

# Reconstrucción en Cuaterniones de la Matriz de Rotación con un Observador Óptimo en un Algoritmo de Navegación

Ariel Iporre Rivas\* y Mauricio Améstegui Moreno\*

\*Ingeniería Electrónica-Facultad de Ingeniería

Universidad Mayor de San Andrés, La Paz, Bolivia

Email: ariel.iporre.rivas@gmail.com, mauricioamestegui@gmail.com

**Abstract**—This work proposes a variation for a earlier navigation algorithm in the literature composed by  $SO(3)$  complementary filters. Such modification determines the inclusion of a quaternion optimal observer to determine the rotation matrix instead using a vectorial reconstruction approach, that proposal involves an experimental comparison between the original and modified method. The results show a 40 % increase for estimation quality while 21 % more complexity using this new approach. It also verifies the implementation in real noise environment.

## I. INTRODUCCIÓN

A medida que los sensores de navegación y los procesadores computacionales reducían su tamaño, los algoritmos de navegación debieron especializarse progresivamente en la búsqueda de una mejor precisión en la estimación de los estados de navegación. En esa línea, durante la década de los 60's, el desarrollo del Filtro Schmidt-Kalman [1] o más conocido como el Filtro de Kalman Extendido (EKF) incorpora los conceptos de estimación y observación de la teoría de control en la tecnología de los sistemas de navegación; este abordaje propone la aplicación del Filtro de Kalman [2] en un sistema no lineal para la resolución del problema de navegación, definido en la referencia [3]. De ahí en adelante, varios autores desarrollan una gran cantidad de técnicas, e.g. filtro de Kalman extendido (EKF), algoritmos genéticos, redes neuronales, filtros de partículas o el algoritmo QUEST.

En la década de los noventa los algoritmos de navegación fueron constituidos por observadores no lineales desarrollados en el marco de la teoría de Lyapunov, evidenciable en los trabajos [4], [5], [6]. De donde deriva el énfasis de investigación de algoritmos de navegación alrededor de esta temática, se centra en la extensión de estas técnicas para la determinación de posición incorporando sensores basados en el *Sistema de Posicionamiento Global* (GPS), o cámaras Web.

De esa manera, los algoritmos de navegación modernos están siempre concretados en una técnica de estimación, y dependiendo de la aplicación diferentes sensores de navegación son usados. Y cuando el movimiento abarca grandes áreas, los sensores deben ser de muy buena calidad, o medir parámetros absolutos, como es el caso del GPS, la triangulación por me-

dio del sistema global para comunicaciones móviles (Global System for Mobile Communications ó originalmente Groupe Spécial Mobile, GSM), o el GPS asistido (AGPS).

El EKF, usado en este trabajo para la determinación de la matriz de rotación, es celebrado como uno de los enfoques de filtros estadísticos de mayor éxito y que actualmente tiene un rango de desarrollo increíblemente amplio. Este algoritmo es prácticamente el algoritmo de navegación por excelencia e indudablemente la técnica más utilizada en los sistemas de navegación; esto es demostrable en la extensa lista de trabajos en variedades del Filtro de Kalman enfocado a esta temática que se pueden encontrar en la literatura, e.g.[7], [8], [9], [10], [11]. Dentro de las varias representaciones del EKF implementadas, priman las denominadas EKF multiplicativo (MEKF), los cuales mantienen la estructura general EKF, pero son desarrollados alrededor de un modelo de error [12], [13].

El EKF guarda una estrecha relación con el observador óptimo del esquema de Luenberger. Y particularmente, se han concretado algunos Filtros de Kalman desde la teoría del control óptimo para la estimación de la información de navegación [14].

El limitado, pero novedoso método de [15] y [16] para el diseño de un observador no lineal como una extensión del observador de Luenberger, ha abierto una nueva brecha en metodologías para la determinación de la información de navegación. Lo anteriormente mencionado se constata en las referencias: [17], [18] y [19], los cuales aplican los conceptos de la teoría de Lyapunov en el diseño de varios observadores que calculan la información de navegación.

Este tipo de enfoque basa su análisis en la búsqueda de la condición de estabilidad en el sentido de Lyapunov. De manera similar, los filtros complementarios en un Grupo Ortogonal Especial  $SO(3)$ <sup>1</sup> de [20] y [21], definen las constantes de actualización en un grupo ortogonal especial a partir de funciones de Lyapunov; o los observadores invariantes como [22] y [23]; los cuales mantienen una simetría utilizando mediciones auxiliares del mismo parámetro que se estima.

También, se han hecho esfuerzos por combinar diferentes tipos de observadores, por ejemplo: en [24] se presenta

<sup>1</sup>Un Grupo Ortogonal Especial está constituido por un grupo de matrices de transformación que hacen rotaciones propias a los elementos de Espacio Euclídeo.

una configuración de dos observadores en cascada para la estimación de la matriz de rotación y la estimación de la posición, donde los observadores son diseñados usando el análisis de estabilidad de Lyapunov; o en [21] que también combina dos observadores en cascada para la determinación de la orientación y la posición, con ambos observadores con una configuración especial parecida al filtro complementario en frecuencia.<sup>2</sup> A partir de esto, la idea en este trabajo es el establecimiento de un *algoritmo de navegación* compuesto de una serie de *observadores de estado*, que busca una mejora de la estimación de la información de navegación.

De manera general, existen dos puntos importantes que se abordan en el desarrollo de este proyecto:

- El primero es la modificación del *algoritmo de observadores no lineales tipo filtro complementario en un grupo ortogonal especial SO(3) de Mahony y Scandaroli* (desarrollado por estos dos autores en las referencias [20], [21]) con la inclusión de un observador óptimo tipo Filtro de Kalman Extendido (EKF)<sup>3</sup> para la determinación de la matriz de rotación.
- Como segundo punto se tiene el desarrollo de una serie de experimentos que establecen la evaluación experimental para comprobar una mejora del algoritmo modificado con respecto al algoritmo original.

## II. PROBLEMA DE NAVEGACIÓN: ALGORITMO DE NAVEGACIÓN DE MAHONY-SCANDAROLI

La solución al problema de navegación se delimita en la determinación las dos condiciones que describen el movimiento de un cuerpo: la situación espacial; y el ritmo de cambio de dicha situación. Es así, que con el afán solucionar este problema, el algoritmo de navegación dentro del sistema de navegación interpreta la medición de parámetros del medio o que son consecuencia del propio movimiento, para determinar aquellas condiciones que describen el movimiento del cuerpo; es decir, reconstruye la información de navegación<sup>4</sup> a partir de información corrompida, parcial y relacionada con las variables del movimiento, la cual es proporcionada por sensores de navegación.

Tomando en cuenta esto, el problema de navegación se traduce en el reto del planteamiento de un algoritmo de navegación, es decir construir la secuencia de operaciones para la determinación la información de navegación<sup>5</sup>( $X$ ), a partir del conjunto, denominado *información sensorial disponible* ( $S$ ), que se compone de las mediciones obtenidas de sensores de navegación

La solución de este problema, desde el enfoque de Mahony-Scandaroli, deriva en el algoritmo de navegación de filtros complementarios en SO(3) en cascada, esquematizado en

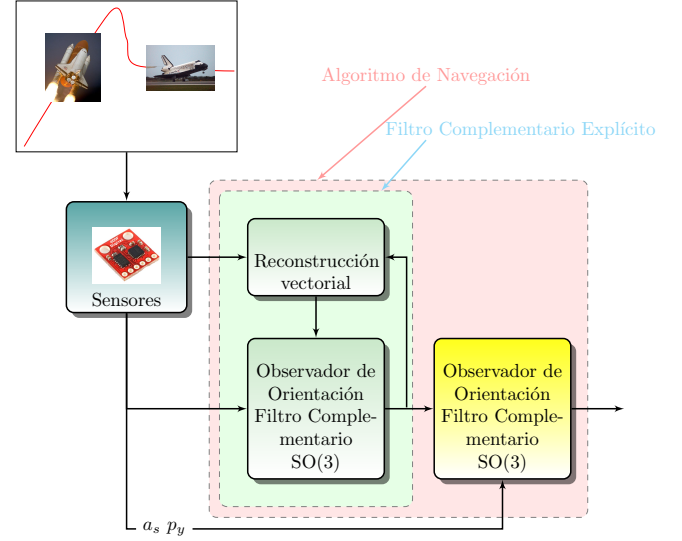


Figura 1. Esquema simplificado del algoritmo de Mahony-Scandaroli. Tell us about.

el diagrama de bloques de la Figura 1. Este propone la combinación en cascada de dos observadores del tipo filtro complementario en SO(3): el observador de orientación y el observador de posición. Bajo este esquema, el observador orientación utiliza la medición de la velocidad angular  $\Omega_s$ <sup>6</sup> y la matriz de rotación  $R_y$ , donde esta última proviene de una fórmula de reconstrucción vectorial que conjuga la medición de valores vectoriales en  $\{\mathcal{B}\}$  ( $v_i$ )<sup>7</sup>, sus valores teóricos en el  $\{\mathcal{A}\}$  ( $v_{i,0}$ ), y el punto de estabilidad encontrado por el observador de orientación para la matriz de rotación ( $\hat{R}$ , estos relacionados en la siguiente ecuación, que toma en cuenta  $n$  mediciones vectoriales).

$$R_y = \sum_{i=1}^n (v_{i,0})_{\times} \hat{R}(v_i)_{\times} \quad (1)$$

Se considera  $(\cdot)_{\times}$  el operador retorcedor<sup>8</sup>(screw), reportado en [20] El observador de orientación usando la reconstrucción vectorial y la medición de la velocidad angular, determina:

- $\hat{\Theta}$ : La estimación de la orientación en términos de los ángulos de Euler .
- $\hat{\Omega}$ : La estimación(corrección) de la velocidad angular en  $\{\mathcal{B}\}$ , donde  $\{\mathcal{B}\}$  denota un marco referencial cartesiano fijo al cuerpo desde donde se realiza la medición de la aceleración y velocidad angular.
- $\tilde{R}$ : El error de estimación de la matriz de rotación, definida a través de la matriz de transformación  $\{\mathcal{E}\} \leftrightarrow \{\mathcal{B}\}$ , donde  $\{\mathcal{E}\}$  denota el marco referencial de estimación, el cual teóricamente converge hacia  $\{\mathcal{B}\}$  y se considera el

<sup>2</sup>Donde, el observador de orientación es el usado en [20].

<sup>3</sup>El filtro de Kalman, fue desarrollado Rudolf Kalman en [[2]]

<sup>4</sup>Variables que describen el movimiento

<sup>5</sup>En el presente trabajo, el conjunto de variables, compuestas por: la velocidad lineal, velocidad angular, posición y orientación, es denominado *información de navegación*. Este describe el movimiento de un cuerpo rígido de seis grados libertad.

<sup>6</sup>Elemento de conjunto de *información sensorial disponible*  $S$

<sup>7</sup>No confundir con la notación, detallada más adelante, de la velocidad lineal del cuerpo  $\hat{v}$  y la incertidumbre del modelo de medición  $\hat{v}_k$ .

resultado de la estimación de  $\{\mathcal{B}\}$  por el observador de orientación.

- $\hat{R}$ : La estimación de la matriz de rotación, definida como la matriz de transformación  $\{\mathcal{E}\} \leftrightarrow \{\mathcal{A}\}$ , donde  $\{\mathcal{A}\}$  denota el marco referencial inercial, con dirección y origen fijos en un punto sobre la tierra.

Siguiendo el esquema del Mahony-Scandarolli, en cascada el observador de posición tipo Filtro complementario en  $SO(3)$ , toma el resto de las variables incluidas en  $S$  (la medición de la aceleración  $a_s$  y la medición de la posición  $p_y$ ), junto con las matrices de transformación determinadas por el anterior observador, para obtener:

- $\hat{p}$ : La estimación de la posición en  $\{\mathcal{A}\}$ .
- $\hat{v}$ : La estimación de la velocidad en  $\{\mathcal{A}\}$ .

Finalmente, los dos grupos de variables estimadas por ambos observadores conforman la *estimación de la información de navegación*, que puede ser denotada por el vector columna  $X = [\hat{p} \ \hat{v} \ \hat{\Theta} \ \hat{\Omega}]$ .

Como señala Mahony, la principal desventaja en la formulación de los filtros complementarios pasivo y directo es la sensibilidad a la matriz de entrada  $R_y$ . Esta matriz es usada en el mapeo de la medición de la velocidad angular al marco inercial  $\{\mathcal{A}\}$ , y por esta razón, la determinación de esta matriz juega un papel central en el desempeño final del sistema. Considerando esto la determinación desde el enfoque de la reconstrucción vectorial de Mahony-Scandarolli es una solución sub-óptima a el problema de optimización del cálculo de la matriz de rotación, el cual indica que: *a partir de la medición de cantidades vectoriales conocidas respecto a  $\{\mathcal{B}\}$ , la matriz de rotación puede ser determinada en el argumento que minimiza la función de coste definida como:*

$$R^* = \arg \min_R \left\{ \sum_i |v_{0,i} - Rv_{m,i}|^2 \right\} \quad (2)$$

Donde, la matriz de rotación óptima  $R^*$  es obtenida en el argumento que minimiza la función de coste compuesta por la suma de los cuadrados de los módulos de la diferencia de: los valores de las mediciones vectoriales rotadas al marco inercial ( $Rv_{m,i}$ ), respecto a los valores teóricos conocidos de dichas cantidades vectoriales ( $v_{0,i}$ )<sup>8</sup>. La relación sub-óptima se establece en la incorporación del estimado de la matriz de rotación  $\hat{R}$  como la resolución de la ecuación de Lyapunov, asumiendo esta última como solución a . Se asume inicialmente, que este hecho incorpora una sensibilidad extra: a ruidos de medición, sesgos de medición y los estados transitorios de asentamiento, reduciendo en gran medida el desempeño del algoritmo de navegación en general.

### III. RECONSTRUCCIÓN ÓPTIMA DE LA MATRIZ DE ROTACIÓN

Considerando las desventajas señaladas en la sección anterior, se identifica que el mejorar la reconstrucción de la matriz de rotación puede traer mejoras en el desempeño general del

<sup>8</sup>Donde los sub-índices corresponden a las distintos valores vectoriales medibles.

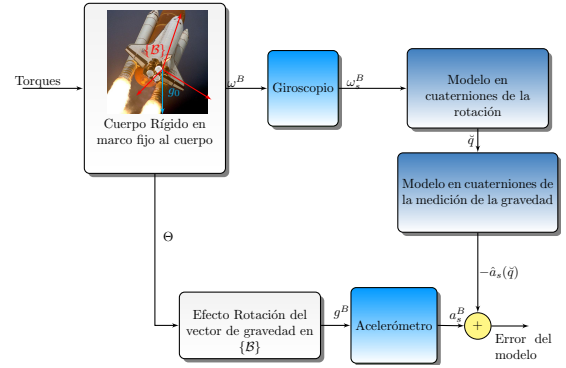


Figura 2. Caracterización del error del modelo de medición.

algoritmo. Para ello, se buscará solucionar de manera óptima el problema de determinación de la matriz de rotación<sup>9</sup> a partir de mediciones vectoriales.

#### III-A. Determinación óptima de la matriz de rotación a partir del modelo de medición del vector gravitacional en cuaterniones.

Se propone la determinación de la matriz de rotación interpretando el fenómeno de inclinación de campo gravitacional respecto al marco  $\{\mathcal{B}\}$  con un observador óptimo en cuaterniones. En donde, el observador se constituye en el esquema detallado en la figura 2. En este esquema, se considera el fenómeno de rotación de un cuerpo rígido (excitado por *torques* desconocidos) descrito por dos variables: la orientación y su velocidad angular, representadas por las salidas  $\Theta$  y  $\Omega$ , respectivamente, estos parámetros son medidos:

1. La velocidad angular por un giroscopio, obteniendo  $\Omega_s$ .
2. La orientación  $\Theta$  de manera indirecta por un acelerómetro, el cual mide inclinación del vector gravitacional respecto al marco fijo al cuerpo  $\{\mathcal{B}\}$

En este arreglo, el observador incorpora correcciones sistemáticas al modelo de cinemático de rotación en términos del cuaternión unitario, que se calculan a partir de:

- El error del modelo de medición de la aceleración gravitacional
- Y la medición de la velocidad angular  $\Omega_s$ .

De manera tal que se reduce el error del modelo de medición, ajustando así el cuaternión que rota el valor teórico de la gravedad en el marco referencial inercial ( $[0, 0, g_0]^T$ ), alineando el mismo a la medición vectorial  $a_s$ .

Esto último es posible, dado que el cuaternión se define en las rotaciones de los ángulos de Euler (ver [25]).

#### III-B. Observador óptimo en cuaterniones

En la definición del observador óptimo, se identifica entonces el caso particular de la ecuación II, donde la matriz de rotación óptima  $R^*$  depende de la relación de optimización del cuaternión unitario de rotación  $\hat{q}$ , denotado por

<sup>9</sup>Planteado en la referencia [20]

$\check{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$  en  $\mathbb{Q} : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^3$ :

$$R^*(\check{q}) = R \left( q^* = \arg \min_{\check{q}} \{a_s - R^T(\check{q})g_0\} \right) \quad (3)$$

De esa manera, la solución a la matriz de rotación óptima deriva del procedimiento de optimización del cuaternión unitario que rota el valor teórico de la gravedad  $g_0$  hacia la medición de la inclinación campo vectorial gravitatorio  $a_s$ , en la relación que establece  $\hat{a}_s$  en la siguiente ecuación, como la estimación de la medición vectorial de la gravedad en función del cuaternión unitario [26]:

$$\hat{a}_s = \check{q} \otimes g_0 \otimes \check{q} = Rg_0 = g_0 \begin{bmatrix} 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

La evolución en el tiempo del cuaternión unitario está delimitado en la descripción cinemática del movimiento rotación en  $\mathbb{Q}$ , definida como:

$$\dot{\check{q}} = \frac{1}{2} \check{q} \otimes \check{\Omega} \quad (5)$$

Donde, la derivada del cuaternión unitario se define en el producto de cuaterniones <sup>10</sup> de la velocidad angular en  $\mathbb{Q}^{11}$  ( $\check{\Omega}$ ) y el cuaternión unitario ( $\check{q}$ ).

A partir de esto, el reto asumido por el observador es determinar el cuaternión óptimo en el tiempo  $T$ , considerando de tres elementos: i) la incertidumbre en las condiciones iniciales  $\check{q}_0$  y  $\hat{v}_0$ , ii) la incertidumbre del modelo discretizado del proceso de rotación del cuaternión  $\hat{w}_k$ , definido en (6), donde  $f_k^0$  es la versión discretizada de (5) y  $\hat{q}_k$  es el estimado discreto del cuaternión.

$$\hat{q}_{k+1} = f_k^0(\hat{q}_k, \Omega_k) + \hat{w}_k \quad (6)$$

iii) Y la incertidumbre en la estimación de la medición vectorial de la gravedad, el cual se define como la resta del valor estimado  $\hat{a}_{s,k}$  con señal proveniente del acelerómetro  $a_{s,k}$  en el tiempo  $k$ ,

$$\hat{v}_k = a_{s,k} - \underbrace{\hat{a}_{s,k}}_{\hat{a}_{s,k} = h_k(\hat{q}_k)} \quad (7)$$

A partir de esto, la función objetivo desde el punto de vista del observador se deduce como la adición de dos normas específicas

$$q_k^* = \arg \min_{q_k} \left\{ norm_0(\check{q}_0, \hat{v}_0) + \sum_{i=0}^k norm_1(w_i, v_i) \right\} \quad (8)$$

La primera combina la incertidumbre de condiciones iniciales de medición  $\hat{v}_0$  y estado inicial del cuaternión unitario  $\check{q}_0$  y la segunda combina la evolución en el tiempo de la incertidumbre del modelo  $\hat{w}_k$  y de medición  $\hat{v}_k$ , ambos para el intervalo de tiempo discreto  $i \in \{k_0, \dots, k_f\}$ . El problema se mantiene en la

búsqueda del estimado  $\hat{q}_{k+1}$  haciendo correcciones sucesivas sobre la incertidumbre del modelo  $\hat{w}_k$ .

La solución propuesta a este problema hace uso de Programación Dinámica (PD) [27] en la versión lineal del modelo del proceso de rotación del cuaternión (6) y del modelo de la medición.

$$\hat{w}_k = - \underbrace{P_k H_k^T (R + H_k P_k H_k^T)}_K \tilde{y}_k \quad (9)$$

$$\hat{w}_k^T F^{-T} P_k A^{-1} \hat{w}_k = \hat{w}_k^T (F^{-T} Q F^{-1} + P_k - K H_k P_k) \hat{w}_k \quad (10)$$

Lo que establece el estimador de estimador lineal en:

$$\hat{q}_{k+1} = F \hat{q}_k + B \Omega_{s,k} + K(y_k - H \hat{x}_k) \quad (11)$$

#### IV. METODOLOGÍA DE LA EVALUACIÓN EXPERIMENTAL

El abordaje experimental trata de probar que la inclusión de un Observador Óptimo para reconstrucción de la matriz de rotación en el esquema del algoritmo de navegación compuesto por los filtros complementarios en SO(3), incorpora mejoras en la estimación total de la información de navegación. Para ello, se realizan experimentos orientados a comparar el algoritmo original y el algoritmo modificado, en las mismas condiciones de operación. Bajo esta premisa, los experimentos son conducidos de tal forma que ambos algoritmo procesan la misma información de entrada, que proviene de los mismos sensores de navegación: un módulo receptor GPS MTK-2309; un acelerómetro MEMS de bajo costo ADXL330 de  $\pm 3g$  y tres grados de libertad; y los giroscopios MEMS IDG500 y LPY330AH, que miden las velocidades angulares en las direcciones de los versores del marco  $\{\mathcal{B}\}$ .

De esa manera, los experimentos son realizados separando los casos de estudio en dos plataformas distintas para:

1. El estudio de la estimación de los ángulos de Euler en una componente para movimientos de hasta  $1[rad/s]$ .
2. El estudio de las capacidades de estimación de la posición y velocidad línea en tres dimensiones para un circuito cerrado recorrido en un automóvil.

##### IV-A. Plataforma experimental de la estimación de los ángulos de Euler

La plataforma experimental de la estimación de los ángulos de Euler fue implementada siguiendo el esquema de la Figura 3, donde un arreglo de marcas negras en una plancha blanca sujeta a la caja de sensores permite hacer el seguimiento de la evolución del movimiento angular de referencia  $X_{real}$ , en forma simultánea a la captura de las señales de los sensores de navegación. De esa manera, los algoritmos de navegación determinan la estimación de la información de navegación  $\hat{X}_{mdf}$  y  $\hat{X}_{mh}$ ; y de forma paralela haciendo seguimiento con una cámara se determina el valor angular de referencia correspondiente a la evolución temporal de la componente de los ángulos de Euler, sobre la cual se está haciendo el análisis. Bajo estas condiciones se hacen tres arreglos distintos para los tres ejes del  $\{\mathcal{B}\}$ , es decir en  $x$  para  $\phi$ , en  $y$  para  $\theta$ , y en  $z$  para  $\psi$ , analizando cada ángulo por separado.

<sup>10</sup>Denotada por el símbolo  $\otimes$

<sup>11</sup>Definida como un cuaternión puro, en donde la parte real es cero, y las componentes están repartidas en  $i, j$  y  $k$ , para la velocidad angular en los ejes  $x, y$  y  $z$ , respectivamente

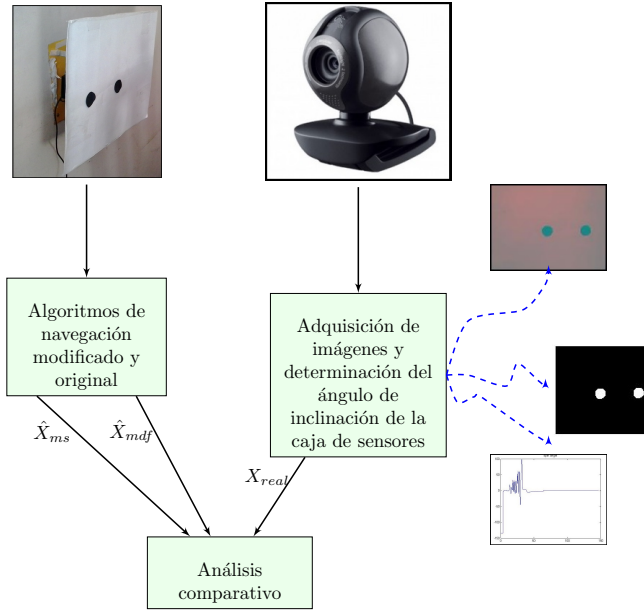


Figura 3. Esquema general de la plataforma experimental evaluativa.  
Fuente: Elaboración Propia

#### IV-B. Plataforma experimental de la estimación de la posición y velocidad lineal

Para la evaluación de la estimación de la posición y velocidad lineal el esquema implementado utiliza como referencia la información de un módulo comercial de localización GPS Etrex-Garmin que tiene una precisión de hasta 2 metros, por mucho mayor a la del módulo GPS usado dentro del conjunto de sensores de navegación, esto gracias a la ganancia de su antena que le permite capturar un mayor número de satélites, además de tener una memoria especializada para la captura de datos de Efemérides y Calendarios pasados. Este dispositivo cuenta con un altímetro y una brújula electrónica, mejorando su precisión aún más.

Los experimentos son realizados siguiendo circuitos cerrados en un vehículo en donde se monta una caja que contiene al sensor comercial y los sensores de navegación de forma tal que es posible realizar la estimación de la información de navegación y capturar información de referencia. De forma similar al caso del movimiento angular, como se describe en la figura 4, la información de los sensores de navegación es procesada por los algoritmos de navegación obteniendo  $\hat{X}_{mh}$  y  $\hat{X}_{mdf}$ ; y de forma simultánea, durante el movimiento del vehículo, se captura la información de referencia que corresponde al GPS GARMIN-ETEX.

### V. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En esta sección se presentan los resultados experimentales resaltando sus principales características.

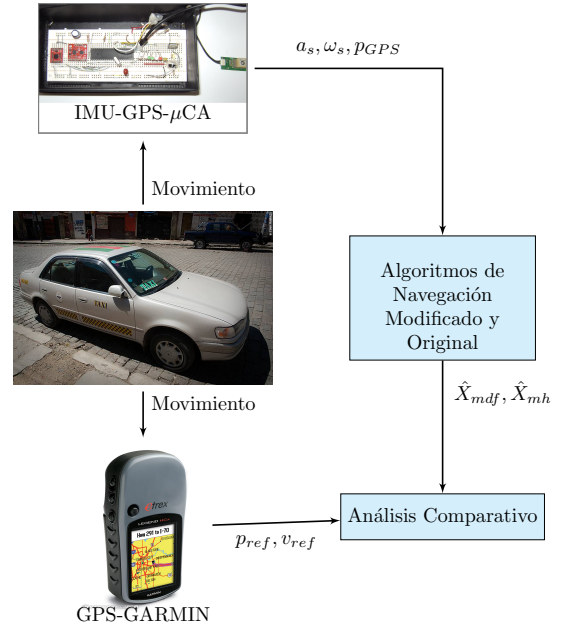


Figura 4. Plataforma experimental de la estimación del movimiento lineal.  
Fuente: Elaboración Propia

#### V-A. Prueba con la plataforma experimental de la estimación los ángulos de Euler

Esta fase emplea el esquema experimental descrito en la sección IV-A, en la cual el sensor angular de video (constituido por una cámara) captura la información de la rotación de uno de los ángulos de Euler, al mismo tiempo que los algoritmos de navegación realizan la estimación de la misma variable<sup>12</sup>.

Los resultados obtenidos de uno de los varios ensayos realizados para la comparación del desempeño de la estimación la orientación se muestran en las gráficas de la Figura 5, donde la señal de color azul corresponde a la estimación, la de color verde para el algoritmo original, y de color rojo para la referencia. Las gráficas se ordenan mostrando los resultados de la estimación para los ángulos  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ , ordenados de arriba hacia abajo en el orden en que se los menciona.

En el primer caso, el movimiento inicia en  $-2^\circ$  y termina en poco menos de  $-3^\circ$  y los ángulos de rodadura y guiñeo se mantienen en  $0^\circ$ , en velocidades de hasta  $17^\circ/\text{s}$ . Para la estimación con el algoritmo modificado los errores oscilan entre  $9,04E - 4^\circ$  y  $10,58^\circ$  en contraste a los  $7,33E - 3^\circ$  a  $18,97^\circ$ <sup>13</sup> para el algoritmo original. En estas gráficas los errores cometidos por el algoritmo original son mucho mayores a los del algoritmo modificado, donde este último gana definitivamente a partir de 15 segundos.

En el segundo caso, los movimientos están limitados dentro

<sup>12</sup>Dentro del conjunto de datos que conforman la información de navegación estimada.

<sup>13</sup>Estos valores están en valor absoluto respecto a la señal original.

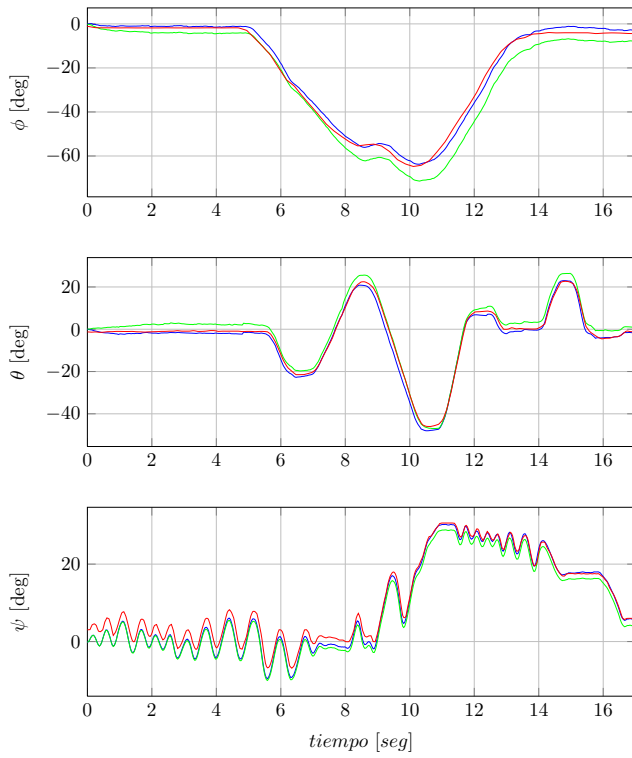


Figura 5. Prueba comparativa de la estimación de los ángulos de Euler. Los ángulos de Euler, se denotan en el vector columna  $\Theta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ , con  $\phi$  para el alabeo,  $\theta$  para la rodadura y  $\psi$  para el guiñeo.

de la banda de  $\pm 45[^\circ/s]$ . En este ensayo, el desempeño del algoritmo modificado mejora sobre al algoritmo original, y a partir de los 13 segundos la convergencia del método modificado es insuperable

Por último, para el tercer caso, los ensayos fueron realizados con la plataforma en posición horizontal dando al sistema mayor movilidad. Con estas características, generan trayectorias de cambios abruptos. Se hace importante mencionar que en estas condiciones el vector gravitacional está apuntando paralelo al eje de rotación, dificultando la estimación vectorial y así la estimación del ángulo de guiñeo para el algoritmo original; por esta razón la capacidad de convergencia del método original, cuando la condición inicial del ángulo muy distinta de cero, se ve afectada considerablemente. Para este ensayo el ángulo inicial de guiñeo es de  $5^\circ$ , lo que permite ver el efecto anteriormente mencionado, donde a pesar de que las condiciones iniciales de error en los ángulos de Euler no son nulas, el algoritmo modificado reduce progresivamente el error, en contraste con el algoritmo original, el cual permanece con un error constante de  $1.5^\circ$ , por lo menos durante toda la ventana temporal que dura el experimento.

#### V-B. Prueba con la plataforma experimental de la estimación del movimiento lineal

Los experimentos realizados con esta plataforma permiten ver el desempeño del algoritmo para estimar el movimiento lineal, es decir la velocidad lineal y la posición en el tiempo.

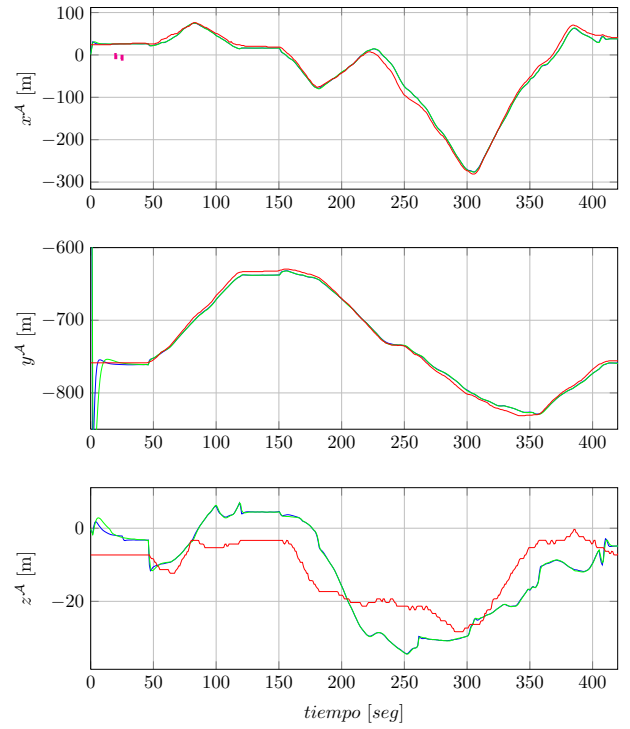


Figura 6. Resultados de la estimación de la posición. Resultados de la estimación de con datos simulados. Resultados típicos del repetidos intentos.

Los ensayos para la evaluación de la estimación del movimiento lineal se desarrollan en un circuito cerrado en una ruta que tiene una longitud de  $1,53[Km]$ , pasa por calles con buena línea de vista, sin muchos árboles ni edificios. En todas las gráficas, los resultados de la estimación del algoritmo Original son representados en la línea de color verde, para la estimación del algoritmo modificado de color azul, y para la señal de referencia en una línea de color rojo. Las pruebas de estimación de la posición muestran errores, después de la etapa transitoria que varía entre  $2[m]$  y  $10[m]$ . Respecto al movimiento horizontal, los errores verticales muestran un mala calidad, sin embargo hay que considerar que los errores en la altitud son típicamente grandes <sup>14</sup> en navegación GPS. A pesar de eso, es de consideración ver que la información estimada se aproxima a la señal de referencia, mucho más que la medición del sensor de navegación GPS-MTK3329.

En esta prueba con respecto a la estimación de la velocidad, dado que la velocidad de referencia esta expresada en  $\{A\}$  la matriz de rotación juega un papel fundamental en la estimación para hacer la transformación correspondiente. Entonces, esto sugiere que la convergencia está delimitada por la capacidad de los algoritmos para estimar los ángulos de Euler. Los resultados de las pruebas realizadas son mostrados en la Figura 7, en la que se muestra las velocidades en  $x$ ,  $y$  y  $z$  del marco

<sup>14</sup>Esto no pone en cuestión la veracidad de la información entregada por el GPS-Garmin, debido a que este dispositivo utiliza la información de un barómetro, que sin duda tiene mejor precisión.



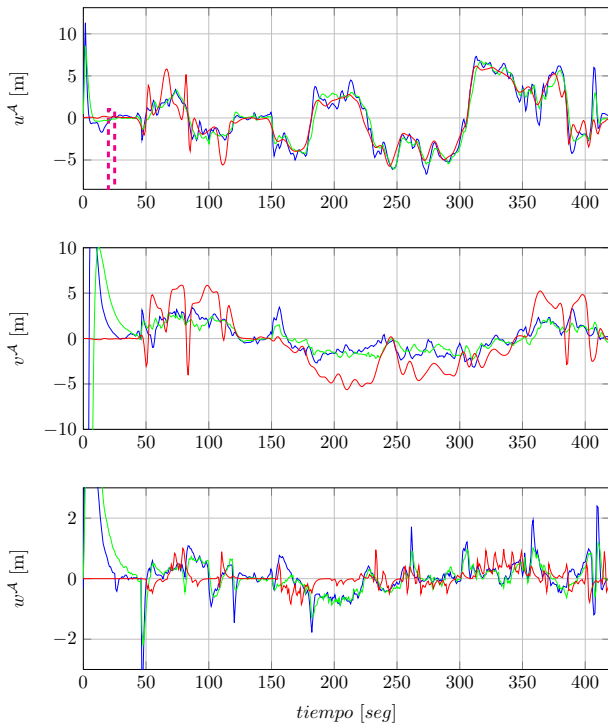


Figura 7. Velocidad lineal en el eje X.  
Resultados de la estimación de con datos simulados. Resultados típicos del repetidos intentos.

referencial inercial  $\{A\}$  con la misma notación de colores que se ha venido manteniendo desde la Figura 5.

### V-C. Análisis Comparativo

En la Tabla I se ordenan los errores absolutos promedio (EAP) y las diferencias porcentuales para cada variable.

En esta tabla se puede ver globalmente que el algoritmo modificado es superior en casi todas las variables, lo que se corrobora con el cálculo de la diferencia porcentual promedio (DPP) igual a 40.92 %, es decir que en promedio se tiene 40.92 % mejor desempeño en la estimación de la información de navegación para el algoritmo modificado respecto al original.

Analizando los pares de EAP mostrados en la Tabla I vemos una marcada tendencia que indica que el algoritmo modificado supera al algoritmo original. Dentro de las diferencias más relevantes se tienen: la estimación de la posición en el eje  $y$  con 1,22[m] de distancia en promedio, y los ángulos de alabeo y rodadura, con 2,39° y 1,73°, respectivamente.

### V-D. Tiempos de Procesamiento.

En relación a los tiempos de procesamiento se mide el tiempo de procesamiento conjunto de 2,957 puntos de muestreo, es decir para 49,4311[s] de tiempo de estimación. En cada iteración el tiempo de procesamiento es de 1,0158[ms] para el algoritmo modificado y 0,7954[ms] para el algoritmo original, definiendo una diferencia porcentual promedio de:

$$DPP_{\text{tiempo de procesamiento}} = -21,6933 \% \quad (12)$$

Cuadro I  
TABLA COMPARATIVA DEL DESEMPEÑO DE ALGORITMO DE TRES OBSERVADORES EN CASCADA Y EL DE MAHONY-SCANDAROLI.

Variable estimada	EAP del algoritmo modificado	EAP del algoritmo original	Diferencia Porcentual del Algoritmo Modificado respecto al Original.
Posición en el eje X ( $x$ )	5.8862[m]	5.9427[m]	0.9596 %
Posición en el eje Y ( $y$ )	3.5445[m]	4.7739[m]	34.6828 %
Posición en el eje Z ( $z$ )	6.1698[m]	6.3369[m]	2.7080 %
Velocidad lineal en el eje X ( $v_x$ )	0.8214[m/s]	0.7871[m/s]	-12.1305 %
Velocidad lineal en el eje Y ( $v_y$ )	3.1564[m/s]	3.3291[m/s]	5.4710 %
Velocidad lineal en el eje Z ( $v_z$ )	0.4445[m/s]	0.5697[m/s]	28.1664 %
Ángulo de alabeo ( $\phi$ )	1.3579[Deg]	3.7560[Deg]	177.97 %
Ángulo de rodadura ( $\theta$ )	1.4635[Deg]	2.801[Deg]	91.394 %
Ángulo de guiñeo ( $\psi$ )	1.3268[Deg]	2.1855[Deg]	44.53 %

Lo que indica que el algoritmo original utiliza 21,6933 % menos tiempo que el algoritmo modificado.

## VI. CONCLUSION

En este trabajo se ha desarrollado una arquitectura en cascada de observadores basados en el análisis funcional de sus entradas y salidas. En esta se consideran como fuente de información a las señales de una IMU y un módulo receptor GPS. Se realizaron las pruebas experimentales en diferentes arreglos de la plataforma experimental de la estimación de los ángulos de Euler, que permitieron realizar la comparación de la estimación respecto a una señal de referencia. De manera global, se logra diseñar e implementar un sistema de navegación de procesamiento fuera de línea para los datos de una IMU y un GPS, el cual puede estimar la orientación y la posición con seis grados de libertad de cualquier cuerpo rígido. Además se propone un algoritmo de navegación que incorpora una variación de los métodos de Mahony-Scandaroli. Este algoritmo está constituido en tres etapas de observación: la primera con un observador de la orientación EKF basado en cuaterniones para la reconstrucción de la matriz de rotación, la segunda con un filtro complementario en  $SO(3)$  de orientación, y la tercera con el observador de posición.

Basado en los resultados de la experimentación se puede decir que el algoritmo de navegación implementado tiene una ventaja considerable respecto al anterior método. Y aunque incrementa la complejidad final del algoritmo, no es una limitante para la implementación en algún procesador digital con capacidad de procesamiento suficiente.

## ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to thank...

## REFERENCIAS

- [1] S. Schmidt, *Applications of state space methods to navigation problems in Advances in Control Systems*. NY Academic Press, 1966.
- [2] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, vol. 82, pp. 35–45, 1960.
- [3] G. S. S. Schmidt and L. Mcgee, "Application of statistical filter theory to the optimal estimation of position and velocity on board a circumpolar vehicle," Ames Research Center, Tech. Rep., 1962.
- [4] A. Lukyanov, S. Dodds, and J. Vittek, "Observer-based attitude control in the sliding mode," pp. 639–671, 1996.
- [5] S. Nicosia and P. Tomei, "Nonlinear observer and output feedback attitude control of spacecraft," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-28, no. 4, pp. 970–977, 1996.
- [6] M. Algrain and M. Lee, "Nonlinear observer and output feedback attitude control of spacecraft," pp. 638–645, 1997.
- [7] F. Faruqi and K. Turner, "Extended kalman filter synthesis for integrated global positioning/inertial navigation systems," *EL SEVIER Applied Mathematics and Computation*, vol. 115, pp. 213–227, 2000.
- [8] J. Marins, X. Yun, E. Bachmann, R. McGhee, and M. Zyda, "An extended kalman filter for quaternion-based orientation estimation using marg sensors," in *Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems Maui, Hawaii, USA, Oct. 29 - Nov. 03, 2001*. Maui, Hawaii, USA: IEEE, 2001, pp. 2003–2011.
- [9] M. Gandhi and L. Mili, "Robust extended kalman filter for transient tracking and outlier suppression," *Latex Class Files*, vol. 6, no. 1, 2007.
- [10] A. M. Sabatini, "Quaternion-based extended kalman filter for determining orientation by inertial and magnetic sensing," *IEEE Transaction on biomedical engineering*, no. 7, pp. 1346–1356, 2006.
- [11] A. K. V. Bistrov, "Adaptive extended kalman filter for aided inertial navigation system," *ELECTRONICS AND ELECTRICAL ENGINEERING Automations and Robotics*, no. 6, pp. 37–40, 2006.
- [12] B. Friedland, "Analysis strap-down navigation using quaternions," *IEEE transactions on aerospace and electronic systems*, vol. 14, no. 5, 1978.
- [13] D. Benson, "A comparison of two approaches to pure inertial and doppler-inertial error analysis," *IEEE aerospace and Electronic Systems*, vol. 11, no. 4, pp. 447–455, 1975.
- [14] R. Smith, "An h-type filter for gps-based attitude estimation," 1995.
- [15] S. Kou, D. Elliott, and T. Tarn, "Exponential observers for nonlinear dynamic systems," *Information and Control*, vol. 29, pp. 393–428, 1975.
- [16] F. Thau, "Observers for nonlinear dynamic systems," *International Journal of Control*, vol. 17, p. 471, 1975.
- [17] B. Vik and T. Fossen, "A nonlinear observer for gps and ins integration," in *IEEE conference on Decision and control*, 2001, pp. 2956–2961.
- [18] J. Thienel, "A clipped nonlinear space craft attitude controller and observer with an unknow constad gyro bias and gyro noise," *IEEE trans. on automatic control*, vol. 8, pp. 2011–2015, 2003.
- [19] M. Hua, "Attitude observers for accelerated rigid bodies based on gps and ins measurements," pp. 8071–8076, 2009.
- [20] B. Mahony, T. Hamel, and J.-M. Pflimlin, "Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group," in *IEEE Transactions Automatic Control*, vol. 53, 2008, pp. 1203–1218.
- [21] G. Scandaroli, P. Morin, and G. Silveira, "Nonlinear filter design for pose and imu bias estimation," *IEEE conf. Decision and Control*, 2011.
- [22] P. M. S. Bonnabel and P. Rouchon, "Symmetry preserving observers," *IEEE trans. on automatic control*, vol. 53, pp. 2514–2526, 2008.
- [23] P. Martin and E. Salaun, "An invariant observer for earth velocity aided attitude heading reference systems," in *IFAc World conf.*, vol. 53, 2008, pp. 9857–9864.
- [24] V. J. Silvestre C. and O. P., "A nonlinear gps/imu observer based for rigid body attitude and position estimation," in *IEEE conf. Decision and Control*, 2008, pp. 1255–1260.
- [25] S. L. Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups*. DUDA, 1986.
- [26] J. Solà, "Quaternion kinematics for the error-state kf," Reporte, 2012.
- [27] V. S. F. Lewis, D. Vrabie, *Optimal control: Dynamic Programming*. John Wiley, 2012.