Теория фигур планет и гравиметрия 2018

Практическое занятие № 2

Притяжение. Основные понятия и свойства

16 февраля 2018 г.

1 Закон всемирного притяжения

Закон гравитационного притяжения был сформулирован Ньютоном и опубликован в Математических началах натуральной философии[1](лат. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica) в 1687 году. Звучит он следующим образом. Две частицы с массами m_1 и m_2 взаимно притягиваются с силой, пропорциональной произведению их масс и обратно пропорционально расстоянию r между ними, то есть

$$F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2},$$

где G (также обозначается как f,γ)— гравитационная постоянная,

Задача 1.1. Чему равна скорость распространения притяжения?

В системе СИ рекомендованное Комитетом данных для науки и техники (CODATA) значение в 2014 году[2] такое

$$G = (6{,}67408 \pm 0{,}00031) \times 10^{-11}\ \text{м}^3\text{кг}^{-1}\text{с}^{-2},$$

где $\pm 0{,}00031 \times 10^{-11}\text{м}^3\text{кг}^{-1}\text{с}^2$ – стандартная неопределенность (погрешность), а относительная стандартная неопределенность гравитационной постоянной равна $4{,}7 \times 10^{-5}$. Точность измерений гравитационной постоянной на несколько порядков ниже точности измерений других физических величин, часто новые определения G не совпадают со старыми на величины, превышающие стандартную неопределённость. Впервые определена Генри Кавендишем.

Пусть теперь точка $m_1 = m$ притягивает единичную массу $m_2 = 1\,\text{кг}$, тогда

$$F = G\frac{m}{r^2},$$

— сила притяжения, **численно** (обратите внимание на единицы величин) равная ускорению. Действительно, из второго закона Ньютона $F_{12} = m_2 a$, тогда

$$m_2 a = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2},$$

откуда

$$a = G\frac{m_1}{r_{12}^2} = G\frac{m}{r^2}.$$

Это закон Галилея, который гласит, что все тела падают на Землю (планету) под действием её притяжения с одинаковым ускорением (**независимо** от массы падающего тела!):

- `https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukE` — эксперимент в вакуумной камере
- `https://www.youtube.com/watch?v=KDp1tiUsZw8` — эксперимент на Луне

Массы, входящие в закон всемирного притяжения и второй закон Ньютона — разные. В первом случае масса выступает как количественная характеристика способности тела к гравитационным взаимодействиям и называется «гравитационной». Во втором случае масса служит мерой инертности тела, то есть мерой способности тела приобретать ускорение под действием силы. Такая масса называется «инертной». Из закона Галилея следует, что действующая на любое тело сила тяготения пропорциональна его инертной массе. Это утверждение известно как пропорциональность (или эквивалентность) инертной и гравитационной масс всех тел. Этот принцип проверялся множество раз в ходе экспериментов. Последний раз — в 2017 году с помощью спутниковой миссии MICROSCOPE, принцип эквивалентности подтвержден с точностью 10^{-14}. В силу этого, в дальнейшем мы не будем различать эти две величины, гравитационную и инертную массы. Мы также не будет проводить различий между ускорением и силой, действующей на единичную массу.

Единица ускорения в системе СИ — м/с^2. В гравиметрии, однако, мы будем использовать внесистемную единицу — Гал (названную в честь Галилео Галилея), который определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} 1\,\text{Гал} &= 10^{-2}\,\text{м/с}^2 = 1\,\text{см/с}^2 \\ 1\,\text{мГал} &= 10^{-5}\,\text{м/с}^2 \\ 1\,\text{мкГал} &= 10^{-8}\,\text{м/с}^2. \end{aligned}$$

Задача 1.2. Оцените, с какой силой притягиваются друг к другу два человека?

Произведение гравитационной постоянной G на массу притягивающего объекта M называется гравитационным параметром $\mu = GM$. Для Земли существует свой термин — геоцентрическая гравитационная постоянная. Согласно рекомендациям Международной службы вращения Земли[3], она равна

$$GM = 3{,}986004418 \times 10^{14}\,\text{м}^3\text{с}^{-2}$$

со стандартной неопределенностью $8 \times 10^5\,\text{м}^3\text{с}^{-2}$. Это означает, что геоцентрическая гравитационная постоянная определена точнее, чем гравитационная постоянная. Связано это с тем, что произведение GM может быть определено непосредственно по измерениям, в сущности, из обратной задачи — по заданной силе и расстоянию находят GM.

Таблица 1: Приближённые гравитационные параметры некоторых тел Солнечной системы

Тело	$\mu = Gm$, м^{3}с$^{-2}$
Земля	$3{,}9860 \times 10^{14}$
Луна	$4{,}9049 \times 10^{12}$
Солнце	$1{,}3271 \times 10^{20}$
Меркурий	$2{,}2032 \times 10^{13}$
Венера	$3{,}2486 \times 10^{14}$
Марс	$4{,}2829 \times 10^{13}$
Юпитер	$1{,}2669 \times 10^{17}$
Сатурн	$3{,}7931 \times 10^{16}$
Уран	$5{,}7939 \times 10^{15}$
Нептун	$6{,}8365 \times 10^{15}$

Задача 1.3. Найдите массу Земли по известной гравитационной постоянной G и геоцентрической гравитационной постоянной GM. Оцените точность.

Задача 1.4. Средний радиус Земли $R = 6371$ км. Найдите притяжение, создаваемое Землёй на её сферической поверхности, предполагая, что вся её масса сосредоточена в центре.

2 Сила притяжение в векторной форме

$$\vec{F} = Gm\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Радиус – вектор $\vec{r}$ направлен от притягивающей токи $P_1(x_1, y_1, z_1)$ к притягиваемой $P_2(x_2, y_2, z_2)$, его длина равна

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Производные r по координатам притягиваемой точки P_2 (далее индексы опускаем)

$$\frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x_2 - x_1}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y_2} = \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y_2 - y_1}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial z_2} = \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z_2 - z_1}{r}.$$

Проекции r на координатные оси равны

$$x_2 - x_1, \qquad y_2 - y_1, \qquad z_2 - z_1,$$

так что направляющие косинусы равны

$$\cos(\vec{r}, x) = \frac{x_2 - x_1}{r}, \qquad \cos(\vec{r}, y) = \frac{y_2 - y_1}{r}, \qquad \cos(\vec{r}, z) = \frac{z_2 - z_1}{r}.$$

Проекции силы на координатные оси будут выражаться через направляющие косинусы

$$\begin{aligned} F_x &= |\vec{F}| \cos(\vec{F}, x), \\ F_y &= |\vec{F}| \cos(\vec{F}, y), \\ F_z &= |\vec{F}| \cos(\vec{F}, z). \end{aligned}$$

тогда, учитывая, что сила $\vec{F}$ направлена от P_2 к P_1, то есть противоположно направлению $\vec{r}$, запишем

$$\begin{aligned} \cos(\vec{F}, x) &= -\cos(\vec{r}, x) = -\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x_2 - x_1}{r}, \\ \cos(\vec{F}, y) &= -\cos(\vec{r}, y) = -\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{y_2 - y_1}{r}, \\ \cos(\vec{F}, z) &= -\cos(\vec{r}, z) = -\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{z_2 - z_1}{r}, \end{aligned}$$

окончательно получаем

$$\begin{aligned} F_x &= -Gm\frac{x_2 - x_1}{r^3}, \\ F_y &= -Gm\frac{y_2 - y_1}{r^3}, \\ F_z &= -Gm\frac{z_2 - z_1}{r^3}. \end{aligned}$$

3 Потенциал материальной точки и его свойства

$$V = \frac{GM}{r}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -Gm\frac{x_2 - x_1}{r^3} = F_x, \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= -Gm\frac{y_2 - y_1}{r^3} = F_y, \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= -Gm\frac{z_2 - z_1}{r^3} = F_z. \end{aligned}$$

Определение 1. Потенциал — скалярная функция, частные производные которой по осям координат равны проекциям действующей силы на соотвествующие оси.

Градиент.

$$\vec{F} = \nabla V = \mathrm{grad} V = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Таким образом, зная потенциал V и вычислив его частные производные по каждой из координат, можно определить силу притяжения F.

Физический смысл. Механическая работа — количественная мера действия силы $\vec{F}$, равная её произведению на пройденный путь $\vec{s}$

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs \cos\left(\vec{F}, \vec{s}\right).$$

Работа совершается, только когда на тело действует сила и оно движется.

Пусть единичная масса переместилась на бесконечно малую величину $\mathrm{d}r$ в направлении действия силы притяжения, то есть совершилась работа

$$\mathrm{d}A = Fdr \cos\left(\vec{F}, \vec{r}\right) = Fdr \cos 0^\circ = -G\frac{m}{r^2}dr,$$

где учтено, что направление движения и направление силы совпадают, т.е. $\angle(\vec{F}, \vec{s}) = 0^\circ$. А теперь переместим единичную массу из бесконечности в притягиваемую точку, тогда

$$A = \int\limits_{\infty}^{r} \mathrm{d}A = \int\limits_{\infty}^{r} -G\frac{m}{r^2}dr = G\frac{m}{r} = V.$$

Пусть теперь единичная масса перемещается под действием силы притяжения из точки P_2 в точку P_2', находящуюся на конечном расстоянии от P_2, тогда

$$A = \int\limits_{P_2}^{P_2'} \mathrm{d}A = \int\limits_{P_2}^{P_2'} \mathrm{d}V = Gm\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) = V - V',$$

где r' — расстояние от P_1 до P_2', V' — потенциал притяжения материальной точки P_1 в P_2'. Таким образом, работа, совершаемая силой притяжения по перемещению материальной точки, равна разности потенциалов в начальном и конечном положении и **не зависит от пути**. Работа по замкнутому контуру равна нулю.

Уровенная поверхность. Пусть единичная масса пермещается перпендикулярно направлению силы притяжения, тогда

$$\cos\left(\vec{F}, \vec{r}\right) = \cos 90^\circ = 0, \qquad \mathrm{d}V = 0,$$

поэтому

$$V = \int\limits_{P_2}^{P_2'} \mathrm{d}V = C,$$

или

$$V(x, y, z) = C.$$

Поверхность, на которой потенциал материальной точки постоянен, называет уровенной или эквипотенциальной. Работа при перемещении по уровенной поверхности не совершается. Сила всюду перпендикулярна уровенной поверхности. Можно задать бесконечное число уровенных поверхностей, меняя константу C. Уровенные поверхности не пересекаются, поскольку потенциал — однозначная функция координат.

Задача 3.1. Какую форму имеют уровенные поверхности поля, создаваемого материальной точкой?

Решение. Уровенные поверхности имеют форму концентрических сфер. Действительно,

$$V = \frac{Gm}{r} = C, \text{ откуда}$$
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \frac{Gm}{C} \text{—уравнение сферы.}$$

4 Принцип суперпозиции. Потенциал объёмного тела

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i = G\frac{m_1}{r_1} + G\frac{m_2}{r_2} + \cdots + G\frac{m_N}{r_N} = G\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{r_i}$$

$$N \to \infty$$
$$\sum_i \to \iiint\limits_{\Omega}$$
$$m_i \to \mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m = \rho\,(x, y, z)\,\mathrm{d}v = \rho\,(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$V = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}m}{r} = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho\,(x, y, z)}{r}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Список литературы

[1] И. Ньютон. *Математические начала натуральной философии / Перевод с латинского и примечания А. Н. Крылова.* Классики науки. М.: Наука, 1989, с. 688.

[2] Peter J. Mohr, David B. Newell и Barry N. Taylor. «CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2014». Англ. В: *Journal of Physical and Chemical Reference Data* 45.4 (2016), с. 043102. DOI: `10.1063/1.4954402`. URL: `https://doi.org/10.1063/1.4954402`.

[3] G. Petit и B. Luzum. *IERS conventions (2010).* IERS Technical Note 36. Verlagdes Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main, Germany, 2010.