Геодезическая гравиметрия 2019

Практическое занятие № 3

Притяжение тел простой формы I

25 февраля 2019 г.

1 Притяжение простого слоя

Потенциал объемного тела может быть представлен в виде потенциалов простого слоя, двойного слоя или их комбинации. Это полезное свойство, которое часто используется в теории фигур планет при решении теоретических задач. Такая замена позволяет перейти от интегрирования по объёму к интегрированию по поверхности (то есть от тройного интеграла к двойному). Рассмотрим потенциал простого слоя.

Пусть в объеме τ, заключенном между двумя очень близкими, поверхностями σ и σ' находится притягивающая масса с переменной объёмной плотностью δ, тогда потенциал объёмных масс будет равен

$$V = G \iiint\limits_{\tau} \frac{\delta\left(x, y, z\right) \mathrm{d}\tau}{r},$$

где интегрирование ведётся по всему объёму τ, а r — расстояние от текущей точки до притягиваемой P.

Элементарный объём

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}h \, \mathrm{d}\sigma,$$

где dh — кратчайшее расстояние между σ и σ', $\mathrm{d}\sigma$ — элемент площади поверхности.

Элементарная масса

$$\mathrm{d}m = \delta \, \mathrm{d}\tau = \delta \, \mathrm{d}h \, \mathrm{d}\sigma.$$

Пусть σ и σ' неограниченно приближаются друг к другу, тогда вся элементарная масса $\mathrm{d}m$ элементарного объёма $\mathrm{d}\tau$ будет сконденсирована на бесконечно тонком слое площадью $\mathrm{d}\sigma$. Такой слой называется простым слоем, а его поверхностная плотность (или плотность простого слоя) равна

$$\mu = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\sigma},$$

откуда

$$\mathrm{d}m = \delta \, \mathrm{d}\tau = \delta \, \mathrm{d}h \, \mathrm{d}\sigma = \mu \, \mathrm{d}\sigma.$$

Элементарный потенциал, создаваемый массой $\mathrm{d}m$ будет равен

$$\mathrm{d}V = G \frac{\mu \, \mathrm{d}\sigma}{r},$$

откуда, интегрируя по поверхности σ, получаем потенциал притяжения простого слоя

$$V = G \iint\limits_{\sigma} \frac{\mu \, \mathrm{d}\sigma}{r}.$$

2 Притяжение однородной сферы (сферического слоя)

Пусть простой слой постоянной плотности μ распределён на сфере радиуса R. Найдём притяжение такой однородной сферы в точке P, находящейся на расстоянии r от центра сферы O. ρ — переменное расстояние от элементарной площади $\mathrm{d}\sigma$ поверхности сферы до точки P.

Воспользуемся сферической системой координат $(\theta,\,\lambda)$. Пусть элемент $\mathrm{d}\sigma$ представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную меридианами λ, $\lambda+\mathrm{d}\lambda$ и параллелями θ, $\theta+\mathrm{d}\theta$. Тогда стороны трапеции будут равны

$$R\,\mathrm{d}\theta \text{ — длина дуги меридиана,}$$
$$R\sin\theta\,\mathrm{d}\lambda \text{ — длина дуги параллели,}$$

а элементарная площадь

$$\mathrm{d}\sigma = R\sin\theta\,\mathrm{d}\lambda\cdot R\,\mathrm{d}\theta = R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda.$$

По теореме косинусов

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta.$$

Тогда для простого слоя, распределённого на поверхности сферы, можно записать

$$V = G\mu\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}} = G\mu R^2\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\lambda =$$
$$= 2\pi G\mu R^2\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}.$$

Выполним замену переменных. Дифференцируя $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$, получаем

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} = \frac{Rr\sin\theta}{\rho}, \quad \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{Rr},$$

тогда

$$V = 2\pi G\mu R^2\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}} = 2\pi G\mu\frac{R}{r}\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\mathrm{d}\rho.$$

Если точка P — внешняя, то $\rho_1 = r - R$, $\rho_2 = r + R$, тогда

$$V_e = 2\pi G\mu\frac{R}{r}\int\limits_{r-R}^{r+R}\mathrm{d}\rho = 2\pi G\mu\frac{R}{r}\big[(r+R)-(r-R)\big] = \underline{4\pi G\mu\frac{R^2}{r}}.$$

Поскольку масса всего сферического слоя равна $M = 4\pi R^2\mu$, то окончательно получаем

$$V_e = \frac{GM}{r}.$$

Если точка P — внутренняя, то $\rho_1 = R - r$, $\rho_2 = R + r$, тогда

$$V_i = 2\pi G\mu\frac{R}{r}\int\limits_{R-r}^{R+r}\mathrm{d}\rho = 2\pi G\mu\frac{R}{r}\big[(R+r)-(R-r)\big] = \underline{4\pi G\mu R = const}.$$

При неограниченном приближении точки P к поверхности сферы $r \to R$, поэтому значение внешнего потенциала будет равно

$$V_e = \lim_{r\to R} 4\pi G\mu\frac{R^2}{r} = 4\pi G\mu R.$$

Таким образом, на поверхности сферы $V_e = V_i$. Следовательно, потенциал сферы — функция, непрерывная во всём пространстве.

Поскольку потенциал притяжения зависит только от расстояния от притягивающей точки до центра сферы, то для нахождения силы для внешней точки достаточно вычислить радиальную производную

$$|\overrightarrow{F_e}| = F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 4\pi G\mu \frac{R^2}{r^2} = \frac{GM}{r^2}.$$

Для внутренней точки

$$|\overrightarrow{F_i}| = F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

При неограниченном приближении точки P к поверхности сферы P_0 с внешней и с внутренней стороны, получим

$$F_{e_0} = \lim_{r \to R} -\frac{\partial V}{\partial r} = \lim_{r \to R} 4\pi G\mu \frac{R^2}{r^2} = 4\pi G\mu,$$
$$F_{i_0} = \lim_{r \to R} -\frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

Прямое значение силы на самой поверхности сферы P_0 равно среднему из предельных значений, то есть

$$F_0 = 2\pi G\mu.$$

Задача 2.1. Как ведут себя потенциал и сила притяжения сферы, если притягиваемая точка премещается из центра сферы в бесконечность? Постройте графики зависимости потенциала и силы притяжения сферы от расстояния.