

# Experimental Evaluation of Rotation Matrix Reconstruction in Quaternions with an Optimal Observer-EKF within a Navigation Algorithm Based on Nonlinear Observers in the $SO(3)$

Ariel Iporre Rivas\* y Mauricio Améstegui Moreno\*

\*Ingeniera Electrónica-Facultad de Ingeniería

Universidad Mayor de San Andrés, La Paz, Bolivia

Email: ariel.iporre.rivas@gmail.com, mauricioamestegui@gmail.com

**Abstract**—This work proposes a variation for a earlier navigation algorithm in the literature composed by  $SO(3)$  complementary filters. Such modification involves the inclusion of a quaternion optimal observer to determine the rotation matrix instead using a vectorial reconstruction approach, that proposal involves an experimental comparison between the original and modified method. The results show a 40% increase for estimation quality while 21% more complexity using this new approach. It also verifies the implementation in real noise environment.

## I. INTRODUCTION

Roughly speaking the process of moving between two points implies determine the position and direction throughout all the trajectory. This problem is generally solved by interpreting measurements from fixed references or variables revealing the internal states of the motion body. Hereby, navigation can be defined as the art of calculate or interpret this variables and the set elements inferring such results are known as Navigation Systems. Furthermore, A navigation system incorporates a navigation algorithm that tweaks the motion models optimizing the predictions much like the way of a control systems. In fact, the famous Kalman Optimal Observer which solves the Winner-Hoft optimal observer problem can be seen as an consequence of the duality control-observer principle [1]. Kalman extended the spectral statistical filter to make predictions in time and he stated the duality between observer and controller in sense of the optimal analysis.

Besides, a promising approach for designing this kind of observers uses nonlinear filters developed within the framework of Lyapunov theory [2], [3], [4]. Additionally, many authors has been working in the combination of this kind of filters to reduce the complexity of the equations and they divided the process in separated observers connected in cascade, for example in [5] two observers are combined first to determine the rotation matrix and then to calculate the position, or in [6] who combine to complementary filters to determine rotation and position in two separated processes. Based on this initial

idea, in this work we propose the calculation of the rotational matrix in quaternions using an optimal observer by modifying the initial navigation algorithm proposed in [6].

One of the first formal approaches dealing the navigation problem was addressed as an application of the famous Kalman Filter which has been extended through the linear perturbation equation to solve the trajectory estimation for a nonlinear model of motion, there the extended version of the Kalman Filter was used to unravel the trajectory from motion signals coming from the inertial system in the navigation computer of the Apollo project [7]. In the Kalman Filter's original paper, R.F. Kalman and Bucy recasted the optimal estimation methods developed by Norbert Wiener in the states space form, in terms of first and second momentum matrices of conditional probabilities which allots the same solution to non-stationary signals embedded in the discrete time version of the Riccati equation [GREWAL 2010]. Since that milestone event many other authors have issued an enormous quantity of ideas diverging from Kalman's core paper in the field of navigation algorithms e.g. [8], [9]. Some versions of the Kalman Filter work with powerful representation of motion based on atypical algebraic structures like quaternions, for example [10] determines the orientation of the rigid body using an INS-GPS<sup>1</sup> integration model in quaternions. Further, Marins and Bachmann pre-calculates the quaternion using a Gauss-Newton iteration algorithm to find the best quaternion that relates the measured accelerations and earth magnetic field in the body coordinate frame, they addressed with a similar approach to what is followed in this work in the sense that we precompute the rotation matrix as they did.

There exists a high cohesion between the ideas of design of Luenberger Observers and the optimal approach followed by the Kalman Filter, in deed the target of the Luenberger Observer is to determine unknown states as in the Kalman Filter with the difference of that Luenberger works within dynamical system framework and avoids to use statistical ter-

<sup>1</sup>An Inertial Navigation System (INS) is ... and GPS is ... (may is not necessary since it depends of target group of readers)

minology (cite Luenberger 1966-1967). Luenberger develops theoretical foundation through the use of modern control applied to the observer problem, which triggers the engagement of non-linear control theory [?][11] in this field. Further trends in this approach work to implement non linear observers when the system's dynamic entails impossible linearize nonlinear terms so as navigation equations, hence this approach has been used to develop navigation algorithms founded in the design of Lyapunov and exponential stability, and again they grip to strong rugged representation of rotation using quaternions [12] [13] y [14]. Quaternion algebra plays a mayor role in nonlinear observers simplifying calculations and offering good algebraic structure that allows to recompute angles without singularities.

Futher, an special approach is extended by [15] which proposes a general geometrical framework for the design of observers on finite-dimensional Lie groups for systems that posses symmetries under transformations of Lie Groups which the autor names G-Invariant Dynamical Systems. One particular case investigated in [?] explains the general from of non-linear observers on  $SO(3)^2$  which considers dynamics on the tangential Lie Algebras  $\mathfrak{so}(3)$  as well the correction terms, the orientation is determined from two vectorial measurements depending of the rotational transformation on the Lie group. Such exstructure, identifies the nonlinear observer proposed in [16] who presents extensive analysis of non-linear attitude observers on  $SO(3)$  in terms of the Lyapunov stability and the reconstruction of the Rotation matrix based on two vectorial measurements, that he explains can be internally calculated within the correction term which has demonstrated to have a work very well. As they indicated, [16] extends a globally defined observer dynamics which global asymptotic stability is proved under the assumption that the observer error trajectory does not intersect a forward invariant set of instability conditions, further they implicate a sub-optimal solution of the algebraic reconstruction of the rotation equation which we believe can be improved.

What we propose in this work is to extend the idea of series non-linear complementary observer from [6] who also combines pasive version of the complementaty filter on  $SO(3)$  [16] attitude non-linear complementary observer. We deem reduce prediction errors by pre-computing the rotation matrix with an optimal observer in quaternions. Two main points were studied during in this work. First, the modification of the original approach of *Mahony-Scandarolli's navigation algorithm of non-linear observers on  $SO(3)$*  [16], [6] by including the an EKF/ optimal observer, which was applied to optimally determine the rotation matrix based on vertorial measurements; and sencond, we studied the behavior of our approach compared with the original method in two different experiments. One sets the rotation on one axis using a camera that tracks the rotation that is used as reference and the other uses a comertial GPS system that allows to evaluate the estimation of the position

<sup>2</sup>Group of unitary rotating matrices with the inverses equal to their respective transpose.

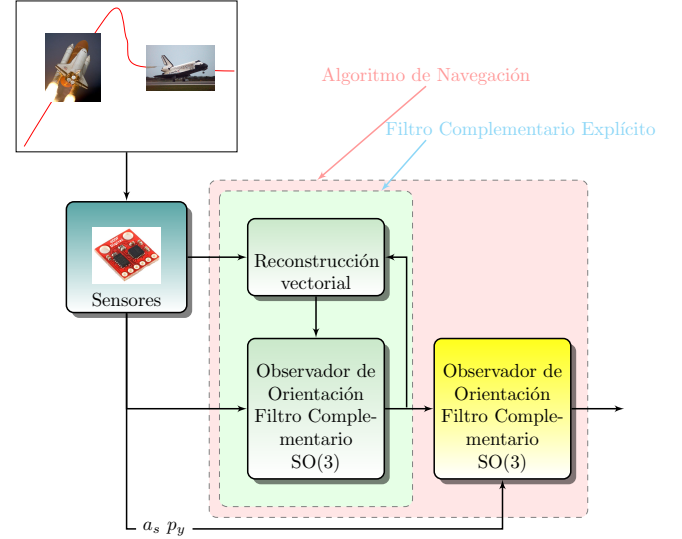


Fig. 1. Esquema simplificado del algoritmo de Mahony-Scandarolli. Tell us about. the attitude observer utiliza la medicion de la velocidad angular  $\Omega_s$  <sup>3</sup> y

The paper is structured as follows. In the section II we state the navigation problem and how the original solution that we name *Mahony-Scandarolli Algorithm*. Next we define the optimal reconstruction of rotation in the section III that constitutes the core of the contribution of this work. We state the experimentation methodology to compare both the original and modified algorithms. The results presented are in the section V which indicates an increment on complexity but also a considerable improvement in the general performance.

## II. NAVIGATION PROBLEM: MAHONY-SCANDAROLLI NAVIGATION ALGORITHM

The navigation problem lays in the determination of an algorithm that possess the ability to determine the set of variables describing the spatial condition of a rigid body<sup>4</sup>( $X$ ) using related set of variables which we term *sensory information* ( $S$ )<sup>5</sup>. In these framework terms the solution as seen through the Mahony-Scandarolli approach derives in the navigation algorithm described in Fig.1 which entails the combination of two nonlinear observers one for attitude and other for position. Input with the measurement of the angular velocity and vectorial reconstruction of the rotation matrix the attitude observer determines:

- $\hat{\Theta}$ : Estimation of the Euler angles.
- $\hat{\Omega}$ : Estimation of the angular velocity in  $\{B\}$ , where  $\{B\}$  denotes the body fixed framework.

<sup>4</sup>In the present work, this set of variables are constituted by : the linear velocity, the angular velocity, the position and the attitude. This set of variables is identify as *Navigation Information*. Este describe el movimiento de un cuerpo rgido de seis grados libertad.

<sup>5</sup>This set of variables is composed the measurement captured by the navigation sensors naming gyroscopes, accelerometers and so forth.

- $\tilde{R}$ : Rotation matrix error defined as the transformation from  $\{\mathcal{E}\} \hookrightarrow \{\mathcal{B}\}$  where  $\{\mathcal{E}\}$  denotes the estimation referential framework.
- $\hat{R}$ : The estimation of the rotation matrix that also defines a frame transformation  $\{\mathcal{E}\} \hookrightarrow \{\mathcal{A}\}$  where  $\{\mathcal{A}\}$  denotes the inertial frame.

Finally, the position complementary filter uses the rest of the variables included in  $S$  (the measured aceleration  $a_s$  and position  $p_y$ ) and the transformation matrices computed by the previous observer; it determines :

- $\hat{p}$ : Position estimation in  $\{\mathcal{A}\}$ .
- $\hat{v}$ : Linear velocity estimation in  $\{\mathcal{A}\}$ .

The group of estimation results are concatenated in what we denote *the Navigation Information Estimation* expressed as  $X = [\hat{p} \ \hat{v} \ \hat{\Theta} \ \hat{\Omega}]$ .

Under this scheme, the vectorial reconstruction feeds in the attitude observer with the rotation matrix's reconstruction that depends directly of the weighted sum of the vectorial measurements in the body framework  $\{\mathcal{B}\}$  ( $V_i$ ) as well as  $\hat{R}$ :

$$R_y = \sum_{i=1}^n f(v_i, \hat{R}) \quad (1)$$

The main disadvantage in the formulation of the complementary filters on  $SO(3)$  is the sensibility to  $R_y$  in as much it is involved in the mapping of  $\omega_s$  to  $\{\mathcal{A}\}$ , for that reason the determination of this matrix play a mayor role. They mention that the optimal solution can be termed in the minimization argument of:

$$R^* = \arg \min_R \left\{ \sum_i |v_{0,i} - Rv_{m,i}|^2 \right\} \quad (2)$$

Where optimal solution  $R^*$  is function of loss funtion denifed in the sumatory of euclidean norm of the errors between the vectorial measuments ( $Rv_{m,i}$ ) rotated to  $\{\mathcal{A}\}$  with respect to their respective theoretical value ( $v_{0,i}$ )<sup>6</sup>. However, Mahony-Scandaroli's algorithm solves  $R_y$  through an sub-optimal depending on  $\hat{R}$  so it relies on the Lyapunov statability trajectory. We assume that the a optimal solution of  $R_y$  could enhance the general performance of the algorithm.

### III. OPTIMAL RECONSTRUCTION OF ROTATION MATRIX

In this section we present the general solution of the optimal determination of the rotation matrix that we deem it could improve the algorithm's performance. The expresions proposes determine rotation from vectorial measument of gravity with a model in quaternions.

#### A. Optimal Rotation Matrix from a gravity measument model on quaternions.

We propose to compute the Rotation Matrix by observing the inclination of the gravity vector field in  $\{\mathcal{B}\}$  with an optimal observer in quaternion in sense that rotation a rigid body in completely described in terms of the Euler angles  $\Theta$

and the angular velocity, and further these given states can be intuitively determined through the measurement of: the angular speed  $\Omega_s$  with a gyroscope and the observation of the attitude  $\Theta$  with an accelerometer in the declination of the gravity vector, which is possible since the rotation matrix can be expressed in terms of the components of unitary quaternion [17]. Hence, an optimal observer should reduce the deviation measurement of acceleration  $a_s$  to its rotated theoretical value  $g_0$  in  $\{\mathcal{A}\}$ .

#### B. Optimal observer of the unitary quaternion

The optimal observer work to reduce the loss function in 3 where  $R^*$  depends on unitary quaternion  $\check{q}$  which can be expressed as  $\check{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{H}^7$ :

$$R^*(\check{q}) = R \left( q^* = \arg \min_{\check{q}} \{ a_s - R^T(\check{q})g_0 \} \right) \quad (3)$$

Thereby, the solution of that optimization is given by optimal unitary quaternion that rotates  $g_0$  to  $a_s$  which is estimated by  $\hat{a}_s$  as follows [18]:

$$\hat{a}_s = \check{q} \otimes \check{g}_0 \otimes \check{q} = Rg_0 = g_0 \begin{bmatrix} 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Besides, the kinematics given by 5 is defined by the quaternion product of <sup>8</sup> the angular velocity expressed in  $\mathbb{H}^9$  as  $\check{\Omega}$  and  $\check{q}$ .

$$\dot{\check{q}} = \frac{1}{2} \check{q} \otimes \check{\Omega} \quad (5)$$

A partir de esto, el reto asumido por el observador es determinar el cuaternin ptimo en el tiempo  $T$ , considerando de tres elementos: i) la incertidumbre en las condiciones iniciales  $\check{q}_0$  y  $\hat{v}_0$ , ii) la incertidumbre del modelo discretizado del proceso de rotacin del cuaternin  $\hat{w}_k$ , definido en (6), donde  $f_k^0$  es la versin discretizada de (5) y  $\hat{q}_k$  es el estimado discreto del cuaternin.

$$\hat{q}_{k+1} = f_k^0(\hat{q}_k, \Omega_k) + \hat{w}_k \quad (6)$$

iii) Y la incertidumbre en la estimacin de la medicin vectorial de la gravedad, el cual se define como la resta del valor estimado  $\hat{a}_{s,k}$  con seal proveniente del acelermetro  $a_{s,k}$  en el tiempo  $k$ ,

$$\hat{v}_k = a_{s,k} - \underbrace{\hat{a}_{s,k}}_{\hat{a}_{s,k} = h_k(\hat{q}_k)} \quad (7)$$

A partir de esto, la funcin objetivo desde el punto de vista del observador se deduce como la adicin de dos normas especificas

$$q_k^* = \arg \min_{q_k} \left\{ norm_0(\check{q}_0, \hat{v}_0) + \sum_{i=0}^k norm_1(w_i, v_i) \right\} \quad (8)$$

La primera combina la incertidumbre de condiciones iniciales de medicin  $\hat{v}_0$  y estado inicial del cuaternin unitario  $\check{q}_0$  y la

<sup>7</sup> $\mathbb{H}$  denotes the Hamiltonian space of quaternion complex numbers  $\mathbb{Q}$  is the sub-space of all quaternions with unitary norm.

<sup>8</sup>Denoted by  $\otimes$

<sup>9</sup>This notation defines the expression of vector as a pure quaternion where the real part is zero and components are spread over the three complex numbers

<sup>6</sup>Sub-indices 0 stays by theoretical and  $m$  by measured.

segunda combina la evolución en el tiempo de la incertidumbre del modelo  $\hat{w}_k$  y de medición  $\hat{v}_k$ , ambos para el intervalo de tiempo discreto  $i \in \{k_0, \dots, k_f\}$ . El problema se mantiene en la búsqueda del estimado  $\hat{q}_{k+1}$  haciendo correcciones sucesivas sobre la incertidumbre del modelo  $\hat{w}_k$ .

La solución propuesta a este problema hace uso de Programación Dinámica (PD) [19] en la versión lineal del modelo del proceso de rotación del cuaternión (6) y del modelo de la medición.

$$\hat{w}_k = - \underbrace{P_k H_k^T (R + H_k P_k H_k^T)^{-1}}_K \tilde{y}_k \quad (9)$$

$$\hat{w}_k^T F^{-T} P_k A^{-1} \hat{w}_k = \hat{w}_k^T (F^{-T} Q F^{-1} + P_k - K H_k P_k) \hat{w}_k \quad (10)$$

Lo que establece el estimador de estado lineal en:

$$\hat{q}_{k+1} = F \hat{q}_k + B \Omega_{s,k} + K(y_k - H \hat{x}_k) \quad (11)$$

#### IV. METODOLOGÍA DE LA EVALUACIÓN EXPERIMENTAL

El abordaje experimental trata de probar que la inclusión de un Observador ptimo para reconstrucción de la matriz de rotación en el esquema del algoritmo de navegación compuesto por los filtros complementarios en SO(3), incorpora mejoras en la estimación total de la información de navegación. Para ello, se realizan experimentos orientados a comparar el algoritmo original y el algoritmo modificado, en las mismas condiciones de operación. Bajo esta premisa, los experimentos son conducidos de tal forma que ambos algoritmos procesan la misma información de entrada, que proviene de los mismos sensores de navegación: un módulo receptor GPS MTK-2309; un acelerómetro MEMS de bajo costo ADXL330 de  $\pm 3g$  y tres grados de libertad; y los giroscopios MEMS IDG500 y LPY330AH, que miden las velocidades angulares en las direcciones de los ejes del marco  $\{B\}$ .

De esa manera, los experimentos son realizados separando los casos de estudio en dos plataformas distintas para:

- 1) El estudio de la estimación de los ángulos de Euler en una componente para movimientos de hasta  $1[rad/s]$ .
- 2) El estudio de las capacidades de estimación de la posición y velocidad lineal en tres dimensiones para un circuito cerrado recorrido en un automóvil.

##### A. Plataforma experimental de la estimación de los ángulos de Euler

La plataforma experimental de la estimación de los ángulos de Euler fue implementada siguiendo el esquema de la Figura 2, donde un arreglo de marcas negras en una plancha blanca sujeta a la caja de sensores permite hacer el seguimiento de la evolución del movimiento angular de referencia  $X_{real}$ , en forma simultánea a la captura de las señales de los sensores de navegación. De esa manera, los algoritmos de navegación determinan la estimación de la información de navegación  $\hat{X}_{mdf}$  y  $\hat{X}_{ms}$ ; y de forma paralela haciendo seguimiento con una cámara se determina el valor angular de referencia correspondiente a la evolución temporal de la componente de los ángulos de Euler, sobre la cual se está haciendo el análisis. Bajo estas

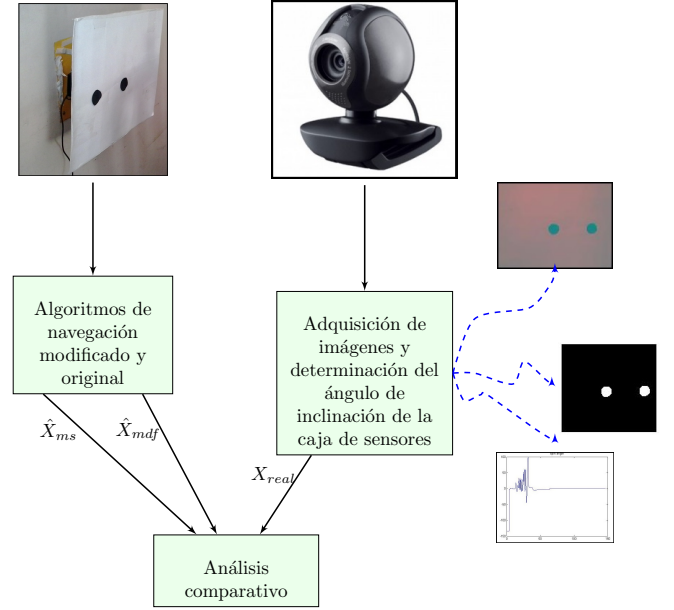


Fig. 2. Esquema general de la plataforma experimental evaluativa.  
Fuente: Elaboración Propia

condiciones se hacen tres arreglos distintos para los tres ejes del  $\{B\}$ , es decir en  $x$  para  $\phi$ , en  $y$  para  $\theta$ , y en  $z$  para  $\psi$ , analizando cada ángulo por separado.

##### B. Plataforma experimental de la estimación de la posición y velocidad lineal

Para la evaluación de la estimación de la posición y velocidad lineal el esquema implementado utiliza como referencia la información de un módulo comercial de localización GPS Etrex-Garmin que tiene una precisión de hasta 2 metros, por mucho mayor a la del módulo GPS usado dentro del conjunto de sensores de navegación, esto gracias a la ganancia de su antena que le permite capturar un mayor número de satélites, además de tener una memoria especializada para la captura de datos de Efemrides y Calendarios pasados. Este dispositivo cuenta con un altímetro y una brújula electrónica, mejorando su precisión en ms.

Los experimentos son realizados siguiendo circuitos cerrados en un vehículo en donde se monta una caja que contiene al sensor comercial y los sensores de navegación de forma tal que es posible realizar la estimación de la información de navegación y capturar información de referencia. De forma similar al caso del movimiento angular, como se describe en la figura 3, la información de los sensores de navegación es procesada por los algoritmos de navegación obteniendo  $\hat{X}_{mh}$  y  $\hat{X}_{mdf}$ ; y de forma simultánea, durante el movimiento del vehículo, se captura la información de referencia que corresponde al GPS GARMIN-ETEX.

#### V. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En esta sección se presentan los resultados experimentales resaltando sus principales características.

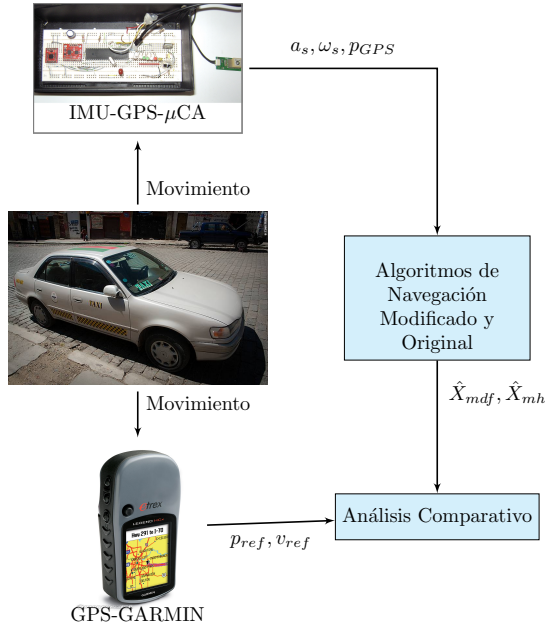


Fig. 3. Plataforma experimental de la estimación del movimiento lineal.  
Fuente: Elaboración Propia

#### A. Prueba con la plataforma experimental de la estimación los ngulos de Euler

Esta fase emplea el esquema experimental descrito en la sección IV-A, en la cual el sensor angular de video (constituido por una cámara) captura la información de la rotación de uno de los ngulos de Euler, al mismo tiempo que los algoritmos de navegación realizan la estimación de la misma variable<sup>10</sup>.

Los resultados obtenidos de uno de los varios ensayos realizados para la comparación del desempeño de la estimación la orientación se muestran en las gráficas de la Figura 4, donde la señal de color azul corresponde a la estimación, la de color verde para el algoritmo original, y de color rojo para la referencia. Las gráficas se ordenan mostrando los resultados de la estimación para los ngulos  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ , ordenados de arriba hacia abajo en el orden en que se los menciona.

En el primer caso, el movimiento inicia en  $-2$  y termina en poco menos de  $-3$  y los ngulos de rodadura y guíeo se mantienen en  $0$ , en velocidades de hasta  $17/s$ . Para la estimación con el algoritmo modificado los errores oscilan entre  $9.04E-4$  y  $10.58$  en contraste a los  $7.33E-3$  a  $18.97$ <sup>11</sup> para el algoritmo original. En estas gráficas los errores cometidos por el algoritmo original son mucho mayores a los del algoritmo modificado, donde este último gana definitivamente a partir de  $15$  segundos.

En el segundo caso, los movimientos están limitados dentro de la banda de  $\pm 45[^\circ/s]$ . En este ensayo, el desempeño del algo-

<sup>10</sup>Dentro del conjunto de datos que conforman la información de navegación estimada.

<sup>11</sup>Estos valores están en valor absoluto respecto a la señal original.

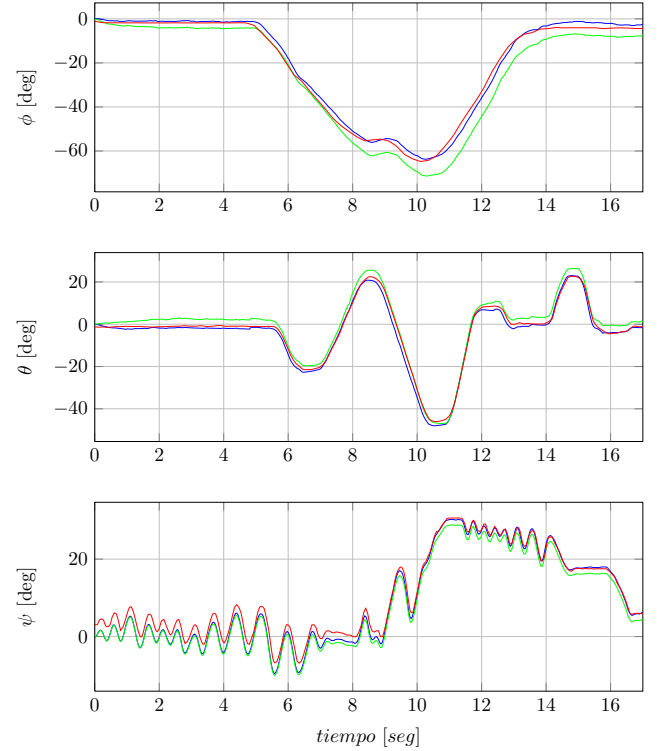


Fig. 4. Prueba comparativa de la estimación de los ngulos de Euler.  
Los ngulos de Euler, se denotan en el vector columna  $\Theta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ , con  $\phi$  para el alabeo,  $\theta$  para la rodadura y  $\psi$  para el guíeo.

ritmo modificado mejora sobre al algoritmo original, y a partir de los  $13$  segundos la convergencia del método modificado es insuperable

Por último, para el tercer caso, los ensayos fueron realizados con la plataforma en posición horizontal dando al sistema mayor movilidad. Con estas características, generan trayectorias de cambios abruptos. Se hace importante mencionar que en estas condiciones el vector gravitacional está apuntando paralelo al eje de rotación, dificultando la estimación vectorial y así la estimación del ngulo de guíeo para el algoritmo original; por esta razón la capacidad de convergencia del método original, cuando la condición inicial del ngulo muy distinta de cero, se ve afectada considerablemente. Para este ensayo el ngulo inicial de guíeo es de  $5$ , lo que permite ver el efecto anteriormente mencionado, donde a pesar de que las condiciones iniciales de error en los ngulos de Euler no son nulas, el algoritmo modificado reduce progresivamente el error, en contraste con el algoritmo original, el cual permanece con un error constante de  $1.5$ , por lo menos durante toda la ventana temporal que dura el experimento.

#### B. Prueba con la plataforma experimental de la estimación del movimiento lineal

Los experimentos realizados con esta plataforma permiten ver el desempeño del algoritmo para estimar el movimiento lineal, es decir la velocidad lineal y la posición en el tiempo.

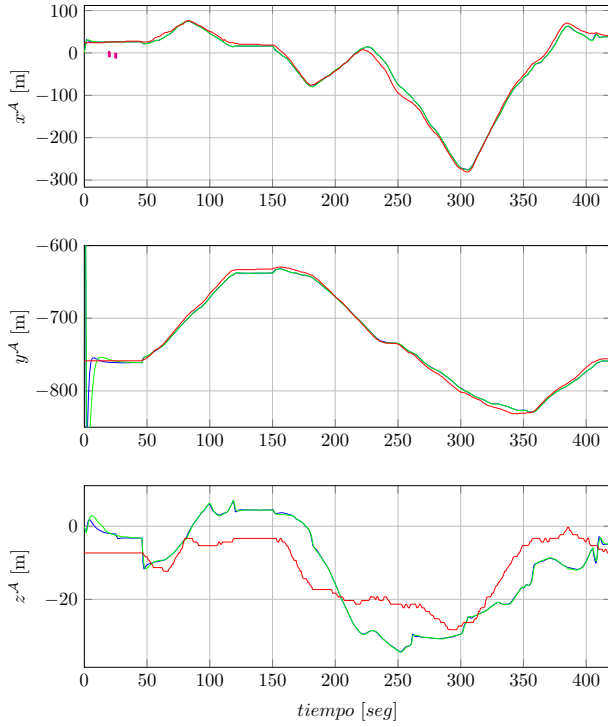


Fig. 5. Resultados de la estimación de la posición. Resultados de la estimación de con datos simulados. Resultados típicos de los repetidos intentos.

Los ensayos para la evaluación de la estimación del movimiento lineal se desarrollan en un circuito cerrado en una ruta que tiene una longitud de  $1.53[Km]$ , pasa por calles con buena línea de vista, sin muchos rboles ni edificios. En todas las gráficas, los resultados de la estimación del algoritmo Original son representados en la línea de color verde, para la estimación del algoritmo modificado de color azul, y para la señal de referencia en una línea de color rojo. Las pruebas de estimación de la posición muestran errores, después de la etapa transitoria que varía entre  $2[m]$  y  $10[m]$ . Respecto al movimiento horizontal, los errores verticales muestran una mala calidad, sin embargo hay que considerar que los errores en la altitud son típicamente grandes <sup>12</sup> en navegación GPS. A pesar de eso, es de consideración ver que la información estimada se aproxima a la señal de referencia, mucho más que la medición del sensor de navegación GPS-MTK3329.

En esta prueba con respecto a la estimación de la velocidad, dado que la velocidad de referencia está expresada en  $\{A\}$  la matriz de rotación juega un papel fundamental en la estimación para hacer la transformación correspondiente. Entonces, esto sugiere que la convergencia está delimitada por la capacidad de los algoritmos para estimar los ángulos de Euler. Los resultados de las pruebas realizadas son mostrados en la Figura 6, en la que se muestra las velocidades en  $x$ ,  $y$  y  $z$  del marco

<sup>12</sup>Esto no pone en cuestión la veracidad de la información entregada por el GPS-Garmin, debido a que este dispositivo utiliza la información de un barómetro, que sin duda tiene mejor precisión.

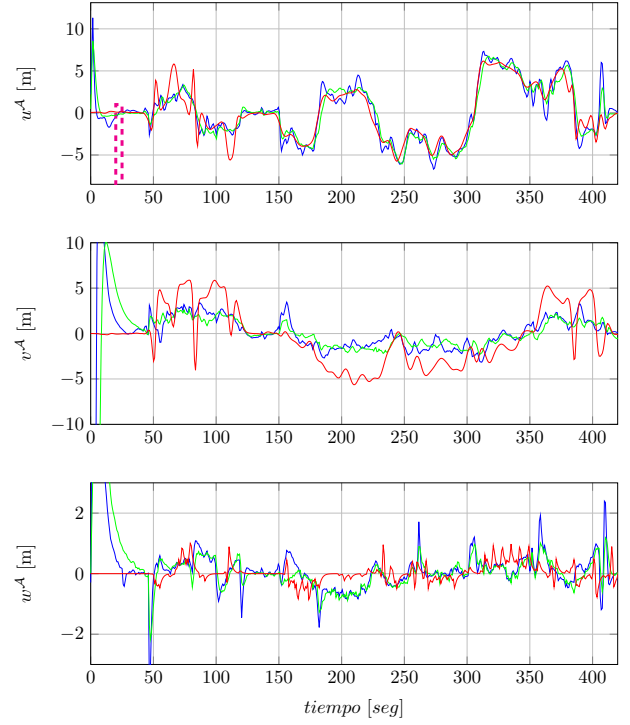


Fig. 6. Velocidad lineal en el eje X. Resultados de la estimación de con datos simulados. Resultados típicos de los repetidos intentos.

referencial inercial  $\{A\}$  con la misma notación de colores que se ha venido manteniendo desde la Figura 4.

### C. Análisis Comparativo

En la Tabla I se ordenan los errores absolutos promedio (EAP) y las diferencias porcentuales para cada variable.

En esta tabla se puede ver globalmente que el algoritmo modificado es superior en casi todas las variables, lo que se corrobora con el cálculo de la diferencia porcentual promedio (DPP) igual a  $40.92\%$ , es decir que en promedio se tiene  $40.92\%$  mejor desempeño en la estimación de la información de navegación para el algoritmo modificado respecto al original.

Analizando los pares de EAP mostrados en la Tabla I vemos una marcada tendencia que indica que el algoritmo modificado supera al algoritmo original. Dentro de las diferencias más relevantes se tienen: la estimación de la posición en el eje  $y$  con  $1.22[m]$  de distancia en promedio, y los ángulos de alabeo y rodadura, con  $2.39$  y  $1.73$ , respectivamente.

### D. Tiempos de Procesamiento.

En relación a los tiempos de procesamiento se mide el tiempo de procesamiento conjunto de  $2,957$  puntos de muestreo, es decir para  $49.4311[s]$  de tiempo de estimación. En cada iteración el tiempo de procesamiento es de  $1.0158[ms]$  para el algoritmo modificado y  $0.7954[ms]$  para el algoritmo original, definiendo una diferencia porcentual promedio de:

$$DPP_{\text{tiempo de procesamiento}} = -21.6933\% \quad (12)$$



TABLE I  
TABLA COMPARATIVA DEL DESEMPEÑO DE ALGORITMO DE TRES  
OBSERVADORES EN CASCADA Y EL DE MAHONY-SCANDAROLI.

Variable estimada	EAP del algoritmo modificado	EAP del algoritmo original	Diferencia porcentual del Algoritmo Modificado respecto al Original.
Posición en el eje X ( $x$ )	5.8862[m]	5.9427[m]	0.9596%
Posición en el eje Y ( $y$ )	3.5445[m]	4.7739[m]	34.6828%
Posición en el eje Z ( $z$ )	6.1698[m]	6.3369[m]	2.7080%
Velocidad lineal en el eje X ( $v_x$ )	0.8214[m/s]	0.7871[m/s]	-12.1305%
Velocidad lineal en el eje Y ( $v_y$ )	3.1564[m/s]	3.3291[m/s]	5.4710%
Velocidad lineal en el eje Z ( $v_z$ )	0.4445[m/s]	0.5697[m/s]	28.1664%
ángulo de cabeceo ( $\phi$ )	1.3579[Deg]	3.7560[Deg]	177.97%
ángulo de rodadura ( $\theta$ )	1.4635[Deg]	2.801[Deg]	91.394%
ángulo de guiado ( $\psi$ )	1.3268[Deg]	2.1855[Deg]	44.53%

Lo que indica que el algoritmo original utiliza 21.6933% menos tiempo que el algoritmo modificado.

## VI. CONCLUSION

En este trabajo se ha desarrollado una arquitectura en cascada de observadores basados en el análisis funcional de sus entradas y salidas. En esta se consideran como fuente de información a las señales de una IMU y un módulo receptor GPS. Se realizaron las pruebas experimentales en diferentes arreglos de la plataforma experimental de la estimación de los ángulos de Euler, que permitieron realizar la comparación de la estimación respecto a una señal de referencia. De manera global, se logra diseñar e implementar un sistema de navegación de procesamiento fuera de línea para los datos de una IMU y un GPS, el cual puede estimar la orientación y la posición con seis grados de libertad de cualquier cuerpo rígido. Además se propone un algoritmo de navegación que incorpora una variación de los métodos de Mahony-Scandaroli. Este algoritmo está constituido en tres etapas de observación: la primera con un observador de la orientación EKF basado en cuaterniones para la reconstrucción de la matriz de rotación, la segunda con un filtro complementario en  $SO(3)$  de orientación, y la tercera con el observador de posición.

Basado en los resultados de la experimentación se puede decir que el algoritmo de navegación implementado tiene una ventaja considerable respecto al anterior método. Y aunque incrementa la complejidad final del algoritmo, no es una limitante para la implementación en algún procesador digital con capacidad de procesamiento suficiente.

## ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to thank...

## REFERENCES

- [1] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, vol. 82, pp. 35–45, 1960.
- [2] A. Lukyanov, S. Dodds, and J. Vittek, "Observer-based attitude control in the sliding mode," pp. 639–671, 1996.
- [3] S. Nicosia and P. Tomei, "Nonlinear observer and output feedback attitude control of spacecraft," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-28, no. 4, pp. 970–977, 1996.
- [4] M. Algrain and M. Lee, "Nonlinear observer and output feedback attitude control of spacecraft," pp. 638–645, 1997.
- [5] V. J. Silvestre C. and O. P., "A nonlinear gps/imu observer based for rigid body attitude and position estimation," in *IEEE conf. Decision and Control*, 2008, pp. 1255–1260.
- [6] G. Scandaroli, P. Morin, and G. Silveira, "Nonlinear filter design for pose and imu bias estimation," *IEEE conf. Decision and Control*, 2011.
- [7] G. S. S. Schmidt and L. Mcgee, "Application of statistical filter theory to the optimal estimation of position and velocity on board a circumpolar vehicle," Ames Research Center, Tech. Rep., 1962.
- [8] A. K. V. Bistrov, "Adaptive extended kalman filter for aided inertial navigation system," *ELECTRONICS AND ELECTRICAL ENGINEERING Automations and Robotics*, no. 6, pp. 37–40, 2006.
- [9] M. Gandhi and L. Mili, "Robust extended kalman filter for transient tracking and outlier suppression," *Latex Class Files*, vol. 6, no. 1, 2007.
- [10] A. M. Sabatini, "Quaternion-based extended kalman filter for determining orientation by inertial and magnetic sensing," *IEEE Transaction on biomedical engineering*, no. 7, pp. 1346–1356, 2006.
- [11] F. Thau, "Observers for nonlinear dynamic systems," *International Journal of Control*, vol. 17, p. 471, 1975.
- [12] B. Vik and T. Fossen, "A nonlinear observer for gps and ins integration," in *IEEE conference on Decision and control*, 2001, pp. 2956–2961.
- [13] J. Thienel, "A clipped nonlinear space craft attitude controller and observer with an unknown constant gyro bias and gyro noise," *IEEE trans. on automatic control*, vol. 8, pp. 2011–2015, 2003.
- [14] M. Hua, "Attitude observers for accelerated rigid bodies based on gps and ins measurements," pp. 8071–8076, 2009.
- [15] P. M. S. Bonnabel and P. Rouchon, "Symmetry preserving observers," *IEEE trans. on automatic control*, vol. 53, pp. 2514–2526, 2008.
- [16] B. Mahony, T. Hamel, and J.-M. Pfimlin, "Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group," in *IEEE Transactions Automatic Control*, vol. 53, 2008, pp. 1203–1218.
- [17] S. L. Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups*. DUDA, 1986.
- [18] J. Sol, "Quaternion kinematics for the error-state kf," Reporte, 2012.
- [19] V. S. F. Lewis, D. Vrabie, *Optimal control: Dynamic Programming*. John Wiley, 2012.