

Практическое занятие № 3

Притяжение тел простой формы

2 марта 2018 г.

1 Притяжение простого слоя

Потенциал объемного тела может быть представлен в виде потенциалов простого слоя, двойного слоя или их комбинации. Это полезное свойство, которое часто используется в теории фигур планет при решении теоретических задач. Такая замена позволяет перейти от интегрирования по объёму к интегрированию по поверхности (то есть от тройного интеграла к двойному). Рассмотрим потенциал простого слоя.

Пусть в объеме τ , заключенном между двумя очень близкими, поверхностями σ и σ' находится притягивающая масса с переменной объёмной плотностью δ , тогда потенциал объёмных масс будет равен

$$V = G \iiint_{\tau} \frac{\delta(x, y, z) d\tau}{r},$$

где интегрирование ведётся по всему объёму τ , а r — расстояние от текущей точки до притягиваемой P .

Элементарный объём

$$d\tau = dh d\sigma,$$

где dh — кратчайшее расстояние между σ и σ' , $d\sigma$ — элемент площади поверхности.

Элементарная масса

$$dm = \delta d\tau = \delta dh d\sigma.$$

Пусть σ и σ' неограниченно приближаются друг к другу, тогда вся элементарная масса dm элементарного объёма $d\tau$ будет сконденсирована на бесконечно тонком слое площадью $d\sigma$. Такой слой называется простым слоем, а его поверхностная плотность (или плотность простого слоя) равна

$$\mu = \frac{dm}{d\sigma},$$

откуда

$$dm = \delta d\tau = \delta dh d\sigma = \mu d\sigma.$$

Элементарный потенциал, создаваемый массой dm будет равен

$$dV = G \frac{\mu d\sigma}{r},$$

откуда, интегрируя по поверхности σ , получаем потенциал притяжения простого слоя

$$V = G \iint_{\sigma} \frac{\mu d\sigma}{r}.$$

2 Притяжение однородной сферы (сферического слоя)

Пусть простой слой постоянной плотности μ распределён на сфере радиуса R . Найдём притяжение такой однородной сферы в точке P , находящейся на расстоянии r от центра сферы O . ρ — переменное расстояние от элементарной площади $d\sigma$ поверхности сферы до точки P .

Воспользуемся сферической системой координат (θ, λ) . Пусть элемент $d\sigma$ представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную меридианами $\lambda, \lambda + d\lambda$ и параллелями $\theta, \theta + d\theta$. Тогда стороны трапеции будут равны

$$\begin{aligned} R d\theta & \text{— длина дуги меридиана,} \\ R \sin \theta d\lambda & \text{— длина дуги параллели,} \end{aligned}$$

а элементарная площадь

$$d\sigma = R \sin \theta d\lambda \cdot R d\theta = R^2 \sin \theta d\theta d\lambda.$$

По теореме косинусов

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta.$$

Тогда для простого слоя, распределённого на поверхности сферы, можно записать

$$\begin{aligned} V &= G\mu \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \sin \theta d\theta d\lambda}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}} = G\mu R^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}} \int_0^{2\pi} d\lambda = \\ &= 2\pi G\mu R^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}}. \end{aligned}$$

Выполним замену переменных. Дифференцируя $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$, получаем

$$\rho d\rho = Rr \sin \theta d\theta, \quad \sin \theta d\theta = \frac{\rho d\rho}{Rr},$$

тогда

$$V = 2\pi G\mu R^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}} = 2\pi G\mu \frac{R}{r} \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho.$$

Если точка P — внешняя, то $\rho_1 = R + r$, $\rho_2 = -R + r$, тогда

$$V_e = 2\pi G\mu \frac{R}{r} \int_{r-R}^{r+R} d\rho = 2\pi G\mu \frac{R}{r} [(r+R) - (r-R)] = \underline{\underline{4\pi G\mu \frac{R^2}{r}}}.$$

Поскольку масса всего сферического слоя равна $M = 4\pi R^2 \mu$, то окончательно получаем

$$V_e = \frac{GM}{r}.$$

Если точка P — внутренняя, то $\rho_1 = R - r$, $\rho_2 = R + r$, тогда

$$V_i = 2\pi G\mu \frac{R}{r} \int_{R-r}^{R+r} d\rho = 2\pi G\mu \frac{R}{r} [(R+r) - (R-r)] = \underline{\underline{4\pi G\mu R = const.}}$$

На поверхности сферы $\rho \rightarrow R$, поэтому $V_0 = V_e = V_i$.

Поскольку потенциал притяжения зависит только от расстояния от притягивающей точки до центра сферы, то для нахождения силы для внешней точки достаточно вычислить радиальную производную

$$|\vec{F}_e| = F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 4\pi G\mu \frac{R^2}{r^2} = \frac{GM}{r^2}.$$

Для внутренней точки

$$|\vec{F}_i| = F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

Пусть притягиваемая точка P приближается к поверхности сферы P_0 с внутренней и с внешней стороны, но не пересекает её, тогда

$$F_{e0} = \lim_{r \rightarrow R} -\frac{\partial V}{\partial r} = -4\pi G\mu,$$

$$F_{i0} = \lim_{r \rightarrow R} \frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

Прямое значение силы на самом слое равно среднему из предельных значений, то есть

$$F_0 = -2\pi G\mu.$$

Задача 2.1. Как ведут себя потенциал и сила притяжения сферы, если притягиваемая точка перемещается из центра сферы в бесконечность? Постройте графики зависимости потенциала и силы притяжения сферы от расстояния.

3 Притяжение шара

Однородный шар с объёмной плотностью $\delta = \text{const}$ можно представить состоящим из бесконечного числа сферических слоёв. Пусть R — радиус шара, R' — радиус сферического слоя толщиной dR' . Тогда для внешней точки шара P элементарный потенциал притяжения сферического слоя равен

$$dV_e = 4\pi G\delta \frac{R'^2}{r} dR',$$

откуда, интегрируя по всему радиусу, получаем

$$V_e = 4\pi G\delta \int_0^R \frac{R'^2}{r} dR' = \frac{4}{3}\pi G\delta \frac{R^3}{r}.$$

Вводя массу шара $M = 4/3 \pi R^3 \delta$, снова получаем

$$V_e = \frac{GM}{r}.$$

Аналогично для силы

$$|\vec{F}_e| = F_r = -\frac{\partial V_e}{\partial r} = \frac{4}{3}\pi G\delta \frac{R^3}{r^2} = \frac{GM}{r^2}.$$

Для внутренней точки воспользуемся свойством суперпозиции и будем искать потенциал, как сумму

$$V_i = V_1 + V_2,$$

где V_1 — потенциал «внутреннего» шара радиуса r , V_2 — потенциал внешнего шарового слоя, заключённого между r и R . Потенциал V_1 ничем не отличается от потенциала шара на внешнюю точку, поэтому

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi G\delta r^2.$$

Представим шаровой слой состоящим из бесконечного числа сферических слоёв переменного радиуса R' . Точка P будет внутренней для них, а потому элементарный потенциал равен

$$dV = 4\pi G\delta R' dR'.$$

Для всего шарового слоя получаем

$$V = 4\pi G\delta \int_r^R R' dR' = 2\pi G\delta (R^2 - r^2).$$

Наконец,

$$V_i = V_1 + V_2 = \frac{2}{3}\pi G\delta \left(3R^2 - r^2\right).$$

Для силы получаем

$$F_i = -\frac{\partial V_i}{\partial r} = \frac{4}{3}\pi G\delta r = \frac{GM}{r^2}.$$

Таким образом, шаровой слой не притягивает точку, лежащую внутри него.

4 Притяжение шарового слоя

Пусть точку притягивает однородный шаровой слой, заключенный между радиусами R_1 и R_2 . Тогда потенциал притяжения внешней точки можно представить как

$$V_e = V_2 - V_1,$$

где V_2 — потенциал шара радиусом R_2 , V_1 — потенциал шара радиусом R_1 . Тогда

$$V_e = \frac{4}{3}\pi G\delta \frac{1}{r} \left(R_2^3 - R_1^3\right).$$

Для силы получаем

$$F_e = -\frac{4}{3}\pi G\delta \left(R_2^3 - R_1^3\right) \frac{1}{r^2}.$$

Замечание 1. Потенциал шарового слоя на внешнюю точку мог бы быть вызван и притяжением точки с массой $M = \frac{4}{3}\pi G \left(R_2^3 - R_1^3\right)$ или шаром радиуса R_2 с плотностью $\delta' = \delta \left(R_2^3 - R_1^3\right) / R_2^3$. Такая неоднозначность свидетельствует о том, что только по гравиметрическим данным невозможно изучать внутреннее строение Земли. Без сейсмических данных мы бы никогда не могли сказать, полая внутри Земля или нет.

Если точка находится внутри шарового слоя $R_1 < r < R_2$, то

$$V_i = 2\pi G\delta \left(R_2^2 - \frac{1}{3}r^2\right) - \frac{4}{3}\pi G\delta \frac{R_1^3}{r}$$

а для силы

$$F_i = -\frac{4}{3}\pi G\delta \left(r^3 - R_1^3\right) \frac{1}{r}.$$

Если точка находится внутри пустого пространства слоя ($r < R_1$), то

$$V_i = 2\pi G\sigma \left(R_2^2 - R_1^2\right),$$

а для силы

$$F_i = 0.$$

5 Притяжение диска

Силу притяжения бесконечно тонкого однородного диска радиуса a можно представить через притяжение простого слоя $V = G \int_{\sigma} \frac{\mu d\sigma}{r}$. Удобно воспользоваться цилиндрической системой координат (ρ, α, z) , где ρ — полярный радиус, α — полярный угол, z — аппликата точки. Таким образом, цилиндрическая система координат является расширением полярной (плоской) системы координат.

Найдем силу притяжения диска для точки, лежащей на его оси симметрии. Можно записать

$$F = \frac{\partial V}{\partial z} = -G\mu \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r^2} \cos(r, z),$$

$$d\sigma = \rho d\alpha d\rho,$$

откуда

$$F = \frac{\partial V}{\partial z} = -G\mu \int_{\sigma} \frac{\rho d\rho d\alpha}{r^2} \cos(r, z).$$

Заметим, что

$$r^2 = \rho^2 + z^2, \quad r dr = \rho d\rho, \quad \cos(r, z) = \frac{z}{r},$$

тогда

$$F_e = -G\mu \int_z^{\sqrt{z^2+a^2}} \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\alpha}{r^3} = -2\pi G\mu z \int_z^{\sqrt{z^2+a^2}} \frac{dz}{r^2} = -2\pi G\mu \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right].$$

Если $z < 0$, то $F_e = +2\pi G\mu \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right]$.

Теперь найдём значение силы на самом слое

$$\lim_{z \rightarrow 0} F_e = \pm 2\pi G\mu \lim_{z \rightarrow 0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right] = \pm 2\pi G\mu = const.$$

Прямое значение на слое, равное среднему из двух пределов, $F_0 = 0$, что можно было бы получить и чисто опираясь на физический смысл силы. Таким образом, сила притяжения терпит разрыв на величину $4\pi G\mu$ при переходе через слой.

6 Притяжение плоскости

Силу притяжения плоскости получим из силы притяжения диска, радиус которого стремится к бесконечности

$$F = \pm 2\pi G\mu \lim_{a \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right] = \pm 2\pi G\mu = const,$$

откуда следует, что сила притяжения плоскости не зависит от расстояния до неё.

7 Притяжение цилиндра

Будем рассматривать притяжение точки, находящейся на оси однородного цилиндра высотой H и радиуса a . Для простоты и приложений будем считать, что точка находится на верхней плоскости его основания ($z = H$). Элементарная сила бесконечно тонкого диска будет равна

$$dF_z = -2\pi G\delta \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right] dz,$$

тогда для всего цилиндра

$$F_H = -2\pi G\delta \int_0^H \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right] dz = -2\pi G\delta \left[z - \sqrt{a^2+z^2} \right] \Big|_0^H = -2\pi G\delta \left(H - \sqrt{a^2+H^2} + a \right).$$

Если $a \gg H$, то можно представить (ряд Тейлора)

$$\sqrt{a^2+H^2} = a \sqrt{1 + \frac{H^2}{a^2}} \approx a + \frac{H^2}{2a} - \frac{H^4}{8a^3} + \dots,$$

тогда

$$F_H = -2\pi G\delta H \left(1 - \frac{H}{2a} + \dots \right).$$

8 Притяжение плоскопараллельного слоя

Силу притяжения плоскопараллельного (то есть заключенного между двумя плоскостями) слоя толщиной H получим из силы притяжения цилиндра, радиус которого стремится к бесконечности

$$F = -2\pi G\delta H \lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{H}{2a} + \dots\right) = -2\pi G\delta H = \text{const.}$$

Таким образом, сила притяжения плоскопараллельного слоя является величиной постоянной.

Редукция (поправка), вводимая в измеренные значения силы тяжести и вычисляемая по формуле $-2\pi G\delta H$ называется редукцией Буге. Так может быть учтено притяжение топографических масс, снега, грунтовых вод и т.д. То есть в тех случаях, когда высота притягивающих масс много меньше их радиуса. Плотность δ , конечно, будет меняться.

Поле, создаваемое плоскостью или плоскопараллельным слоем называется однородным. Сила здесь имеет одно и то же направление — перпендикулярное плоскости — и одинаковую величину в любой точке. Уровенные поверхности такого поля — плоскости, параллельные слою. В прикладной геодезии, например, в рядовых строительных работах, почти всегда предполагается, что работы проводятся именно в однородном поле.