

# Evaluación experimental de la Reconstrucción en cuaterniones de la Matriz de Rotación con un Observador Óptimo/EKF en un Algoritmo de Navegación de Observadores en Cascada del Tipo Filtro Complementario en $SO(3)$

Autor 1.\* y Autor 2.\*

\*Ingeniería Electrónica-Facultad de Ingeniería  
Universidad Mayor de San Andrés, La Paz, Bolivia  
Email: aiporre@umsa.bo, mamestegui@umsa.bo

**Abstract**—This work proposes a variation for a earlier navigation algorithm in the literature composed by  $SO(3)$  complementary filters. Such modification determines the inclusion of a quaternion optimal observer to determine the rotation matrix instead using a vectorial reconstruction approach, that proposal involves an experimental comparison between the original and modified method. The results show a 40 % increase for estimation quality while 21 % more complexity using this new approach. It also verifies the implementation in real noise environment.

## I. INTRODUCCIÓN

A medida que los sensores de navegación y los procesadores computacionales reducían su tamaño, los algoritmos de navegación debieron especializarse progresivamente en la búsqueda de una mejor precisión en la estimación de los estados de navegación. En esa línea, durante la década de los 60's, el desarrollo del Filtro Schmidt-Kalman [1] o más conocido como el Filtro de Kalman Extendido (EKF) incorpora los conceptos de estimación y observación de la teoría de control en la tecnología de los sistemas de navegación; este abordaje propone la aplicación del Filtro de Kalman [2] en un sistema no lineal para la resolución del problema de navegación, definido en la referencia [3]. De ahí en adelante, varios autores desarrollan una gran cantidad de técnicas, e.g. filtro de Kalman extendido (EKF), algoritmos genéticos, redes neuronales, filtros de partículas o el algoritmo QUEST.

En la década de los noventa los algoritmos de navegación fueron constituidos por observadores no lineales desarrollados en el marco de la teoría de Lyapunov, evidenciable en los trabajos [4], [5], [6]. De donde deriva el énfasis de investigación de algoritmos de navegación alrededor de esta temática, se centra en la extensión de estas técnicas para la determinación de posición incorporando sensores basados en el *Sistema de Posicionamiento Global* (GPS), o cámaras Web.

De esa manera, los algoritmos de navegación modernos

están siempre concretados en una técnica de estimación, y dependiendo de la aplicación diferentes sensores de navegación son usados. Y cuando el movimiento abarca grandes áreas, los sensores deben ser de muy buena calidad, o medir parámetros absolutos, como es el caso del GPS, la triangulación por medio del sistema global para comunicaciones móviles (Global System for Mobile Communications ó originalmente Groupe Spécial Mobile, GSM), o el GPS asistido (AGPS).

El EKF, usado en este trabajo para la determinación de la matriz de rotación, es celebrado como uno de los enfoques de filtros estadísticos de mayor éxito y que actualmente tiene un rango de desarrollo increíblemente amplio. Este algoritmo es prácticamente el algoritmo de navegación por excelencia e indudablemente la técnica más utilizada en los sistemas de navegación; esto es demostrable en la extensa lista de trabajos en variedades del Filtro de Kalman enfocado a esta temática que se pueden encontrar en la literatura, e.g.[7], [8], [9], [10], [11]. Dentro de las varias representaciones del EKF implementadas, priman las denominadas EKF multiplicativo (MEKF), los cuales mantienen la estructura general EKF, pero son desarrollados alrededor de un modelo de error [12], [13].

El EKF guarda una estrecha relación con el observador óptimo del esquema de Luenberger. Y particularmente, se han concretado algunos Filtros de Kalman desde la teoría del control óptimo para la estimación de la información de navegación [14].

El limitado, pero novedoso método de [15] y [16] para el diseño de un observador no lineal como una extensión del observador de Luenberger, ha abierto una nueva brecha en metodologías para la determinación de la información de navegación. Lo anteriormente mencionado se constata en las referencias: [17], [18] y [19], los cuales aplican los conceptos de la teoría de Lyapunov en el diseño de varios observadores que calculan la información de navegación.

Este tipo de enfoque basa su análisis en la búsqueda de la condición de estabilidad en el sentido de Lyapunov. De manera similar, los filtros complementarios en un Grupo Ortogonal

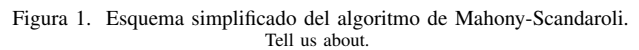
También, se han hecho esfuerzos por combinar diferentes tipos de observadores, por ejemplo: en [24] se presenta una configuración de dos observadores en cascada para la estimación de la matriz de rotación y la estimación de la posición, donde los observadores son diseñados usando el análisis de estabilidad de Lyapunov; o en [21] que también combina dos observadores en cascada para la determinación de la orientación y la posición, con ambos observadores con una configuración especial parecida al filtro complementario en frecuencia.<sup>2</sup> A partir de esto, la idea en este trabajo es el establecimiento de un *algoritmo de navegación* compuesto de una serie de *observadores de estado*, que busca una mejora de la estimación de la información de navegación.

- El primero es la modificación del *algoritmo de observadores no lineales tipo filtro complementario en un grupo ortogonal especial  $SO(3)$*  de Mahony y Scandaroli (desarrollado por estos dos autores en las referencias [20], [21]) con la inclusión de un observador óptimo tipo Filtro de Kalman Extendido (EKF)<sup>3</sup> para la determinación de la matriz de rotación.
- Como segundo punto se tiene el desarrollo de una serie de experimentos que establecen la evaluación experimental para comprobar una mejora del algoritmo modificado con respecto al algoritmo original.

La solución al problema de navegación se delimita en la determinación las condiciones que describen el movimiento de un cuerpo: la situación espacial (¿dónde estoy?); y el ritmo de cambio de dicha situación (¿hacia dónde voy?). Es así, que con el afán solucionar este problema, el algoritmo de navegación dentro del sistema de navegación interpreta la medición de parámetros del medio o que son consecuencia del propio movimiento, para recuperar las variables que describen: tanto la situación espacial como su ritmo de cambio; o dicho de otra manera reconstruye la información de navegación<sup>4</sup> a partir de información corrompida y parcial relacionada con las variables del movimiento, la cual es proporcionada por sensores de navegación.

<sup>1</sup>Un Grupo Ortogonal Especial está constituido por un grupo de matrices de transformación que hacen rotaciones propias a los elementos de Espacio Euclídeo.

<sup>3</sup>El filtro de Kalman, fue desarrollado Rudolf Kalman en [[2]]

<sup>4</sup>Variables que describen el movimiento

La solución de este problema, desde el enfoque de Mahony-Scandaroli, deriva en el algoritmo de navegación de filtros complementarios en  $SO(3)$  en cascada, esquematizado en diagrama de bloques de la Figura 1. Este propone la combinación en cascada de dos observadores del tipo filtro complementario en  $SO(3)$ , el observador de orientación y el observador de posición; en donde el observador orientación utiliza la medición de la velocidad angular  $\Omega_s$  <sup>6</sup> y la matriz de rotación  $R_y$  proveniente de una fórmula de reconstrucción vectorial que conjuga: la medición de valores vectoriales en  $\{\mathcal{B}\}$  ( $v_i$ ), sus valores teóricos en el  $\{\mathcal{A}\}$  ( $v_{i,0}$ ), y el punto de estabilidad encontrado por el observador de orientación para la matriz de rotación ( $\hat{R}$ , estos relacionados en la siguiente ecuación, que toma en cuenta  $n$  mediciones vectoriales).

El observador de orientación toma estas variables para la determinación de:

- <sup>5</sup>En el presente trabajo, el conjunto de variables, compuestas por: la velocidad lineal, velocidad angular, posición y orientación, es denominado *información de navegación*. Este describe el movimiento de un cuerpo rígido de seis grados libertad.

<sup>6</sup>Elemento de conjunto de *información sensorial disponible*  $S$

- $\tilde{R}$ : El error de estimación de la matriz de rotación, definida a través de la matriz de transformación  $\{\mathcal{E}\} \leftrightarrow \{\mathcal{B}\}$ , donde  $\{\mathcal{E}\}$  denota el marco referencial de estimación, el cual teóricamente converge hacia  $\{\mathcal{B}\}$  y se considera el resultado de la estimación de  $\{\mathcal{B}\}$  por el observador de orientación.
- $\hat{R}$ : La estimación de la matriz de rotación, definida como la matriz de transformación  $\{\mathcal{E}\} \leftrightarrow \{\mathcal{A}\}$ , donde  $\{\mathcal{A}\}$  denota el marco referencial inercial, con dirección y origen fijos en un punto sobre la tierra.

Siguiendo este esquema del algoritmo de navegación de Mahony-Scandarolli, en cascada el observador de posición tipo Filtro complementario en  $SO(3)$ , toma el resto de las variables incluidas en  $S$  (la medición de la aceleración  $a_s$  y la medición de la posición  $p_y$ ), junto con las matrices de transformación determinadas por el anterior observador, para obtener:

- $\hat{p}$ : La estimación de la posición en  $\{\mathcal{A}\}$ .
- $\hat{v}$ : La estimación de la velocidad en  $\{\mathcal{A}\}$ .

Finalmente, los dos grupos de variables estimadas por ambos observadores conforman la *estimación de la información de navegación*, que puede ser denotada por el vector columna  $X = [\hat{p} \ \hat{v} \ \hat{\Theta} \ \hat{\Omega}]$ .

Como señala Mahony, la principal desventaja en la formulación de los filtros complementarios pasivo y directo es la sensibilidad a la matriz de entrada  $R_y$ . Esta matriz es usada en el mapeo de la medición de la velocidad angular al marco inercial  $\{\mathcal{A}\}$ , y por esta razón, la determinación de esta matriz juega un papel central en el desempeño final del sistema. Considerando esto la determinación desde el enfoque de la reconstrucción vectorial del Mahony-Scandarolli, la reconstrucción sub-óptima basada en la resolución de la ecuación de Lyapunov incorpora una sensibilidad extra: a ruidos de medición, sesgos de medición y los estados transitorios de asentamiento. Esto último consolida relaciones no lineales de alto orden (ver ecuación 1) en el lazo de realimentación y el sistema dinámico del error de estimación.

### III. RECONSTRUCCIÓN ÓPTIMA DE LA MATRIZ DE ROTACIÓN

Considerando las desventajas señaladas en la sección anterior, se indentifica que el mejorar la reconstrucción de la matriz de rotación puede traer mejoras en el desempeño general del algoritmo. Para ello, se buscará solucionar de manera óptima el problema de determinación de la matriz de rotación<sup>7</sup> a partir de mediciones vectoriales, el cual indica que: *a partir de la medición de cantidades vectoriales conocidas respecto a  $\{\mathcal{B}\}$ , la matriz de rotación puede ser determinada en el argumento que minimiza la función de coste definida como:*

$$R^* = \arg \min_R \left\{ \sum_i |v_{0,i} - Rv_{m,i}|^2 \right\} \quad (2)$$

Donde, la matriz de rotación óptima  $R^*$  es obtenida en el argumento que minimiza la función de coste compuesta por la

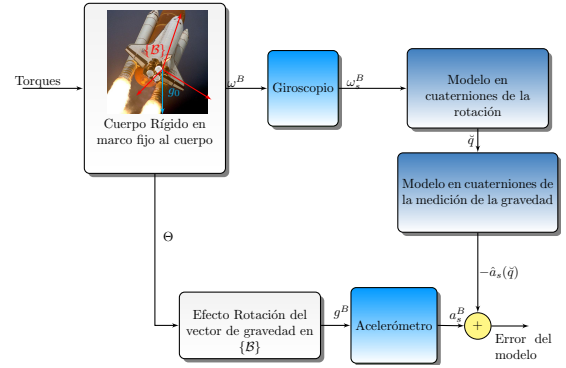


Figura 2. Caracterización del error del modelo de medición.

suma de los cuadrados de los módulos de la diferencia de: los valores de las mediciones vectoriales rotadas al marco inercial ( $Rv_{m,i}$ ), respecto a los valores teóricos conocidos de dichas cantidades vectoriales ( $v_{0,i}$ )<sup>8</sup>

#### III-A. Determinación óptima de la matriz de rotación a partir del modelo de medición del vector gravitacional en cuaterniones.

Se propone la determinación de la matriz de rotación interpretando el fenómeno de inclinación de campo gravitacional respecto al marco  $\{\mathcal{B}\}$  con un observador óptimo en cuaterniones. En donde, el observador se constituye en el esquema detallado en la figura 2. En este esquema, se considera el fenómeno de rotación de un cuerpo rígido (excitado por *torques* desconocidos) descrito por dos variables: la orientación y su velocidad angular, representadas por las salidas  $\Theta$  y  $\Omega$ , respectivamente, estos parámetros son medidos:

1. La velocidad angular por un giroscopio, obteniendo  $\Omega_s$ .
2. La orientación  $\Theta$ , de manera indirecta, midiendo la inclinación del vector gravitacional respecto al marco fijo al cuerpo  $\{\mathcal{B}\}$ , usando un acelerómetro. (oración desordenada)

En este arreglo, el observador incorpora correcciones sistemáticas al modelo de cinemático de rotación en términos del cuaternión unitario, que se calculan a partir del error del modelo de medición de la aceleración gravitacional y la medición de la velocidad angular  $\Omega_s$ , para reducir de forma óptima el error del modelo de medición y así ajustar el cuaternión que rota el valor teórico de la gravedad en el marco referencial inercial ( $[0, 0, g_0]^T$ ), alineando el mismo a la medición vectorial  $a_s$ .

Esto último es posible, dado que el cuaternión se define en las rotaciones de los ángulos de Euler (ver [25]).

#### III-B. Observador óptimo en cuaterniones

En la definición del observador óptimo, se identifica entonces el caso particular de la ecuación 2, donde la matriz

<sup>8</sup>Donde los sub-índices corresponden a las distintos valores vectoriales medibles.

<sup>7</sup>Planteado en la referencia [20]

de rotación óptima  $R^*$  depende de la relación de optimización del cuaternión unitario de rotación  $\check{q}$ , denotado por  $\check{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$  en  $\mathbb{Q} : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^3$ :

$$R^*(\check{q}) = R \left( q^* = \arg \min_{\check{q}} \{a_s - R^T(\check{q})g_0\} \right) \quad (3)$$

De esa manera, la solución a la matriz de rotación óptima deriva del procedimiento de optimización del cuaternión unitario que rota el valor teórico de la gravedad  $g_0$  hacia la medición de la inclinación campo vectorial gravitatorio  $a_s$ , en la relación que establece  $\hat{a}_s$  en la siguiente ecuación, como la estimación de la medición vectorial de la gravedad como función del cuaternión unitario [26]:

$$\hat{a}_s = \check{q} \otimes \check{g}_0 \otimes \check{q} = Rg_0 = g_0 \begin{bmatrix} 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

En la cual, la evolución en tiempo del cuaternión unitario esta delimitada en la descripción cinemática del movimiento rotación en  $\mathbb{Q}$ , definida como:

$$\dot{\check{q}} = \frac{1}{2} \check{q} \otimes \check{\Omega} \quad (5)$$

Donde, la derivada del cuaternión unitario se define en el producto de cuaterniones <sup>9</sup> de la velocidad angular en  $\mathbb{Q}^{10}$  ( $\check{\Omega}$ ) y el cuaternión unitario ( $\check{q}$ ).

A partir de esto, el reto asumido por el observador óptimo es determinar el cuaternión óptimo en el tiempo  $T$ , conciderando de tres elementos: i) la incertidumbre en las condiciones iniciales  $\check{q}_0$  y  $v_0$ , ii) la incertidumbre del modelo discretizado del proceso de rotación del cuaternión  $w_k$ , definido en (6), donde  $f_k^0$  es la versión discretizada de (4) y  $\hat{q}_k$  es el estimado discreto del cuaternión.

$$\hat{q}_{k+1} = f_k^0(\hat{q}_k, \Omega_k) + w_k \quad (6)$$

iii) Y la incertidumbre en la estimación de la medición vectorial de la gravedad, el cual se define como la resta del valor estimado  $\hat{a}_{s,k}$  con señal proveniente del acelerómetro  $a_{s,k}$  en el tiempo  $k$ ,

$$v_k = a_{s,k} - \underbrace{\hat{a}_{s,k}}_{\hat{a}_{s,k} = h_k(\hat{q}_k)} \quad (7)$$

A partir de esto, la función objetivo desde el punto de vista del observador se deduce como la adición de dos normas específicas

$$q_k^* = \arg \min_{q_k} \left\{ norm_0(\check{q}_0, v_0) + \sum_{i=0}^k norm_1(w_i, v_i) \right\} \quad (8)$$

La primera combina la incertidumbre de condiciones iniciales de medición  $v_0$  y estado inicial del cuaternión unitario  $\check{q}_0$  y la segunda combina la evolución en el tiempo de la incertidumbre del modelo  $w_k$  y de medición  $v_k$ , ambos para el intervalo de

<sup>9</sup>Denotada por el símbolo  $\otimes$

<sup>10</sup>Definida como un cuaternión puro, en donde la parte real es cero, y las componentes están repartidas en  $i, j$  y  $k$ , para la velocidad angular en los ejes  $x, y$  y  $z$ , respectivamente

tiempo discreto  $i \in \{k_0, \dots, k_f\}$ . El problema se mantiene en la búsqueda del estimado  $\hat{q}_{k+1}$  haciendo correcciones sucesivas sobre la incertidumbre del modelo  $w_k$ .

La solución propuesta a este problema hace uso de Programación Dinámica (PD) [27] en la versión lineal del modelo del proceso de rotación del cuaternión (6) y del modelo de la medición.

$$w_k = - \underbrace{P_k H_k^T (R + H_k P_k H_k^T)^{-1}}_K \tilde{y}_k \quad (9)$$

$$w_k^T F^{-T} P_k A^{-1} w_k = w_k^T (F^{-T} Q F^{-1} + P_k - K H_k P_k) w_k \quad (10)$$

Lo que establece el estimador de estimador lineal en:

$$\hat{q}_{k+1} = F \hat{q}_k + B \Omega_{s,k} + K(y_k - H \hat{x}_k) \quad (11)$$

#### IV. METODOLOGÍA DE LA EVALUACIÓN EXPERIMENTAL

El abordaje experimental trata de probar que la inclusión de un Observador Óptimo para reconstrucción de la matriz de rotación en el esquema del algoritmo de navegación compuesto por los filtros complementarios en SO(3), incorporaría mejoras en la estimación total de la información de navegación. Para ello, se realizan experimentos orientado a comparar el algoritmo original y el algoritmo modificado. en las mismas condiciones de operación. Bajo esta premisa, lo experimentos son conducidos de tal forma que ambos algoritmo procesan la misma información de entrada, que proviene de los mismos sensores de navegación: un módulo receptor GPS MTK-2309; un acelerómetro MEMS de bajo costo ADXL330 de  $\pm 3g$  y tres grados de libertad; y los giroscopios MEMS IDG500 y LPY330AH, que miden las velocidades angulares en las direcciones de los versores del marco  $\{\mathcal{B}\}$ .

De esa manera, los experimentos son realizados separando los casos de estudio en dos plataformas distintas para:

1. El estudio de la estimación de los ángulos de Euler en una componente para movimientos de hasta  $1[rad/s]$ .
2. El estudio de las capacidades de estimación de la posición y velocidad lineal en tres dimensiones para un circuito cerrado recorrido en un automóvil.

##### IV-A. Plataforma experimental de la estimación de los ángulos de Euler

La estrategia propuesta para la evaluación del desempeño de la estimación de la orientación, analiza cada una de las direcciones de los ángulos de Euler de manera separada. El total de la prueba se divide en tres ensayos diferentes en los que los movimientos se limitan a rotaciones en los planos conformados por los ejes del marco referencial  $\{\mathcal{B}\}$ .

La plataforma experimental de la estimación de los ángulos de Euler fue implementada siguiendo el esquema de la Figura 3, donde un arreglo de marcas negras en una plancha blanca sujeta a la caja de sensores permite hacer el seguimiento de la evolución del movimiento angular de referencia, en forma simultánea a la captura de las señales de los sensores de navegación. De esa manera, los algoritmos de navegación determinan la estimación de la información de navegación

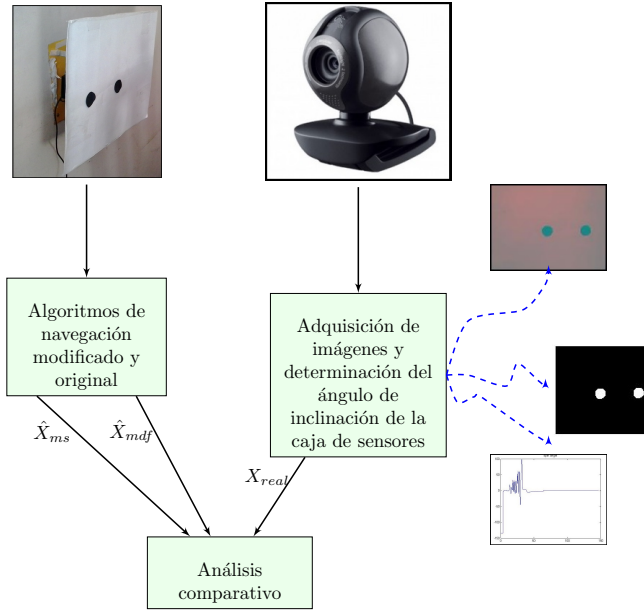


Figura 3. Esquema general de la plataforma experimental evaluativa.  
Fuente: Elaboración Propia

$\hat{X}_{mdf}$  y  $\hat{X}_{mh}$ ; y de forma paralela haciendo seguimiento con una cámara se determina el valor angular de referencia correspondiente a la evolución temporal de la componente de los ángulos de Euler, sobre la cual se está haciendo el análisis. Bajo estas condiciones se hacen tres arreglos distintos para los tres ejes del  $\{B\}$ , es decir en  $x$  para  $\phi$ , en  $y$  para  $\theta$ , y en  $z$  para  $\psi$ .

#### IV-B. Plataforma experimental de la estimación de la posición y velocidad lineal

Para la evaluación de la estimación de la posición y velocidad lineal el esquema implementado utiliza como referencia la información de un módulo comercial de localización GPS Etrex-Garmin que tiene una precisión de hasta 2 metros, por mucho mayor a la del módulo GPS usado dentro del conjunto de sensores de navegación, esto gracias a la ganancia de su antena que le permite capturar un mayor número de satélites, además de tener una memoria especializada para la captura de datos de Efemérides y Calendarios pasados. Este dispositivo cuenta con un altímetro y una brújula electrónica, mejorando su precisión aún más.

Los experimentos son realizados siguiendo circuitos cerrados en un vehículo en donde se monta una caja que contiene al sensor comercial y los sensores de navegación de forma tal que es posible realizar la estimación de la información de navegación y capturar información de referencia. De forma similar al caso de movimiento angular, como se describe en la figura 4, la información de los sensores de navegación es procesada por los algoritmos de navegación obteniendo  $\hat{X}_{mh}$  y  $\hat{X}_{mdf}$ ; y de forma simultanea, durante el movimiento del vehículo, se captura la información de referencia que corresponde al GPS GARMIN-ETEX.

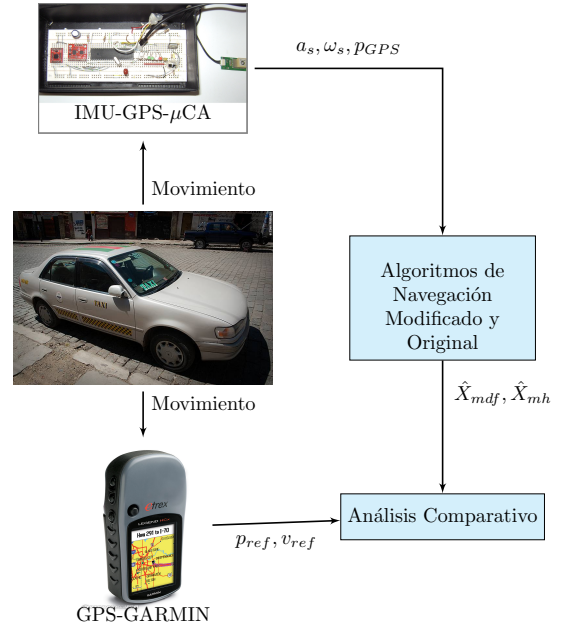


Figura 4. Plataforma experimental de la estimación del movimiento lineal.  
Fuente: Elaboración Propia

## V. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En esta sección se presentan los resultados experimentales resaltando sus principales características.

#### V-A. Prueba con la plataforma experimental de la estimación los ángulos de Euler

Esta fase emplea el esquema experimental descrito en la sección IV-A, en la cual el sensor angular de video (constituido por una cámara) captura la información de la rotación de uno de los ángulos de Euler, al mismo tiempo que los algoritmos de navegación realizan la estimación de la misma variable<sup>11</sup>.

Es importante señalar que debido a que el esquema del sensor angular de video solo puede medir un ángulo al mismo tiempo, el estudio se concreta en ensayos independientes sobre tres arreglos distintos, en los cuales se varía la disposición de los elementos que constituyen esta plataforma experimental.

Los resultados obtenidos de uno de los varios ensayos realizados para la comparación del desempeño de la estimación la orientación se muestran en las gráficas de la Figura 5, donde la señal de color azul corresponde a la estimación, la de color verde para el algoritmo original, y de color rojo para la referencia.

DESCRIPCION 1: En este ensayo el movimiento inicia en  $-2^\circ$  y termina en poco menos de  $-3^\circ$  y los ángulos de rodadura y guiño se mantienen en  $0^\circ$ . Para la estimación con el algoritmo modificado los errores oscilan entre  $9,04E - 4^\circ$  y  $10,58^\circ$  en

<sup>11</sup>Dentro del conjunto de datos que conforman la información de navegación estimada.



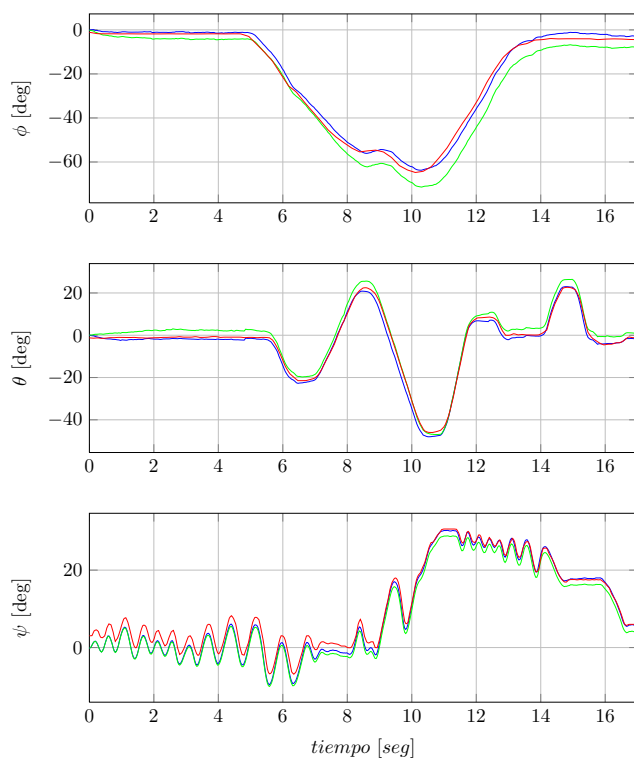


Figura 5. Prueba comparativa de la estimación de los ángulos de Euler. Los ángulos de euler, se denotan en el vector columna  $\Theta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ , con  $\phi$  para el alabeo,  $\theta$  para la rodadura y  $\psi$  para el guiñeo.

contraste a los  $7,33E-3^{\circ}$  a  $18,97^{\circ 12}$  para el algoritmo original. En estas gráficas los errores cometidos por el algoritmo original son mucho mayores a los del algoritmo modificado, donde este último gana definitivamente a partir de 15 segundos.

DESCRIPCIÓN 2: En el segundo caso los movimientos están limitados dentro de la banda de  $\pm 45[^\circ/s]$ . En este ensayo, el desempeño del algoritmo modificado mejora sobre al algoritmo original, y a partir de los 13 segundos la convergencia del método modificado es insuperable. La convergencia para el método modificado empieza a ser fiel iniciando los 13 a 14 segundos (ver gráfica), en contraste con el método original en el cual la convergencia no llega en la ventana temporal que dura el experimento; aunque parece que al final hay una cierta tendencia.

DESCRIPCION3: Para la componente de guiñada los ensayos fueron realizados con la plataforma en posición horizontal dando al sistema mayor movilidad. Con estas características, en este arreglo se pudieron alcanzar velocidades angulares mucho mayores a la de los otros experimentos. Sin embargo, se hace importante mencionar que en estas condiciones el vector gravitacional está apuntando paralelo al eje de rotación, dificultando la estimación vectorial y así la estimación del ángulo de guiñeo para el algoritmo original; por esta razón la capacidad de convergencia del método original, cuando la condición inicial del ángulo muy distinta de cero, se ve afectada considerablemente.



Figura 6. Circuito cerrado Fuente: Google Earth y DigitalGlobe 2013

Para este ensayo el ángulo inicial de guiño es de  $5^\circ$ , lo que permite ver el efecto anteriormente mencionado, donde a pesar de que las condiciones iniciales de los ángulos de Euler en los algoritmos de navegación son nulas, el algoritmo modificado reduce progresivamente el error, en contraste con el algoritmo original, el cual permanece con un error constante de  $1.5^\circ$ , por lo menos durante toda la ventana temporal que dura el experimento. En cuanto al tiempo de convergencia, de forma reiterada en todos los ángulos muestra que la convergencia siempre está cerca de los 12 segundos, y a partir de ese tiempo se sigue fielmente la referencia.

### V-B. Prueba con la plataforma experimental de la estimación del movimiento lineal

Los experimentos realizados con esta plataforma permiten ver el desempeño del algoritmo para estimar el movimiento lineal, es decir la velocidad lineal y la posición en el tiempo.

Los ensayos para la evaluación de la estimación del movimiento lineal se desarrollan en un circuito cerrado delimitado en la zona de Sopocachi Alto<sup>13</sup> con los sensores montados en un vehículo. Esta ruta, mostrada en la Figura 6, tiene una longitud de  $1,53[Km]$ , pasa por calles con buena línea de vista, sin muchos árboles ni edificios. En todas las gráficas, los resultados de la estimación del algoritmo Original son representados en la línea de color verde, para la estimación del algoritmo modificado de color azul, y para la señal de referencia en una línea de color rojo. Respecto al movimiento horizontal, los errores verticales muestran una mala calidad, sin embargo hay que considerar que los errores en la altitud son

<sup>12</sup>Estos valores están en valor absoluto respecto a la señal original.

<sup>13</sup>Zona seleccionada por sus facilidades logísticas.

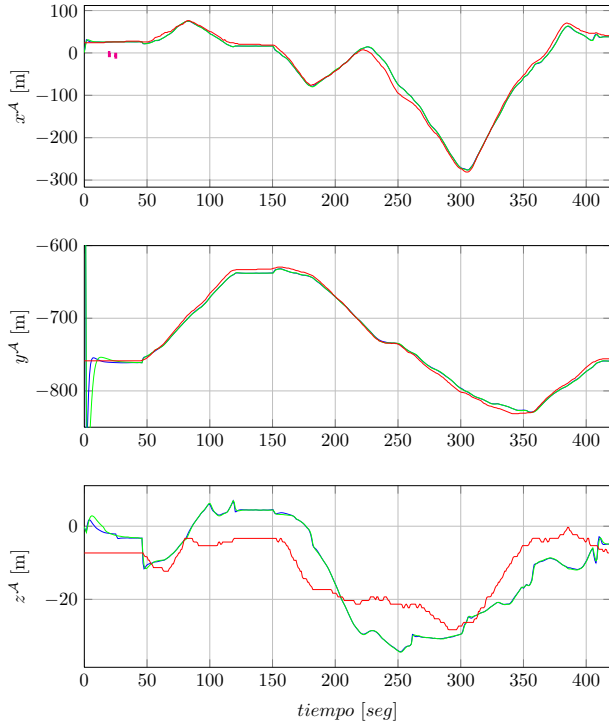


Figura 7. Resultados de la estimación de la posición. Resultados de la estimación de con datos simulados. Resultados típicos del repetidos intentos.

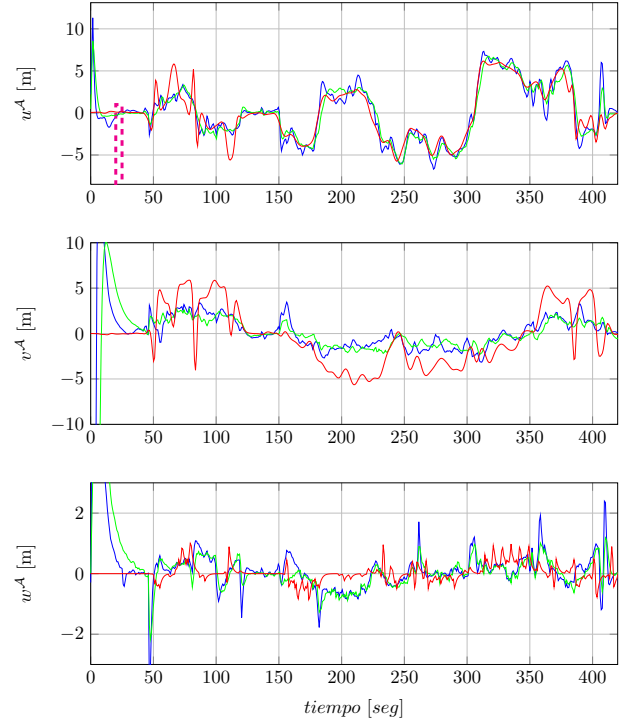


Figura 8. Velocidad lineal en el eje X. Resultados de la estimación de con datos simulados. Resultados típicos del repetidos intentos.

típicamente son grandes <sup>14</sup> en navegación GPS. A pesar de eso, es de consideración ver que la información estimada se aproxima a la señal de referencia, mucho más que la medición del sensor de navegación GPS-MTK3329.

En esta prueba con respecto a la estimación de la velocidad, dado que la velocidad de referencia esta expresada en  $\{\mathcal{A}\}$  la matriz de rotación juega un papel fundamental en la estimación para hacer la transformación correspondiente. Entonces, esto sugiere que la convergencia está delimitada por la capacidad de los algoritmos para estimar los ángulos de Euler. Los resultados de las pruebas realizadas son mostrados en la Figura 8, en la que se muestra las velocidades en  $x$ ,  $y$  y  $z$  del marco referencial inercial  $\{\mathcal{A}\}$  con la misma notación de colores que se ha venido manteniendo desde la Figura 5.

#### V-C. Análisis Comparativo

En la Tabla I se ordenan los EAP y las diferencias porcentuales para cada variable.

En esta tabla se puede ver globalmente que el algoritmo modificado es superior en casi todas las variables, lo que se corrobora con el cálculo de la diferencia porcentual promedio (DPP) igual a 40.92 %, es decir que en promedio se tiene 40.92 % mejor desempeño en la estimación de la información de navegación para el algoritmo modificado respecto al original.

<sup>14</sup>Esto no pone en cuestión la veracidad de la información entregada por el GPS-Garmin, debido a que este dispositivo utiliza la información de un barómetro, que sin duda tiene mejor precisión.

Analizando los pares de EAP mostrados en la Tabla I vemos una marcada tendencia que indica que el algoritmo modificado supera al algoritmo original. Dentro de las diferencias más relevantes se tienen: la estimación de la posición en el eje  $y$  con 1,22[m] de distancia en promedio, y los ángulos de alabeo y rodadura, con 2,39° y 1,73°, respectivamente.

#### V-D. Tiempos de Procesamiento.

En relación a los tiempos de procesamiento se mide el tiempo de procesamiento conjunto de 2,957 puntos de muestreo, es decir para 49,4311[s] de tiempo de estimación. En cada iteración el tiempo de procesamiento es de 1,0158[ms] para el algoritmo modificado y 0,7954[ms] para el algoritmo original, definiendo una diferencia porcentual promedio de:

$$DPP_{\text{tiempo de procesamiento}} = -21,6933 \% \quad (12)$$

Lo que indica que el algoritmo original utiliza 21,6933 % menos tiempo que el algoritmo modificado.

### VI. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS.

El estudio realizado en el presente trabajo permite obtener las gráficas comparativas en las que se despliegan los datos de la estimación junto con los referenciales; se obtienen las tablas de los EAP y DPP relacionados con los errores cometidos por ambos algoritmos; y además los tiempos de procesamiento promedio para los dos algoritmos de navegación. Asimismo, nos permite verificar la validez de varios conceptos introducidos, como el Bloque de Combinación, la discretización de los

Cuadro I  
TABLA COMPARATIVA DEL DESEMPEÑO DE ALGORITMO DE TRES  
OBSERVADORES EN CASCADA Y EL DE MAHONY-SCANDAROLI.

Variable es- timada	Error Abso- luto Prome- dio del algo- ritmo modi- ficado	Error Abso- luto Prome- dio del algo- ritmo origi- nal	Diferencia Porcentual del Algoritmo Modificado respecto al Original.
Posición en el eje X ( $x$ )	5.8862[m]	5.9427[m]	0.9596 %
Posición en el eje Y ( $y$ )	3.5445[m]	4.7739[m]	34.6828 %
Posición en el eje Z ( $z$ )	6.1698[m]	6.3369[m]	2.7080 %
Velocidad li- neal en el eje X ( $v_x$ )	0.8214[m/s]	0.7871[m/s]	-12.1305 %
Velocidad li- neal en el eje Y ( $v_y$ )	3.1564[m/s]	3.3291[m/s]	5.4710 %
Velocidad li- neal en el eje Z ( $v_z$ )	0.4445[m/s]	0.5697[m/s]	28.1664 %
Ángulo de alabeo ( $\phi$ )	1.3579[Deg]	3.7560[Deg]	177.97 %
Ángulo de rodadura ( $\theta$ )	1.4635[Deg]	2.801[Deg]	91.394 %
Ángulo de guiñeo ( $\psi$ )	1.3268[Deg]	2.1855[Deg]	44.53 %

algoritmos de navegación, el diseño de las matrices de peso en el Observador Óptimo EKF, etc. En este capítulo se aborda más detalladamente los resultados del trabajo.

Se puede ver que existe una mejora en la determinación de la orientación para el algoritmo propuesto, si comparamos los errores promedio en la determinación de los ángulos de Euler (de  $1,38[Deg]$  para el presente enfoque, frente a los  $1,5[Deg]$  del enfoque de [29]). No obstante, estas relaciones necesitarían ser probadas en las mismas condiciones y con la misma información de entrada, y por esa razón no se puede decir que los errores reportados en [29] son comparables con los del presente trabajo.

La convergencia para la estimación de la orientación del método propuesto en el presente trabajo se verifica con el análisis visual de las gráficas de la Figura 5. En general, las aproximaciones son bastante cercanas y alcanzan la referencia definitivamente a partir de los doce segundos reduciendo el error. Esto marca una indicación positiva para la inclusión del observador óptimo en la estructura de los filtros complementarios en  $SO(3)$ .

Respecto a la estimación del movimiento lineal, los resultados no son del todo alentadores. En algunos casos el error puede llegar hasta  $20[m]$ , con un promedio de  $5,2[m]$  y en los mejores casos se mantiene dentro de los dos metros de error. Esto reduce en gran medida el rango de aplicaciones del algoritmo, así como está planteado. Y deja la imperante

necesidad de incorporar un segundo método de estimación en la determinación de la posición, por ejemplo, como el reportado en [30]. A pesar de este comportamiento, la estimación de la velocidad permite pensar en aplicaciones de control en aeronaves no tripuladas (Unmanned Aircraft Vehicles, UAVs).

Refiriéndonos a los errores de la posición en los ejes X y Y de la Figura I, se acerca mucho al error típico del GPS usado [31] cuyo valor es de 5m en 2D comparado al 4.71 [m], y seguramente en mejores condiciones de visibilidad<sup>15</sup> el algoritmo promediaría mejores condiciones de estimación.

Según estos datos, el algoritmo modificado es capaz de computar las trayectorias con tan buena precisión como tenga nuestro sensor de posición. Sin embargo el tema de alineación inicial es vital para tener una buena estimación, a pesar de que esto no afecta la estabilidad del sistema en ninguna escala.

## VII. CONCLUSION

En este trabajo se ha desarrollado una arquitectura en cascada de observadores basados en el análisis funcional de sus entradas y salidas. En esta se consideran como fuente de información a las señales de una IMU y un módulo receptor GPS. Se realizaron las pruebas experimentales en diferentes arreglos de la plataforma experimental de la estimación de los ángulos de Euler, que permitieron realizar la comparación de la estimación respecto a una señal de referencia. De manera global, se logra diseñar e implementar un sistema de navegación de procesamiento fuera de línea para los datos de una IMU y un GPS, el cual puede estimar la orientación y la posición con seis grados de libertad de cualquier cuerpo rígido. Además se propone un algoritmo de navegación que incorpora una variación de los métodos de Mahony-Scandaroli. Este algoritmo está constituido en tres etapas de observación: la primera con un observador de la orientación EKF basado en cuaterniones para la reconstrucción de la matriz de rotación, la segunda con un filtro complementario en  $SO(3)$  de orientación, y la tercera con el observador de posición.

Basado en los resultados de la experimentación se puede decir que el algoritmo de navegación implementado tiene una ventaja considerable respecto al anterior método. Y aunque incrementa la complejidad final del algoritmo, no es una limitante para la implementación en algún procesador digital con capacidad de procesamiento suficiente.

## ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to thank...

## REFERENCIAS

- [1] S. Schmidt, *Applications of state space methods to navigation problems in Advances in Control Systems*. NY Academic Press, 1966.
- [2] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, vol. 82, pp. 35–45, 1960.
- [3] G. S. S. Schmidt and L. McGee, "Application of statistical filter theory to the optimal estimation of position and velocity on board a circumpolar vehicle," Ames Research Center, Tech. Rep., 1962.

<sup>15</sup>Que típicamente se encuentran en las zonas abiertas en las que los UAV aplicados a vigilancia o exploración funcionan.



- [4] A. Lukyanov, S. Dodds, and J. Vittek, "Observer-based attitude control in the sliding mode," pp. 639–671, 1996.
- [5] S. Nicosia and P. Tomei, "Nonlinear observer and output feedback attitude control of spacecraft," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-28, no. 4, pp. 970–977, 1996.
- [6] M. Algrain and M. Lee, "Nonlinear observer and output feedback attitude control of spacecraft," pp. 638–645, 1997.
- [7] F. Faruqi and K. Turner, "Extended kalman filter synthesis for integrated global positioning/inertial navigation systems," *EL SEVIER Applied Mathematics and Computation*, vol. 115, pp. 213–227, 2000.
- [8] J. Marins, X. Yun, E. Bachmann, R. McGhee, and M. Zyda, "An extended kalman filter for quaternion-based orientation estimation using marg sensors," in *Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems Maui, Hawaii, USA, Oct. 29 - Nov. 03, 2001*. Maui, Hawaii, USA: IEEE, 2001, pp. 2003–2011.
- [9] M. Gandhi and L. Mili, "Robust extended kalman filter for transient tracking and outlier suppression," *Latex Class Files*, vol. 6, no. 1, 2007.
- [10] A. M. Sabatini, "Quaternion-based extended kalman filter for determining orientation by inertial and magnetic sensing," *IEEE Transaction on biomedical engineering*, no. 7, pp. 1346–1356, 2006.
- [11] A. K. V. Bistrov, "Adaptive extended kalman filter for aided inertial navigation system," *ELECTRONICS AND ELECTRICAL ENGINEERING Automations and Robotics*, no. 6, pp. 37–40, 2006.
- [12] B. Friedland, "Analysis strap-down navigation using quaternions," *IEEE transactions on aerospace and electronic systems*, vol. 14, no. 5, 1978.
- [13] D. Benson, "A comparison of two approaches to pure inertial and doppler-inertial error analysis," *IEEE aerospace and Electronic Systems*, vol. 11, no. 4, pp. 447–455, 1975.
- [14] R. Smith, "An h-type filter for gps-based attitude estimation," 1995.
- [15] S. Kou, D. Elliott, and T. Tarn, "Exponential observers for nonlinear dynamic systems," *Information and Control*, vol. 29, pp. 393–428, 1975.
- [16] F. Thau, "Observers for nonlinear dynamic systems," *International Journal of Control*, vol. 17, p. 471, 1975.
- [17] B. Vik and T. Fossen, "A nonlinear observer for gps and ins integration," in *IEEE conference on Decision and control*, 2001, pp. 2956–2961.
- [18] J. Thienel, "A clipped nonlinear space craft attitude controller and observer with an unknow constad gyro bias and gyro noise," *IEEE trans. on automatic control*, vol. 8, pp. 2011–2015, 2003.
- [19] M. Hua, "Attitude observers for accelerated rigid bodies based on gps and ins measurements," pp. 8071–8076, 2009.
- [20] B. Mahony, T. Hamel, and J.-M. Pfimlin, "Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group," in *IEEE Transactions Automatic Control*, vol. 53, 2008, pp. 1203–1218.
- [21] G. Scandaroli, P. Morin, and G. Silveira, "Nonlinear filter design for pose and imu bias estimation," *IEEE conf. Decision and Control*, 2011.
- [22] P. M. S. Bonnabel and P. Rouchon, "Symmetry preserving observers," *IEEE trans. on automatic control*, vol. 53, pp. 2514–2526, 2008.
- [23] P. Martin and E. Salaun, "An invariant observer for earth velocity aided attitude heading reference systems," in *IFAc World conf.*, vol. 53, 2008, pp. 9857–9864.
- [24] V. J. Silvestre C. and O. P., "A nonlinear gps/imu observer based for rigid body attitude and position estimation," in *IEEE conf. Decision and Control*, 2008, pp. 1255–1260.
- [25] S. L. Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups*. DUDA, 1986.
- [26] J. Solà, "Quaternion kinematics for the error-state kf," Reporte, 2012.
- [27] V. S. F. Lewis, D. Vrabie, *Optimal control: Dynamic Programming*. John Wiley, 2012.
- [28] X. Kong, "Ins algorithm using quaternion model for low cost imu," vol. 46, no. 1, pp. 221–246, 2004.
- [29] G. Cai, B. Chen, and T. Lee, *Unmanned Rotor-craft Systems: Flight Dynamics Modeling*. Advances in industrial control Springer Verlag, 2011, pp. 99–100.
- [30] E. W. R. Merwe, "A new approach to linearf filtering and prediction problems," *AIAA*, 2004.
- [31] MEDIATEK-Inc, "66-channel gps engine board antenna module with mtk chipset," Hoja de Datos del MTK-3329, 2009.