Теория фигур планет и гравиметрия 2018

Домашнее задание № 9

Крайний срок сдачи: 25 декабря 2018 г.

1. Вычисление геопотенциальных чисел.

   Разность геопотенциальных чисел между двумя смежными пунктами нивелирной сети можно вычислить как

   $$W_i - W_{i+1} = g_m \Delta h,$$

   где g_m — среднее значение силы тяжести на пунктах i и $i+1$, Δh — превышение.

   Обработку нивелирного полигона следует начинать с вычисления невязки ε полигона и уравнивания разностей $W_i - W_{i+1}$. Поправку Δ_i в измеренную разность вычисляется по формуле

   $$\Delta_i = -\frac{\varepsilon}{\sum \frac{1}{p_i}} \frac{1}{p_i},$$

   где p_i – вес, который можно выбрать обратно пропорциональным длине секции L в километрах, то есть $p_i = \frac{1}{L}$.

   По уравненным разностям $W_i - W_{i+1}$ вычисляют уравненные геопотенциальные числа $W_0 - W_i$ всех реперов, приняв в качестве исходного уравненное значения для одного из пунктов полигона из каталога, то есть из исходной сети. Теперь можно сравнить полученные величины со значениями из каталога. Они будут различными, потому что последние были получены в результате уравнивания всей сети, однако значения геопотенциальных чисел будут близкими и служат для контроля грубых ошибок вычислений.

2. Вычисление нормальных и динамических высот.

   Нормальная высота H^γ определяется по формуле

   $$H^\gamma = \frac{W_0 - W_i}{\gamma_m^i}$$

   где γ_m^i — средняя нормальная сила тяжести для точке на высоте $H^\gamma/2$. Поскольку нормальная высота входит в левую и правую части, то её находят последовательными приближениями.

   В начальном приближении можно принять

   $$H^\gamma_{\text{прибл.}} = \frac{W_0 - W_i}{\gamma_0^i},$$

   где γ_0^i — значение нормальной силы тяжести на эллипсоиде на широте репера. По приближённой высоте вычисляют нормальную силу тяжести

   $$\gamma_m^i = \gamma_0^i + \frac{\partial \gamma}{\partial H} \frac{H^\gamma_{\text{прибл.}}}{2} = \gamma_0^i - 0{,}3086 \frac{H^\gamma_{\text{прибл.}}}{2}.$$

   После этого вычисляют нормальную высоту в первом приближении, которого обычно бывает достаточно (если нет, то итерации повторяют).

   Динамическую высоту вычисляют по формуле

   $$H^d = \frac{W_0 - W_i}{\gamma_0^{45}},$$

   где γ_0^{45} — значение нормальной силы тяжести на эллипсоиде на широте 45°. Если широта репера не равна 45° и высота над уровнем моря велика, значение γ_0^{45} будет сильно отличаться от γ_m, поэтому динамические высоты в этом случае сильно отличаются от нормальных. Если участок работ небольшой, то для вычисления динамических высот целесообразно использовать среднее значение силы тяжести $g_{\text{ср.}}$ на этом участке, тогда динамическая высота будет близка к сумме измеренных превышений Δh.

В конце необходимо найти разность вычисленных динамических и нормальных высот $H^d - H^\gamma$.

3. Вычисление теоретической невязки замкнутого нивелирного хода и разности нормальных высот.

Разность нормальных высот необходимо вычислить для заданного нивелирного полигона сети UELN. Для каждых двух последовательных реперов I и K получают

$$H^\gamma_{q_k} - H^\gamma_{q_i} = h_{ik} + f,$$

где $H^\gamma_{q_k} - H^\gamma_{q_i}$ — нормальные высоты реперов K, I, h_{ik} — измеренное превышение, f — поправка за переход к разности нормальных высот, которая вычисляется по формуле

$$f = -\frac{1}{\gamma_m}\left(\gamma_{0_k} - \gamma_{0_i}\right) H_m + \frac{1}{\gamma_m}\left(g - \gamma\right)_m h_{ik}.$$

Здесь γ_m — приближённое значение нормальной силы тяжести, принимаемое постоянным для всей территории страны и равным 980 000 мГал, $\gamma_{0_k}, \gamma_{0_i}$ — значения нормальных силы тяжести на отсчётном эллипсоиде в точках K и I, вычисляемые по формуле Гельмерта, H_m — средняя высота реперов I и K, $(g-\gamma)_m$ — среднее арифметическое из аномалий силы тяжести.

Приближённую высоту репера получают по измеренным превышениям, прибавляя их последовательно к уравненной нормальной высоте начального пункта полигона. Полученные таким образом и округлённые до целых метров величины и используют в вычислениях.

Примечание. Пример вычисления поправок в превышение за переход к разностям нормальных высот приведен в «Инструкции по вычислению нивелировок. М. Изд-во «Недра», 1971, с. 102».

Параллельно с разностями нормальных высот получают теоретическую невязку нивелирного полигона, равную сумме поправок f с обратным знаком $(\sum \Delta h)_{\text{теор.}} = -\sum f$, и оценивают невязку $\sum \Delta h - (\sum \Delta h)_{\text{теор.}}$, которую, также как и сумму измеренных превышений $\sum \Delta h$, следует сравнить с допустимой невязкой в полигонах и по линиям. Для I класса она составляет $3\,\text{мм}\sqrt{L}$, а для II класса $5\,\text{мм}\sqrt{L}$. Здесь L — длина хода в километрах.

Случайная ошибка нивелирования η определяется через полученную невязку

$$\eta = \frac{\sum \Delta h - (\sum \Delta h)_{\text{теор.}}}{\sqrt{L}}$$

и выражается в мм$/\sqrt{\text{км}}$.

4. Оценка разности нормальных высот на уровенной поверхности.

На уровенной поверхности нормальная высота непостоянна. Оценить изменения нормальной высоты при перемещении по уровенной поверхности можно по формуле

$$H^\gamma_Q - H^\gamma_P = \frac{\gamma_0^P - \gamma_0^Q}{\gamma_m} H^\gamma_m.$$

Непостоянство нормальной высоты на уровенной поверхности наглядно проявится, если оценить высоты реальных уровенных поверхностей — уровней воды высокогорных озёр — в разных точках. Максимальная разность получится для южной и северной точек водоёма. Данные для оценки берутся из таблицы:

Вариант	Водоём	Широта, сев.	Широта, южн.	Высота, м
1	оз. Байкал	$55^\circ\ 49'$	$51^\circ\ 29'$	455
2	Усть–Илимское вдхр.	$58^\circ\ 07'$	$56^\circ\ 17'$	250
3	оз. Мичиган (США)	$45^\circ\ 42'$	$42^\circ\ 00'$	177
4	оз. Верхнее (Канада)	$49^\circ\ 00'$	$46^\circ\ 40'$	183
5	оз. Каракуль (Таджикистан)	$39^\circ\ 10'$	$38^\circ\ 55'$	3914

5. Выполнить спутниковое нивелирование на прямолинейном участке нивелирного полигона.

Спутниковое нивелироване необходимо выполнить на прямолинейном участке полигона, содержащего по крайней мере три репера. Крайние реперы принимаются в качестве исходных, остальные — определяемые.

Интерполированная нормальная высота находится по формуле

$$H^{\gamma}_{\text{инт.}} = H - \zeta^{\text{АГ}}_{\text{инт.}} = H - \zeta^{\Gamma} - \delta\zeta_{\text{инт.}},$$

где $\delta\zeta_{\text{инт.}}$ — интерполированная разность астрономо–геодезической $\zeta^{\text{АГ}}$ и гравиметрической ζ^{Γ} аномалий высоты, которая в самом простом случае может быть получена методом линейной интерполяции от исходных пунктов, а именно

$$\delta\zeta_{\text{инт.}} = \delta\zeta_1 + \frac{\delta\zeta_2 - \delta\zeta_1}{L_{12}}\Delta L, \qquad \delta\zeta_i = \underbrace{\left(H_i - H_i^{\gamma}\right)}_{\zeta_i^{\text{АГ}}} - \zeta_i^{\Gamma}.$$

Здесь L_{12} — расстояние между исходными реперами, ΔL — расстояние между первым исходным репером и определяемым пунктом. Таким образом, предполагается, что разность $\delta\zeta_{\text{инт.}}$ меняется линейно и это изменение зависит только от расстояния.

Геодезическая высота и гравиметрическая аномалия высоты берутся из каталога.

Полученные методом спутникового нивелирования нормальные высоты необходимо сравнить с уравненными высотами, полученными из обработки классического нивелирования. По этим n разностям $\Delta H^{\gamma} = H^{\gamma}_{\text{инт.}} - H^{\gamma}$ можно оценить точность спутникового нивелирование как

$$m_{H_c} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta H_i^{\gamma 2}}{n}},$$

а также получить случайную ошибку спутникового нивелирования

$$\eta_c = \frac{m_{H_c}}{\sqrt{L}},$$

где L — длина линии интерполирования, то есть расстояние между исходными реперами.

В конце необходимо сравнить случайную ошибку геометрического нивелирования η и спутникового нивелирования η_c.