Геодезическая гравиметрия 2019

Практическое занятие № 6

Гравитационное поле Земли

18 марта 2019 г.

1 Локальные свойства потенциала

Рассмотрим изменение потенциала $\mathrm{d}V\,(x, y, z)$ при смещении точки $P\,(x, y,z)$ на бесконечно малый вектор $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ в точку $P_1\,(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$. Изменение потенциала φ можно представить в виде

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z,$$

иначе - как скалярное произведение векторов, один из которых является вектором смещения $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$, а другой – градиентом потенциала $\{\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\}$, который, насколько мы уже успели узнать, равен вектору силы притяжения $\vec{F}$

$$\mathrm{d}V = \mathrm{grad}\ V \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = |\vec{F}||\overrightarrow{\mathrm{d}l}| \cos\left(\vec{F}, \overrightarrow{\mathrm{d}l}\right).$$

Производную потенциала по направлению получим как скалярное произведение градиента потенциала на орт $\vec{l} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{|\overrightarrow{\mathrm{d}l}|} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\mathrm{d}l}$ данного направления

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l} = \mathrm{grad}\ V \cdot \vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{l} = |\vec{F}| \cos\left(\vec{F}, \vec{l}\right). \tag{1}$$

Из этого выражения следуют несколько важных и полезных свойств.

1. Производная потенциала $\mathrm{d}V/\,\mathrm{d}l$ по любому направлению $\vec{l}$ равна проекции силы на это направление
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l} = |\vec{F}| \cos\left(\vec{F}, \vec{l}\right).$$

2. Если направление перемещения $\vec{l}$ совпадает с направлением действия силы $\vec{F}$: $\cos\left(\vec{F}, \vec{l}\right) = 1$, то изменение потенциала будет максимальным.

3. Если направление перемещения $\vec{l}$ перпендикулярно направлению действия силы $\vec{F}$: $\cos\left(\vec{F}, \vec{l}\right) = 1$, то, то $\mathrm{d}V = 0$ и
$$V\,(x, y, z) = c.$$
Таким образом, мы получили уравнение поверхности уровня, в каждой точке которой потенциал V принимает одно и тоже значение c, а вектор силы $\vec{F}$ направлен по нормали к ней. Поверхность уровня потенциала V называется *эквипотенциальной*. Заметим, что на силу не накладываются никакие ограничения и, вообще говоря, она может меняться на уровенной поверхности.

4. Если направление перемещения $\vec{l}$ совпадает с противоложным направлением действия силы $\vec{F}$: $\cos\left(\vec{F}, \vec{l}\right) = -1$, то $\mathrm{d}V = -|\vec{F}|\,\mathrm{d}l$. Положим, что $\mathrm{d}l = \mathrm{d}h$ — расстояние между бесконечно близкими уровенными поверхностями, то
$$\mathrm{d}V = -|\vec{F}|\,\mathrm{d}h, \qquad \mathrm{d}h = -\frac{\mathrm{d}V}{|\vec{F}|}.$$
Согласно этому выражению, расстояние $\mathrm{d}h$ между уровенными поверхностями обратно пропорционально величине силы и поэтому уровенные поверхности непараллельны.

5. Представим себе семейство уровенных поверхностей и отрезки $\mathrm{d}h$, перпендикулярные к соседним поверхностям. Эти отрезки образуют ломаную линию. Если отрезки $\mathrm{d}h$ устремить к нулю, то, в пределе, ломаная линия превратится в кривую, пересекающую все уровенные поверхности по нормали. Эта кривая называется **силовой линией**. Найдём длину отрезка OM силовой линии между двумя уровенным поверхностями

$$h = -\int\limits_O^M \frac{\mathrm{d}V}{|\vec{F}|} = -\frac{V_M - V_O}{F_m} = \frac{V_O - V_M}{F_m},$$

где F_m — среднее интегральное значение силы на отрезке OM. Таким образом, для определения высоты в гравитационном поле необходимо знать разность потенциалов и среднее значение силы между уровенными поверхностями. Эта формула имеет важное значение в теории высот.