### Геодезическая гравиметрия 2019

### Практическое занятие № 1

Введение. Краткие сведения из математики и высшей геодезии

11 февраля 2019 г.

### 1 Предмет и задачи курса

Вспомним, что основной научной задачей геодезии является определение фигуры и внешнего гравитационного поля Земли и их изменений во времени.

Геодезическая гравиметрия решает эту задачу преимущественно на основе гравиметрических данных (то есть по измерениям величин, характеризующих гравитационное поле Земли), изучая взаимосвязь фигуры Земли и её гравитационного поля на поверхности. Геодезическую гравиметрию можно рассматривать как теоретический фундамент геодезии. <sup>1</sup> Синонимами являются дисциплины «физическая геодезия» и «теория фигуры Земли». Решением той же задачи, но с использованием всей совокупности существующих исходных данных (например, спутниковых) занимается теоретическая геодезия, которая преподается обычно на последних курсах геодезических специальностей.

Другое определение можно сформулировать так: геодезическая гравиметрия — раздел геодезии, в котором рассматриваются теории и методы использования гравиметрических данных для решения научных и практических задач геодезии.  $^2$ 

Задача получения гравиметрических данных с необходимой плотностью и точностью стоит перед другой наукой, которая называется «гравиметрия» (или «экспериментальная гравиметрия»).

Вообще говоря, задача изучения внешнего гравитационного поля Земли в сущности является задачей гефизики также, как и изучение магнитного поля (теория которого очень близка к гравитационному) и других физических полей. Но, как мы увидим по ходу курса, внешнее гравитационное поле и фигура Земли на самом деле определяются одновременно из обработки одних и тех же исходных данных. Более того, эти задачи неотделимы друг от друга, а потому и входят в основную задачу геодезии и её подразделов [Pellinen1978].

Действительно, ведь абсолютно все («геометрические») геодезические измерения выполняются в гравитационном поле Земли и связаны с ним. В этом легко убедиться, ответив на вопросы:

- 1. Назовите основные геометрические условия в нивелирах и угломерных приборах.
- 2. Что происходит с геодезическими приборами, когда мы выставляем их по уровням?
- 3. В какой системе координат выполняются измерения на поверхности Земли?
- 4. Чему равна сумма измеренных углов в треугольнике на поверхности Земли, если измерения считать безошибочными?
- 5. Как расположена визирная ось поверенного и выставленного по уровням нивелира?

Оказывается, в теории во все наземные и спутниковые измерения, даже выполненные исправными инструментами и оборудованием, необходимо вводить те или иные поправки, связанные с гравитационным полем Земли.

На практике же необходимость учёта неоднородности гравитационного поля Земли всегда определяется требованиями к точности результатов измерений. Например, при нивелировании I и II классов вводить поправки в измеренные превышения за переход к разностям нормальных

 $<sup>^1</sup>$ Огородова, Л. В. Геодезическая гравиметрия // Большая российская энциклопедия. Том 6. Москва, 2006, стр. 595

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Юркина, М. И. Геодезическая гравиметрия // Большая советская энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия. 1969—1978. (в оригинале вместо «гравиметрических данных» — «результатов измерения силы тяжести»)

высот необходимо (в том числе, по нормативным документам), а в нивелировании низших классов (III, IV, техническое) — нет.

Перейдём теперь к более тонкому понятию — фигуре Земли. Что это такое? Понятие фигуры Земли неоднозначно и может подразумевать под собой

- геометрическую фигуру простой и правильной формы (сфера, эллипсоид);
- фигуру конкретной эквипотенциальной (уровенной) поверхности (Земля— геоид, Луна— селеноид, Марс— ареоид);
- фигуру её физической поверхности.

Исторически дисциплина развивалась точно также, от простого к сложному (см. [Ogorodova2013, Yuzefovich2014]), но мы начнём с конца, с современных взглядов. Что такое физическая поверхность Земли?

В областях суши физическая поверхность ограничена физической твёрдой оболочкой Земли. Эта же поверхность изображается на картах, аэро— и космо— снимках. На ней проходит большая часть деятельности человека.

Мировой океан занимает около 71% земной поверхности и находится в постоянном движении и возмущении, кторые вызваны разностями температуры, атмосферного давления, солёности, ветровыми нагонами и т.д. Поэтому за физическую поверхность здесь принимается невозмущенная поверхность воды, называемая морской топографической поверхностью.

Итак, в настоящее время, под фигурой Земли понимают форму её физической поверхности, которая образуется в областях суши поверхностью твёрдой оболочки Земли, а на территории океанов и морей – их невозмущенной поверхностью.

Физическая поверхность Земли является очень сложной, не всегда однозначно определена и не имеет строгого математического описания. Вместо неё, а также для решения ряда научных и практических задач за приближённую фигуру Земли может быть принята одна из уровенных поверхностей потенциала силы тяжести, которая близка (но не совпадает) к невозмущенной поверхности океана.

При решении целого ряда научных и практических задач можно использовать еще более простую фигуру Земли, эллипсоид или сферу. Эллипсоид вращения является основой для геодезической системы координат. Определение параметров (геометрических и физических) такого эллипсоида, близкого к геоиду, является одной из современных задач теории фигуры Земли.

Что значит определить поверхность Земли? Что вообще значит определить и задать геометрическую поверхность? В геодезии в настоящее время под определением физической поверхности Земли подразумевается определение положения её точек в единой системе координат.

# 2 Системы координат

Вообще говоря, сама задача установления системы координат в настоящее время не входит в задачи геодезической гравиметрии, хотя и тесно с ней связана. В геодезической гравиметрии мы будем пользоваться различными системами координат прежде всего как теоретическим инструментом (system, а не frame, если пользоваться англоязычной терминологией), если не оговорено иное.

### 2.1 Прямоугольная система координат

В геодезии используют прямоугольную систему координат, начало O которой находится в центре масс Земли, ось Z направлена по оси вращения Земли, ось X совмещена с линией пересечения плоскостей экватора и начального меридиана, ось Y дополняет систему до правой[Ogorodova2006]. Это геоцентрическая или общеземная система координат. В ней положение точек определяется по всей Земле. Если начало системы координат по той или иной причине смещено относительно центра масс, то система называется референцной.

#### 2.2 Сферическая система координат

Сферические (полярные) координаты определяются геоцентрической широтой  $\overline{\varphi}$  (или полярным расстоянием  $\vartheta$ ), долготой  $\lambda$  и полярным радиус-вектором r. Геоцентрической широтой  $\overline{\varphi}$  называется угол между радиусом-вектором заданной точки и плоскостью экватора. Долгота  $\lambda$  есть угол между плоскостью меридиана заданной точки и плоскостью меридиана, принятого в качестве начального. Полярное расстояние  $\vartheta$  является дополнением широты  $\overline{\varphi}$  до  $90^\circ$ :

$$\vartheta = 90^{\circ} - \overline{\varphi}.$$

Сферические координаты связаны с прямоугольными следующими соотношениями

$$X = r \cos \overline{\varphi} \cos \lambda,$$
  

$$Y = r \cos \overline{\varphi} \sin \lambda,$$
  

$$Z = r \sin \overline{\varphi}.$$

**Задача 2.1.** Получите формулы связи для случая, когда вместо широты  $\Phi$  задано полярное расстояние  $\vartheta$ .

Решение.

$$X = r \sin \theta \cos \lambda,$$
  

$$Y = r \sin \theta \sin \lambda,$$
  

$$Z = r \cos \theta.$$

**Задача 2.2.** Получите обратные формулы для перехода от геоцентрических прямоугольных координат к сферическим.

Решение.

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$
  
$$\overline{\varphi} = \operatorname{arctg} \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}},$$
  
$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}.$$

#### 2.3 Астрономические координаты

Астрономичесие координат естественным образом возникают при измерениях в гравитационном поле и определяют направление силовой линии поля силы тяжести. Астрономическая широта  $\Phi$  – это дополнение до 90° угла между линией, параллельной оси вращения Земли, и отвесной линией. Долгота равна двугранному углу между плоскостями начального астрономического меридиана и астрономического меридиана данной точки.

Задача 2.3. Объясните, чем неудобна астрономическая система координат?

### 2.4 Эллипсоид. Геодезическая система координат

Во многих геодезических приложениях применяют системы геодезических координат B, L, H, связанных с выбранным эллипсоидом вращения. Эллипсоид обычно задается его большой полуосью a и сжатием  $\alpha$ . Вспомним, что

$$\alpha = \frac{a-b}{a}, \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

где b — малая полуось эллипсоида, e — его первый эксцентриситет.

Геоодезическая широта B для некоторой точки P есть угол между опущенной из P нормалью к эллипсоиду и плоскостью экватора. Геодезическая долгота L — угол между плоскостью начального меридиана и плоскостью меридиана точки P (равна сферической долготе  $\lambda$ ). Геодезическая высота H — кратчайшее расстояние от точки P по нормали до поверхности эллипсоида.

Важно отметить, что именно геодезическая система координат подразумевается, когда мы говорим об определении физической поверхности Земли в единой системе координат.

Задача 2.4. Подумайте, всегда ли в этой системе координат поверхность Земли может быть определена однозначно? Какие недостатки у этой системы координат?

Геодезические координаты связаны с прямоугольными следующими соотношениями

$$X = (N + H)\cos B \cos L,$$
  

$$Y = (N + H)\cos B \sin L,$$
  

$$Z = (N(1 - e^2) + H)\sin B,$$

где N — радиус кривизны первого вертикала, который, как известно из курса сфероидической геодезии, вычисляется так

 $N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}.$ 

**Задача 2.5.** Вспомните, что такое первый вертикал и что такое плоскость меридиана? Что такое главные радиусы кривизны эллипсоида?

Геодезическая долгота L совпадает со сферической долготой  $\lambda$ , если начала и ориентация координатных осей систем совпадают. Геоцентрическая широта отличается от геодезической. Опуская вывод (см. лекции), приведем здесь окончательное выражение для точки на поверхности эллипсоида

$$\operatorname{tg}\overline{\varphi} = \left(1 - e^2\right)\operatorname{tg}B.$$

В некоторых геодезических выводах также полезно использовать приведенную широту u — геоцентрическую широту точки P', которая является проекцией точки  $P_0$  (пересечение нормали точки P с эллипсоидом) на вспомогательную сферу радиуса a (размер большой полуоси) нормальной к плоскости экватора. Приведенная широта связана с геодезической следующим выражением (вывод см. в лекциях):

$$\operatorname{tg} u = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B.$$

Геодезические широта и долгота отличаются от соответствующих астрономических координат, поскольку направление отвесной линии отличается от направления нормали к эллипсоиду. Угол между направлением отвесной линии и нормалью к эллипсоиду называется астрономогеодезическим уклонением отвеса. Удобно этот угол разложить на две составляющие — проекции угла в плоскости первого вертикала  $\eta$  и в плоскости меридиана  $\xi$ , тогда

$$\xi = \Phi - B,$$
  
 $\eta = (\Lambda - L)\cos\varphi.$ 

В дальнейшем мы познакомимся и с другими видами уклонения отвеса.

## 3 Связь с другими науками

**Математика.** Изучение гравитационного поля и фигуры Земли — сложная задача. В ходе курса мы будет пользоваться различными разделами математики, с некоторыми из которых вам придется познакомиться впервые:

- векторный анализ,
- теория поля,
- теория ньютоновского потенциала,
- специальные функции,
- дифференциальные уравнения, обыкновенные и в частных производных,
- краевые задачи.

Исторически так сложилось, как и в случае теории математической обработки геодезических измерений, обогатившей теорию вероятностей, теория фигуры Земли обогатила многие разделы математики, которые теперь прочно служат её основой.

**Геофизика и геология.** Гравитационное поле на поверхности Земли отражает распределение масс внутри неё. И хотя, как мы очень скоро убедимся, одних только гравиметрических данных недостаточно для изучения внутреннего строения, они, наряду с другими геоифизическими методами, служат важным источником информации.

Гравиметрический метод является одним из основных при поиске и разведке полезных ископаемых. Высокоточные регулярные измерения используются для монторинга месторождений в процессе добычи нефти и газа.

**Археология и строительство.** Локальная информация о гравитационном поле может быть полезна для поиска пустот (карст), провалов, древних подземных ходов и тоннелей, объектов археологического наследия.

Гляциология и уровень моря. Океанология. Таяние ледников, вызванное изменением климата, уменьшает их массу, следовательно, меняется и гравитационное поле. По спутниковым гравиметрическим данным (миссия GRACE) получены важнейшие данные о ледниках Гренландии и Антарктиды. Таяние льдов вызывает рост среднего уровня Мирового океана, следовательно, изменение высоты морской топографической поверхности, то есть физической поверхности Земли. Эти процессы изучаются методом спутниковой альтиметрии.

**Гидрология.** Перераспределение водных масс на всей поверхности Земли вызвано не только таянием льдов, но и другими климатическими явлениями. Локальные измерения слы тяжести позволяют изучать местный гидрологический режим, а спутниковые гравиметрические миссии — региональный и даже глобальный.

**Орбиты ИСЗ.** Для вычисления орбит искусственных спутников для определения его положения относительно центра масс Земли необходимо знание гравитационного поля вне поверхности Земли (на высоте полета спутника). Этот нюанс свидетельствует о том, что, казалось бы, чисто геометрический метод определения координат при помощи глобальных навигационных спутниковых систем, на самом деле также связан с гравитационным полем.

Кроме всего вышеперечисленного, высокоточные измерения силы тяжести используются в метрологии и при изучении геодинамических процессов, а также в других областях науки и техники.

## 4 Задачи для решения на занятии

Найдите в Google таблицу простейших производных и интегралов (первообразных). Вспомните основные правила дифференцирования и интегрирования. Решите примеры:

- 1. Найти производную функций (a и n числа)
  - (a)  $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ ,
  - (b)  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ,
  - (c)  $y = \sin^n x \cdot \cos nx$ ,
  - (d)  $y = \frac{a}{x^n}$ , найти y'''.
- 2. Найти все частные производные первого и второго порядков для функции  $f\left(x,y\right)=\frac{x}{y}$ .
- 3. Разложить в ряд Тейлора функцию из предыдущего примера в окрестности точки M(1,1). Подсказка: примените формулу Тейлора для функции двух переменных.