

Evaluación experimental de la Reconstrucción en cuaterniones de la Matriz de Rotación con un Observador Óptimo/EKF en un Algoritmo de Navegación de Observadores en Cascada del Tipo Filtro Complementario en $SO(3)$

Ariel Iporre R.
Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ingeniería
Ingeniería Electrónica
La Paz, Bolivia
Email: aiporre@umsa.bo

Mauricio Améstegui
Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ingeniería
Ingeniería Electrónica
La Paz, Bolivia
Email: mamestegui@umsa.bo

Abstract—This work proposed a variation for a earlier navigation algorithm in the literature composed by $SO(3)$ complementary filters. Such modification determines the inclusion of a quaternion optimal observer to determine the rotation matrix using quaternions instead using a vectorial reconstruction approach. That proposal involves an experimental comparison between the original and modified method. The results show a 40 % increase for estimation quality while 21 % more complexity using this new approach. It also verifies the implementation in real noise environment.

Resumen—Este trabajo propone la variación de un algoritmo compuesto por Filtros Complementarios en el Espacio Ortogonal Especial de la literatura. La variación incorpora un Observador Óptimo EKF en cuaterniones para la determinación de la matriz de rotación de forma óptima en lugar de calcularla de forma directa en base al punto de estabilidad de los filtros. Está modificación implicó la comparación experimental entre el método original y el método modificado. En donde se determina hasta un 40 % de mejora en la calidad de la estimación, frente a 21 % más de tiempo de procesamiento o latencia de cálculo. Asimismo, los experimentos en condiciones reales comprueban la factibilidad de la implementación del algoritmo en condiciones adversas de ruido e incertidumbre de medición.

I. INTRODUCCIÓN

A medida que los sensores de navegación y los procesadores computacionales reducían su tamaño, los algoritmos de navegación debieron especializarse progresivamente en la búsqueda de una mejor precisión en la estimación de los estados de navegación. En esa línea, durante la década de los 60's, el desarrollo del Filtro Schmidt-Kalman [1] o más conocido como el Filtro de Kalman Extendido (EKF) incorpora los conceptos de estimación y observación de la teoría de control en la tecnología de los sistemas de navegación; este abordaje propone la aplicación del Filtro de Kalman [2] en un sistema no lineal para la resolución del problema de navegación, definido en la referencia [3]. De ahí en adelante,

varios autores desarrollan una gran cantidad de técnicas, e.g. filtro de Kalman extendido (EKF), algoritmos genéticos, redes neuronales, filtros de partículas o el algoritmo QUEST.

En la década de los noventa los algoritmos de navegación fueron constituidos por observadores no lineales desarrollados en el marco de la teoría de Lyapunov, evidenciable en los trabajos [4], [5], [6]. De donde deriva el énfasis de investigación de algoritmos de navegación alrededor de esta temática, se centra en la extensión de estas técnicas para la determinación de posición incorporando sensores basados en el *Sistema de Posicionamiento Global* (GPS), o cámaras Web.

De esa manera, los algoritmos de navegación modernos están siempre concretados en una técnica de estimación, y dependiendo de la aplicación diferentes sensores de navegación son usados. Y cuando el movimiento abarca grandes áreas, los sensores deben ser de muy buena calidad, o medir parámetros absolutos, como es el caso del GPS, la triangulación por medio del sistema global para comunicaciones móviles (Global System for Mobile Communications ó originalmente Groupe Spécial Mobile, GSM), o el GPS asistido (AGPS).

El EKF, usado en este trabajo para la determinación de la matriz de rotación, es celebrado como uno de los enfoques de filtros estadísticos de mayor éxito y que actualmente tiene un rango de desarrollo increíblemente amplio. Este algoritmo es prácticamente el algoritmo de navegación por excelencia e indudablemente la técnica más utilizada en los sistemas de navegación; esto es demostrable en la extensa lista de trabajos en variedades del Filtro de Kalman enfocado a esta temática que se pueden encontrar en la literatura, e.g.[7], [8], [9], [10], [11]. Dentro de las varias representaciones del EKF implementadas, priman las denominadas EKF multiplicativo (MEKF), los cuales mantienen la estructura general EKF, pero son desarrollados alrededor de un modelo de error [12], [13].

El EKF guarda una estrecha relación con el observador

óptimo del esquema de Luenberger. Y particularmente, se han concretado algunos Filtros de Kalman desde la teoría del control óptimo para la estimación de la información de navegación [14].

El limitado, pero novedoso método de [15] y [16] para el diseño de un observador no lineal como una extensión del observador de Luenberger, ha abierto una nueva brecha en metodologías para la determinación de la información de navegación. Lo anteriormente mencionado se constata en las referencias: [17], [18] y [19], los cuales aplican los conceptos de la teoría de Lyapunov en el diseño de varios observadores que calculan la información de navegación.

Este tipo de enfoque basa su análisis en la búsqueda de la condición de estabilidad en el sentido de Lyapunov. De manera similar, los filtros complementarios en un Grupo Ortogonal Especial $SO(3)$ ¹ de [20] y [21], definen las constantes de actualización en un grupo ortogonal especial a partir de funciones de Lyapunov; o los observadores invariantes como [22] y [23]; los cuales mantienen una simetría utilizando mediciones auxiliares del mismo parámetro que se estima.

También, se han hecho esfuerzos por combinar diferentes tipos de observadores, por ejemplo: en [24] se presenta una configuración de dos observadores en cascada para la estimación de la matriz de rotación y la estimación de la posición, donde los observadores son diseñados usando el análisis de estabilidad de Lyapunov; o en [21] que también combina dos observadores en cascada para la determinación de la orientación y la posición, con ambos observadores con una configuración especial parecida al filtro complementario en frecuencia.² A partir de esto, la idea en este trabajo es el establecimiento de un *algoritmo de navegación* compuesto de una serie de *observadores de estado*, que busca una mejora de la estimación de la información de navegación.

De manera general, existen dos puntos importantes que se abordan en el desarrollo de este proyecto:

- El primero es la modificación del *algoritmo de observadores no lineales tipo filtro complementario en un grupo ortogonal especial $SO(3)$ de Mahony y Scandaroli* (desarrollado por estos dos autores en las referencias [20], [21]) con la inclusión de un observador óptimo tipo Filtro de Kalman Extendido (EKF)³ para la determinación de la matriz de rotación.
- Como segundo punto se tiene el desarrollo de una serie de experimentos que establecen la evaluación experimental para comprobar una mejora del algoritmo modificado con respecto al algoritmo original.

II. PROBLEMA DE NAVEGACIÓN: ALGORITMO DE NAVEGACIÓN DE MAHONY-SCANDAROLI

El sistema de navegación, con el afán de determinar las condiciones de movimiento, está encargado de responder las

¹Un Grupo Ortogonal Especial está constituido por un grupo de matrices de transformación que hacen rotaciones propias a los elementos de Espacio Euclídeo.

²Donde, el observador de orientación es el usado en [20].

³El filtro de Kalman, fue desarrollado Rudolf Kalman en [[2]]

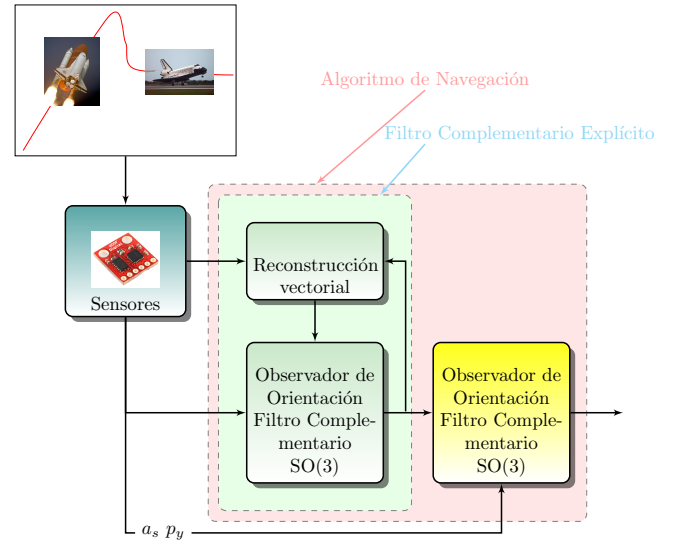


Figura 1. Esquema simplificado del algoritmo de Mahony-Scandaroli. Tell us about.

dos preguntas fundamentales de navegación: dónde estoy? y hacia dónde quiero ir?. Para lograr esto, el sistema de navegación usa la medición de parámetros del medio o que son consecuencia del propio movimiento, y así, por medio de un procedimiento, recuperar las variables que describen: tanto la situación espacial como su ritmo de cambio. A partir de esto, se puede decir que el sistema de navegación establece una relación complementaria entre dos elementos fundamentales:

1. El procedimiento de reconstrucción definido como el algoritmo de navegación.
2. Y el grupo de los sensores de navegación definido como los sensores de navegación.

En donde, el algoritmo de navegación reconstruye la información de navegación (variables que describen el movimiento) a partir de información corrompida y parcial del movimiento que es proporcionada por los sensores de navegación. De este modo, el planteamiento de un algoritmo de navegación propone el reto de:

Construir el sistema que determina la información de navegación⁴ (denotada como X) a partir del conjunto de mediciones obtenidas de los denominados sensores de navegación, este último conjunto es denominado *información sensorial disponible* (denotada como S .)

La solución de este problema, desde el enfoque de Mahony-Scandaroli, deriva en el algoritmo de navegación de filtros complementarios en $SO(3)$ en cascada, esquematizado en dia-

⁴En el presente trabajo, el conjunto de variables, compuestas por: la velocidad lineal, velocidad angular, posición y orientación, es denominado *información de navegación*. Este describe el movimiento de un cuerpo rígido de seis grados libertad.

grama de bloques de la Figura 1. Este propone la combinación en cascada de dos observadores del tipo filtro complementario en SO(3): el observador de orientación y el observador de posición. En donde, el observador orientación toma parte de la medición de los sensores de navegación⁵: la medición de la matriz de rotación R_y y la medición de la velocidad angular Ω_s , para la estimación de:

- $\hat{\Theta}$: La orientación en términos de los ángulos de Euler .
- $\hat{\Omega}$: La velocidad angular en $\{\mathcal{B}\}$, donde $\{\mathcal{B}\}$ denota un marco referencial cartesiano fijo al cuerpo desde donde se realiza la medición de la aceleración y velocidad angular.
- \hat{R} : El error de estimación de la matriz de rotación, definida a través de la matriz de transformación $\{\mathcal{E}\} \leftrightarrow \{\mathcal{B}\}$, donde $\{\mathcal{E}\}$ denota el marco referencial de estimación, el cual teóricamente converge hacia $\{\mathcal{B}\}$ y se considera el resultado de la estimación de $\{\mathcal{B}\}$ por el observador de orientación .
- \hat{R} : La estimación de la matriz de rotación, definida como la matriz de transformación $\{\mathcal{E}\} \leftrightarrow \{\mathcal{A}\}$, donde $\{\mathcal{A}\}$ denota el marco referencial inercial, con dirección y origen fijos en un punto sobre la tierra.

En cascada, el observador de posición tipo Filtro complementario en SO(3), toma el resto de las variables incluidas en S (la medición de la aceleración a_s y la medición de la posición p_y), junto con las matrices de transformación determinadas por el anterior observador, para obtener:

- \hat{p} : La estimación de la posición en $\{\mathcal{A}\}$.
- \hat{v} : La estimación de la velocidad en $\{\mathcal{A}\}$.

Finalmente, los dos grupos de variables estimadas por ambos observadores conforman la *estimación de la información de navegación*, que puede ser denotada por el vector columna $X = [\hat{p} \ \hat{v} \ \hat{\Theta} \ \hat{\Omega}]$.

Las matriz de rotación medida R_y , en el enfoque de Mahony proviene de una fórmula de reconstrucción vectorial, basada en la medición de valores vectoriales en $\{\mathcal{B}\}$ (v_i), su valores teóricos en el $\{\mathcal{A}\}$ ($v_{i,0}$), y el punto de estabilidad encontrado por el observador de orientación para la matriz de rotación (\hat{R}), este efecto es visible en la siguiente ecuación, en la que se toma en cuenta n mediciones vectoriales:

$$R_y = \sum_{i=1}^n (v_{i,0} \times \hat{R}(v_i) \times \quad (1)$$

En resumen, el enfoque original del algoritmo de observadores en cascada de Mahony-Scandaroli, resuelve la determinación de la información de navegación en tres niveles de procesamiento: a) la reconstrucción vectorial de la matriz de rotación R_y usando la medición de un acelerómetro a_s y un magnetómetro m_s ⁶; b) la determinación de la estimación de la velocidad angular $\hat{\Omega}$, la estimación de la orientación en términos de los ángulos de Euler $\hat{\Theta}$, y la estimación de la

matriz de rotación \hat{R} con su respectivo error \tilde{R} ⁷, los que se determinan usando las señales de la reconstrucción vectorial y la medición de un giroscopio Ω_s ; c) la determinación de la estimación de la posición \hat{p} , y la velocidad lineal \hat{v} a partir de las anteriores salidas, es decir \tilde{R} y \hat{R} , junto con la medición de posición p_y y la aceleración a_s .

Como señala Mahony, la principal desventaja en la formulación de los filtros complementarios pasivo y directo es la sensibilidad a la matriz de entrada R_y . Esta matriz es usada en el mapeo de la medición de la velocidad angular al marco inercial $\{\mathcal{A}\}$, y por esta razón, la determinación de esta matriz juega un papel central en el desempeño final del sistema. Considerando esto la determinación desde el enfoque de la reconstrucción vectorial del Mahony-Scandaroli, la reconstrucción sub-óptima basada en la resolución de la ecuación de Lyapunov incorpora una sensibilidad extra: a ruidos de medición, sesgos de medición y los estados transitorios de asentamiento. Esto último consolida relaciones no lineales de alto orden (ver ecuación 1) en el lazo de realimentación y el sistema dinámico del error de estimación estimación.

III. RECONSTRUCCIÓN ÓPTIMA DE LA MATRIZ DE ROTACIÓN

Considerando las desventajas señalas en la sección anterior, se indentifica que el mejorar la reconstrucción de la matriz de rotación puede traer mejoras en en el desempeño general del algoritmo. Para ello, se buscará solucionar de manera óptima el problema de determinación de la matriz de rotación a partir de mediciones vectoriales (planteado en la referencia [20]), el cual indica que: *a partir de la medición de cantidades vectoriales conocidas respecto a $\{\mathcal{B}\}$, la matriz de rotación puede ser determinada en el argumento que minimiza la función de coste definida como*

$$R^* = \arg \min_R \left\{ \sum_i |v_{0,i} - Rv_{m,i}|^2 \right\} \quad (2)$$

Esta ecuación indica que la matriz de rotación óptima R^* es obtenida el argumento que minimiza la función de coste compuesta por la suma de los cuadrados de los módulos de la diferencia de: los valores de las mediciones vectoriales rotadas al marco inercial ($Rv_{m,i}$), respecto a los valores teóricos conocidos de dichas cantidades vectoriales ($v_{0,i}$)⁸

III-A. Determinación óptima de la matriz de rotación a partir del modelo de medición del vector gravitacional en cuaterniones.

Se propone la determinación de la matriz de rotación en la interpretación del fenómeno de inclinación en la medición de campo gravitacional, donde dicha medición se efectua con acelerómetro fijo al $\{\mathcal{B}\}$ en movimiento rotacional respecto al

⁵Elementos del conjunto de *información sensorial disponible S*

⁶El desarrollo teórico y práctico de Mahony en [20] demuestra que no es absolutamente necesario incluir ambas mediciones. Y si el caso fuese de que alguna de las señales es demasiado ruidosa se puede prescindir de la misma.

⁷Definida como $\tilde{R} = R_y \hat{R}^T$

⁸Donde los sub-índices corresponden a las distintos valores vectoriales medibles.

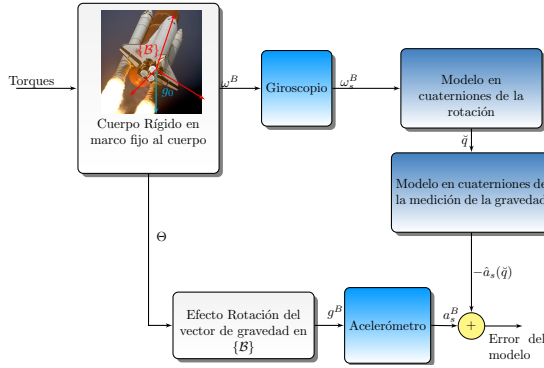


Figura 2. Caracterización del error del modelo de medición.

$\{\mathcal{A}\}$. En estas condiciones, se identifica el cuaternión unitario⁹ en la relación:

$$R^*(\check{q}) = R \left(\arg \min_{\check{q}} \{a_s - R^T(\check{q})g_0\} \right) \quad (3)$$

En la que, usando el modelo de rotación en cuaterniones, se ajusta de forma óptima el cuaternión unitario \check{q} que rota el valor teórico de la gravedad g_0 hacia la medición de la inclinación campo vectorial gravitatorio a_s , de forma tal que se resuelve problema de optimización.

El mencionado procedimiento se muestra en la figura 2, la cual considera el fenómeno de rotación del cuerpo rígido excitado por *torques* desconocidos descrito en dos variables: la orientación y su velocidad de cambio, es decir en las salidas Θ y Ω , respectivamente. Estos parámetros son medidos:

1. La velocidad angular por un giroscopio, obteniendo Ω_s .
2. La orientación Θ , de manera indirecta, midiendo la inclinación del vector gravitacional respecto al marco fijo al cuerpo $\{\mathcal{B}\}$, usando un acelerómetro.

La medición de la velocidad angular es la entrada con la que el modelo cinemático en cuaterniones determina la evolución de la rotación, en términos del cuaternión unitario necesario para rotar el valor teórico de la gravedad en el marco referencial inercial $([0,0,g_0]^T)$, alineando el mismo con la medición vectorial. Esto es posible, dado que el cuaternión se define en las rotaciones de los ángulos de Euler (ver [26]) permitiendo emular el fenómeno de inclinación de la medición vectorial de la gravedad. A partir de ello, la resta del valor emulado con señal proveniente del acelerómetro a_s (excitada por la efecto de la rotación del vector de la gravedad en $\{\mathcal{B}\}$) se define el error de \check{q} en ese tiempo.

De esa manera, el cuaternión unitario, denotado por $\check{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ en $\mathbb{Q} : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^3$, contiene las rotaciones necesarias para transformar un vector del $\{\mathcal{B}\}$ al $\{\mathcal{A}\}$; cuya derivada constituye el modelo cinemático de la rotación como

un producto de cuaterniones¹⁰ de la velocidad angular en \mathbb{Q}^{11} ($\check{\Omega}$) y el cuaternión unitario (\check{q}) como sigue¹²:

$$\dot{\check{q}} = \frac{1}{2} \check{q} \otimes \check{\Omega} \quad (4)$$

Que escrita matricialmente [28] esta es:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\Omega^T \\ \Omega & \Omega_\times \end{bmatrix} \check{q} \quad (5)$$

Finalmente el modelo cinemático de la rotación que incorpora el *bias* de medición de la velocidad angular (b_Ω) se define en la ecuación, con Ω_s la medición de dicha velocidad:

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -(\Omega_s - b_\Omega)^T \\ (\Omega_s - b_\Omega) & (\Omega_s - b_\Omega)_\times \end{bmatrix} \check{q} \quad (6)$$

$\dot{b}_\Omega = 0$

Seguidamente, el modelo de la medición de la gravedad usando el cuaternión unitario [29] se expresa en:

$$\hat{a}_s = \check{q} \otimes \check{g}_0 \otimes \check{q} = Rg_0 = g_0 \begin{bmatrix} 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

En resumen, el proceso que teóricamente determinaría la matriz de rotación usando el modelo en cuaterniones asume que es posible determinar la orientación en el tiempo T : ajustando los parámetros del modelo en cuaterniones en función a un historial de mediciones exactas del vector gravitacional a_s ; de forma tal que se busca la evolución de \check{q} que gira al vector gravitacional exactamente en el valor de $\hat{a}_s(T)$, reduciendo así el *error del modelo* a cero. Entonces, a partir de las componentes de \check{q} los elementos de la matriz de rotación serían cabalmente determinadas [29] en:

$$R^T = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Lamentablemente, dado que en la práctica el proceso de medición incorpora una enorme cantidad de lagunas, impediría encontrar el valor exacto (y seguramente, ni siquiera el óptimo) de la matriz de rotación usando esta metodología. Por consiguiente, parece oportuno emplear ciertas correcciones que puedan eliminar coherentemente las imperfecciones, y así, depurar el valor de \check{q} buscando reducir el *Error del Modelo* aproximadamente a cero de la mejor manera posible.

Este último concepto va muy de la mano con la definición de optimización. Puede ser interpretado como la búsqueda óptima de los estados del cuaternión unitario y el *bias* del giroscopio que reducen el costo de desviación de la medición de la gravedad de *manera óptima* o de *la mejor manera*, el cual es el objetivo del presente trabajo.

¹⁰Denotada por el símbolo \otimes

¹¹Definida como un cuaternión puro, en donde la parte real es cero, y las componentes están repartidas en i , j y k , para la velocidad angular en los ejes x , y y z , respectivamente

¹²Para una descripción específica y deducción de las ecuaciones de cuaterniones usadas ver [[27]].

⁹Los cuaterniones son una generalización de los números complejos en cuatro dimensiones, introducidas por Hamilton en 1853. El lector interesado en un desarrollo histórico de la teoría en cuaterniones, ver referencia [[25]]

III-B. EKF dual del control óptimo

IV. ASA

[?]

IV-1. Subsubsection Heading Here: Subsubsection text here.

V. CONCLUSION

The conclusion goes here.

ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to thank...

REFERENCIAS

- [1] S. Schmidt, *Applications of state space methods to navigation problems in Advances in Control Systems*. NY Academic Press, 1966.
- [2] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, vol. 82, pp. 35–45, 1960.
- [3] G. S. S. Schmidt and L. McGee, "Application of statistical filter theory to the optimal estimation of position and velocity on board a circumpolar vehicle," Ames Research Center, Tech. Rep., 1962.
- [4] A. Lukyanov, S. Dodds, and J. Vittek, "Observer-based attitude control in the sliding mode," pp. 639–671, 1996.
- [5] S. Nicosia and P. Tomei, "Nonlinear observer and output feedback attitude control of spacecraft," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-28, no. 4, pp. 970–977, 1996.
- [6] M. Algrain and M. Lee, "Nonlinear observer and output feedback attitude control of spacecraft," pp. 638–645, 1997.
- [7] F. Faruqi and K. Turner, "Extended kalman filter synthesis for integrated global positioning/inertial navigation systems," *EL SEVIER Applied Mathematics and Computation*, vol. 115, pp. 213–227, 2000.
- [8] J. Marins, X. Yun, E. Bachmann, R. McGhee, and M. Zyda, "An extended kalman filter for quaternion-based orientation estimation using marg sensors," in *Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems Maui, Hawaii, USA, Oct. 29 - Nov. 03, 2001*. Maui, Hawaii, USA: IEEE, 2001, pp. 2003–2011.
- [9] M. Gandhi and L. Mili, "Robust extended kalman filter for transient tracking and outlier suppression," *Latex Class Files*, vol. 6, no. 1, 2007.
- [10] A. M. Sabatini, "Quaternion-based extended kalman filter for determining orientation by inertial and magnetic sensing," *IEEE Transaction on biomedical engineering*, no. 7, pp. 1346–1356, 2006.
- [11] A. K. V. Bistrows, "Adaptive extended kalman filter for aided inertial navigation system," *ELECTRONICS AND ELECTRICAL ENGINEERING Automations and Robotics*, no. 6, pp. 37–40, 2006.
- [12] B. Friedland, "Analysis strap-down navigation using quaternions," *IEEE transactions on aerospace and electronic systems*, vol. 14, no. 5, 1978.
- [13] D. Benson, "A comparison of two approaches to pure inertial and doppler-inertial error analysis," *IEEE aerospace and Electronic Systems*, vol. 11, no. 4, pp. 447–455, 1975.
- [14] R. Smith, "An h-type filter for gps-based attitude estimation," 1995.
- [15] S. Kou, D. Elliott, and T. Tarn, "Exponential observers for nonlinear dynamic systems," *Information and Control*, vol. 29, pp. 393–428, 1975.
- [16] F. Thau, "Observers for nonlinear dynamic systems," *International Journal of Control*, vol. 17, p. 471, 1975.
- [17] B. Vik and T. Fossen, "A nonlinear observer for gps and ins integration," in *IEEE conference on Decision and control*, 2001, pp. 2956–2961.
- [18] J. Thienel, "A clipped nonlinear space craft attitude controller and observer with an unknow constad gyro bias and gyro noise," *IEEE trans. on automatic control*, vol. 8, pp. 2011–2015, 2003.
- [19] M. Hua, "Attitude observers for accelerated rigid bodies based on gps and ins measurements," pp. 8071–8076, 2009.
- [20] B. Mahony, T. Hamel, and J.-M. Pfimlin, "Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group," in *IEEE Transactions Automatic Control*, vol. 53, 2008, pp. 1203–1218.
- [21] G. Scandaroli, P. Morin, and G. Silveira, "Nonlinear filter design for pose and imu bias estimation," *IEEE conf. Decision and Control*, 2011.
- [22] P. M. S. Bonnabel and P. Rouchon, "Symmetry preserving observers," *IEEE trans. on automatic control*, vol. 53, pp. 2514–2526, 2008.
- [23] P. Martin and E. Salaun, "An invariant observer for earth velocity aided attitude heading reference systems," in *IFAc World conf.*, vol. 53, 2008, pp. 9857–9864.
- [24] V. J. Silvestre C. and O. P., "A nonlinear gps/imu observer based for rigid body attitude and position estimation," in *IEEE conf. Decision and Control*, 2008, pp. 1255–1260.
- [25] B. Warden, *Harmony of the world 75 years of mathematics magazine: Hamilton's Discovery of Quaternions*. Mathematical association of American Magazine, 143–150, 2007.
- [26] S. L. Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups*. DUDA, 1986.
- [27] J. Kuipers, *Quaternions and rotation sequences: A primer with applications to orbits, aerospace and virtual reality*. Princeton University Press, 2002.
- [28] G. Zhong-yu, N. Xiao-ji, and G. Mei-feng, "Quaternion-based kalman filter for micro-machined strapdown attitude heading reference system," *Chinese Journal Aeronautic*, no. 3, pp. 171–175, 2002.
- [29] J. Solà, "Quaternion kinematics for the error-state kf," Reporte, 2012.