Теория фигур планет и гравиметрия 2019

Практическое занятие № 3

Притяжение тел простой формы

25 февраля 2019 г.

1 Притяжение простого слоя

Потенциал объемного тела может быть представлен в виде потенциалов простого слоя, двойного слоя или их комбинации. Это полезное свойство, которое часто используется в теории фигур планет при решении теоретических задач. Такая замена позволяет перейти от интегрирования по объёму к интегрированию по поверхности (то есть от тройного интеграла к двойному). Рассмотрим потенциал простого слоя.

Пусть в объеме τ, заключенном между двумя очень близкими, поверхностями σ и σ' находится притягивающая масса с переменной объёмной плотностью δ, тогда потенциал объёмных масс будет равен

$$V = G \iiint\limits_{\tau} \frac{\delta\left(x, y, z\right) \mathrm{d}\tau}{r},$$

где интегрирование ведётся по всему объёму τ, а r — расстояние от текущей точки до притягиваемой P.

Элементарный объём

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}h \, \mathrm{d}\sigma,$$

где dh — кратчайшее расстояние между σ и σ', $\mathrm{d}\sigma$ — элемент площади поверхности.

Элементарная масса

$$\mathrm{d}m = \delta \, \mathrm{d}\tau = \delta \, \mathrm{d}h \, \mathrm{d}\sigma.$$

Пусть σ и σ' неограниченно приближаются друг к другу, тогда вся элементарная масса $\mathrm{d}m$ элементарного объёма $\mathrm{d}\tau$ будет сконденсирована на бесконечно тонком слое площадью $\mathrm{d}\sigma$. Такой слой называется простым слоем, а его поверхностная плотность (или плотность простого слоя) равна

$$\mu = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\sigma},$$

откуда

$$\mathrm{d}m = \delta \, \mathrm{d}\tau = \delta \, \mathrm{d}h \, \mathrm{d}\sigma = \mu \, \mathrm{d}\sigma.$$

Элементарный потенциал, создаваемый массой $\mathrm{d}m$ будет равен

$$\mathrm{d}V = G \frac{\mu \, \mathrm{d}\sigma}{r},$$

откуда, интегрируя по поверхности σ, получаем потенциал притяжения простого слоя

$$V = G \iint\limits_{\sigma} \frac{\mu \, \mathrm{d}\sigma}{r}.$$

2 Притяжение однородной сферы (сферического слоя)

Пусть простой слой постоянной плотности μ распределён на сфере радиуса R. Найдём притяжение такой однородной сферы в точке P, находящейся на расстоянии r от центра сферы O. ρ – переменное расстояние от элементарной площади $\mathrm{d}\sigma$ поверхности сферы до точки P.

Воспользуемся сферической системой координат $(\theta,\ \lambda)$. Пусть элемент $\mathrm{d}\sigma$ представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную меридианами λ, $\lambda + \mathrm{d}\lambda$ и параллелями θ, $\theta + \mathrm{d}\theta$. Тогда стороны трапеции будут равны

$$R\,\mathrm{d}\theta \text{ —длина дуги меридиана,}$$
$$R\sin\theta\,\mathrm{d}\lambda \text{ —длина дуги параллели,}$$

а элементарная площадь

$$\mathrm{d}\sigma = R\sin\theta\,\mathrm{d}\lambda \cdot R\,\mathrm{d}\theta = R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda.$$

По теореме косинусов

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta.$$

Тогда для простого слоя, распределённого на поверхности сферы, можно записать

$$V = G\mu\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}} = G\mu R^2\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\lambda =$$
$$= 2\pi G\mu R^2\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}.$$

Выполним замену переменных. Дифференцируя $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$, получаем

$$\rho\,\mathrm{d}\rho = Rr\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{Rr},$$

тогда

$$V = 2\pi G\mu R^2\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}} = 2\pi G\mu\frac{R}{r}\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\mathrm{d}\rho.$$

Если точка P — внешняя, то $\rho_1 = R + r$, $\rho_2 = -R + r$, тогда

$$V_e = 2\pi G\mu\frac{R}{r}\int\limits_{r-R}^{r+R}\mathrm{d}\rho = 2\pi G\mu\frac{R}{r}\big[(r+R)-(r-R)\big] = \underline{4\pi G\mu\frac{R^2}{r}}.$$

Поскольку масса всего сферического слоя равна $M = 4\pi R^2\mu$, то окончательно получаем

$$V_e = \frac{GM}{r}.$$

Если точка P — внутренняя, то $\rho_1 = R - r$, $\rho_2 = R + r$, тогда

$$V_i = 2\pi G\mu\frac{R}{r}\int\limits_{R-r}^{R+r}\mathrm{d}\rho = 2\pi G\mu\frac{R}{r}\big[(R+r)-(R-r)\big] = \underline{4\pi G\mu R = const}.$$

На поверхности сферы $\rho \to R$, поэтому $V_0 = V_e = V_i$.

Поскольку потенциал притяжения зависит только от расстояния от притягивающей точки до центра сферы, то для нахождения силы для внешней точки достаточно вычислить радиальную производную

$$|\vec{F_e}| = F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 4\pi G\mu\frac{R^2}{r^2} = \frac{GM}{r^2}.$$

Для внутренней точки
$$|\vec{F_i}| = F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$
Пусть притягиваемая точка P приближается к поверхности сферы P_0 с внутренней и с внешней стороны, но не пересекает её, тогда
$$F_{e0} = \lim_{r\to R} -\frac{\partial V}{\partial r} = -4\pi G\mu,$$
$$F_{i0} = \lim_{r\to R} \frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

Прямое значение силы на самом слое равно среднему из предельных значений, то есть
$$F_0 = -2\pi G\mu.$$

Задача 2.1. Как ведут себя потенциал и сила притяжения сферы, если притягиваемая точка премещается из центра сферы в бесконечность? Постройте графики зависимости потенциала и силы притяжения сферы от расстояния.

3 Притяжение шара

Однородный шар с объёмной плотностью $\delta = const$ можно представить состоящим из бесконечного числа сферических слоёв. Пусть R — радиус шара, R' — радиус сферического слоя толщиной $\mathrm{d}R'$. Тогда для внешней точки шара P элементарный потенциал притяжения сферического слоя равен
$$\mathrm{d}V_e = 4\pi G\delta \frac{R'^2}{r}\,\mathrm{d}R',$$
окуда, интегрируя по всему радиусу, получаем
$$V_e = 4\pi G\delta \int\limits_0^R \frac{R'^2}{r}\,\mathrm{d}R' = \frac{4}{3}\pi G\delta\frac{R^3}{r}.$$
Вводя массу шара $M = 4/3\ \pi R^3\delta$, снова получаем
$$V_e = \frac{GM}{r}.$$
Аналогично для силы
$$|\vec{F_e}| = F_r = -\frac{\partial V_e}{\partial r} = \frac{4}{3}\pi G\delta\frac{R^3}{r^2} = \frac{GM}{r^2}.$$

Для внутренней точки воспользуемся свойством суперпозиции и будем искать потенциал, как сумму
$$V_i = V_1 + V_2,$$
где V_1 — потенциал «внутреннего» шара радиуса r, V_2 — потенциал внешнего шарового слоя, заключенного между r и R. Потенциал V_1 ничем не отличается от потенциала шара на внешнюю точку, поэтому
$$V_1 = \frac{4}{3}\pi G\delta r^2.$$
Представим шаровой слой состоящим из бесконечного числа сферических слоёв переменного радиуса R'. Точка P будет внутренней для них, а потому элементарный потенциал равен
$$\mathrm{d}V = 4\pi G\delta R'\,\mathrm{d}R'.$$

Для всего шарового слоя получаем
$$V = 4\pi G\delta \int\limits_r^R R'\,\mathrm{d}R' = 2\pi G\delta\left(R^2 - r^2\right).$$

Наконец,

$$V_i = V_1 + V_2 = \frac{2}{3}\pi G\delta \left(3R^2 - r^2\right).$$

Для силы получаем

$$F_i = -\frac{\partial V_i}{\partial r} = \frac{4}{3}\pi G\delta r = \frac{GM}{r^2}.$$

Таким образом, шаровой слой не притягивает точку, лежащую внутри него.

4 Притяжение шарового слоя

Пусть точку притягивает однородный шаровой слой, заключенный между радиусами R_1 и R_2. Тогда потенциал притяжения внешней точки можно представить как

$$V_e = V_2 - V_1,$$

где V_2 — потенциал шара радиусом R_2, V_1 — потенциал шара радиусом R_1. Тогда

$$V_e = \frac{4}{3}\pi G\delta \frac{1}{r}\left(R_2^3 - R_1^3\right).$$

Для силы получаем

$$F_e = -\frac{4}{3}\pi G\delta \left(R_2^3 - R_1^3\right)\frac{1}{r^2}.$$

Замечание 1. Потенциал шарового слоя на внешнюю точку мог бы быть вызван и притяжением точки с массой $M = \dfrac{4}{3}\pi G\left(R_2^3 - R_1^3\right)$ или шаром радиуса R_2 с плотностью $\delta' = \delta\left(R_2^3 - R_1^3\right)/R_2^3$. Такая неоднозначность свидетельствует о том, что только по гравиметрическим данным невозможно изучать внутреннее строение Земли. Без сейсмических данных мы бы никогда не могли сказать, полая внутри Земля или нет.

Если точка находится внутри шарового слоя $R_1 < r < R_2$, то

$$V_i = 2\pi G\delta \left(R_2^2 - \frac{1}{3}r^2\right) - \frac{4}{3}\pi G\delta \frac{R_1^3}{r}$$

а для силы

$$F_i = -\frac{4}{3}\pi G\delta \left(r^3 - R_1^3\right)\frac{1}{r}.$$

Если точка находится внутри пустого пространства слоя ($r < R_1$), то

$$V_i = 2\pi G\sigma \left(R_2^2 - R_1^2\right),$$

а для силы

$$F_i = 0.$$

5 Притяжение диска

Силу притяжение бесконечно тонкого однородного диска радиуса a можно представить через притяжение простого слоя $V = G\int\limits_\sigma \frac{\mu\,\mathrm{d}\sigma}{r}$. Удобно воспользоваться цилиндрической системой координат (ρ, α, z), где ρ — полярный радиус, α — полярный угол, z — аппликата точки. Таким образом, цилиндрическая система координат является расширением полярной (плоской) системы координат.

Найдем силу притяжения диска для точки, лежащей на его оси симметрии. Можно записать

$$F = \frac{\partial V}{\partial z} = -G\mu \int\limits_\sigma \frac{\mathrm{d}\sigma}{r^2}\cos\left(r, z\right),$$

$$\mathrm{d}\sigma = \rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\rho,$$

откуда

$$F = \frac{\partial V}{\partial z} = -G\mu \int\limits_{\sigma} \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\alpha}{r^2} \cos{(r,z)}\,.$$

Заметим, что

$$r^2 = \rho^2 + z^2, \qquad r\,\mathrm{d}r = \rho\,\mathrm{d}rho, \qquad \cos{(r,z)} = \frac{z}{r},$$

тогда

$$F_e = -G\mu \int\limits_{z}^{\sqrt{z^2+a^2}} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha}{r^3} = -2\pi G\mu z \int\limits_{z}^{\sqrt{z^2+a^2}} \frac{\mathrm{d}z}{r^2} = -2\pi G\mu \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right].$$

Если $z < 0$, то $F_e = +2\pi G\mu \left[1 - \dfrac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right]$.
Теперь найдём значение силы на самом слое

$$\lim_{z\to 0} F_e = \pm 2\pi G\mu \lim_{z\to 0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right] = \pm 2\pi G\mu = const.$$

Прямое значение на слое, равное среднему из двух пределов, $F_0 = 0$, что можно было бы получить и чисто опираясь на физический смысл силы. Таким образом, сила притяжение терпит разрыв на величину $4\pi G\mu$ при переходе через слой.

6 Притяжение плоскости

Силу притяжения плоскости получим из силы притяжения диска, радиус которого стремится к бесконечности

$$F = \pm 2\pi G\mu \lim_{a\to\infty} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right] = \pm 2\pi G\mu = const,$$

откуда следует, что сила притяжения плоскости не зависит от расстояния до неё.

7 Притяжение цилиндра

Будем рассматривать притяжение точки, находящейся на оси однородного цилиндра высотой H и радиуса a. Для простоты и приложений будем считать, что точка находится на верхней плоскости его основания ($z = H$). Элементарная сила бесконечно тонкого диска будет равна

$$\mathrm{d}F_z = -2\pi G\delta \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right] \mathrm{d}z,$$

тогда для всего цилиндра

$$F_H = -2\pi G\delta \int\limits_{0}^{H} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right] \mathrm{d}z = -2\pi G\delta \left[z - \sqrt{a^2+z^2}\right]\Big|_0^H = -2\pi G\delta \left(H - \sqrt{a^2+H^2} + a\right).$$

Если $a >> H$, то можно представить (ряд Тейлора)

$$\sqrt{a^2+H^2} = a\sqrt{1 + \frac{H^2}{a^2}} \approx a + \frac{H^2}{2a} - \frac{H^4}{8a^3} + \ldots,$$

тогда

$$F_H = -2\pi G\delta H \left(1 - \frac{H}{2a} + \ldots\right).$$

8 Притяжение плоскопараллельного слоя

Силу притяжения плоскопараллельного (то есть заключенного между двумя плоскостями) слоя толщиной H получим из силы притяжения цилиндра, радиус которого стремится к бесконечности

$$F = -2\pi G\delta H \lim_{a\to\infty}\left(1-\frac{H}{2a}+\ldots\right) = -2\pi G\delta H = const.$$

Таким образом, сила притяжения плоскопараллельного слоя является величиной постоянной.

Редукция (поправка), вводимая в измеренные значения силы тяжести и вычисляемая по формуле $-2\pi G\delta H$ называется редукцией Буге. Так может быть учтено притяжение топографических масс, снега, грунтовых вод и т.д. То есть в тех случаях, когда высота притягивающих масс много меньше их радиуса. Плотность δ, конечно, будет меняться.

Поле, создаваемое плоскостью или плоскопараллельным слоем называется однородным. Сила здесь имеет одно и то же направление — перпендикулярное плоскости — и одинаковую величину в любой точке. Уровенные поверхности такого поля — плоскости, параллельные слою. В прикладной геодезии, например, в рядовых строительных работах, почти всегда предполагается, что работы проводятся именно в однородном поле.