Геодезическая гравиметрия 2019

Практическое занятие № 5

Элементы теории поля. Свойства потенциала притяжения

11 марта 2019 г.

1 Уравнения Лапласа и Пуассона

Потенциал объёмных масс является функцией непрерывной, однозначной и конечной во всём пространстве. Этими же свойствами обладают и первые производные потенциала.

Найдём вторые производные потенциала объёмных масс в прямоугольных координатах

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = G \iiint\limits_{\tau} \delta \left[\frac{3\,(x - x_1)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right] \mathrm{d}\tau,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = G \iiint\limits_{\tau} \delta \left[\frac{3\,(y - y_1)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right] \mathrm{d}\tau,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = G \iiint\limits_{\tau} \delta \left[\frac{3\,(z - z_1)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right] \mathrm{d}\tau.$$

Складываем все три равенства и получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = G \iiint\limits_{\tau} \delta \left[\frac{3\,(x - x_1)^2 + 3\,(y - y_1)^2 + 3\,(z - z_1)^2}{r^5} - \frac{3}{r^3} \right] \mathrm{d}\tau = G \iiint\limits_{\tau} \delta \left[\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right] \mathrm{d}\tau = 0.$$

То есть

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Это **уравнение Лапласа** — дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. Здесь $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа или «лапласиан». Функция, непрерывная в некоторой области вместе со своими частными производными первого и второго порядков и удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется **гармонической**. Таким образом, потенциал притяжения во внешнем пространстве является гармонической функцией.

Задача 1.1. Доказать, что функция $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ является гармонической везде, кроме начала координат $(x = 0, y = 0)$.

Рассмотрим случай, когда притягиваемая точка P находится внутри притягивающего тела объёма τ, ограниченного поверхностью Σ произвольной формы. Окружим точку P малой замкнутой поверхностью S (в общем случае — произвольной формы). Рассмотрим частный случай, когда S имеет форму сферы радиуса R. Тогда потенциал в точке P можно разделить на две части $V = V_1 + V_2$:

1. на потенциал V_1 шара радиуса R, внутри которого находится точка P;

2. на потенциал V_2 всех остальных масс вне шара.

Применим оператор Лапласа на левую и правую части суммы: $\Delta V = \Delta(V_1 + V_2) = \Delta V_1 + \Delta V_2$. Потенциал V_1 будет определяться выражением:

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi G\delta\left(3R^3 - r^2\right), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Найдём вторые производные по x, y, z. Для производной по x получаем:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{4}{3}\pi G\delta x\right) = -\frac{4}{3}\pi G\delta.$$

Аналогично для y и z:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} = -\frac{4}{3}\pi G\delta, \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = -\frac{4}{3}\pi G\delta.$$

Для потенциала V_2 точка P является лежащей вне притягивающих масс, а значит удовлетворяет уравнению Лапаласа $\Delta V_2 = 0$. Окончательно получаем:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} = -4\pi G\delta + 0 = -4\pi G\delta,$$

или

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = -4\pi G\delta.$$

Это **уравнение Пуассона**, которому удовлетворяет потенциал притяжения внутри притягивающих масс. Таким образом, потенциал притяжения внутри притягивающих масс **не является гармонической функцией**. Легко заметить, что вне притягивающих масс $\delta = 0$ уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа.

2 Регулярность на бесконечности

Исследуем поведение потенциала на бесконечности. Напишем неравенство

$$G\int\limits_\tau \frac{\delta\,\mathrm{d}\tau}{r_{min}} > G\int\limits_\tau \frac{\delta\,\mathrm{d}\tau}{r} > G\int\limits_\tau \frac{\delta\,\mathrm{d}\tau}{r_{max}},$$

где r_{min}, r_{max} — минимальное и максимальное расстояние от притягиваемой точки до притягиваемого тела. Поскольку $\int\limits_\tau \delta\,\mathrm{d}\tau = M$, то

$$G\frac{M}{r_{min}} > G\frac{M}{r} > G\frac{M}{r_{max}}.$$

Образуем производную $\frac{\partial V}{\partial r} = -G\int\limits_\tau \frac{\delta\,\mathrm{d}\tau}{r^2}$ и неравенство

$$G\frac{M}{r_{min}^2} > \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right| > G\frac{M}{r_{max}^2}.$$

Теперь умножаем предпоследнее неравенство на r, а последнее — на r^2, тогда

$$G\frac{Mr}{r_{min}} > Vr > G\frac{Mr}{r_{max}}, \qquad G\frac{Mr^2}{r_{min}^2} > \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right| r^2 > G\frac{Mr^2}{r_{max}^2}.$$

Пусть $r \to \infty$, тогда

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r}{r_{min}} = 1, \qquad \lim_{r\to\infty}\frac{r}{r_{max}} = 1,$$

и

$$\lim_{r\to\infty} V = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} rV = GM, \qquad \lim_{r\to\infty}\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right| r^2 = GM.$$

Функция, удовлетворяющая всем трём последним пределам называется **регулярной на бесконечности**. Следовательно, потенциал является функцией, регулярной на бесконечности. Иными словами, в бесконечно удалённой точке потенциал обращается в нуль.

3 Скалярное поле, градиент и производная по направлению

Если каждой точке пространства или его части однозначно сопоставлена некоторая скалярная (векторная) величина, то говорят, что задано скалярное (векторное) поле этой величины.

Геометрической характеристикой скалярного поля $\varphi = \varphi\left(x, y, z\right)$ является поверхность уровня или уровенная поверхность

$$\varphi\left(x, y, z\right) = const.$$

Если φ — потенциальное поле, то поверхность уровня называется эквипотенциальной.

Градиентом поля называется вектор

$$\nabla\varphi = \vec{i}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} + \vec{j}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} + \vec{k}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} = \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\right).$$

Вектор $\nabla\varphi$ даёт в каждой точке величину $|\nabla\varphi|$ и направление $\vec{n}$ наибольшей пространственной скорости изменения функции φ:

$$\vec{n} = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}.$$

Скорость изменения поля φ в направлении, задаваемом единичным вектором $\vec{l}$ называется производной по направлению и определяется скалярным произведением

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l} = \vec{l}\cdot\nabla\varphi.$$

Градиент поля φ в каждой точке пространства направлен по нормали к поверхности уровня.

Угол между поверхностями $\varphi_1\left(x, y, z\right) = const$ и $\varphi_2\left(x, y, z\right) = const$, определяется как угол α между нормалями $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ к поверхностям в точке их пересечения

$$\cos\alpha = \vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = \frac{\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2}{|\nabla\varphi_1|\cdot|\nabla\varphi_2|}.$$

4 Локальные свойства потенциала

Пусть точка $P\left(x,y,z\right)$ переместилась в точку $P_1\left(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z\right)$, находящуюся на бесконечно малом расстоянии dl от P, тогда полный дифференциал

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z.$$

Для производных и направления $\mathrm{d}l$ можно записать

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= |\vec{F}|\cos\left(\vec{F}, x\right), \qquad & \mathrm{d}x &= \mathrm{d}l\cos\left(x, \mathrm{d}l\right),\\
\frac{\partial V}{\partial y} &= |\vec{F}|\cos\left(\vec{F}, y\right), \qquad & \mathrm{d}y &= \mathrm{d}l\cos\left(y, \mathrm{d}l\right),\\
\frac{\partial V}{\partial z} &= |\vec{F}|\cos\left(\vec{F}, z\right), \qquad & \mathrm{d}z &= \mathrm{d}l\cos\left(z, \mathrm{d}l\right),
\end{aligned}$$

тогда

$$\mathrm{d}V = |\vec{F}|\left[\cos\left(\vec{F}, x\right)\cos\left(x, \mathrm{d}l\right) + \cos\left(\vec{F}, y\right)\cos\left(y, \mathrm{d}l\right) + \cos\left(\vec{F}, z\right)\cos\left(z, \mathrm{d}l\right)\right]\mathrm{d}l,$$

или

$$\mathrm{d}V = |\vec{F}|cos\left(\vec{F}, \mathrm{d}l\right)\mathrm{d}l.$$

Это же легко получить из определения прозводной по направлению, действительно

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l} = \vec{l}\cdot\nabla\varphi = \vec{l}\cdot\vec{F} = |\vec{F}|cos\left(\vec{F}, \mathrm{d}l\right).$$

Из этого выражения силедуют несколько важных и полезных свойств.

1. Производная потенциала $\mathrm{d}V/\,\mathrm{d}l$ по любому направлению l равна проекции силы на это направление
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l} = |\vec{F}|cos\left(\vec{F}, \mathrm{d}l\right).$$

2. Если $\cos\left(\vec{F}, \mathrm{d}l\right) = 1$, то изменение потенциала максимально и dl направлено по линии действия силы. Тогда $\vec{F}$ является вектор–градиентом потенциала
$$\vec{F} = \operatorname{grad} V.$$

3. Если $\cos\left(\vec{F}, \mathrm{d}l\right) = 0$, то $\mathrm{d}V = 0$ и
$$V\,(x, y, z) = const.$$
Уравнение поверхности, в каждой точке которой сила направлена по нормали, а потенциал — постоянен. Это уровенная или эквипотенциальная поверхность. Заметим, что на силу не накладываются никакие ограничения и, вообще говоря, она может меняться на уровенной поверхности.

4. Если $\cos\left(\vec{F}, \mathrm{d}l\right) = -1$ и $\mathrm{d}l = \mathrm{d}h$ — расстояние между бесконечно близкими уровенными поверхностями, то
$$\mathrm{d}V = -|\vec{F}|\,\mathrm{d}h, \qquad \mathrm{d}h = -\frac{\mathrm{d}V}{|\vec{F}|}.$$

5. Пусть $\mathrm{d}h \to 0$, тогда получим кривую, перпендикулярную ко всем уровенным поверхностям, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением силы. Эта кривая называется **силовой линией**. Найдём длину отрезка OM силовой линии между двумя уровенным поверхностями
$$h = -\int\limits_O^M \frac{\mathrm{d}V}{|\vec{F}|} = -\frac{V_M - V_O}{F_m} = \frac{V_O - V_M}{F_m},$$
где F_m — среднее интегральное значение силы на отрезке OM. Таким образом, для определения высоты в гравитационном поле необходимо знать разность потенциалов и среднее значение силы между уровенными поверхностями. Эта формула имеет важное значение в теории высот.