$\Delta g_\lambda = \frac{3}{c} g_0^* \left(v_0^* + \frac{1}{2} g_0^* \Delta t \right),$$

где $c = 299792458$ м/с — скорость света, g_0^* — вычисленное значение силы тяжести, v_0^* — скорость падающего тела в момент начала измерений; Δt — полное время измерений в броске.

Поправка за изменение атмосферного давления вычисляется по формуле

$$\Delta g_a = 0,4 (P - P_0),$$

где P — атмосферное давление в **мм.рт.ст.**, P_0 — нормальное (модельное) атмосферное давление в **мм.рт.ст.** которое вычисляется так

$$P_0 = 1013,25 \left(1 - \frac{0,0065 H}{288,15} \right)^{5.2599} \quad [\text{мбар}],$$

где H — высота пункта над уровнем моря. Барометрический фактор $K = 0,4$ здесь изменён по сравнению с рекомендованным IAG значением $K = 0,3$ по причине того, что давление выражено в мм.рт.ст, а не в миллибарах.

Поправка за движение полюса вычисляется по формуле

$$\Delta g_{polar} = -1,164 \times 10^8 \omega^2 a \sin 2\varphi \left(\frac{x_p}{\rho''} \cos \lambda - \frac{y_p}{\rho''} \sin \lambda \right) \quad [\text{мкГал}],$$

где ω — угловая скорость вращения Земли; a — большая полуось, φ, λ — широта и долгота пункта; x_p, y_p — координаты полюса; $\rho'' = \frac{360^\circ \times 60' \times 60''}{2\pi} \approx 206265''$.

Координаты полюса на заданную дату взять с сайта Международной службы вращения Земли (IERS):

<https://datacenter.iers.org/eop/-/somos/5Rgv/latest/9>

Описание данных:

<https://datacenter.iers.org/eop/-/somos/5Rgv/getMeta/9/finals2000A.all>.

Величина поправки за прилив приведена в задании.

- Окончательный результат \bar{g} находят как среднее из результатов n серий

$$\bar{g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g. \quad (4)$$

- Для оценки точности сначала вычисляют выборочное стандартное отклонение (среднюю квадратическую ошибку)

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (g - \bar{g})^2}{n - 1}}, \quad (5)$$

которое характеризует разброс значений g относительно среднего значения \bar{g} .

Затем находят выборочное стандартное отклонение среднего значения (средняя квадратическая ошибка среднего)

$$\sigma_{\bar{g}} = \frac{\sigma_g}{\sqrt{n}}. \quad (6)$$

4. Если точность окончательного результата оценивать только по внутренней сходимости измерений, то она может получиться существенно заниженной из-за неучета прочих источников ошибок, присущих всем измерениям с данным прибором на данном пункте. К ним относятся ошибки учёта влияния внешних условий (величина которых может меняться от пункта к пункту) и ошибки, связанные с конструкцией прибора. В геодезии такие ошибки часто называют «систематическими», однако в современной теории оценки точности этот термин почти не применяется в силу своей ограниченности, как, впрочем, и термин «ошибка».

Оценкой стандартного отклонения результата измерения служит суммарная стандартная неопределённость u_c , которую получают из оценки стандартного отклонения результатов измерений каждой входной величины x_i в виде стандартных неопределённостей $u(x_i)$

Каждую входную оценку x_i и связанную с ней стандартную неопределённость $u(x_i)$ получают из вероятностного распределения значений входной величины X_i . Это вероятностное распределение можно интерпретировать как частотную вероятность, основанную на серии k наблюдений $X_{i,k}$ величины X_i , или как априорное распределение. Оценки составляющие стандартной неопределённости по типу А основаны на частотном представлении вероятности, а по типу В — на априорных распределениях. Следует понимать, что в обоих случаях распределения отражают некоторое модельное представление знаний о случайной величине.

Некоторые априорные составляющие суммарной стандартной неопределённости для гравиметра ГБЛ-М приведены в таблице.

Источник неопределённости	Величина $u(x_i)$, мкГал
Определение длины волны лазера	± 1
Измерение интервалов времени	± 1
Поправка за остаточное давления	± 2
Поправка за изменение атмосферного давления	$\pm 0,5$
Поправка за прилив	± 2
Поправка за движение полюса	$\pm 0,5$
Вращение пробного тела и ошибка дифракции	± 2
Влияние электромагнитных сил	± 1
Микросейсмы	± 2
Выставление вертикали	± 1
Σ	$\pm 4,5$

Сумма в последней строке априорных составляющих суммарной стандартной неопределённости (пользуясь более привычными терминами - сумма систематических составляющих) вычисляется по величинам, указанным в таблице стандартным методом

$$u_2 = \sqrt{\sum u^2(x_i)} \quad (7)$$

Суммарная стандартная неопределённость, то есть оценка точности окончательного результата, вычисляется так

$$u_c = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad (8)$$

где $u_1 = \sigma_{\bar{g}}$ вычисляется по формуле (6).

В качестве окончательной оценки значения ускорения силы тяжести \bar{g} принимается расширенная суммарная стандартная неопределённость

$$U_c = k u_c, \quad (9)$$

где k — коэффициент охвата, который обычно принимается равным 2, что соответствует интервалу доверия с уровнем, близким к 95%.

Дополнительно

Попробуйте изменить формулы (4) – (6) для учёта неравноточности измерений в сериях.