Геодезическая гравиметрия 2019

Практическое занятие № 4

Притяжение тел простой формы II

4 марта 2019 г.

1 Притяжение шара

Вспомним формулу потенциала притяжения сферического слоя с *поверхностной* плотностью $\mu = const$ и радиусом R' внешней точки P

$$V_e = 4\pi G\mu \frac{R'^2}{r}.$$

Однородный шар с *объёмной* плотностью $\delta = const$ можно представить состоящим из бесконечного числа сферических слоёв. Пусть R — радиус шара, R' — радиус сферического слоя толщиной $\mathrm{d}R'$. Перейдем от поверхностной плотности μ к объёмной δ

$$\mu = \delta\,\mathrm{d}R'.$$

Тогда элементарный потенциал притяжения сферического слоя с *объёмной* плотностью δ внешней точки P равен

$$\mathrm{d}V_e = 4\pi G\delta \frac{R'^2}{r}\,\mathrm{d}R'.$$

Интегрируя по всему радиусу шара, получаем

$$V_e = 4\pi G\delta \int\limits_0^R \frac{R'^2}{r}\,\mathrm{d}R' = \frac{4}{3}\pi G\delta \frac{R^3}{r}.$$

Вводя массу шара $M = 4/3\ \pi R^3\delta$, снова получаем

$$V_e = \frac{GM}{r}.$$

Аналогично для силы

$$|\overrightarrow{F_e}| = F_r = -\frac{\partial V_e}{\partial r} = \frac{4}{3}\pi G\delta \frac{R^3}{r^2} = \frac{GM}{r^2}.$$

Рассмотрим случай, когда притягиваемая точка P находится внутри шара радиуса R на расстоянии r от его центра. Применяя свойство суперпозиции, потенциал притяжения шара V_i можно представить как сумму *потенциала шара* V_1 радиуса r, по отношению к которому точка P будет являться внешней и *потенциала шарового слоя* V_2, по отношению к которому точка P будет являться внутренней

$$V_i = V_1 + V_2.$$

Для нахождения потенциала V_1, применим формулу *потенциала шара* V_e для внешней точки P, принимая во внимание, что $R = r$, получим

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi G\delta r^2.$$

Для нахождения потенциала V_2, нужно получить формулу потенциала шарового слоя V_i для точки P, находящейся в пределах его внутреннего радиуса r. Для этого, шаровой слой, ограниченный радиусами R_1' и R_2', можно представить состоящим из бесконечного числа сферических слоёв с объёмной плотностью δ, переменным радиусом R' и толщиной $\mathrm{d}R'$. Вспомним формулу потенциала притяжения сферического слоя с поверхностной плотностью $\mu = const$ и радиусом R' внутренней точки P

$$V_i = 4\pi G\mu R'.$$

Выполняя переход от поверхностной плотности к объёмной $\mu = \delta\,\mathrm{d}R'$, получим элементарный потенциал притяжения сферического слоя с объёмной плотностью δ внутренней точки P

$$\mathrm{d}V_i = 4\pi G\delta R'\,\mathrm{d}R'.$$

Интегрируя по всему шаровому слою, получим формулу *потенциала шарового слоя* для точки P, находящейся в пределах его внутреннего радиуса R'_1, в общем виде

$$V_i = 4\pi G\delta \int\limits_{R'_1}^{R'_2} R'\,\mathrm{d}R' = 2\pi G\delta\left(R'^2_2 - R'^2_1\right).$$

В случае притяжения шара радиусом R для внутренней точки P, находящейся на расстоянии r от его центра, шаровой слой будет иметь пределы $[r; R]$. Тогда потенциал шарового слоя V_2 будет равен:

$$V_2 = 2\pi G\delta\left(R^2 - r^2\right).$$

Таким образом, потенциал притяжения шара V_i для внутренней точки P равен

$$V_i = V_1 + V_2 = \frac{2}{3}\pi G\delta\left(3R^2 - r^2\right).$$

Для силы получаем

$$F_i = -\frac{\partial V_i}{\partial r} = \frac{4}{3}\pi G\delta r = \frac{GM}{r^2}.$$

2 Притяжение шарового слоя

Пусть точку притягивает однородный шаровой слой, заключенный между радиусами R_1 и R_2. Тогда потенциал притяжения внешней точки можно представить как разность потенциалов V_2 и V_1 шаров радиусом R_2 и R_1, соответственно

$$V_e = V_2 - V_1.$$

Тогда потенциал притяжения *шарового слоя* V_e для внешней точки P равен

$$V_e = \frac{4}{3}\pi G\delta\frac{1}{r}\left(R_2^3 - R_1^3\right).$$

Для силы получаем

$$F_e = -\frac{\partial V_i}{\partial r} = \frac{4}{3}\pi G\delta\left(R_2^3 - R_1^3\right)\frac{1}{r^2}.$$

Замечание 1. Потенциал шарового слоя на внешнюю точку мог бы быть вызван и притяжением точки с массой $M = \frac{4}{3}\pi\delta\left(R_2^3 - R_1^3\right)$ или шаром радиуса R_2 с плотностью $\delta' = \delta\left(R_2^3 - R_1^3\right)/R_2^3$. Такая неоднозначность свидетельствует о том, что только по гравиметрическим данным невозможно изучать внутреннее строение Земли. Без сейсмических данных мы бы никогда не могли сказать, полая внутри Земля или нет.

Для точки, находящейся в пределах внутреннего радиуса $r < R_1$ шарового слоя, ранее была получена формула потенциала

$$V_i = 2\pi G\delta\left(R_2^2 - R_1^2\right),$$

тогда для силы справедливо

$$F_i = 0.$$

Если точка находится внутри шарового слоя $R_1 < r < R_2$, то в таком случае, применяя свойство суперпозиции, потенциал притяжения можно представить как сумму потенциалов шарового слоя V_1, ограниченного радиусами R_1 и r, для которого точка будет внешней и шарового слоя V_2, ограниченного радиусами r и R_2, для которого точка будет находиться в пределах внутреннего радиуса r

$$V_i = V_1 + V_2.$$

Для нахождения потенциала V_1 "внутреннего"шарового слоя, ограниченного радиусами R_1 и r, воспользуемся формулой потенциала притяжения шарового слоя V_e для внешней точки

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi G\delta\frac{1}{r}\left(r^3 - R_1^3\right).$$

Для нахождения потенциала V_2 "внешнего"шарового слоя, ограниченного радиусами r и R_2, воспользуемся формулой потенциала притяжения шарового слоя V_i для точки, находящейся в пределах внутреннего радиуса шарового слоя

$$V_2 = 2\pi G\delta\left(R_2^2 - r^2\right).$$

В итоге, потенциал притяжения шарового слоя, для случая, когда точка находится внутри его пределов $R_1 < r < R_2$, получим:

$$V_i = V_1 + V_2 = 2\pi G\delta\left(R_2^2 - \frac{1}{3}r^2 - \frac{2}{3}\frac{R_1^3}{r}\right),$$

а для силы

$$F_i = \frac{4}{3}\pi G\delta\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right).$$

3 Притяжение диска

Силу притяжения бесконечно тонкого однородного диска радиуса a можно представить через притяжение простого слоя $V = G\iint\limits_{\sigma}\frac{\mu\,\mathrm{d}\sigma}{r}$. Удобно воспользоваться цилиндрической системой координат (ρ, α, z), где ρ — полярный радиус, α — полярный угол, z — аппликата точки. Таким образом, цилиндрическая система координат является расширением полярной (плоской) системы координат.

Найдем силу притяжения диска для точки, лежащей на его оси симметрии. Можно записать

$$F = \frac{\partial V}{\partial z} = -G\mu\iint\limits_{\sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma}{r^2}\cos\left(r, z\right),$$

$$\mathrm{d}\sigma = \rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\rho,$$

откуда

$$F = \frac{\partial V}{\partial z} = -G\mu\iint\limits_{\sigma}\frac{\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\alpha}{r^2}\cos\left(r, z\right).$$

Заметим, что

$$r^2 = \rho^2 + z^2, \qquad r\,\mathrm{d}r = \rho\,\mathrm{d}\rho, \qquad \cos\left(r, z\right) = \frac{z}{r},$$

тогда

$$F_e = -G\mu z\int\limits_{z}^{\sqrt{z^2+a^2}}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha}{r^3} = -2\pi G\mu z\int\limits_{z}^{\sqrt{z^2+a^2}}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -2\pi G\mu\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right].$$

Если $z < 0$, то $F_e = +2\pi G\mu \left[1 - \dfrac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right]$.
Теперь найдём значение силы на самом слое

$$\lim_{z\to 0} F_e = \pm 2\pi G\mu \lim_{z\to 0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right] = \pm 2\pi G\mu = const.$$

Прямое значение на слое, равное среднему из двух пределов, $F_0 = 0$, что можно было бы получить и чисто опираясь на физический смысл силы. Таким образом, сила притяжения терпит разрыв на величину $4\pi G\mu$ при переходе через слой, т.е. является не неразрывной.

4 Притяжение плоскости

Силу притяжения плоскости получим из силы притяжения диска, радиус которого стремится к бесконечности

$$F = \pm 2\pi G\mu \lim_{a\to\infty} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right] = \pm 2\pi G\mu = const,$$

откуда следует, что сила притяжения плоскости не зависит от расстояния до неё.

5 Притяжение цилиндра

Будем рассматривать притяжение точки, находящейся на оси однородного цилиндра высотой H и радиуса a. Для простоты и приложений будем считать, что точка находится на верхней плоскости его основания ($z = H$).

Однородный цилиндр с объёмной плотностью $\delta = const$ можно представить состоящим из бесконечного числа дисков толщиной $\mathrm{d}z$. Перейдем от поверхностной плотности к объёмной $\mu = \delta\,\mathrm{d}z$. Элементарная сила диска будет равна

$$\mathrm{d}F_z = -2\pi G\delta \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right] \mathrm{d}z,$$

интегрируя по всей поверхности цилиндра, получим

$$F_H = -2\pi G\delta \int\limits_0^H \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right] \mathrm{d}z = -2\pi G\delta \left[z - \sqrt{a^2 + z^2}\right] \Big|_0^H = -2\pi G\delta \left(H - \sqrt{a^2 + H^2} + a\right).$$

В случае, когда $a >> H$, часть выражения $\sqrt{a^2 + H^2}$ можно разложить в ряд Тейлора. Для этого приведём её к виду $\sqrt{1 + x}$

$$\sqrt{a^2 + H^2} = a\sqrt{1 + \frac{H^2}{a^2}},$$

используя ряд Маклорена для функции $\sqrt{1 + x}$, получим

$$a\sqrt{1 + \frac{H^2}{a^2}} \approx a\left(1 + \frac{1}{2}\frac{H^2}{a^2} - \frac{1}{8}\frac{H^4}{a^4} + \dots\right) \approx \left(a + \frac{H^2}{2a} - \frac{H^4}{8a^3} + \dots\right),$$

тогда

$$F_H = -2\pi G\delta H \left(1 - \frac{H}{2a} + \frac{H^3}{8a^3} + \dots\right).$$

6 Притяжение плоскопараллельного слоя

Силу притяжения плоскопараллельного (то есть заключенного между двумя плоскостями) слоя толщиной H получим из силы притяжения цилиндра, радиус которого стремится к бесконечности

$$F = -2\pi G\delta H \lim_{a\to\infty}\left(1 - \frac{H}{2a} + \frac{H^3}{8a^3} + \dots\right) = -2\pi G\delta H = const.$$

Таким образом, сила притяжения плоскопараллельного слоя является величиной постоянной.

Редукция (поправка), вводимая в измеренные значения силы тяжести и вычисляемая по формуле $-2\pi G\delta H$ называется редукцией Буге. Так может быть учтено притяжение топографических масс, снега, грунтовых вод и т.д. То есть в тех случаях, когда высота притягивающих масс много меньше их радиуса. Плотность δ, конечно, будет меняться.

Поле, создаваемое плоскостью или плоскопараллельным слоем называется однородным. Сила здесь имеет одно и то же направление — перпендикулярное плоскости — и одинаковую величину в любой точке. Уровенные поверхности такого поля — плоскости, параллельные слою. В прикладной геодезии, например, в рядовых строительных работах, почти всегда предполагается, что работы проводятся именно в однородном поле.