Геодезическая гравиметрия 2019

Практическое занятие № 5

Элементы теории поля

11 марта 2019 г.

1 Уравнения Лапласа и Пуассона

Потенциал объёмных масс является функцией непрерывной и конечной во всём пространстве, т.к. вне притягивающих масс, величина r нигде не может обратиться в нуль, а внутри притягивающих масс $r \to 0$, потенциал не обращается в бесконечность и сохраняет конечное значение. Этими же свойствами обладают и первые производные потенциала.

Потенциал объёмных масс — функция гармоническая во внешнем пространстве. Для того, чтобы убедиться в этом, найдём вторые производные потенциала объёмных масс в прямоугольных координатах во внешнем пространстве (для внешней точки). Запишем выражение потенциала объёмных масс для *внешней точки* в общем виде

$$V = G \iiint\limits_{\tau} \frac{\delta \, \mathrm{d}\tau}{r},$$

где

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}.$$

Найдём частные производные r

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_1}{r}, \; \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{y - y_1}{r}, \; \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{z - z_1}{r}.$$

Найдём первые производные потенциала объёмных масс. Для производной по x получаем

$$\frac{\partial V}{\partial x} = G \iiint\limits_{\tau} \delta \left[\frac{\partial (r^{-1})}{\partial x} \right] \mathrm{d}\tau,$$

где

$$\frac{\partial (r^{-1})}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x - x_1}{r^3},$$

в итоге

$$\frac{\partial V}{\partial x} = G \iiint\limits_{\tau} \delta \left[-\frac{x - x_1}{r^3} \right] \mathrm{d}\tau.$$

Аналогично для y и z

$$\frac{\partial V}{\partial y} = G \iiint\limits_{\tau} \delta \left[-\frac{y - y_1}{r^3} \right] \mathrm{d}\tau,$$
$$\frac{\partial V}{\partial z} = G \iiint\limits_{\tau} \delta \left[-\frac{z - z_1}{r^3} \right] \mathrm{d}\tau.$$

Найдём его вторые производные. Для производной по x получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = G \iiint\limits_{\tau} \delta \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x - x_1}{r^3} \right) \right] \mathrm{d}\tau,$$

где

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_1}{r^3}\right)=\frac{\partial(x-x_1)}{\partial x}\,r^{-3}+\frac{\partial(r^{-3})}{\partial x}\,(x-x_1)=\frac{1}{r^3}-\frac{3}{r^4}\frac{x-x_1}{r}(x-x_1)=\frac{1}{r^3}-\frac{3\,(x-x_1)^2}{r^5},$$

в итоге

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=G\iiint\limits_{\tau}\delta\left[\frac{3\,(x-x_1)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right]\mathrm{d}\tau$$

Аналогично для y и z

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=G\iiint\limits_{\tau}\delta\left[\frac{3\,(y-y_1)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right]\mathrm{d}\tau,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=G\iiint\limits_{\tau}\delta\left[\frac{3\,(z-z_1)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right]\mathrm{d}\tau.$$

Складываем все три равенства и получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=G\iiint\limits_{\tau}\delta\left[\frac{3\,(x-x_1)^2+3\,(y-y_1)^2+3\,(z-z_1)^2}{r^5}-\frac{3}{r^3}\right]\mathrm{d}\tau=G\iiint\limits_{\tau}\delta\left[\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^3}\right]\mathrm{d}\tau=0.$$

То есть

$$\varDelta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0.$$

Это **уравнение Лапласа** — дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. Здесь $\varDelta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа или «лапласиан». Функция называется **гармонической**, если:

1. существуют частные производные второго порядка этой функции;
2. все они непрерывны;
3. удовлетворяют уравнению Лапласа $\varDelta V=0$.

Таким образом, **потенциал притяжения во внешнем пространстве является гармонической функцией**.

Задача 1.1. Доказать, что функция $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ является гармонической везде, кроме начала координат $(x=0,y=0)$.

Найдём оператор Лапласа потенциала объёмных масс $\varDelta V$ для внешней точки. Рассмотрим случай, когда притягиваемая точка P находится внутри притягивающего тела объёма τ, ограниченного поверхностью $\varSigma$ произвольной формы. Окружим точку P сферой настолько малого радиуса R, что плотность внутри этой сферы можно считать постоянной. Тогда потенциал тела в точке P можно разделить на две части $V=V_1+V_2$:

1. потенциал V_1 однородного шара радиуса R, внутри которого находится точка P;
2. на потенциал V_2 всех остальных масс вне шара.

Применим оператор Лапласа на левую и правую части суммы: $\varDelta V=\varDelta(V_1+V_2)=\varDelta V_1+\varDelta V_2$. Потенциал V_1 будет определяться выражением:

$$V_1=\frac{2}{3}\pi G\delta\left(3R^3-r^2\right),r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Найдём частные производные r

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \; \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{y}{r}, \; \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{z}{r}.$$

Найдём первые производные потенциала однородного шара для внутренней точки P. Для производной по x получаем

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{2}{3}\pi G\delta \left(3R^3 - r^2\right) = -\frac{2}{3}\pi G\delta \left[\frac{\partial (r^2)}{\partial x}\right],$$

где

$$\frac{\partial (r^2)}{\partial x} = 2r\,\frac{\partial r}{\partial x} = 2x,$$

в итоге

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = -\frac{4}{3}\pi G\delta x.$$

Аналогично для y и z

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = -\frac{4}{3}\pi G\delta y, \frac{\partial V_1}{\partial z} = -\frac{4}{3}\pi G\delta z.$$

Найдём вторые производные по x, y, z. Для производной по x получаем:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = -\frac{4}{3}\pi G\delta\,\frac{\partial x}{\partial x} = -\frac{4}{3}\pi G\delta.$$

Аналогично для y и z:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} = -\frac{4}{3}\pi G\delta, \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = -\frac{4}{3}\pi G\delta.$$

Для потенциала V_2 точка P является лежащей вне притягивающих масс, а значит удовлетворяет уравнению Лапаласа $\varDelta V_2 = 0$. Окончательно получаем:

$$\varDelta V = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} = -4\pi G\delta + 0 = -4\pi G\delta,$$

или

$$\varDelta V = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = -4\pi G\delta.$$

Это **уравнение Пуассона**, которому удовлетворяет потенциал притяжения внутри притягивающих масс. Таким образом, потенциал притяжения внутри притягивающих масс **не является гармонической функцией**. Легко заметить, что вне притягивающих масс уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа.

2 Регулярность на бесконечности

Исследуем поведение потенциала на бесконечности. Напишем неравенство

$$G\int\limits_{\tau} \frac{\delta\,\mathrm{d}\tau}{r_{min}} > G\int\limits_{\tau} \frac{\delta\,\mathrm{d}\tau}{r} > G\int\limits_{\tau} \frac{\delta\,\mathrm{d}\tau}{r_{max}},$$

где r_{min}, r_{max} — минимальное и максимальное расстояние от притягиваемой точки до притягиваемого тела. Поскольку $\int\limits_{\tau} \delta\,\mathrm{d}\tau = M$, то

$$G\frac{M}{r_{min}} > G\frac{M}{r} > G\frac{M}{r_{max}}.$$

Образуем производную $\frac{\partial V}{\partial r} = -G\int\limits_{\tau} \frac{\delta\,\mathrm{d}\tau}{r^2}$ и неравенство

$$G\frac{M}{r_{min}^2} > \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right| > G\frac{M}{r_{max}^2}.$$

Теперь умножаем предпоследнее неравенство на r, а последнее — на r^2, тогда

$$G\frac{Mr}{r_{min}} > Vr > G\frac{Mr}{r_{max}}, \qquad G\frac{Mr^2}{r_{min}^2} > \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right| r^2 > G\frac{Mr^2}{r_{max}^2}.$$

Пусть $r \to \infty$, тогда

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r}{r_{min}} = 1, \qquad \lim_{r\to\infty}\frac{r}{r_{max}} = 1,$$

и

$$\lim_{r\to\infty} V = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} rV = GM, \qquad \lim_{r\to\infty}\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right| r^2 = GM.$$

Функция, удовлетворяющая всем трём последним пределам называется **регулярной на бесконечности**. Следовательно, потенциал является функцией, регулярной на бесконечности. Иными словами, в бесконечно удалённой точке потенциал обращается в нуль.

3 Скалярное поле, градиент и производная по направлению

Если каждой точке пространства или его части однозначно сопоставлена некоторая скалярная (векторная) величина, то говорят, что задано скалярное (векторное) поле этой величины.

Поверхностью уровня скалярного поля $\varphi = \varphi(x, y, z)$ называется множество точек пространства, в которых функция φ принимает одно и то же значение c, то есть поверхность уровня определяется уравнением

$$\varphi(x, y, z) = c.$$

Набор поверхностей уровня для разных c дает наглядное представление о конкретном скалярном поле, для которого они построены (изображены). Если скалярное поле φ является *потенциальным полем*, то поверхность уровня такого поля называется *эквипотенциальной*.

Рассмотрим изменение скалярного поля $\mathrm{d}\varphi(x, y, z)$ при смещении точки $P(x, y, z)$ на бесконечно малый вектор $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ в точку $P_1(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$. Изменение функции φ можно представить в виде

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathrm{d}z.$$

Выражение в правой части этого равенства можно интерпретировать как скалярное произведение векторов, одним из которых является вектор смещения $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$, а другим – вектор $\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\}$, называемый **градиентом скалярного поля**:

$$\mathrm{grad}\ \varphi = \nabla\varphi = \vec{i}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} + \vec{j}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} + \vec{k}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} = \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\right).$$

Таким образом, изменение поля

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{grad}\ \varphi \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = |\mathrm{grad}\varphi||\overrightarrow{\mathrm{d}l}|\cos\theta,$$

где θ — угол между векторами $\mathrm{grad}\ \varphi$ и $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$.

Из этого равенства следует, что изменение $\mathrm{d}\varphi$ принимает наибольшее значение, если направление вектора смещения $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ совпадает с направлением $\mathrm{grad}\ \varphi$. Другими словами, направление вектора $\mathrm{grad}\ \varphi$ соответствует направлению вектора $\vec{n}$ наиболее быстрого возрастания функции φ

$$\vec{n} = \frac{\mathrm{grad}\ \varphi}{|\mathrm{grad}\ \varphi|}.$$

Производная по направлению показывает быстроту изменения функции в этом направлении. Её можно рассматривать как проекцию градиента функции на это направление, или иначе, как скалярное произведение градиента на орт $\vec{l} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{|\overrightarrow{\mathrm{d}l}|} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\mathrm{d}l}$ направления

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l} = \mathrm{grad}\ \varphi \cdot \vec{l}.$$

Градиент поля φ в каждой точке пространства направлен по нормали к поверхности уровня.

Угол между поверхностями $\varphi_1\left(x, y, z\right) = const$ и $\varphi_2\left(x, y, z\right) = const$, определяется как угол α между нормалями $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ к поверхностям в точке их пересечения

$$\cos\alpha = \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = \frac{\text{grad } \varphi_1 \cdot \text{grad } \varphi_2}{|\text{grad } \varphi_1| \cdot |\text{grad } \varphi_2|}.$$