Геодезическая гравиметрия 2019

Практическое занятие № 6

Свойства потенциала. Гармонические функции

18 марта 2019 г.

1 Локальные свойства потенциала

Рассмотрим изменение потенциала $\mathrm{d}V\,(x, y, z)$ при смещении точки $P\,(x, y,z)$ на бесконечно малый вектор $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ в точку $P_1\,(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$. Изменение потенциала φ можно представить в виде

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z,$$

иначе - как скалярное произведение векторов, один из которых является вектором смещения $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$, а другой – градиентом потенциала $\{\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\}$, который, насколько мы уже успели узнать, равен вектору силы притяжения $\vec{F}$

$$\mathrm{d}V = \mathrm{grad}\ V \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = |\vec{F}||\overrightarrow{\mathrm{d}l}| \cos\left(\vec{F}, \overrightarrow{\mathrm{d}l}\right).$$

Производную потенциала по направлению получим как скалярное произведение градиента потенциала на орт $\vec{l} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{|\overrightarrow{\mathrm{d}l}|} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\mathrm{d}l}$ данного направления

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l} = \mathrm{grad}\ V \cdot \vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{l} = |\vec{F}| \cos\left(\vec{F}, \vec{l}\right). \tag{1}$$

Из этого выражения следуют несколько важных и полезных свойств.

1. Производная потенциала $\mathrm{d}V/\,\mathrm{d}l$ по любому направлению $\vec{l}$ равна проекции силы на это направление
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l} = |\vec{F}| \cos\left(\vec{F}, \vec{l}\right).$$

2. Если направление перемещения $\vec{l}$ совпадает с направлением действия силы $\vec{F}$: $\cos\left(\vec{F}, \vec{l}\right) = 1$, то изменение потенциала будет максимальным.

3. Если направление перемещения $\vec{l}$ перпендикулярно направлению действия силы $\vec{F}$: $\cos\left(\vec{F}, \vec{l}\right) = 1$, то, то $\mathrm{d}V = 0$ и
$$V\,(x, y, z) = c.$$
Таким образом, мы получили уравнение поверхности уровня, в каждой точке которой потенциал V принимает одно и тоже значение c, а вектор силы $\vec{F}$ направлен по нормали к ней. Поверхность уровня потенциала V называется *эквипотенциальной*. Заметим, что на силу не накладываются никакие ограничения и, вообще говоря, она может меняться на уровенной поверхности.

4. Если направление перемещения $\vec{l}$ совпадает с противоложным направлением действия силы $\vec{F}$: $\cos\left(\vec{F}, \vec{l}\right) = -1$, то $\mathrm{d}V = -|\vec{F}|\,\mathrm{d}l$. Положим, что $\mathrm{d}l = \mathrm{d}h$ — расстояние между бесконечно близкими уровенными поверхностями, то
$$\mathrm{d}V = -|\vec{F}|\,\mathrm{d}h, \qquad \mathrm{d}h = -\frac{\mathrm{d}V}{|\vec{F}|}.$$
Согласно этому выражению, расстояние $\mathrm{d}h$ между уровенными поверхностямиобратно пропорционально величине силы и поэтому уровенные поверхности непараллельны.

5. Представим себе семейство уровенных поверхностей и отрезки $\mathrm{d}h$, перпендикулярные к соседним поверхностям. Эти отрезки образуют ломаную линию. Если отрезки $\mathrm{d}h$ устремить к нулю, то, в пределе, ломаная линия превратится в кривую, пересекающую все уровенные поверхности по нормали. Эта кривая называется **силовой линией**. Найдём длину отрезка OM силовой линии между двумя уровенным поверхностями

$$h = -\int\limits_{O}^{M} \frac{\mathrm{d}V}{|\vec{F}|} = -\frac{V_M - V_O}{F_m} = \frac{V_O - V_M}{F_m},$$

где F_m — среднее интегральное значение силы на отрезке OM. Таким образом, для определения высоты в гравитационном поле необходимо знать разность потенциалов и среднее значение силы между уровенными поверхностями. Эта формула имеет важное значение в теории высот.

———

Потенциал объёмных масс

$$V = G \iiint\limits_{\tau} \frac{\delta}{r}\,\mathrm{d}\tau, \tag{2}$$

а внутри притягивающих масс потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\mathit{\Delta} V = -4\pi G\delta. \tag{3}$$

Из последних двух выражений нетрудно получить

$$V = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\tau} \frac{\mathit{\Delta} V}{r}\,\mathrm{d}\tau, \tag{4}$$

то есть зная вторые производные потенциала притяжения во всех внутренних точках объёма τ можно определить потенциал в любой точке пространства.

2 Первая и вторая формулы Грина

Пусть в области τ с границей σ заданы две правильные функции $U\,(x, y, z)$ и $V\,(x, y, z)$. Функция называется правильной в области τ, если она внутри этой области и на её границе, конечна, однозначна и непрерывна вместе со всеми своими частными производными первых двух порядков.

Если правильная функция $V\,(x, y, z)$ удовлетворяет во всех точках области σ уравнению Лапласа $\mathit{\Delta} V = 0$, то она называется гармонической в области τ.

Опуская вывод, запишем для этих функций первую формулу Грина

$$\iiint\limits_{\tau} U \mathit{\Delta} V\,\mathrm{d}\tau + \iiint\limits_{\tau} D\,(U, V)\,\mathrm{d}\tau = \iint\limits_{\sigma} U \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}\sigma,$$

где

$$D\,(U, V) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}$$

— оператор Дирихле, $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}$ — производная по внешней нормали к поверхности σ. Для краткости далее не будем писать знаки тройных и двойных интегралов, то есть

$$\int\limits_{\tau} U \mathit{\Delta} V\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_{\tau} D\,(U, V)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\sigma} U \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}\sigma. \tag{5}$$

Поменяем в (5) местами функции U и V, получим

$$\int\limits_{\tau} V \varDelta U \,\mathrm{d}\tau + \int\limits_{\tau} D\,(V, U)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\sigma} V \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

Вычитая это выражение почленно из (5), получаем вторую формулу Грина

$$\int\limits_{\tau} [U \varDelta V - V \varDelta U]\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\sigma} U \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n} - V \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}\sigma. \tag{6}$$

Пусть $U = 1$, тогда из первой формулы Грина (5)

$$\int\limits_{\tau} \varDelta V \,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\sigma} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}\sigma. \tag{7}$$

Если V — гармоническая функция ($\varDelta V = 0$), то

$$\int\limits_{\sigma} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}\sigma = 0, \tag{8}$$

то есть двойной интеграл от нормальной производной гармонической функции по замкнутой поверхности равен нулю (или поток вектора градиента гармонической функции через замкнутую поверхность равен нулю). Это **характеристическое свойство гармонических функций**. Причем, двойной интеграл может быть взять по любой (не только по σ в смысле границы области τ) замкнутой поверхности, принадлежащей области правильности функции. Из характеристического свойства можно доказать одну фундаментальную для гармонических функций теорему.

Теорема 2.1 (О максимуме и минимуме)**.** *Гармоническая функция V, заданная в области τ, не может иметь внутри этой области ни максимумов, ни минимумов.*

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Предположим, что гармоническая функция V достигает в некоторой точке P, лежащей внутри τ своего максимума (минимума). В силу этого, значения функции V вблизи точки P будут меньше (больше), чем значения функции в самой точке P. Поэтому мы можем найти сферу σ столь малого радиуса, что во всех точка поверхности этой сферы производная по внешней нормали $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}$ будет отрицательной (положительной). Поэтому левая часть (8) будет существенно положительной (отрицательной), что противоречит самой формуле (8). □

3 Стоксовы постоянные

Вернёмся к формуле (7). Если V — потенциал объёмных масс, а точка находится внутри притягиваемого тела τ, то $\varDelta V = -4\pi G\delta$, поэтому

$$-4\pi G \underbrace{\int\limits_{\tau} \delta \,\mathrm{d}\tau}_{\text{масса}} = \int\limits_{\sigma} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}\sigma,$$

откуда получаем формулу Гаусса

$$GM = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\sigma} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}\sigma, \tag{9}$$

где M — полная масса тела. Если поверхность σ ограничивает некоторую внутреннюю область для τ, скажем, τ', то M — будет массой, заключённой в объёме τ'. Таким образом, если на поверхности σ тела τ известны значения производной потенциала по нормали к этой поверхности, то можно вычислить массу M (или GM — гравитационный параметр, планетоцентрическая гравитационная постоянная), заключенную в τ. Если σ является уровенной для потенциала V, то производная по нормали есть сила $F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}$.

Обратимся теперь ко второй формуле Грина (6). Пусть V — потенциал объёмных масс τ, U — произвольная гармоническая функция. Применим вторую формулу Грина

$$-4\pi G\delta \int\limits_{\tau} U\delta\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\sigma} \left(U\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n} - V\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\right).$$

Объёмные интегралы

$$\int\limits_{\tau} U\delta\,\mathrm{d}\tau$$

от произведения плотности на произвольную гармоническую функцию называются **стоксовыми постоянными**. Они могут быть однозначно определены, если на поверхности σ тела заданы производные потенциала $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}$ притяжения по нормали и значения самого потенциала V.

Гармоническую функцию U можно выбирать в виде многочлена степени n от координат x, y, z. В общем виде можно записать однородный многочлен степени n

$$U_n\left(x, y, z\right) = \sum_{n=1}^{N} a_{pqr}x^p y^q z^r, \quad p+q+r = n, \quad \varDelta U = 0.$$

Разные степени n соответствуют стоксовым постоянным разных порядков. Поскольку U — гармоническая функция $\varDelta U = 0$, то коэффициенты не могут быть выбраны произвольно.

При $n = 0$ $U\left(x, y, z\right) = const$. Пусть $U\left(x, y, z\right) = 1$, тогда получим стоксову постоянную нулевого порядка (9), которая равна массе тела.

Пусть $n = 1$, тогда $U\left(x, y, z\right) = x + y + z$, поэтому стоксовы постоянные первого порядка будут равны

$$\int\limits_{\tau} x\delta\,\mathrm{d}\tau, \quad \int\limits_{\tau} y\delta\,\mathrm{d}\tau, \quad \int\limits_{\tau} z\delta\,\mathrm{d}\tau.$$

Из механики известно, что положение центра масс тела — геометрической точки, характеризующей движение тела или системы частиц как целого — определяется так

$$\vec{r_c} = \frac{1}{M}\int\limits_{\tau} \delta\,\vec{r}\,\mathrm{d}\tau,$$

следовательно, стоксовы постоянные первого порядка определяют положение центра масс тела

$$x_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{\tau} x\delta\,\mathrm{d}\tau, \quad y_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{\tau} y\delta\,\mathrm{d}\tau, \quad z_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{\tau} z\delta\,\mathrm{d}\tau.$$

Вообще говоря, интегралы $\int_M r^n\,\mathrm{d}m$ от произведения элемента массы $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}\tau$ массы тела на n–ую степень от расстояния до оси или плоскости называются моментами тела относительно оси или плоскости соответственно. Моменты первого порядка ($n = 1$) называются статическими. Таким образом, стоксовы постоянные первого порядка это статические моменты первого порядка относительно координатных осей.

Моменты второго порядка ($n = 2$) называются моментами инерции

$$J = \int\limits_{M} r^2\,\mathrm{d}m,$$

которые являются мерой инертности тела во вращательном движении вокруг оси.

Если положить

$$U = xy, \quad U = xz, \quad U = yz,$$

то получим стоксовы постоянные

$$J_{xy} = \int\limits_{\tau} xy\delta\,\mathrm{d}\tau, \quad J_{xz} = \int\limits_{\tau} xz\delta\,\mathrm{d}\tau, \quad J_{yz} = \int\limits_{\tau} yz\delta\,\mathrm{d}\tau,$$

которые называются центробежными моментами инерции или произведениями инерции относительно осей прямоугольной системы координат.
Рассмотрим еще две стоксовы постоянные второго порядка для

$$U = z^2 - \frac{x^2+y^2}{2}, \quad U = x^2 - y^2,$$

которые имеют вид

$$\int\limits_{\tau} \left[z^2 - \frac{x^2+y^2}{2}\right]\delta\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\tau} \frac{\delta}{2}\left[2z^2 - x^2 + y^2\right]\mathrm{d}\tau = \frac{A+B}{2} - C,$$

$$\int\limits_{\tau} \left[x^2 - y^2\right]\delta\,\mathrm{d}\tau = B - A,$$

где

$$A = J_{xx} = \int\limits_{\tau} \left(y^2 + z^2\right)\delta\,\mathrm{d}\tau,$$

$$B = J_{yy} = \int\limits_{\tau} \left(x^2 + z^2\right)\delta\,\mathrm{d}\tau,$$

$$C = J_{zz} = \int\limits_{\tau} \left(x^2 + y^2\right)\delta\,\mathrm{d}\tau$$

— моменты инерции тела относительно осей X, Y, Z соответственно.

Таким образом, массу тела, координаты центра масс, разности моментов инерции, произведения инерции можно рассматривать как стоксовы постоянные различных порядков.

Определение стоксовых постоянных является одной из основных задач современной геодезии. Для Земли она решается методами космической геодезии. Определением стоксовых постоянных аномальных тел составляет основную задачу гравитационной разведки.

4 Фундаментальная формула Грина

Во второй формуле Грина (6) будем полагать $U = \frac{1}{r}$, тогда

$$\int\limits_{\tau} \frac{\Delta V}{r}\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\sigma} \left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n} - V\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}\sigma. \tag{10}$$

Если V — потенциал объемных масс, то учитывая выражение (4), получаем

$$V = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma} \left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n} - V\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}\sigma, \tag{11}$$

которая называется **основной формулой теории гармонических функций** или **фундаментальной формулой Грина** для внешней точки. Первое слагаемое правой части

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma} \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}\sigma$$

есть не что иное, как потенциал притяжения простого слоя поверхностной плотности $\mu = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}$. Второе слагаемое

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma} V\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\sigma$$

представляет собой потенциал двойного слоя плотности $\frac{V}{4\pi}$.

Таким образом, потенциал объёмных масс во внешнем пространстве можно представить суммой потенциалов двойного и прстого слоя, распределённых на поверхности σ притягиваемого тела τ. Отметим и то, что для определения внешнего потенциала не нужна информация о распределении плотности внутри тела.