

Capítulo 1

Modelo del motor DC

1.1. Introducción

El modelado e identificación del motor es un paso inevitable para el desarrollo de un sistema de control. En general no podemos diseñar un controlador si no contamos con un sistema de ecuaciones, de parámetros conocidos. En particular, para propósitos de control se busca siempre un compromiso entre la precisión del modelo y la simplicidad del mismo. Con el fin de diseñar un controlador lineal se asumirán ciertos criterios para tener un conjunto de ecuaciones lineales y bajar el orden. Aunque en la naturaleza no existen los sistemas lineales como tal, se puede aproximar a uno cuando este está trabajando al rededor de un punto de operación.

1.2. Modelo matemático

El modelo matemático de un motor DC está definido por un conjunto de ecuaciones diferenciales, extraídas de las leyes físicas que gobiernan al motor. En particular la tercera ley de Newton y de corriente de Kirchoff. Las mismas se muestran a continuación.

$$\mathcal{I}_m \dot{\omega} + b\omega = \tau_m \quad (1.1)$$

$$L_a \dot{i}_a + R_a i_a = u - e_m \quad (1.2)$$

El motor gira debido a pares magnéticos que se generan al paso de la corriente en las espiras del estator y el flujo magnético constante. Esa fuente de campo magnético proviene del devanado inductor o de un arreglo de imanes permanentes. Este es recibido por el devanado inductor, este inductor hace girar el rotor, el cual recibe la corriente eléctrica de la fuente mediante un colector y sistema de escobillas. El colector es básicamente un conmutador sincronizado con el rotor, que conmuta sus bobinas provocando que el ángulo relativo entre el campo del rotor y el del estator se mantenga, al margen de si el rotor gira o no, permitiendo

de esta forma que el par motor sea independiente de la velocidad de giro de la máquina. Al recibir la corriente eléctrica e iniciar el giro comienza a producirse una variación en el tiempo del flujo magnético por los devanados, produciendo una Fem. Inducida e_m que va en sentido contrario a la Fem. introducida por la fuente, e.g, una batería. En general el embobinado motores vienen configurados como arreglo estrella que tiene un numero finito de espiras en cada aspa del estator. La conmutación entre las bobinas presentan ciclos de hitérisis perdida por los arcos electricos en en encendido debido la elevada corriente de arranque Otros factores que hacen del motor un elemento totalmente a lineal son despreciados para obtener un modelo simplificado con fines de control. Podemos representar un aproximación del desempeño del motor con las siguientes ecuaciones.

$$e_m = Kv\omega \quad (1.3)$$

$$\tau_m = Km i_a \quad (1.4)$$

Uniendo las ecuaciones (1.1-4) podemos expresar el modelo matemático del motor como.

$$\mathcal{I}_m \dot{\omega} + b\omega = K_v i_a \quad (1.5)$$

$$L_a \dot{i}_a + R_a i_a = u - K_m \omega \quad (1.6)$$

1.3. Identificación de los parámetros

Podemos entender a *los parametros de un sistema* como el conjunto de constantes que se hacen presentes en el modelo matemático del sistema. La estrategia que se plantea, es encontrar la expresión de la función de transferencia del sistema de la velocidad. Ya que si consideramos la inductancia cero, el modelo motor se reduce en un grado. Dando la posibilidad de estimar los parámetros analizando la señal de entrada y la señal de salida, con este fin construir un sensor para medir velocidad. Con la señales obtenidas podemos optar por dos técnicas para medir los parámetros mencionados: Por medio de IDENT, y la otra alternativa, con el ANÁLISIS DE LA RESPUESTA TRANSITORIA. Y para terminar con la identificación de los parámetros de nuestro motor realizamos una comparación por medio del cálculo de los errores absolutos entre la señal simulada y la señal real con la ayuda de SIMULINK.

1.3.1. Función de transferencia

Realizamos la transformada de Laplace de las ecuaciones (1.5) y (1.6).

$$\mathcal{I}_m s\Omega(s) + b\Omega(s) = K_v I_a(s) \quad (1.7)$$

$$L_a s I_a(s) + R_a I_a(s) = U(s) - K_m \Omega(s) \quad (1.8)$$

Tomando a $U_{(s)}$ como la entrada y $\Omega_{(s)}$ como la salida. Obtenemos la siguiente función de transferencia.

$$\frac{U_{(s)}}{\Omega_{(s)}} = \frac{K_v}{(L_a s + R_a)(\mathcal{I}_m s + b) + K_v K_m} \quad (1.9)$$

Considerando la inductancia aproximadamente cero y desarrollando.

$$\frac{\Omega_{(s)}}{U_{(s)}} = \frac{\frac{K_v}{R_a b + K_v K_m}}{\frac{R_a \mathcal{I}_m}{R_a b + K_v K_m} s + 1} \quad (1.10)$$

Que se puede expresar como.

$$\frac{\Omega_{(s)}}{U_{(s)}} = \frac{k_p}{\tau s + 1} \quad (1.11)$$

1.3.2. Diseño del sensor de velocidad

El sensor de velocidad tiene como componentes un disco óptico, un convertidor frecuencia-voltaje y un LED fotodiodo. Dado que la ecuación (1.11) representa siempre un sistema estable nos permite fácilmente analizar la respuesta transitoria para analizar los parámetros. Con ese propósito adoptamos la configuración de la figura 1.2. El bloque del motor convierte una entrada eléctrica en una salida de velocidad en $[rad/s]$. El disco óptico que contendría también el LED fotodiodo convierte esta velocidad en un tren de pulsos cuya frecuencia es proporcional a la velocidad del disco. Y por último para la conversión de frecuencia- voltaje adoptamos el circuito de la figura 1.1. Este bloque convierte la salida de variación de frecuencia producida por el disco óptico en una señal voltaica.

1.3.3. Parámetros de la planta utilizando la herramienta IDENT

Con la ayuda de un osciloscopio se guardaron una colección de datos de entrada ¹ y salida del motor², ambas señales obtenidas serán tratadas con la herramienta IDENT.

¹Tren de pulsos de color amarillo

²En color azul

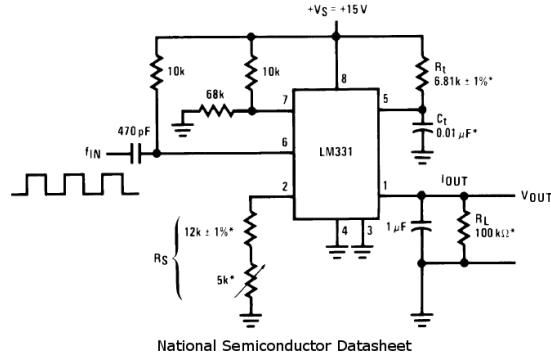


Figura 1.1: Circuito conversor Voltaje frecuencia

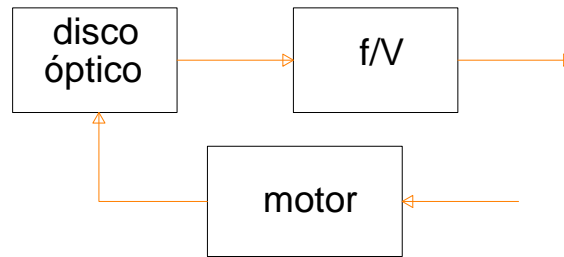


Figura 1.2: Arreglo para la identificación

Los parámetros estimados por esta herramienta IDENT son los siguientes:

$$\tau = 0,12941$$

$$k_p = 0,9383$$

Con una similitud del 94.7 %, como se muestra en la figura 1.5

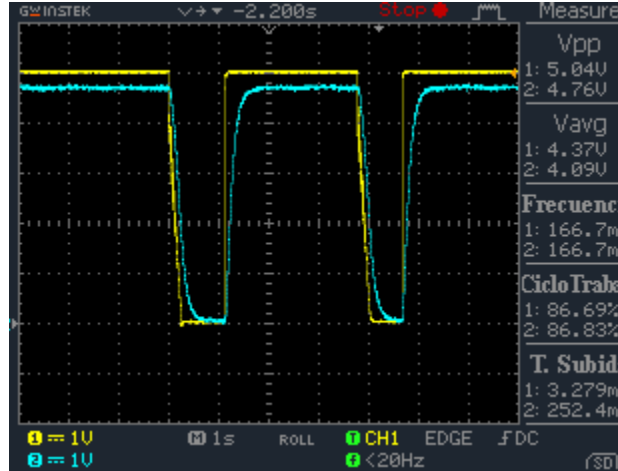


Figura 1.3: imagen obtenidas del osciloscopio

1.3.4. Parámetros de la planta utilizando el análisis de la respuesta transitoria

El segundo enfoque es realizando una comparación de los tiempos de respuesta y valores finales de la salida del convertor a lazo abierto. En este último enfoque, para encontrar la ganancia k_p se divide el voltaje final de entrada entre el voltaje de alimentación, cuando este último es constante. Por otro lado para encontrar la constante de tiempo τ se mide el tiempo que tarda en alcanzar el 63% del valor final. Este porcentaje representa la igualdad del tiempo con τ .

Observamos en la siguiente tabla que la variación de la ganancia estática es poco menos del 0.4% a diferencia de la constante de tiempo. Pero a pesar de todo la técnica muestra una precisión elevada.

Los datos obtenidos son:

Nº Experimento	Constante de tiempo [ms]	Ganancia estática
1	148	0.944
2	152	0.944
3	150	0.941

En promedio se tiene:

$$\tau = 0,15$$

$$k_p = 0,944$$

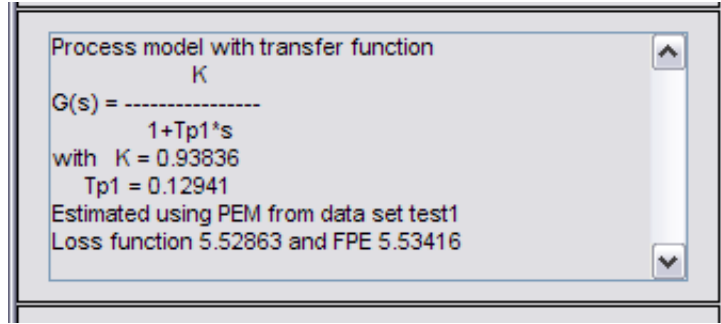


Figura 1.4: Modelo estimado por ident

1.3.5. Cálculo de los errores absolutos entre la señales simuladas con el primer y segundo método y la señal real en SIMULINK

Para realizar la comparación se calcularon los errores acumulativos de la diferencia de la señal real³ con la fórmula

$$e_{abs}(t) = \int_0^t |y_{real} - y_{simulada}|$$

En simulink se implementó esta última fórmula en un bloque, donde la entradas son: las salida real del motor y la salida simulada; que se obtiene por existir un bloque, que contiene la función de transferencia con los parámetros del método a comparar, con la señal que se mide en la entrada del motor. Este esquema se puede apreciar en la figura 1.6. El error del modelado por *comparación* es casi el doble del obtenido por IDENT

En la figura 1.7 se grafican las salidas simuladas y la real. Se puede apreciar que ambos métodos son bastante precisos y que sí representan en gran medida a la planta *real*, aunque la de IDENT es más acertada.

³La obtenida en el osciloscopio a la salida del sensor.

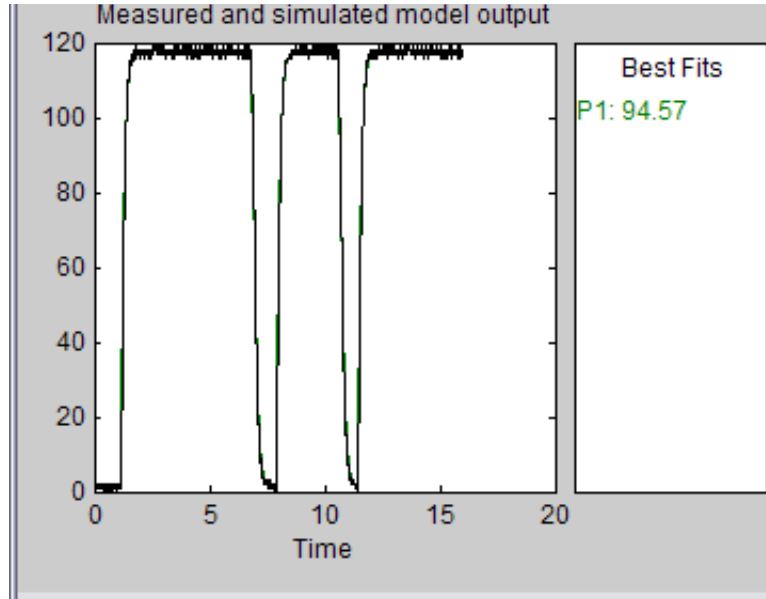


Figura 1.5: datos de ident

1.3.6. Consideraciones finales para la obtención del modelo

En particular la ganancia estática no presenta cambios sustanciales con respecto a las dos anteriores técnicas. Y en cuanto a la constante de tiempo la diferencia se puede considerar como un error de medición humana para con la técnica de comparación de los parámetros, por lo tanto consideramos a la constante de tiempo más verosímil a la obtenida por ident. Entonces podemos expresar la función de transferencia como.

$$\frac{\Omega_{(s)}}{U_{(s)}} = \frac{0,944}{0,13s + 1} \quad (1.12)$$

1.4. Conclusiones

- Por medio de ambos métodos pudimos obtener resultados similares.
- Errores en la medición pueden poner en peligro la verosimilitud de los parámetros encontrados.
- La robustez de la maqueta puede influir en gran magnitud en las respuestas del sistema, que al mismo tiempo, tendrán influencia directa en la estimación de los parámetros del sistema.

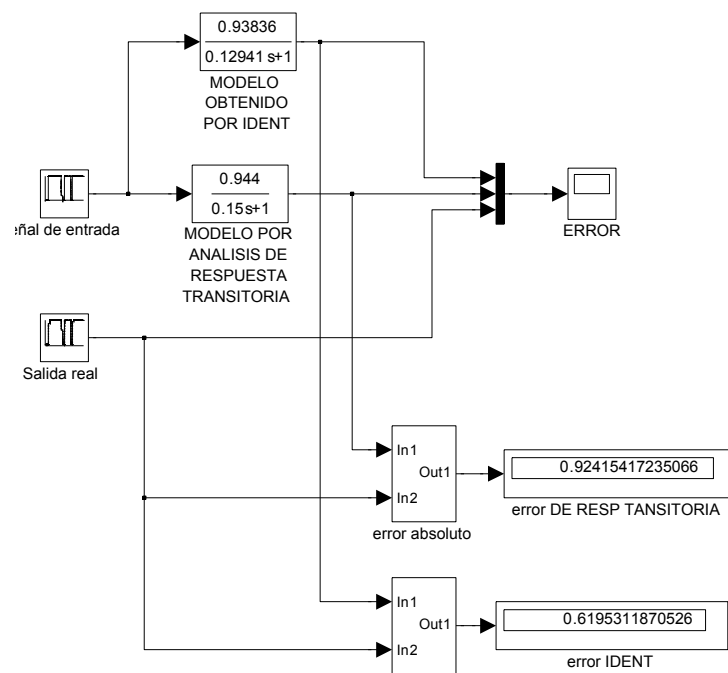
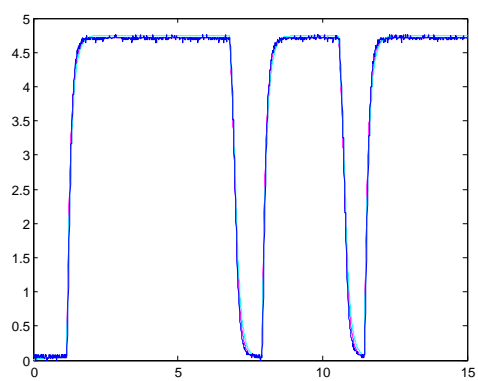
Figura 1.6: Esquema de comparación en *SIMULINK*

Figura 1.7: Señales obtenidas

Capítulo 2

Control Proporcional

2.1. Introducción

2.2. Sensor de posición y la adaptación de la función de transferencia.

Antes de comenzar con el desarrollo del control proporcional es importante mencionar que en el enfoque del capítulo 2, se uso un conversor frecuencia voltaje para realizar la obtención del modelo. Pero, este sensor nos da información la velocidad y no así de la posición, que es lo que se busca es controlar. Entonces el esquema para realizar las mediciones es el de la figura 2.1.

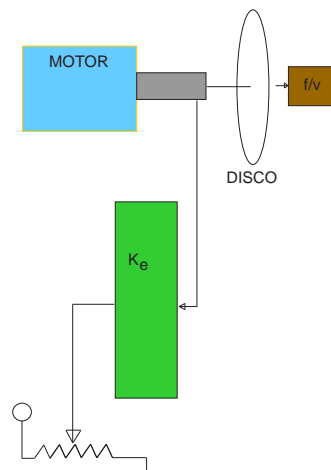


Figura 2.1: Esquema para la medición del posición.

En este esquema se tiene como entrada el voltaje de alimentación al motor.

Que causará algún comportamiento dinámico en el mismo que hará que su eje gire con un velocidad angular $\omega[rad/s]$. El que le sigue es el disco optico que tiene como numero de rendijas 75. Este al dar una vuelta el motor genera 75 pulsos, los cuales entran al conversor con una frecuencia proporcional a la velocidad. Entonces si el el motor da una vuelta en un segundo se tiene 75 Hz en la salida, es decir 75 pulsos/segundo lo que nos genera el siguiente factor de conversión $75[Hz]/2\pi[rad/s]$. Se obtuvo experimentalmente la ganancia del conversor frecuencia-voltaje excitándola con una frecuencia de 230[Hz] y se midió un voltio a la salida. Con todas estas consideraciones podemos modificar la ganancia de la planta obtenida en el capítulo 1 de la forma:

$$k_p \left[\frac{V}{V} \right] = \mathcal{K}_p \left[\frac{rad/s}{V} \right] \frac{n}{2\pi} \left[\frac{Hz}{rad/s} \right] \frac{1}{f_0} \left[\frac{V}{Hz} \right] \quad (2.1)$$

Donde:

n es el número de orificios en el disco óptico.

f_0 es la frecuencia fundamental del conversor frecuencia-voltaje .

De la ecuacion 2.1 podemos obtener la ganancia estática del motor que traduce voltios a radianes en la siguiente función de transferencia, donde $\mathcal{K}_p = 18,1894$.

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{\mathcal{K}_p}{\tau s + 1} \quad (2.2)$$

Haciendo referencia al bloque que va desde el eje del motor hacia la salida del potenciómetro en la figura 2.1 podemos asociar una constante de proporcionalidad que relaciona una variación angular en radianes en el eje del motor a una variación de voltaje sobre el potenciómetro. En el laboratorio cuando nosotros variábamos una $\Delta n = 18$ de orificios del disco se conseguía una variación de $\Delta \Theta = \Pi/2$ en el eje del motor y a su vez esta variaba la salida del potenciómetro $\Delta \Theta_2 = 0,12$. De esa forma la constante k_e de la figura 2.2 se puede expresar como $k_e = \frac{0,24}{\pi}$.

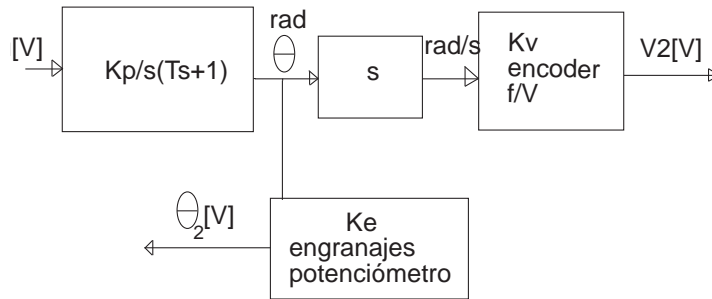


Figura 2.2: Esquema para la medición del posición.

Tenemos que la ganancia final que relaciona el número de rendijas con la

frecuencia es

$$k_v = \frac{n}{2\pi f_0} \quad (2.3)$$

$$k_v = \frac{75}{230 * 2\pi} \quad (2.4)$$

$$k_v = 0,052 \quad (2.5)$$

La ganancia final de la planta es:

$$G_p = \frac{\frac{k_p * k_e}{k_v}}{s(\tau s + 1)} \quad (2.6)$$

Reemplazando valores tenemos:

$$G_p = \frac{\frac{0,944 * 0,076}{0,052}}{s(0,13s + 1)} \quad (2.7)$$

$$G_p = \frac{1,38}{s(0,13s + 1)} \quad (2.8)$$

2.3. Diseño del controlador

2.3.1. Condiciones de diseño

Como criterio de diseño en este y los siguientes laboratorios se tomará como condiciones de diseño las siguientes características de la respuesta transitoria.

$$M_p = 0,15$$

$$t_s = 1[s]$$

Que generan los siguientes parámetros:

$$w_n = 7,7380$$

$$\xi = 0,5169$$

2.3.2. Calculo de la ganancia del controlador

El esquema de la figura 2.3 nos muestra la configuración clásica de un sistema retroalimentado donde el controlador proporcional es simplemente un amplificador. En particular este controlador multiplica el error por una constante y lo aplica a la planta por medio de un actuador de manera de reducir el error respecto de la referencia. De ahí podemos obtener la ganancia de lazo cerrado de dicho sistema como:

$$G_{cl} = \frac{\frac{K k_p}{\tau}}{s^2 + \frac{1}{\tau}s + \frac{K k_p}{\tau}} \quad (2.9)$$

Y comparando esta ecuación con la expresión normalizada de la función de transferencia de segundo orden obtenemos las siguientes ecuaciones.

$$K_1 = \frac{w_n^2 \tau}{k_p} \quad (2.10)$$

$$K_1 = 5,6406 \quad (2.11)$$

$$K_2 = \frac{\tau^3}{\xi^2 k_p} \quad (2.12)$$

$$K_2 = 2,2561 \quad (2.13)$$

$$(2.14)$$

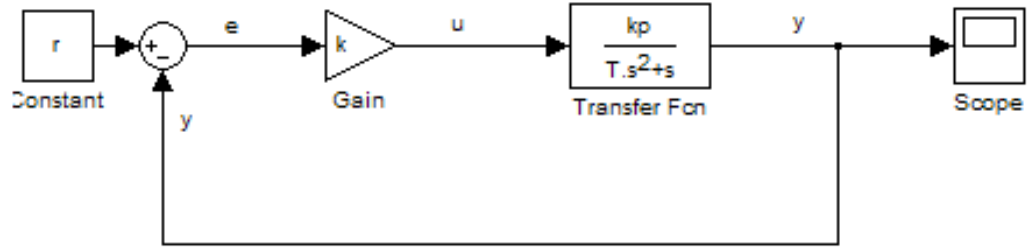


Figura 2.3: Esquema para la medición del posición.

2.3.3. Ancho de banda

Para hallar el ancho de banda se analiza la función de transferencia deseada, con los parámetros del acapite anterior, como se muestra en la ecuación 2.15. El ancho de banda es: $BW = 6,43 \text{ rad/s}$. Este ancho de banda nos ayudará a encontrar los rangos de ganancia en lazo cerrado para asegurar el rechazo a perturbaciones y sensibilidad a la variación de parámetros.

$$G_{cld} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\omega_n\xi + \omega_n^2} \quad (2.15)$$

Para la anterior ecuación expresada en $s = j\omega$ encontramos la frecuencia de corte

$$BW = 6,43 \text{ rad/s} \quad (2.16)$$

2.3.4. Analisis de sensibilidad

La sensibilidad a un parámetro a , se define normalmente como la medida del cambio porcentual de la ganancia a lazo cerrado con respecto a un cambio

porcentual en dicho parámetro, es decir:

$$sensibilidad = \frac{\%G_{cl}}{\%a} \quad (2.17)$$

Se puede expresar como:

$$\mathcal{S}_a^{G_{cl}} = \frac{\partial G_{cl}}{\partial a} \frac{a}{G_{cl}} \quad (2.18)$$

No resulta práctico analizar la sensibilidad de cada uno de los parámetros, por lo que analizaremos solo la variación de la ganancia de lazo.

$$\mathcal{S}_G^{G_{cl}} = \frac{\partial G_{cl}}{\partial G} \frac{G}{G_{cl}} \quad (2.19)$$

Donde G es la ganancia de lazo

$$\mathcal{S}_G^{G_{cl}} = \frac{1}{1 + G(s)} \quad (2.20)$$

Para la frecuencia w :

$$\mathcal{S}_G^{G_{cl}} = \frac{1}{1 + G(jw)} \quad (2.21)$$

La ecuación 2.21 representa un filtro pasa altos, que como todo filtro tiene una frecuencia de corte. Esta debe coincidir con el ancho de banda de operación. Observando la ecuación 2.21, notamos que para que la sensibilidad sea pequeña con respecto a la anchura de banda del sistema necesitamos que $G(jw)$ sea grande.

Con el fin de encontrar la ganancia adecuada se realizaron varios diagramas de bode para distintos valores de ganancia del controlador. Y a partir de ese enfoque se obtuvo que para ganancias mayores a 125.7816 ¹ se cumple con la atenuación menor a 3dB como se muestra en la figura 2.4.

2.3.5. Analisis de rechazo a las perturbaciones

Uno de los parámetros de calidad de un controlador es el rechazo a las perturbaciones. Que significa que el sistema mantiene la referencia a pesar de ser sometido a fuerzas externas que lo alejan de la misma. En cuanto mejor se recupere de una perturbación, es decir el error se mantenga lo mas pequeño posible, el sistema tiene un buen rechazo a las perturbaciones.

Podemos analizar el rechazo a las perturbaciones por la sensibilidad del sistema a la entrada $W(s)$. Un buen sistema tendría una baja sensibilidad a esa

¹Mayores a la línea del diagrama

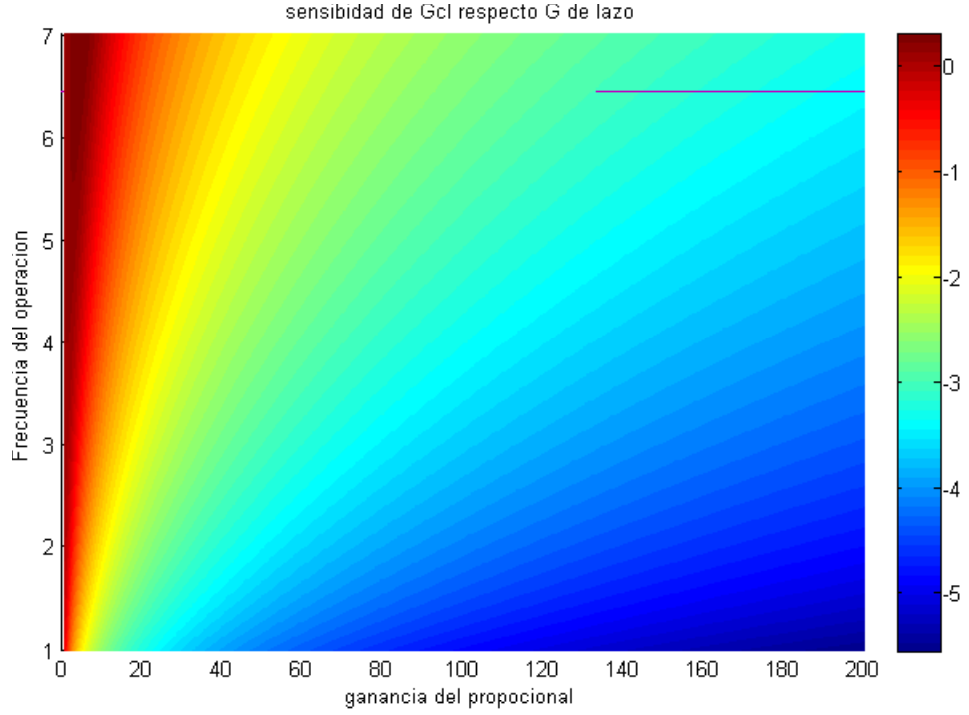


Figura 2.4: Diagrama de bode para la atenuación en variaciones en los parámetros de la planta para distintas ganancias.

entrada en ancho de banda de interes². La función de tranferencia del sistema con respecto a la entrada de perturbación es la siguiente.

$$S_b = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_2(s)}{1 - G_2(s)G_2(s)(D(s) - K)} \quad (2.22)$$

Para el análisis planteado necesitamos las funciones $G_1(s)$ y $G_2(s)$. Y hasta este punto no han sido calculadas que mas adelante será desarrollado. Posterior a esto se encontrará la mejor función $D(s)$ que atenúa las perturbaciones con un analisis similar al relalizado en el acápite anterior.

Calculo de K , $G_1(s)$ y $G_2(s)$

El conocimiento de estas funciones implica el cálculo de todas las constantes del motor, es decir, K_m , K_v , L_a , R_a , b , \mathcal{I}_m . Esto, a su vez, involucra el uso de técnicas más sofisticadas de medición. Por lo tanto, se asuman las siguientes simplificaciones.

- La inductancia de armadura es nula.

²Ver acápite 2.3.3

- Las constantes K_m y K_v se asumen iguales.

Con esto simplificamos el modelo del motor en el diagrama mostrado en la figura 2.6. Y si remplazamos en la ecuacion 2.22, recordando que $D(s) = K$, tenemos.

$$S_b = \frac{1}{\mathcal{I}_m s + b - \left(\frac{K_m}{R_a}\right)(K - K_m)} \quad (2.23)$$

$$G_p(s) = \frac{K_m}{\mathcal{I}_m R_a s + R_a b + K_m^2} \quad (2.24)$$

Ahora si tomamos en cuenta la funcion de tranferencia del diagrama de la figura 2.6 se tiene la ecuacion 2.24, que debe de ser igual a ecuación 1.12. A partir de este último razonamiento podemos obtener dos ecuaciones. Pero el número de incognitas es cuatro, dentro de las cuales esta R_a , que se puede medir con un Óhmetro, que nos añade otra ecuación. Por último pordemos calcular experimentalmente la constante K_m por medio del siguiente razonamiento. Consideremos la ecuación 1.8 junto con la simplificacion, entonces tenemos la ecuación 2.29. En régimen estacionario se pueden medir $u(\infty)$, I_a y ω y calcular la ganancia. Entonces lo que se hizo fue realizar y tabular una serie de mediciones. En las cuales variamos la tensión de entrada y medimos la corriente de armadura, tension de armadura y la velocidad angular medida por el sensor de velocidad. Cabe mencionar que durante el manipuleo nuestro conversor se averio y los parámetros de este sensor³ variaron. Y estos fueron recalculados⁴.

$$I_a = \frac{u - K_m \omega}{R_a} \quad (2.25)$$

$$K_m = \frac{u - R_a I_a}{\omega} \quad (2.26)$$

$$K_m = 0,04057569 \quad (2.27)$$

Entonces con este último valor calculado tenemos el número de incognitas y ecuaciones igualado. Esto nos posibilita de calcular todos los parámetros del motor.

De la ecuacion 2.2 , donde $\mathcal{K}_p = 18,1894$.

$$\frac{\Theta_{(s)}}{U_{(s)}} = \frac{18,1894}{0,13s + 1} \quad (2.28)$$

La cual debe ser igual a la ecuacion 2.24

$$G_p(s) = \frac{\frac{K_m}{R_a b + K_m^2}}{\frac{\mathcal{I}_m R_a}{R_a b + K_m^2} s + 1} \quad (2.29)$$

³Donde nos referimos a la f_o y k_v

⁴Ver anexos

Entonces.

$$\frac{K_m}{R_a b + K_m^2} = 18,1894 \quad (2.30)$$

$$\frac{\mathcal{I}_m R_a}{R_a b + K_m^2} = 0,13 \quad (2.31)$$

$$b = 2,6175 * 10^{-5} \quad (2.32)$$

$$\mathcal{I}_m = 1,3012 * 10^{-5} \quad (2.33)$$

Para resumir tabulamos los resultados.

parámetro	valor
\mathcal{I}_m	$1,3012 * 10^{-5}$
K_m	0.04058
R_a	22.3
b	$2,6175 * 10^{-5}$

Cálculo de la ganancia del controlador

Reemplazamos en la ecuación 2.23, tomando en cuenta la ganancia del los engranajes y el potenciómetro de la figura 2.3.

$$S_b = \frac{ke}{\mathcal{I}_m j\omega + b - \left(\frac{K_m}{R_a}\right)(K - K_m)} \quad (2.34)$$

Consideramos que el mayor valor de ω es $\omega_c = 6,43 \text{ rad/s}$. Entonces para esa frecuencia se hallará la ganancia que nos asegura la atenuación en ese rango.

$$K = Km + \frac{R_a}{K_m} \left(b + \sqrt{\frac{ke^2}{0,707^2} - \mathcal{I}_m^2 \omega_c^2} \right) \quad (2.35)$$

$$K = 59,4342$$

2.4. Resultados de simulación e implementación

2.4.1. Desempeño del controlador

Para probar este aspecto se analizó sobre un modelo de simulación, como se ve en la figura ???. Para estos probamos las dos ganancias calculadas en la sección 2.3.2, los resultados se muestran en la gráfica ?? y ??. Vemos que para la ganancia de 2.25 existe un perfecto desempeño ya que el sobre paso es menor al esperado y además este alcanza referencia en el tiempo del requerimiento. No obstante puede no hacer el sistema lo suficientemente robusto. En cuanto a la ganancia 5.64 se salva esta deficiencia, pero vemos que la respuesta del sistema tiene **menor estabilidad relativa**, ya que vemos un sobrepaso que es mayor

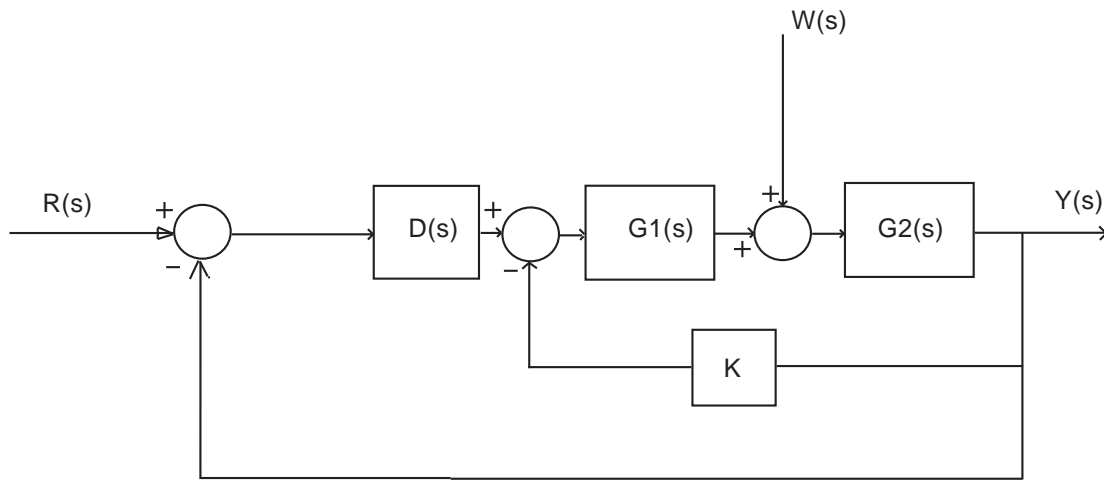


Figura 2.5: Diagrama de bloques del sistema retroalimentado con perturbación

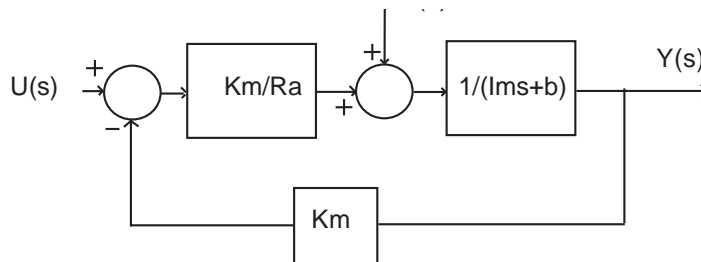


Figura 2.6: Diagrama de bloques del motor simplificado

al deseable, y de igual forma, un tiempo de asentamiento mayor. A pesar de todo las señales presentan siempre alcanzan la referencia, por lo tanto tiene una **buena precisión estacionaria**.

En cuanto a la implementación en el laboratorio podemos ver los resultados en la figura ???. Podemos decir que el sistema tiene una precisión estacionaria considerablemente buena, aunque no es nula, se encuentra dentro de la banda del 2 %. Podemos apreciar un poco de ruido en las señales. La **esbilidad relativa** es por mucho mejor que en la simulada, como se vee en la figura ??, ya que el sobrepaso es pequeño y la referencia se alcanza rápidamente.

2.4.2. Desempeño del controlador frente a la variación de parámetros

Variamos para la ganancia de K1 y mostramos resultados

Variamos para la ganancia de K2 y mostramos resultados

2.4.3. Desempeño del controlador frente a la perturbación de carga

Para probar este aspecto se realizó la simulación en simulink. Y se compara las señales obtenidas en laboratorio con las simuladas.

2.5. Conclusiones

Capítulo 3

PID Discreto

3.1. Introducción

En este capítulo nos enfocaremos en un PID discreto. El controlador PID consta de tres acciones: la integral, la derivativa y a proporcional. Una de las muchas ventajas de utilizar estos controladores es que alcanzan un desempeño óptimo a bajo costo y utilización mínima de energía. La capacidad en la toma de decisiones y la flexibilidad en los programas de control son las mayores ventajas de los sistemas de control digital.

La tendencia actual de utilizar este tipo de controladores nace de la necesidad de poder controlar sistemas mediante computadoras digitales de bajo costo, y la ventaja de trabajar con señales digitales en lugar de señales en tiempo continuo.

Existen varios métodos para el diseño de estos controladores. Nosotros realizaremos el diseño de este controlador con el método basado en la técnica del lugar geométrico de las raíces, que utiliza configuraciones de ceros y polos en el plano z . El método del lugar geométrico de las raíces desarrollado para sistema de tiempo continuo puede ser extendido sin modificaciones a sistemas en tiempo discreto, excepto por que el límite de estabilidad queda modificado del eje $j\omega$ en el plano s al círculo unitario del plano z .

3.2. Diseño del controlador basado en el método del lugar geométrico de las raíces

Para el compensador PID se ubican dos ceros para que el lugar de las raíces contenga dentro de sus soluciones a los polos que satisfacen las condiciones de diseño. Eso quiere decir que para alguna ganancia, el sistema tendrá a estos polos en su ecuación característica. Este análisis se centra en que la ganancia de lazo abierto cumpla ciertas condiciones. Las mismas se detallan en los siguientes acápites.

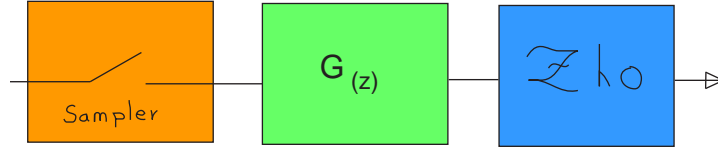


Figura 3.1: Representación de un proceso de muestreo y reconstrucción.

3.2.1. Condiciones de ángulo y magnitud

En muchos de los sistemas de control en tiempo discreto lineales e invariantes con el tiempo, la ecuación característica puede tener la forma:

$$1 + G_{(z)}H_{(z)} = 0 \quad (3.1)$$

$$1 + F_{(z)} = 0 \quad (3.2)$$

Observamos que $F_{(z)}$ es la función de transferencia pulso en lazo abierto. La ecuación característica puede escribirse de la forma:

$$F_{(z)} = -1 \quad (3.3)$$

Dado que $F_{(z)}$ es una cantidad compleja, esta última ecuación se puede dividir en dos ecuaciones al igualar primero los ángulos y a continuación las magnitudes de ambos miembros para obtener.

CONDICIÓN DE ÁNGULO: $F_{(z)} = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$

CONDICIÓN DE MAGNITUD: $|F_{(z)}| = 1$

Los valores de z que satisfacen tanto las condiciones de ángulo como de magnitud son las raíces de la ecuación característica, es decir los polos en lazo cerrado.

3.2.2. Frecuencia de muestreo

En todo sistema digital se debe convertir las señales continuas en secuencias de valores discretos por medio de un conversor análogo digital¹. Y luego reconstruirlas por medio de un procedimiento inverso llamado conversión digital análogo². Este procedimiento se conoce como muestreo y reconstrucción. Observando esta topología típica en sistemas de control digital, surge la necesidad de caracterizar esos procedimientos, con el propósito de facilitar el análisis de los mismos. Resumimos el mismo en la figura 3.1

Existen tópicos sobre muestreo y reconstrucción que no son tomados en consideración debido a que escapan del marco de trabajo. Ahora todos sistema que involucra un proceso de muestreo debe cumplir con teorema de Nyquist que dice la frecuencia de muestreo debe ser por los menos el doble de la frecuencia

¹Con el acrónimo anglosajón ADC, analog digital converter

²DAC: digital analog converter

3.2. DISEÑO DEL CONTROLADOR BASADO EN EL MÉTODO DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

máxima. Tomando eso en consideración el periodo de muestreo se calcula por.

$$h = \frac{1}{2,5f_{max}} \quad (3.4)$$

$$f_s = 2f_{max} \quad (3.5)$$

Donde f_{max} es la frecuencia de corte calculada en el acápite 2.3.3. Entonces nos da

$$h = 0,0622[s]$$

3.2.3. Polos deseados en el plano Z

Los polos calculados en la sección 2.3.1 se los lleva al plano discreto mediante la siguiente fórmula.

$$z_{1,2} = e^{hs_{1,2}} \quad (3.6)$$

donde los polos del plano S son

$$s_{1,2} = \underbrace{-4}_{\sigma} \pm \underbrace{6,6239i}_{w_d} \quad (3.7)$$

Y en el plano Z

$$e^{-4*0,0025}[\cos(6,6293 * 0,0622) \pm i \sin(6,6239 * 0,0622)] \quad (3.8)$$

$$z_{1,2} = 0,7145 \pm 0,3122i \quad (3.9)$$

3.2.4. Ganancia del PID

El control PID aglutina las acciones de control mencionadas: la proporcional, la integral y la derivativa, es por ello que ofrece mayor libertad de diseño del controlador, es decir que nos permite acomodar los polos en lazo cerrado del sistema en los lugares deseados.

A continuación se desarrolla la metodología de discretización que nos permiten encontrar las ecuaciones que calculan la acción integral y derivativa.

Filtro derivador

Consideremos ahora una técnica para diferenciar digitalmente una función continua $e(t)$. La figura 3.2 muestra un método. La pendiente de $e(t)$ en $t = kh$ es aproximadamente igual a la pendiente de la línea recta que conecta $e[(k-1)h]$ con $e(kh)$. Entonces según la figura, siendo $m(kh)$ la derivada de $e(t)$ en $t = (kh)$ podemos escribir:

$$m(kh) = \frac{e(kh) - e[(k-1)h]}{h} \quad (3.10)$$

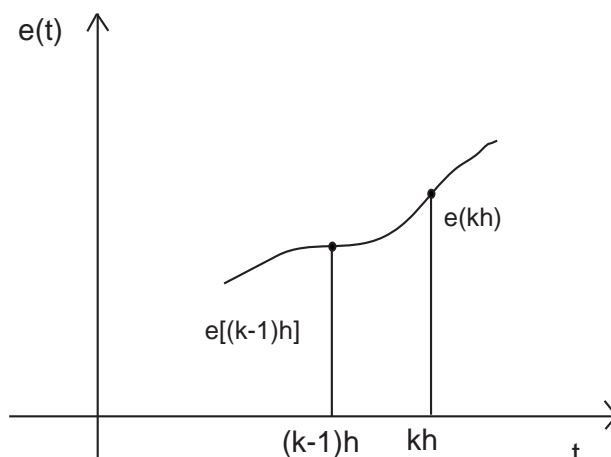


Figura 3.2: Ilustración de la diferenciación numérica

Así pues:

$$\frac{M_{(z)}}{E_{(z)}} = \frac{z - 1}{hz} \quad (3.11)$$

Notamos que este diferenciador es el recíproco de la función de transferencia para el integrador mediante la regla rectangular.

Filtro integrador

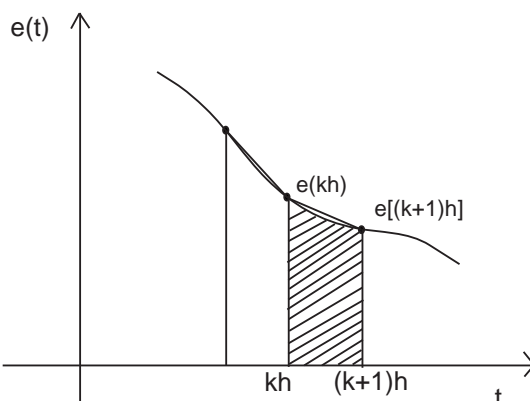


Figura 3.3: Regla trapezoidal para la integración numérica

3.2. DISEÑO DEL CONTROLADOR BASADO EN EL MÉTODO DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

Para introducir la técnica de la regla trapezoidal, consideramos primeramente un método para la integración con filtros digitales. Sea $m(kh)$ la integral de $e(t)$. Entonces según la figura naterior, el valor de la integral para $t = (k+1)h$ es igual al valor de kh mas el area añadida desde kh hasta $(k+1)h$. Entonces:

$$m[(k+1)h] = m(kh) + \frac{h}{2}[e[(k-1)h] + e(kh)] \quad (3.12)$$

Tomando la transformada z , obtenemos:

$$zM_{(z)} = M_{(z)} + \frac{h}{2}[zE_{(z)} + E_{(z)}] \quad (3.13)$$

Asi pues:

$$\frac{M_{(z)}}{E_{(z)}} = \frac{h}{2} \frac{[z+1]}{[z-1]} \quad (3.14)$$

Función de transferencia del controlador PID

La ecuación que representa la función de transferencia del controlador PID contiene las ecuaciones 3.14 y 3.11 se muestra a continuación.

La función de transferencia del controlador PID es:

$$G_{pid(z)} = k_p + \frac{k_i z}{z-1} + k_d \frac{z-1}{z} \quad (3.15)$$

Operando sobre la ecuación anterior se obtiene la siguiente expresión:

$$G_{pid(z)} = (k_p + k_i + k_d) \frac{z^2 - \frac{k_p+2k_d}{k_p+k_i+k_d}z + \frac{k_d}{k_p+k_i+k_d}}{z(z-1)} \quad (3.16)$$

en donde

$$k_p = k - \frac{kh}{2T_i} \quad (3.17)$$

$$k_i = \frac{kh}{T_i} \quad (3.18)$$

$$k_d = \frac{kT_d}{h} \quad (3.19)$$

Se puede observar que la ecuación 3.16 introduce dos ceros y dos polos. Como un criterio se puede decir que al implentar la acción integral la estabilidad se ve comprometida cuando el tiempo integral es pequeño. Por lo tanto uno de los ceros debe ir lo mas cerca posible del polo en $z = 1$ para poder conservar la propiedad de la acción integral, que es anular el error en estado estacionario, pero aún conservar las estabilidad relativa. El otro cero debe ser calculado para que el lugar de las raíces contenga a los polos deseados.

3.2.5. Sintonización del PID

Para este cometido debemos primero discretizar el modelo de la planta, por medio de la transformada estrella.

$$G_p = \frac{0,69}{s(0,13s + 1)} \quad (3.20)$$

La función de transferencia pulso $G_{(z)}$ de la planta precedida por el retenedor de orden cero puede obtenerse como sigue:

$$G_{p(z)} = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{0,69}{s(0,13s + 1)}\right] \quad (3.21)$$

$$= \frac{z - 1}{z} \mathcal{Z}\left[\frac{0,69}{s^2(0,13s + 1)}\right] \quad (3.22)$$

$$G_{p(z)} = \sum_{\text{polos } G_{p(\lambda)}} [\text{Residuos} * G_{p(\lambda)} \frac{1}{1 - z^{-1}e^{T\lambda}}] \quad (3.23)$$

$$G_{p(z)} = \frac{0,00859z + 0,007369}{z^2 - 1,631z + 0,6308} \quad (3.24)$$

A continuación, localizamos los polos ($z = 1$ y $z = 0,5767$) ³ y el cero ($z = -0,8578$) ⁴ de la función de transferencia discreta de la planta $G_{p(z)}$ en el plano z , tal y como se muestra en la figura 3.4. Si el punto P debe ser la localización del polo dominante ⁵ en lazo cerrado deseado en la parte superior del plano z , entonces los ángulos en el punto P deben ser iguales a $\pm 180^\circ$. Sin embargo, la suma de las contribuciones angulares en el punto P son:

$$\Sigma \phi_i - \Sigma \theta_i = 180^\circ \quad (3.25)$$

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = 180^\circ \quad (3.26)$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} & \text{arc tg} \frac{0,3122}{0,7145 + 0,8578} + \text{arc tg} \frac{0,3122}{0,7145 - A} + \text{arc tg}[180 - \frac{0,3122}{B - 0,7145}] \dots \\ & \dots - \text{arc tg} \frac{0,3122}{0,7145} - \text{arc tg} \frac{0,3122}{0,7145 - 0,5767} - 2 \text{arc tg}[180 - \frac{0,3122}{1 - 0,7145}] = 180^\circ \end{aligned}$$

Como se menciona en la sección 3.2.4 necesitamos localizar el cero de la acción integral lo mas cerca de $z = 1$ para conservar la estabilidad relativa. En ese sentido es que igualamos $B = 0,9994$. Con esta consideración obtenemos el valor de A , que representa el cero derivativo.

Despejamos A .

$$A = 0,3407$$

³En la figura 3.4 los polos están de color azul y denotados por una X

⁴En la figura 3.4 los ceros están de color rojo y denotados por una O

⁵En la figura 3.4 el polo dominante está de color verde y denotados por una X

3.2. DISEÑO DEL CONTROLADOR BASADO EN EL MÉTODO DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

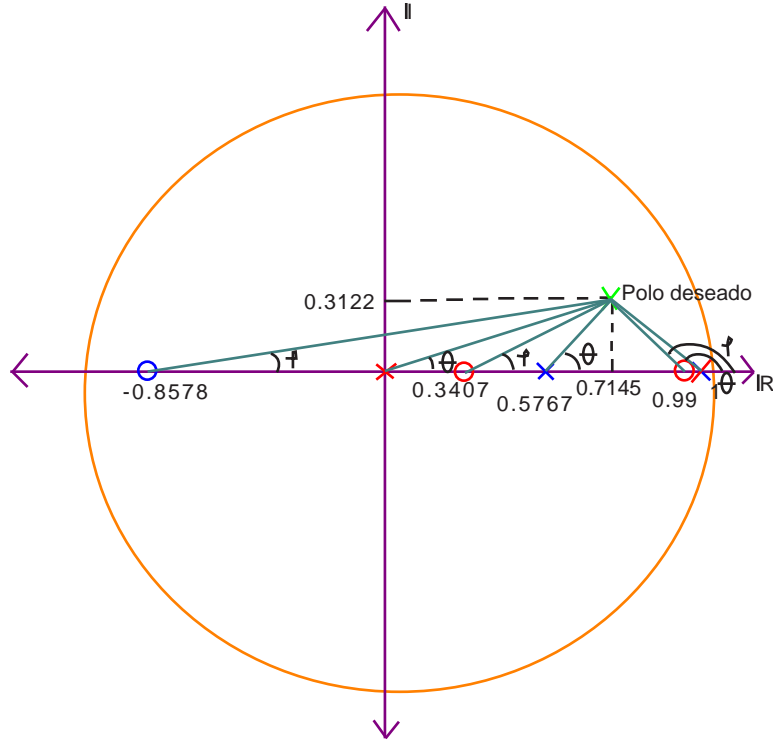


Figura 3.4: Diagrama del lugar geométrico de las raíces

Hasta este punto con los polos ubicados se asegura que el polo dominante pertenece a la solución del lugar geométrico de las raíces, es decir que para alguna ganancia k_{pid} de la ecuación 3.27 dicho polo será una raíz de la ecuación característica a lazo cerrado.

$$G_{cl} = \frac{K_{pid}G'_{pid}}{1 + K_{pid}G'_{pid}G_p} \quad (3.27)$$

Para obtener la ganancia del controlador sacamos el módulo a la ecuación 3.3 para obtener la ecuación 3.28.

$$|F_{(z)}| = 1 \quad (3.28)$$

Y reemplazado la ganancia de lazo abierto en $F_{(z)}$.

$$|K_{pid}G'_{pid}G_p| = 1 \quad (3.29)$$

Donde $G'_{pid} = \frac{G_{pid}}{K_{pid}}$ de la ecuación 3.16 y $K_{pid} = k_p + ki + k_d$

$$K_{pid} = \frac{1}{|G'_{pid}G_p|} \quad (3.30)$$

Entonces:

$$K_{pid} = \frac{1}{|G'_{pid}G_p|} \quad (3.31)$$

Calculamos K_{pid} con la ecuación 3.31. Y con eso obtenemos K , T_i y T_d acomodadas en la siguiente tabla.

parámetro	valor
K	10,49
T_i	103.66
T_d	0.0321

3.3. Implementación del microcontrolador

En la figura 3.5 :

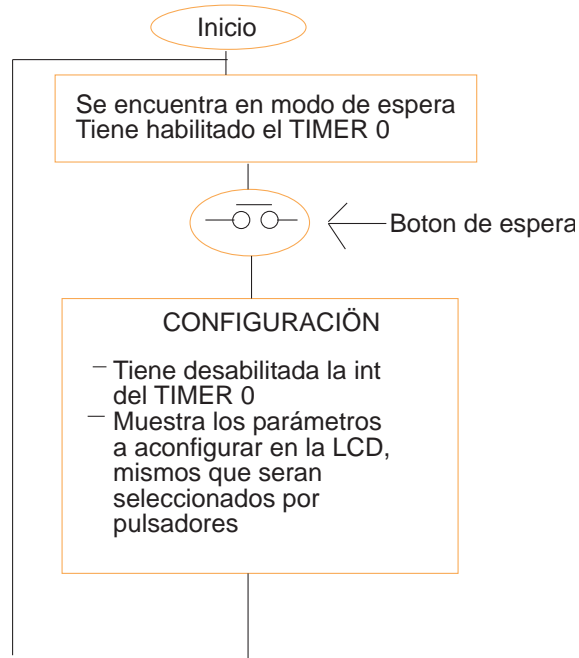


Figura 3.5: Diagrama de flujo

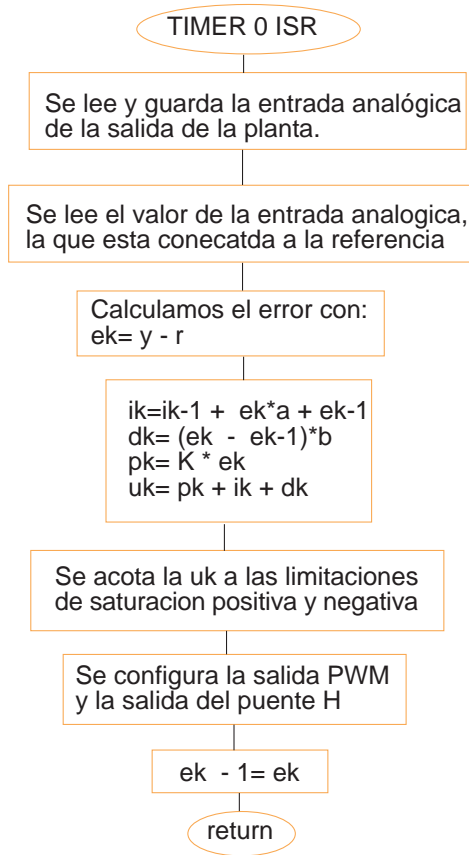


Figura 3.6: Diagrama de flujo

3.4. Análisis de sensibilidad a variación de parámetros

La función de sensibilidad fue hallada en la sección 2.3.4 como:

$$\mathcal{S}_G^{G_{cl}} = \frac{1}{1 + G_{(s)}}$$

Y expresada en el dominio de z .

$$\mathcal{S}_G^{G_{cl}} = \frac{1}{1 + G_{(z)}} \quad (3.32)$$

reemplazando la ganancia de lazo abierto.

$$\mathcal{S}_G^{G_{cl}} = \frac{1}{1 + G_{pid}(z)G_p(z)} \quad (3.33)$$

Y evaluando esta última con los valores obtenidos en los anteriores acápite.

$$\mathcal{S}_G^{G_{cl}} = \frac{z^4 - 2,631z^3 + 2,2618z^2 - 0,6308z}{z^4 - 2,4943z^3 + 2,1960z^2 - 0,7407z + 0,03993} \quad (3.34)$$

$$\mathcal{S}_G^{G_{cl}} = \frac{e^{4jwh} - 2,631e^{3jwh} + 2,2618e^{2jwh} - 0,6308e^{jwh}}{e^{4jwh} - 2,4943e^{3jwh} + 2,1960e^{2jwh} - 0,7407e^{jwh} + 0,03993} \quad (3.35)$$

Para poder calificar la atenuación a la variación de parámetros se hace el diagrama de bode para las Nuestro PID sintonizado. Y se tiene que aunque la frecuencia de corte sea de 4 rad/s no basta para cubrir el ancho de banda de trabajo Eso se puede interpretar físicamente como; cuando existen cambios abruptos el sistema de control puede no mantener su desempeño.

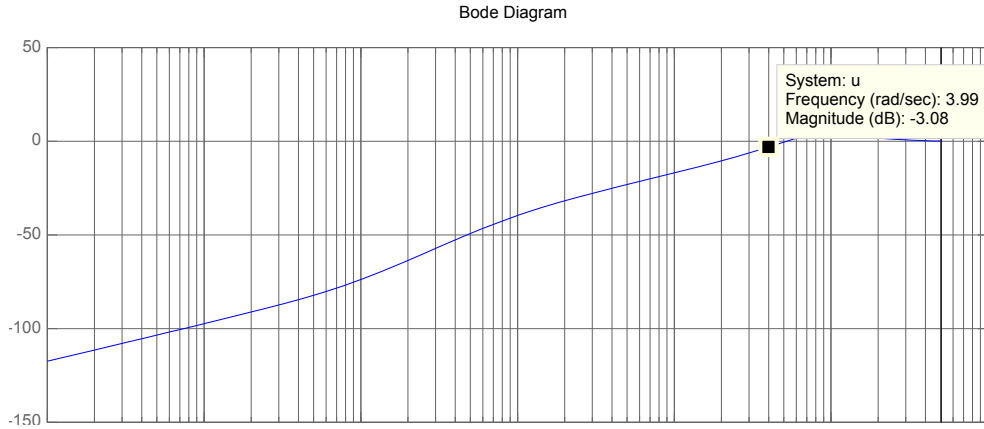


Figura 3.7: Diagrama de bode

3.5. Rechazo a perturbaciones

De acuerdo a anteriores analisis de este tópico se obtuvo la funcion de transferencia en el dominion de s que relaciona la entrada de perturbacion con la salida del sistema. Y nos muestra cuanto puede rechazar las perturbaciones en el dominio de la frecuencia. Pero para el caso discreto se tiene lo siguiente.

$$Y(s) = \frac{G_2W(z)}{1 - G_1G_2(z)(D(z) + K_m)} \quad (3.36)$$

$$(3.37)$$

Que por sus características no se puede obtener una función de sensibilidad como en los anteriores casos. Entonces el único análisis que se puede hacer es sobre el denominador y el numerador por separado. Analizando en que ancho de banda el numerador, osea $G_{2(s)}$, tiene menor ganancia que el denominador: $G_1 G_2(z)(D(z) + K_m)$. Entonces:

Analizamos $G_{1(s)}$ y $G_{2(s)}$:

$$G_{1(s)} = \frac{K_m}{R_a} \quad (3.38)$$

$$G_{2(s)} = \frac{1}{Js + b} \quad (3.39)$$

Reemplazando y llevandolo al plano z:

$$G_{1(s)} G_{2(s)} = \mathcal{Z}\left[\frac{\frac{K_m}{R_a}}{Js + b}\right] \quad (3.40)$$

$$D = G_{pid(z)} = K_{pid} \frac{(z - A)(z - B)}{z(z + 1)} \quad (3.41)$$

Por medio de un programa en MATLAB se obtienen los diagramas de bode de la figura 3.8 que nos muestra que la perturbacion de carga es siempre atenuada dentro del ancho de banda del trabajo pero que a partir de 0.01 [rad/s] se acercan peligrosamente la curva de color rojo con la verde mostrandonos que la atenuacion podria no ser suficiente.

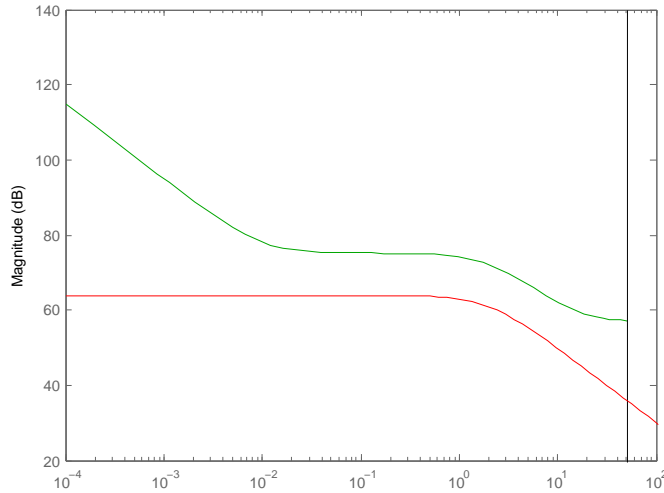


Figura 3.8: Diagrama de bode

3.6. Análisis de resultados de simulación e implementación

3.6.1. Desempeño del controlador

Para probar este aspecto se realizó la simulación en simulink. Y se compara las señales obtenidas en laboratorio con las simuladas.

3.6.2. Desempeño del controlador frente a la variación de parámetros

Variamos la ganancia de la planta y mostramos resultados

3.6.3. Desempeño del controlador frente a la perturbación de carga

Para probar este aspecto se realizó la simulación en simulink. Y se compara las señales obtenidas en laboratorio con las simuladas.

3.7. Conclusiones

$$\zeta = 0,52 \tag{3.42}$$

$$w_n = 7,74 \tag{3.43}$$

$$\tau = \frac{1}{\zeta w_n} = 0,25 \tag{3.44}$$

$$\tag{3.45}$$

Capítulo 4

Realimentación de estados

4.1. Introducción

En anteriores laboratorios nos basamos en metodos convencionales como el del lugar geometrico de las raices, para el analisis y diseño se sistemas de control, mismo que es util para sistemas lineales invariantes en el tiempo con una entrada y una salida y que estan basados en su funcion de tranferencia.

Un sistema de control moderno puede tener varias entradas y salidas, mismas que estan interrelacionadas de una manera complicada. Los métodos mas adecuados para analizar y sintetizar este tipo de sistemas son los metodos en el espacio de estados. Este metodo nos permite trabajar con toda clase de entradas, en lugar de una funcion especifica como la funcion impulso, escalon o senoidal. Ademas que nos permite incluir condiciones iniciales dentro del diseño, caracterisitca que no tienen los metodos de diseño convencionales anteriormente estudiados. A continuacion mostramos el sistema que vamos a conocer como *ecuación de estado en lazo abierto*.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (4.2)$$

La ley de control que se aplica es:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (4.3)$$

A esta acción se la identifica como realimentación de estados. Donde K es la matriz de ganancia de realimentación de estados. Sustituyendo ésta en las ecuaciones anteriores tenemos:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (4.4)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4.5)$$

El sistema a lazo cerrado es tambien lineal y estacionario. La figura 4.1 representa el esquema de control por realimentación de estados para un sistema SISO.

El control es estático, pues u depende solo de valores presentes de los estados x . Cuando los estados del sistema no pueden medirse, se recurre a estimarlos mediante un *Observador de estados*, que se construye \hat{x} a partir de mediciones de y y u . La combinación de un observador y realimentación de estados es un controlador *dinámico* por realimentación de salida.

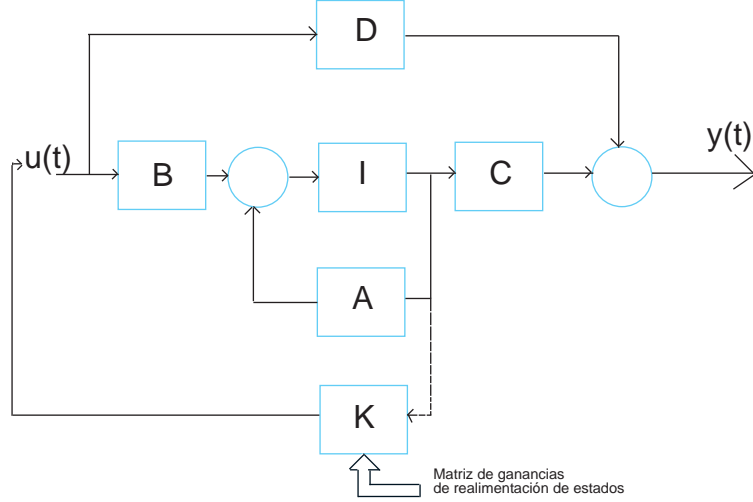


Figura 4.1: Planta mas matriz de ganancias

4.2. calculo de la matriz de ganancia

El calculo de la matriz de ganancias en el lazo de realimentación en el espacio de estados se determina por la ubicación de polos, es decir la introducción de esta ganancia hace que el sistema tenga los polos de diseño. Estos se encuentran con los mismos criterios ya vistos. Existe un aformula muy difundida, conocida como la fórmula de **Ackermann** para determinar la matriz de ganancias de realimentación de estado \mathbf{K} .

A partir de la formula 4.4 se define.

$$\tilde{A} = A - BK \quad (4.6)$$

La ecuación carateristica deseada es.

$$|sI - A + BK| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) \dots \quad (4.7)$$

$$|sI - A + BK| = s^n + a_0 s^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (4.8)$$

Por el teorema de Cayley Hamilton expresa.

$$\phi(\tilde{A}) = \tilde{A}^n + a_0 \tilde{A}^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (4.9)$$

Como $\phi(\tilde{A}) = 0$

$$K = (0 \quad 0 \quad 1) \mathcal{O}^{-1} \phi(A) \quad (4.10)$$

Donde \mathcal{O} es la matriz de observabilidad.

A partir de esto diseñamos para nuestra planta.

Condiciones de diseño: Llevamos G_p al EE:

$$\dot{x}_{(t)} = \begin{pmatrix} -7,40 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_{(t)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_{(t)} \quad (4.11)$$

$$y_{(t)} = (0 \quad 0,8) x_{(t)} \quad (4.12)$$

Calculamos las matrices discretas con:

$$A_d = e^{Ah} \quad (4.13)$$

$$B_d = \int e^{A\tau} d\tau B \quad (4.14)$$

$$C_d = C \quad (4.15)$$

Resulta:

$$A_d = \begin{pmatrix} 0,9926 & 0 \\ 0,019 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$B_d = \begin{pmatrix} 0,0009963 \\ 0,00000005 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Calculamos los polos en el plano s

$$S_{1,2} = -4 \pm 6,639i \quad (4.18)$$

Llevandolo al plano discreto:

$$z = e^{sh} \quad (4.19)$$

$$z_{1,2} = 0,996 \pm 0,0066i \quad (4.20)$$

ahora calculamos la matriz de controlabilidad:

$$C_o = (B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B) \quad (4.21)$$

$$C_o = \begin{pmatrix} 0,0009963 & 0,0009890 \\ 0,0000005 & 0,00015 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

cuyo rango es 2 por lo que podemos decir que es controlable

Con la fórmula de Ackerman calculamos la matriz de ganancia k

$$k = (0,6201 \quad 59,8583) \quad (4.23)$$

Matriz de compensación.

El problema de regulación se da cuando la referencia es nula. Lo que se pretende es que el sistema sea asintoticamente estable y que la respuesta a condiciones iniciales producidas por perturbaciones tienda a cero.

El problema de seguimiento cuando se pretende que la salida reproduzca asintoticamente la referencia. Es común que la referencia sea un valor constante. Si queremos solucionar el problema de seguimiento requerimos una condición en la ganancia de precompensación N . Esta se puede calcular con la siguiente fórmula.

$$N = \frac{1}{C_d(I - A + B_d k)^{-1} B_d} \quad (4.24)$$

$$N = 11,2981 \quad (4.25)$$

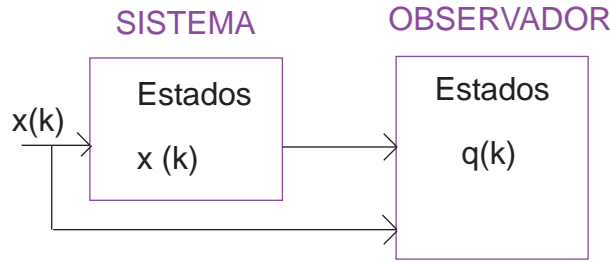
4.3. Diseño del observador

Figura 4.2: Observador

Lo que buscamos es que

$$q(k) \cong x(k)$$

para el observador tenemos la matriz de transición de estados:

$$\phi = A^2 - (z_1 + z_2)A + I(z_1 z_2) \quad (4.26)$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 16,7327 & 0 \\ -1,99 & 1,9920 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Calculamos la matriz de ganancias del observador

$$G = \phi \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

$$G = \begin{pmatrix} 0,0002099 \\ -0,00002497 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

$$F = A_d - GC_d \quad (4.30)$$

$$F = \begin{pmatrix} 0,00000001 & -0,0000167 \\ 0 & 0,00001998 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

La ecuación de estado del observador es:

$$q_{(k+1)} = Fq_{(k)} + Gy_{(k)} + Bu_{(k)} \quad (4.32)$$

Reemplazando tenemos

$$q_{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0,00000001 & -0,0000167 \\ 0 & 0,00001998 \end{pmatrix} q_{(k)} + \begin{pmatrix} 0,0002099 \\ -0,00002497 \end{pmatrix} y_{(k)} + \begin{pmatrix} 0,0009963 \\ 0,00000005 \end{pmatrix} u_{(k)} \quad (4.33)$$