

# Теория фигур планет и гравиметрия 2018

## Практическое занятие № 1

Введение. Краткие сведения из математики и высшей геодезии

9 февраля 2018 г.

### 1 Организационные вопросы

Курс «Теория фигур планет и гравиметрия» читается на третьем (весенний семестр) и четвёртом (осенний семестр) курсах для студентов геодезического факультета МИИГАиК специальности «Прикладная геодезия».

Весенний семестр посвящен изучению поля тяготения и его свойств, а также измерениям силы тяжести на поверхности Земли. Осенний семестр будет включать в себя вопросы моделирования гравитационного поля планет и решение геодезических задач с использованием информации о гравитационном поле Земли.

#### 1.1 Контакты

Канал в Телеграм (для оповещений и анонсов): [miigaik\\_tfpg\\_course\\_2018](https://t.me/miigaik_tfpg_course_2018)

Почта: [oshchepkov@miigaik.ru](mailto:oshchepkov@miigaik.ru)

Материалы курса доступны в git-репозитории на GitHub: [ioshchepkov/physical-geodesy-courses](https://github.com/ioshchepkov/physical-geodesy-courses)

Репозиторий находится в стадии наполнения и будет обновляться по ходу курса.

#### 1.2 Программа практических занятий (весенний семестр)

1. Введение. Краткие сведения из математики и высшей геодезии.
2. Притяжение. Основные понятия и свойства.
3. Притяжение тел простой формы I.
4. Притяжение тел простой формы II.
5. Притяжение тел сложной формы. Гармонические функции.
6. Гравитационное поле Земли и планет. Общая характеристика.
7. Гравитационное поле Земли и планет. Изменение гравитационного поля во времени.
8. Наземные методы и средства измерений. Абсолютные измерения силы тяжести.
9. Статический метод измерения силы тяжести.
10. Исследования статических гравиметров I.
11. Исследования статических гравиметров II.
12. Метрология. Сравнения и эталонирование гравиметров.
13. Гравиметрический рейс.
14. Обработка гравиметрического рейса. Гравиметрические сети.

### 1.3 Контроль знаний и выставление оценок

В курсе (весенний семестр) предусмотрены следующие формы контроля знаний:

- лабораторные работы,
- домашние задания,
- самостоятельные работы,
- контрольные работы,
- зачёт.

На практических занятиях будут разбираться основные понятия для закрепления теоретического материала лекций, а также будут решаться и разбираться простейшие и/или типовые примеры и задачи. **Только** на практических занятиях будут выполняться лабораторные работы с гравиметрами и разбираться отдельные темы по разделу курса «гравиметрия». Пропуски занятий с гравиметрами не допускаются, ибо в связи с большим числом студентов и ограниченным числом преподавателей, у нас нет возможности заниматься с вами вне аудиторных часов. Лабораторные работы с гравиметрами должны быть аккуратно оформлены и защищены. Оцениваются работы по двоичной системе (зачёт/незачёт).

#### 1.3.1 Домашние задания

Домашние задания (ДЗ) будут выдаваться после (почти) каждого практического занятия и будут состоять из контрольных вопросов, обязательных типовых задач, а также дополнительных задач повышенной сложности. Каждый вопрос и каждая задача в задании будут иметь свою «стоимость» в баллах. Общая оценка за одно домашнее задание равна сумме баллов за все вопросы, примеры и задачи. Максимальное число баллов за каждое домашнее задание — 5,0. Баллы, заработанные за решение задач повышенной сложности могут быть зачтены в другие задания и формы контроля. Все домашние задания должны быть защищены, что включает в себя несколько контрольных вопросов по теме и/или ходу решения. Незащищённые задания не могут быть зачтены. Крайний срок сдачи — две недели с момента выдачи задания. После дедлайна домашние задания не принимаются и могут полностью войти в программу зачёта для несдавшего студента. Задания можно высылать как в электронном (что крайне приветствуется) виде вне занятий, так и сдавать их в рукописном виде в часы занятий. За использование системы компьютерной вёрстки L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X(читается как латех) при сдаче работ будет начисляться дополнительный балл.

#### 1.3.2 Самостоятельные работы

Самостоятельные работы (СР) будут проводиться в течение 5 – 8 минут в начале (почти) каждого практического занятия по пройденному материалу, включая лекции. Они будут состоять из 2–3 вопросов и/или простых задач. Максимальное число баллов за одну самостоятельную — 5,0.

#### 1.3.3 Контрольные работы

В середине семестра будет проведена первая (КР№1) контрольная работа (КР), а в конце семестра (скорее всего, на зачётном занятии) – вторая (КР№2). Обе продолжительностью в один академический час (половина пары). Программа контрольных будет включать в себя теоретические и практические вопросы по пройденному материалу, в том числе лекционному. Максимальное число баллов за контрольную — 5,0.

Сдача обеих контрольных работ на положительную оценку ( $\geq 3,0$ ) является условием допуска студента к зачёту.

### 1.3.4 Зачёт

При условии всех сданных и защищённых лабораторных работах, итоговая оценка за семестр выставляется следующим образом. По всем видам контроля выводятся средние оценки, которые затем подставляются в выражение

$$O_{\text{И}} = 0,5 \cdot O_{\text{ДЗ}} + 0,2 \cdot O_{\text{СР}} + 0,3 \cdot O_{\text{КР}},$$

где  $O_{\text{И}}$  – итоговая оценка,  $O_{\text{ДЗ}}$  – средняя оценка по домашним заданиям,  $O_{\text{СР}}$  – средняя оценка по самостоятельным работам,  $O_{\text{КР}}$  – средняя оценка по двум контрольным.

Если итоговая оценка на конец семестра получается не менее 4,0 ( $O_{\text{И}} \geq 4,0$ ), то студент получает **зачёт автоматом**.

К зачету студент собирает портфолио, то есть всё, что он сделал за семестр:

- лабораторные работы;
- домашние задания;
- дополнительные задания, если имеются;
- конспекты практических занятий и лекций;
- контрольные работы, независимо от оценки.

Зачёт будет состоять из письменной и устной части. Письменно студент выполняет задания, по которым за семестр он получил неудовлетворительную ( $< 3,0$ ) оценку (прежде всего – контрольные работы). Устная часть включает вопросы по практическим и лекционным занятиям.

### 1.3.5 Теоретический минимум

Особое внимание необходимо обратить на вопросы теоретического минимума. Незнание уверенных ответов на них автоматически влечёт за собой неудовлетворительную оценку (0,0) по всем видам контроля знаний (домашние задания, самостоятельные и контрольные работы, зачёт). Обратное неверно, знание ответов только на эти вопросы зачёта не гарантирует. Вопросы из этого списка будут включаться в контроль по мере их появления в курсе.

### 1.3.6 Бонусы

При желании, студенту могут быть даны дополнительные «творческие» задания, которые могут быть выполнены как индивидуально, так и коллективно (2–3 человека). За выполнение таких заданий будут начисляться бонусные баллы. Штрафных санкций не предусмотрено.

## 1.4 Литература

### Рекомендуемая литература

- [1] Л. В. Огородова. *Основы теории потенциала. Гравитационное поле Земли, Луны и планет. Учебное пособие*. М.: Изд-во МИИГАиК, 2013, с. 108.
- [2] Б. П. Шимбирев. *Теория фигуры Земли*. М.: Недра, 1975, с. 432.
- [3] А. П. Юзefович. *Поле силы тяжести и его изучение: учебное пособие*. М.: Изд-во МИИГАиК, 2014, с. 194.

## Дополнительная литература

- [1] Б. Гофман-Велленгоф и Г. Мориц. *Физическая геодезия*. Под ред. Неймана, Ю. М. М.: Изд-во МИИГАиК, 2007, с. 426.
- [2] Г. Мориц. *Современная физическая геодезия*. М.: Недра, 1983, с. 391.
- [3] Л. В. Огородова. *Высшая геодезия. Часть III. Теоретическая геодезия: Учебник для вузов*. М.: Геодезкартиздат, 2006, с. 384.
- [4] Л. В. Огородова. *Нормальное поле и определение аномального потенциала (текст лекций по геодезической гравиметрии и теории фигуры Земли): Учебное пособие*. М.: Изд-во МИИГАиК, 2011, с. 105.
- [5] Л. П. Пеллинен. *Высшая геодезия (Теоретическая геодезия)*. М.: Недра, 1978, с. 264.
- [6] В. Торге. *Гравиметрия*. Под ред. А. П. Юзефовича, пер. с англ. Г. А. Шанурова. М.: Мир, 1999, с. 429.
- [7] Юзефович, А. П. и Огородова, Л. В. *Гравиметрия: Учебник для вузов*. М.: Недра, 1980, с. 320.

## 2 Предмет и задачи курса

Название курса состоит из двух частей: «теория фигур планет» и «гравиметрия». Под планетой мы, конечно, будем в первую очередь иметь ввиду Землю. Однако рассматриваемые методы (а также и другие, которые на Земле не используются) могут быть успешно применены и применяются для исследования других планет, особенно твёрдых, а также их естественных спутников, поэтому по ходу курса мы будем иногда обращать внимание и во внеземное пространство.

Вспомним, что основной научной задачей геодезии является определение фигуры и внешнего гравитационного поля Земли и их изменений во времени. Теория фигуры Земли решает эту задачу с использованием преимущественно гравиметрических данных (то есть по измерениям величин, характеризующих гравитационное поле Земли). Синонимами являются дисциплины «физическая геодезия» и «геодезическая гравиметрия». Решением той же задачи, но с использованием всей совокупности существующих исходных данных (например, спутниковых) занимается теоретическая геодезия, которая преподаётся обычно на последних курсах геодезических специальностей.

Итак, теория фигуры Земли — это наука, главной задачей которой является определение внешнего гравитационного поля и фигуры Земли по гравиметрическим данным. Задача же получения этих данных с необходимой плотностью и точностью стоит перед другой наукой, которая называется «гравиметрия» (или «экспериментальная гравиметрия»).

Вообще говоря, задача изучения внешнего гравитационного поля Земли в сущности является задачей гравиметрии также, как и изучение магнитного поля (теория которого очень близка к гравитационному) и других физических полей. Но, как мы увидим по ходу курса, внешнее гравитационное поле и фигура Земли на самом деле определяются одновременно из обработки одних и тех же исходных данных. Более того, эти задачи неотделимы друг от друга, а потому и входят в основную задачу геодезии и её подразделов[3].

Действительно, ведь абсолютно все («геометрические») геодезические измерения выполняются в гравитационном поле Земли и связаны с ним. В этом легко убедиться, ответив на вопросы:

1. Назовите основные геометрические условия в нивелирах и угломерных приборах.
2. Что происходит с геодезическими приборами, когда мы выставляем их по уровням?
3. В какой системе координат выполняются измерения на поверхности Земли?
4. Чему равна сумма измеренных углов в треугольнике на поверхности Земли, если измерения считать безошибочными?
5. Как расположена визирная ось поверенного и выставленного по уровням нивелира?

Оказывается, в теории во все наземные и спутниковые измерения, даже выполненные исправными инструментами и оборудованием, необходимо вводить те или иные поправки, связанные с гравитационным полем Земли.

На практике же необходимость учёта неоднородности гравитационного поля Земли всегда определяется требованиями к точности результатов измерений. Например, при нивелировании I и II классов вводить поправки в измеренные превышения за переход к разностям нормальных высот необходимо (в том числе, по нормативным документам), а в нивелировании низших классов (III, IV, техническое) – нет.

Перейдём теперь к более тонкому понятию — фигуре планеты. Что это такое? Понятие фигуры планеты неоднозначно и может подразумевать под собой

- геометрическую фигуру простой и правильной формы (сфера, эллипсоид);
- фигуру конкретной эквипотенциальной (уровенной) поверхности (Земля — геоид, Луна — селеноид, Марс — ареоид);
- фигуру её физической поверхности.

Исторически дисциплина развивалась точно также, от простого к сложному (см. [2, 4]), но мы начнём с конца, с современных взглядов. Снова будем рассматривать близкую нам Землю. Что такое физическая поверхность Земли?

Прежде всего, мы исключаем из этого понятия газовую оболочку Земли (атмосферу). В будущем нам с этим придётся постоянно считаться, поскольку измерения и деятельность человека точно также проходят в атмосфере, как и в гравитационном поле.

В областях суши физическая поверхность ограничена физической твёрдой оболочкой Земли. Эта же поверхность изображается на картах, аэро- и космо- снимках. На ней проходит большая часть деятельности человека.

Мировой океан занимает около 71% земной поверхности и находится в постоянном движении и возмущении, которые вызваны разностями температуры, атмосферного давления, солёности, ветровыми нагонами и т.д. Поэтому за физическую поверхность здесь принимается невозмущенная поверхность воды, называемая морской топографической поверхностью.

Итак, в настоящее время, под фигурой Земли понимают форму её физической поверхности, которая образуется в областях суши поверхностью твёрдой оболочки Земли, а на территории океанов и морей – их невозмущенной поверхностью.

Физическая поверхность Земли является очень сложной, не всегда однозначно определена и не имеет строгого математического описания. Вместо неё, а также для решения ряда научных и практических задач за приближённую фигуру Земли может быть принята одна из уровенных поверхностей силы тяжести, которая близка (но не совпадает) к невозмущенной поверхности океана.

При решении целого ряда научных и практических задач можно использовать еще более простую фигуру Земли, эллипсоид или сферу. Эллипсоид вращения является основой для геодезической системы координат. Определение параметров (геометрических и физических) такого эллипсоида, близкого к геоиду, является одной из современных задач теории фигуры Земли.

Что значит определить поверхность Земли? Что вообще значит определить и задать геометрическую поверхность? В геодезии в настоящее время под определением физической поверхности Земли подразумевается определение положения её точек в единой системе координат.

### 3 Системы координат

Вообще говоря, сама задача установления системы координат в настоящее время не входит в задачи теории фигуры Земли, хотя и тесно с ней связана.

#### 3.1 Прямоугольная система координат

В геодезии используют прямоугольную систему координат, начало  $O$  которой находится в центре масс Земли, ось  $Z$  направлена по оси вращения Земли, ось  $X$  совмещена с линией

пересечения плоскостей экватора и начального меридиана, ось  $Y$  дополняет систему до правой[1]. Это геоцентрическая или общеземная система координат. В ней положение точек определяется по всей Земле. Если начало системы координат по той или иной причине смещено относительно центра масс, то система называется референцной.

### 3.2 Сферическая система координат

Сферические (полярные) координаты определяются геоцентрической широтой  $\Phi$  (или полярным расстоянием  $\vartheta$ ), долготой  $\Lambda$  и полярным радиус-вектором  $r$ . Геоцентрической широтой  $\Phi$  называется угол между радиусом-вектором заданной точки и плоскостью экватора. Долгота  $\Lambda$  есть угол между плоскостью меридиана заданной точки и плоскостью меридиана, принятого в качестве начального. Полярное расстояние  $\vartheta$  является дополнением широты  $\Phi$  до  $90^\circ$ :

$$\vartheta = 90^\circ - \Phi.$$

Сферические координаты связаны с прямоугольными следующими соотношениями

$$\begin{aligned} X &= r \cos \Phi \cos \Lambda, \\ Y &= r \cos \Phi \sin \Lambda, \\ Z &= r \sin \Phi, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} X &= r \sin \vartheta \cos \Lambda, \\ Y &= r \sin \vartheta \sin \Lambda, \\ Z &= r \cos \vartheta. \end{aligned}$$

### 3.3 Астрономические координаты

Астрономические координаты естественным образом возникают при измерениях в гравитационном поле и определяют направление силовой линии поля силы тяжести. Астрономическая широта  $\varphi$  — это дополнение до  $90^\circ$  угла между линией, параллельной оси вращения Земли, и отвесной линией. Долгота равна двугранному углу между плоскостями начального астрономического меридиана и астрономического меридиана данной точки.

### 3.4 Эллипсоид. Геодезическая система координат

Во многих геодезических приложениях применяют системы геодезических координат  $B, L, H$ , связанных с выбранным эллипсоидом вращения. Эллипсоид обычно задается его большой полуосью  $a$  и сжатием  $\alpha$ . Вспомним, что

$$\alpha = \frac{a - b}{a}, \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

где  $b$  — малая полуось эллипсоида,  $e$  — его первый эксцентриситет.

Геодезическая широта  $B$  для некоторой точки  $P$  есть угол между опущенной из  $P$  нормалью к эллипсоиду и плоскостью экватора. Геодезическая долгота  $L$  — угол между плоскостью начального меридиана и плоскостью меридиана точки  $P$  (равна сферической долготе  $\Lambda$ ). Геодезическая высота  $H$  — (кратчайшее) расстояние от точки  $P$  по нормали до поверхности эллипсоида.

Важно отметить, что именно геодезическая система координат подразумевается, когда мы говорим об определении физической поверхности Земли в единой системе координат. Подумайте, всегда ли в этой системе координат поверхность Земли может быть определена однозначно?

Геодезические координаты связаны с прямоугольными следующими соотношениями

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L, \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L, \\ Z &= (N + H - Ne^2) \sin B, \end{aligned}$$

где  $N$  — радиус кривизны первого вертикала, который, как известно из курса сфероидической геодезии, вычисляется так

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}.$$

Геодезическая долгота  $L$  совпадает со сферической долготой  $\lambda$ , если начала и ориентация координатных осей систем совпадают. Геоцентрическая широта отличается от геодезической. Опуская вывод (см. лекции), приведем здесь окончательное выражение

$$\operatorname{tg} \Phi = (1 - e^2) \operatorname{tg} B.$$

В некоторых геодезических выводах также полезно использовать приведенную широту  $u$  — геоцентрическую широту точки  $P'$ , которая является проекцией точки  $P_0$  (пересечение нормали точки  $P$  с эллипсоидом) на вспомогательную сферу радиуса  $a$  (большая полуось) нормальной к плоскости экватора. Приведенная широта связана с геодезической следующим выражением (вывод см. в лекциях):

$$\operatorname{tg} u = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B.$$

Геодезические широта и долгота отличаются от соответствующих астрономических координат, поскольку направление отвесной линии отличается от направления нормали к эллипсоиду. Угол между направлением отвесной линии и нормалью к эллипсоиду называется астрономо-геодезическим отклонением отвеса. Удобно этот угол разложить на две составляющие — проекции угла в плоскости первого вертикала  $\eta$  и в плоскости меридиана  $\xi$ , тогда

$$\begin{aligned}\xi &= \varphi - B, \\ \eta &= (\lambda - L) \cos \varphi.\end{aligned}$$

В дальнейшем мы познакомимся и с другими видами отклонения отвеса.

## 4 Связь с другими науками

**Математика.** Изучение гравитационного поля и фигуры Земли — сложная задача. В ходе курса мы будем пользоваться различными разделами математики, с некоторыми из которых вам придется познакомиться впервые:

- векторный анализ,
- теория поля,
- теория ньютоновского потенциала,
- специальные функции,
- дифференциальные уравнения, обыкновенные и в частных производных,
- краевые задачи.

Исторически так сложилось, как и в случае теории математической обработки геодезических измерений, обогатившей теорию вероятностей, теория фигуры Земли обогатила многие разделы математики, которые теперь прочно служат её основой.

**Геофизика и геология.** Гравитационное поле на поверхности Земли отражает распределение масс внутри неё. И хотя, как мы очень скоро убедимся, одних только гравиметрических данных недостаточно для изучения внутреннего строения, они, наряду с другими геофизическими методами, служат важным источником информации.

Гравиметрический метод является одним из основных при поиске и разведке полезных ископаемых. Высокоточные регулярные измерения используются для мониторинга месторождений в процессе добычи нефти и газа.

**Археология и строительство.** Локальная информация о гравитационном поле может быть полезна для поиска пустот (карст), провалов, древних подземных ходов и тоннелей, объектов археологического наследия.

**Гляциология и уровень моря. Океанология.** Таяние ледников, вызванное изменением климата, уменьшает их массу, следовательно, меняется и гравитационное поле. По спутниковым гравиметрическим данным (миссия GRACE) получены важнейшие данные о ледниках Гренландии и Антарктиды. Таяние льдов вызывает рост среднего уровня Мирового океана, следовательно, изменение высоты морской топографической поверхности, то есть физической поверхности Земли. Эти процессы изучаются методом спутниковой альтиметрии.

**Гидрология.** Перераспределение водных масс на всей поверхности Земли вызвано не только таянием льдов, но и другими климатическими явлениями. Локальные измерения силы тяжести позволяют изучать местный гидрологический режим, а спутниковые гравиметрические миссии — региональный и даже глобальный.

**Орбиты ИСЗ.** Для вычисления орбит искусственных спутников для определения его положения относительно центра масс Земли необходимо знание гравитационного поля вне поверхности Земли (на высоте полета спутника). Этот нюанс свидетельствует о том, что, казалось бы, чисто геометрический метод определения координат при помощи глобальных навигационных спутниковых систем, на самом деле также связан с гравитационным полем.

Кроме всего вышеперечисленного, высокоточные измерения силы тяжести используются в метрологии и при изучении геодинамических процессов, а также в других областях науки и техники.

## Список литературы

- [1] Л. В. Огородова. *Высшая геодезия. Часть III. Теоретическая геодезия: Учебник для вузов.* М.: Геодезкартиздат, 2006, с. 384.
- [2] Л. В. Огородова. *Основы теории потенциала. Гравитационное поле Земли, Луны и планет. Учебное пособие.* М.: Изд-во МИИГАиК, 2013, с. 108.
- [3] Л. П. Пеллинен. *Высшая геодезия (Теоретическая геодезия).* М.: Недра, 1978, с. 264.
- [4] А. П. Юзефович. *Поле силы тяжести и его изучение: учебное пособие.* М.: Изд-во МИИГАиК, 2014, с. 194.