Геодезическая гравиметрия 2018

Практическое занятие № 4

Притяжение тел простой формы II

6 марта 2018 г.

1 Притяжение тел простой формы

1.1 Притяжение диска

Силу притяжение бесконечно тонкого однородного диска радиуса a можно представить через притяжение простого слоя $V = G\int\limits_\sigma \frac{\mu\,\mathrm{d}\sigma}{r}$. Удобно воспользоваться цилиндрической системой координат (ρ, α, z), где ρ — полярный радиус, α — полярный угол, z — аппликата точки. Таким образом, цилиндрическая система координат является расширением полярной (плоской) системы координат.

Найдем силу притяжения диска для точки, лежащей на его оси симметрии. Можно записать

$$F = \frac{\partial V}{\partial z} = -G\mu \int\limits_\sigma \frac{\mathrm{d}\sigma}{r^2}\cos(r, z)\,,$$

$$\mathrm{d}\sigma = \rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\rho,$$

откуда

$$F = \frac{\partial V}{\partial z} = -G\mu \int\limits_\sigma \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\alpha}{r^2}\cos(r, z)\,.$$

Заметим, что

$$r^2 = \rho^2 + z^2, \qquad r\,\mathrm{d}r = \rho\,\mathrm{d}rho, \qquad \cos(r, z) = \frac{z}{r},$$

тогда

$$F_e = -G\mu \int\limits_z^{\sqrt{z^2+a^2}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha}{r^3} = -2\pi G\mu z \int\limits_z^{\sqrt{z^2+a^2}} \frac{\mathrm{d}z}{r^2} = -2\pi G\mu\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right].$$

Если $z < 0$, то $F_e = +2\pi G\mu\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right]$.

Теперь найдём значение силы на самом слое

$$\lim_{z\to 0} F_e = \pm 2\pi G\mu \lim_{z\to 0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right] = \pm 2\pi G\mu = const.$$

Прямое значение на слое, равное среднему из двух пределов, $F_0 = 0$, что можно было бы получить и чисто опираясь на физический смысл силы. Таким образом, сила притяжение терпит разрыв на величину $4\pi G\mu$ при переходе через слой.

1.2 Притяжение плоскости

Силу притяжения плоскости получим из силы притяжения диска, радиус которого стремится к бесконечности

$$F = \pm 2\pi G\mu \lim_{a\to\infty}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right] = \pm 2\pi G\mu = const,$$

откуда следует, что сила притяжения плоскости не зависит от расстояния до неё.

1.3 Притяжение цилиндра

Будем рассматривать притяжение точки, находящейся на оси однородного цилиндра высотой H и радиуса a. Для простоты и приложений будем считать, что точка находится на верхней плоскости его основания ($z = H$). Элементарная сила бесконечно тонкого диска будет равна

$$\mathrm{d}F_z = -2\pi G\delta \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right] \mathrm{d}z,$$

тогда для всего цилиндра

$$F_H = -2\pi G\delta \int\limits_0^H \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right] \mathrm{d}z = -2\pi G\delta \left[z - \sqrt{a^2 + z^2}\right] \Big|_0^H = -2\pi G\delta \left(H - \sqrt{a^2 + H^2} + a\right).$$

Если $a >> H$, то можно представить (ряд Тейлора)

$$\sqrt{a^2 + H^2} = a\sqrt{1 + \frac{H^2}{a^2}} \approx a + \frac{H^2}{2a} - \frac{H^4}{8a^3} + \dots,$$

тогда

$$F_H = -2\pi G\delta H \left(1 - \frac{H}{2a} + \dots\right).$$

1.4 Притяжение плоскопараллельного слоя

Силу притяжения плоскопараллельного (то есть заключенного между двумя плоскостями) слоя толщиной H получим из силы притяжения цилиндра, радиус которого стремится к бесконечности

$$F = -2\pi G\delta H \lim_{a\to\infty} \left(1 - \frac{H}{2a} + \dots\right) = -2\pi G\delta H = const.$$

Таким образом, сила притяжения плоскопараллельного слоя является величиной постоянной.

Редукция (поправка), вводимая в измеренные значения силы тяжести и вычисляемая по формуле $-2\pi G\delta H$ называется редукцией Буге. Так может быть учтено притяжение топографических масс, снега, грунтовых вод и т.д. То есть в тех случаях, когда высота притягивающих масс много меньше их радиуса. Плотность δ, конечно, будет меняться.

Поле, создаваемое плоскостью или плоскопараллельным слоем называется однородным. Сила здесь имеет одно и то же направление — перпендикулярное плоскости — и одинаковую величину в любой точке. Уровенные поверхности такого поля — плоскости, параллельные слою. В прикладной геодезии, например, в рядовых строительных работах, почти всегда предполагается, что работы проводятся именно в однородном поле.

2 Свойства потенциала притяжения

2.1 Аналитические свойства потенциала объёмных масс

Потенциал объёмных масс является функцией непрерывной, однозначной и конечной во всём пространстве. Эими же свойствами обладают и первые производные потенциала.

Исследуем вторые производные. Найдём вторые производные потенциала объёмных масс в прямоугольных координатах, получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = G \iiint\limits_\tau \delta \left[\frac{3\,(x - x_1)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right] \mathrm{d}\tau,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = G \iiint\limits_\tau \delta \left[\frac{3\,(y - y_1)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right] \mathrm{d}\tau,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = G \iiint\limits_\tau \delta \left[\frac{3\,(z - z_1)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right] \mathrm{d}\tau.$$

Складываем все три равенства, тогда

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=G\iiint\limits_{\tau}\delta\left[\frac{3\,(x-x_1)^2+3\,(y-y_1)^2+3\,(z-z_1)^2}{r^5}-\frac{3}{r^3}\right]\mathrm{d}\tau=G\iiint\limits_{\tau}\delta\left[\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^3}\right]\mathrm{d}\tau=0.$$

То есть

$$\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0.$$

Это уравнение Лапласа — дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. Здесь $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа или «лапласиан». Функция, непрерывная в некоторой области вместе со своими частными производными первого и второго порядков и удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется **гармонической**. Таким образом, потенциал притяжения во внешнем пространстве является гармонической функцией.

Внутри притягивающих масс потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V=-4\pi G\delta$$

и, следовательно, не является гармонической функцией. Легко заметить, что вне притягивающих масс $\delta=0$ уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа.

Исследуем поведение потенциала на бесконечности. Напишем неравенство

$$G\int\limits_{\tau}\frac{\delta\,\mathrm{d}\tau}{r_{min}}>G\int\limits_{\tau}\frac{\delta\,\mathrm{d}\tau}{r}>G\int\limits_{\tau}\frac{\delta\,\mathrm{d}\tau}{r_{max}},$$

где r_{min}, r_{max} — минимальное и максимальное расстояние от притягиваемой точки до притягиваемого тела. Поскольку $\int\limits_{\tau}\delta\,\mathrm{d}\tau=M$, то

$$G\frac{M}{r_{min}}>G\frac{M}{r}>G\frac{M}{r_{max}}.$$

Образуем производную $\frac{\partial V}{\partial r}=-G\int\limits_{\tau}\frac{\delta\,\mathrm{d}\tau}{r^2}$ и неравенство

$$G\frac{M}{r_{min}^2}>\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|>G\frac{M}{r_{max}^2}.$$

Теперь умножаем предпоследнее неравенство на r, а последнее — на r^2, тогда

$$G\frac{Mr}{r_{min}}>Vr>G\frac{Mr}{r_{max}},\qquad G\frac{Mr^2}{r_{min}^2}>\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|r^2>G\frac{Mr^2}{r_{max}^2}.$$

Пусть $r\to\infty$, тогда

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r}{r_{min}}=1,\qquad \lim_{r\to\infty}\frac{r}{r_{max}}=1,$$

и

$$\lim_{r\to\infty}V=0,\qquad \lim_{r\to\infty}rV=GM,\qquad \lim_{r\to\infty}\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|r^2=GM.$$

Функция, удовлетворяющая всем трём последним пределам называется **регулярной на бесконечности**. Следовательно, потенциал является функцией, регулярной на бесконечности.

2.2 Локальные свойства потенциала

Пусть точка $P\left(x,y,z\right)$ переместилась в точку $P_1\left(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z\right)$, находящуюся на бесконечно малом расстоянии dl от P, тогда

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z.$$

Для производных и направления $\mathrm{d}l$ можно записать

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= |\vec{F}|\cos\left(\vec{F},x\right), \qquad & \mathrm{d}x &= \mathrm{d}l\cos\left(x,\mathrm{d}l\right),\\
\frac{\partial V}{\partial y} &= |\vec{F}|\cos\left(\vec{F},y\right), \qquad & \mathrm{d}y &= \mathrm{d}l\cos\left(y,\mathrm{d}l\right),\\
\frac{\partial V}{\partial z} &= |\vec{F}|\cos\left(\vec{F},z\right), \qquad & \mathrm{d}z &= \mathrm{d}l\cos\left(z,\mathrm{d}l\right),
\end{aligned}$$

тогда

$$\mathrm{d}V = |\vec{F}|\left[\cos\left(\vec{F},x\right)\cos\left(x,\mathrm{d}l\right) + \cos\left(\vec{F},y\right)\cos\left(y,\mathrm{d}l\right) + \cos\left(\vec{F},z\right)\cos\left(z,\mathrm{d}l\right)\right]\mathrm{d}l,$$

или

$$\mathrm{d}V = |\vec{F}| cos\left(\vec{F},\mathrm{d}l\right)\mathrm{d}l.$$

Из этого выражения силедуют несколько важных и полезных свойств.

1. Производная потенциала $\mathrm{d}V/\,\mathrm{d}l$ по любому направлению l равна проекции силы на это направление
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l} = |\vec{F}| cos\left(\vec{F},\mathrm{d}l\right).$$
2. Если $\cos\left(\vec{F},\mathrm{d}l\right) = 1$, то изменение потенциала максимально и dl направлено по линии действия силы. Тогда $\vec{F}$ является вектор–градиентом потенциала
$$\vec{F} = \operatorname{grad} V.$$
3. Если $\cos\left(\vec{F},\mathrm{d}l\right) = 0$, то $\mathrm{d}V = 0$ и
$$V\left(x,y,z\right) = const.$$
Уравнение поверхности, в каждой точке которой сила направлена по нормали, а потенциал — постоянен. Это уровенная или эквипотенциальная поверхность. Заметим, что на силу не накладываются никакие ограничения и, вообще говоря, она может меняться на уровенной поверхности.
4. Если $\cos\left(\vec{F},\mathrm{d}l\right) = -1$ и $\mathrm{d}l = \mathrm{d}h$ — расстояние между бусконечно близкими уровенными поверхностями, то
$$\mathrm{d}V = -|\vec{F}|\,\mathrm{d}h, \qquad \mathrm{d}h = -\frac{\mathrm{d}V}{|\vec{F}|}.$$
5. Пусть $\mathrm{d}h \to 0$, тогда получим кривую, перпендикулярную ко всем уровенным поверхностям, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением силы. Эта кривая называется **силовой линией**. Найдём длину отрезка OM силовой линии между двумя уровенным поверхностями
$$h = -\int\limits_O^M \frac{\mathrm{d}V}{|\vec{F}|} = -\frac{V_M - V_O}{F_m} = \frac{V_O - V_M}{F_m},$$
где F_m — среднее интегральное значение силы на отрезке OM. Таким образом, для определения высоты в гравитационном поле необходимо знать разность потенциалов и среднее значение силы между уровенными поверхностями. Эта формула имеет важное значение в теории высот.