

# Evaluación experimental de la Reconstrucción en cuaterniones de la Matriz de Rotación con un Observador Óptimo/EKF en un Algoritmo de Navegación de Observadores en Cascada del Tipo Filtro Complementario en $SO(3)$

Autor 1.\* y Autor 2.\*

\*Ingeniería Electrónica-Facultad de Ingeniería  
Universidad Mayor de San Andrés, La Paz, Bolivia  
Email: aiporre@umsa.bo, mamestegui@umsa.bo

**Abstract**—This work proposed a variation for a earlier navigation algorithm in the literature composed by  $SO(3)$  complementary filters. Such modification determines the inclusion of a quaternion optimal observer to determine the rotation matrix instead using a vectorial reconstruction approach, that proposal involves an experimental comparison between the original and modified method. The results show a 40 % increase for estimation quality while 21 % more complexity using this new approach. It also verifies the implementation in real noise environment.

## I. INTRODUCCIÓN

A medida que los sensores de navegación y los procesadores computacionales reducían su tamaño, los algoritmos de navegación debieron especializarse progresivamente en la búsqueda de una mejor precisión en la estimación de los estados de navegación. En esa línea, durante la década de los 60's, el desarrollo del Filtro Schmidt-Kalman [1] o más conocido como el Filtro de Kalman Extendido (EKF) incorpora los conceptos de estimación y observación de la teoría de control en la tecnología de los sistemas de navegación; este abordaje propone la aplicación del Filtro de Kalman [2] en un sistema no lineal para la resolución del problema de navegación, definido en la referencia [3]. De ahí en adelante, varios autores desarrollan una gran cantidad de técnicas, e.g. filtro de Kalman extendido (EKF), algoritmos genéticos, redes neuronales, filtros de partículas o el algoritmo QUEST.

En la década de los noventa los algoritmos de navegación fueron constituidos por observadores no lineales desarrollados en el marco de la teoría de Lyapunov, evidenciable en los trabajos [4], [5], [6]. De donde deriva el énfasis de investigación de algoritmos de navegación alrededor de esta temática, se centra en la extensión de estas técnicas para la determinación de posición incorporando sensores basados en el *Sistema de Posicionamiento Global* (GPS), o cámaras Web.

De esa manera, los algoritmos de navegación modernos

están siempre concretados en una técnica de estimación, y dependiendo de la aplicación diferentes sensores de navegación son usados. Y cuando el movimiento abarca grandes áreas, los sensores deben ser de muy buena calidad, o medir parámetros absolutos, como es el caso del GPS, la triangulación por medio del sistema global para comunicaciones móviles (Global System for Mobile Communications ó originalmente Groupe Spécial Mobile, GSM), o el GPS asistido (AGPS).

El EKF, usado en este trabajo para la determinación de la matriz de rotación, es celebrado como uno de los enfoques de filtros estadísticos de mayor éxito y que actualmente tiene un rango de desarrollo increíblemente amplio. Este algoritmo es prácticamente el algoritmo de navegación por excelencia e indudablemente la técnica más utilizada en los sistemas de navegación; esto es demostrable en la extensa lista de trabajos en variedades del Filtro de Kalman enfocado a esta temática que se pueden encontrar en la literatura, e.g.[7], [8], [9], [10], [11]. Dentro de las varias representaciones del EKF implementadas, priman las denominadas EKF multiplicativo (MEKF), los cuales mantienen la estructura general EKF, pero son desarrollados alrededor de un modelo de error [12], [13].

El EKF guarda una estrecha relación con el observador óptimo del esquema de Luenberger. Y particularmente, se han concretado algunos Filtros de Kalman desde la teoría del control óptimo para la estimación de la información de navegación [14].

El limitado, pero novedoso método de [15] y [16] para el diseño de un observador no lineal como una extensión del observador de Luenberger, ha abierto una nueva brecha en metodologías para la determinación de la información de navegación. Lo anteriormente mencionado se constata en las referencias: [17], [18] y [19], los cuales aplican los conceptos de la teoría de Lyapunov en el diseño de varios observadores que calculan la información de navegación.

Este tipo de enfoque basa su análisis en la búsqueda de la condición de estabilidad en el sentido de Lyapunov. De manera similar, los filtros complementarios en un Grupo Ortogonal

Especial  $SO(3)$ <sup>1</sup> de [20] y [21], definen las constantes de actualización en un grupo ortogonal especial a partir de funciones de Lyapunov; o los observadores invariantes como [22] y [23]; los cuales mantienen una simetría utilizando mediciones auxiliares del mismo parámetro que se estima.

También, se han hecho esfuerzos por combinar diferentes tipos de observadores, por ejemplo: en [24] se presenta una configuración de dos observadores en cascada para la estimación de la matriz de rotación y la estimación de la posición, donde los observadores son diseñados usando el análisis de estabilidad de Lyapunov; o en [21] que también combina dos observadores en cascada para la determinación de la orientación y la posición, con ambos observadores con una configuración especial parecida al filtro complementario en frecuencia.<sup>2</sup> A partir de esto, la idea en este trabajo es el establecimiento de un *algoritmo de navegación* compuesto de una serie de *observadores de estado*, que busca una mejora de la estimación de la información de navegación.

De manera general, existen dos puntos importantes que se abordan en el desarrollo de este proyecto:

- El primero es la modificación del *algoritmo de observadores no lineales tipo filtro complementario en un grupo ortogonal especial  $SO(3)$  de Mahony y Scandaroli* (desarrollado por estos dos autores en las referencias [20], [21]) con la inclusión de un observador óptimo tipo Filtro de Kalman Extendido (EKF)<sup>3</sup> para la determinación de la matriz de rotación.
- Como segundo punto se tiene el desarrollo de una serie de experimentos que establecen la evaluación experimental para comprobar una mejora del algoritmo modificado con respecto al algoritmo original.

## II. PROBLEMA DE NAVEGACIÓN: ALGORITMO DE NAVEGACIÓN DE MAHONY-SCANDAROLI

La solución al problema de navegación se delimita en la determinación las dos condiciones que describen el movimiento de un cuerpo: la situación espacial (¿dónde estoy?); y el ritmo de cambio de dicha situación (¿hacia dónde voy?). Es así, que con el afán solucionar este problema, el algoritmo de navegación dentro del sistema de navegación interpreta la medición de parámetros del medio o que son consecuencia del propio movimiento, para recuperar las variables que describen: tanto la situación espacial como su ritmo de cambio; o dicho de otra manera reconstruye la información de navegación<sup>4</sup> a partir de información corrompida y parcial relacionada con las variables del movimiento, la cual es proporcionada por sensores de navegación.

Tomando en cuenta esto, el problema de navegación se traduce en el reto del planteamiento de un algoritmo de navegación, es decir contruir la secuencia de operaciones para

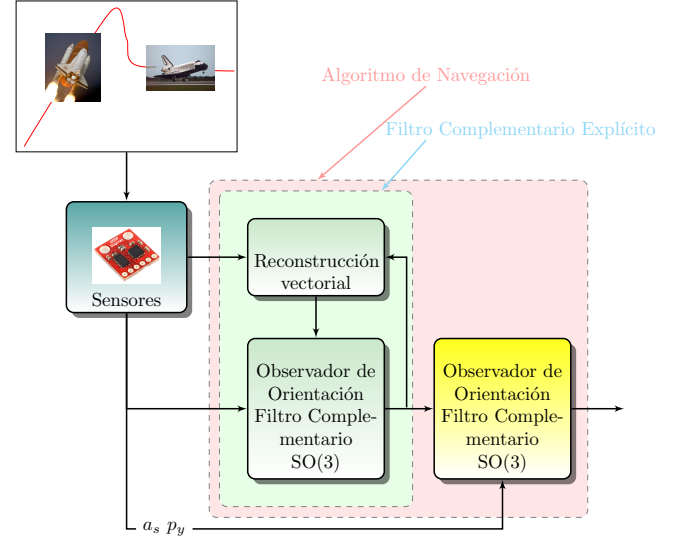


Figura 1. Esquema simplificado del algoritmo de Mahony-Scandaroli. Tell us about.

determinación la información de navegación<sup>5</sup>( $X$ ), a partir del conjunto, denominado *información sensorial disponible* ( $S$ ), que se compone de las mediciones obtenidas de sensores de navegación

La solución de este problema, desde el enfoque de Mahony-Scandaroli, deriva en el algoritmo de navegación de filtros complementarios en  $SO(3)$  en cascada, esquematizado en diagrama de bloques de la Figura 1. Este propone la combinación en cascada de dos observadores del tipo filtro complementario en  $SO(3)$ , el observador de orientación y el observador de posición; en donde el observador orientación utiliza la medición de la velocidad angular  $\Omega_s$ <sup>6</sup> y la matriz de rotación  $R_y$  proveniente de una fórmula de reconstrucción vectorial que conjuga: la medición de valores vectoriales en  $\{B\}$  ( $v_i$ ), sus valores teóricos en el  $\{A\}$  ( $v_{i,0}$ ), y el punto de estabilidad encontrado por el observador de orientación para la matriz de rotación ( $\hat{R}$ , estos relacionados en la siguiente ecuación, que toma en cuenta  $n$  mediciones vectoriales).

$$R_y = \sum_{i=1}^n (v_{i,0}) \times \hat{R}(v_i) \times \quad (1)$$

El observador de orientación toma estas variables para la determinación de:

- $\hat{\Theta}$ : La orientación en términos de los ángulos de Euler .
- $\hat{\Omega}$ : La velocidad angular en  $\{B\}$ , donde  $\{B\}$  denota un marco referencial cartesiano fijo al cuerpo desde donde se realiza la medición de la aceleración y velocidad angular.

<sup>1</sup>Un Grupo Ortogonal Especial está constituido por un grupo de matrices de transformación que hacen rotaciones propias a los elementos de Espacio Euclídeo.

<sup>2</sup>Donde, el observador de orientación es el usado en [20].

<sup>3</sup>El filtro de Kalman, fue desarrollado Rudolf Kalman en [[2]]

<sup>4</sup>Variables que describen el movimiento

<sup>5</sup>En el presente trabajo, el conjunto de variables, compuestas por: la velocidad lineal, velocidad angular, posición y orientación, es denominado *información de navegación*. Este describe el movimiento de un cuerpo rígido de seis grados libertad.

<sup>6</sup>Elemento de conjunto de *información sensorial disponible*  $S$

- $\tilde{R}$ : El error de estimación de la matriz de rotación, definida a través de la matriz de transformación  $\{\mathcal{E}\} \leftrightarrow \{\mathcal{B}\}$ , donde  $\{\mathcal{E}\}$  denota el marco referencial de estimación, el cual teóricamente converge hacia  $\{\mathcal{B}\}$  y se considera el resultado de la estimación de  $\{\mathcal{B}\}$  por el observador de orientación.
- $\hat{R}$ : La estimación de la matriz de rotación, definida como la matriz de transformación  $\{\mathcal{E}\} \leftrightarrow \{\mathcal{A}\}$ , donde  $\{\mathcal{A}\}$  denota el marco referencial inercial, con dirección y origen fijos en un punto sobre la tierra.

Siguiendo este esquema del algoritmo de navegación de Mahony-Scandarolli, en cascada el observador de posición tipo Filtro complementario en  $SO(3)$ , toma el resto de las variables incluidas en  $S$  (la medición de la aceleración  $a_s$  y la medición de la posición  $p_y$ ), junto con las matrices de transformación determinadas por el anterior observador, para obtener:

- $\hat{p}$ : La estimación de la posición en  $\{\mathcal{A}\}$ .
- $\hat{v}$ : La estimación de la velocidad en  $\{\mathcal{A}\}$ .

Finalmente, los dos grupos de variables estimadas por ambos observadores conforman la *estimación de la información de navegación*, que puede ser denotada por el vector columna  $X = [\hat{p} \ \hat{v} \ \hat{\Omega} \ \hat{\Theta}]$ .

Como señala Mahony, la principal desventaja en la formulación de los filtros complementarios pasivo y directo es la sensibilidad a la matriz de entrada  $R_y$ . Esta matriz es usada en el mapeo de la medición de la velocidad angular al marco inercial  $\{\mathcal{A}\}$ , y por esta razón, la determinación de esta matriz juega un papel central en el desempeño final del sistema. Considerando esto la determinación desde el enfoque de la reconstrucción vectorial del Mahony-Scandarolli, la reconstrucción sub-óptima basada en la resolución de la ecuación de Lyapunov incorpora una sensibilidad extra: a ruidos de medición, sesgos de medición y los estados transitorios de asentamiento. Esto último consolida relaciones no lineales de alto orden (ver ecuación 1) en el lazo de realimentación y el sistema dinámico del error de estimación.

### III. RECONSTRUCCIÓN ÓPTIMA DE LA MATRIZ DE ROTACIÓN

Considerando las desventajas señaladas en la sección anterior, se indentifica que el mejorar la reconstrucción de la matriz de rotación puede traer mejoras en el desempeño general del algoritmo. Para ello, se buscará solucionar de manera óptima el problema de determinación de la matriz de rotación<sup>7</sup> a partir de mediciones vectoriales, el cual indica que: *a partir de la medición de cantidades vectoriales conocidas respecto a  $\{\mathcal{B}\}$ , la matriz de rotación puede ser determinada en el argumento que minimiza la función de coste definida como:*

$$R^* = \arg \min_R \left\{ \sum_i |v_{0,i} - Rv_{m,i}|^2 \right\} \quad (2)$$

Donde, la matriz de rotación óptima  $R^*$  es obtenida en el argumento que minimiza la función de coste compuesta por la

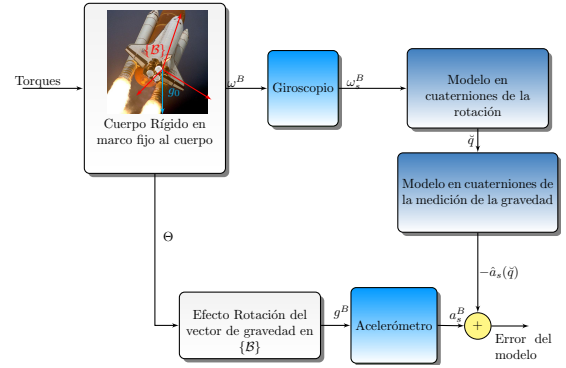


Figura 2. Caracterización del error del modelo de medición.

suma de los cuadrados de los módulos de la diferencia de: los valores de las mediciones vectoriales rotadas al marco inercial ( $Rv_{m,i}$ ), respecto a los valores teóricos conocidos de dichas cantidades vectoriales ( $v_{0,i}$ )<sup>8</sup>

#### III-A. Determinación óptima de la matriz de rotación a partir del modelo de medición del vector gravitacional en cuaterniones.

Se propone la determinación de la matriz de rotación interpretando el fenómeno de inclinación de campo gravitacional respecto al marco  $\{\mathcal{B}\}$  con un observador óptimo en cuaterniones. En donde, el observador se constituye en el esquema detallado en la figura 2. En este esquema, se considera el fenómeno de rotación de un cuerpo rígido (excitado por *torques* desconocidos) descrito por dos variables: la orientación y su velocidad angular, representadas por las salidas  $\Theta$  y  $\Omega$ , respectivamente, estos parámetros son medidos:

1. La velocidad angular por un giroscopio, obteniendo  $\Omega_s$ .
2. La orientación  $\Theta$ , de manera indirecta, midiendo la inclinación del vector gravitacional respecto al marco fijo al cuerpo  $\{\mathcal{B}\}$ , usando un acelerómetro. (oración desordenada)

En este arreglo, el observador incorpora correcciones sistemáticas al modelo de cinemático de rotación en términos del cuaternión unitario, que se calculan a partir del error del modelo de medición de la aceleración gravitacional y la medición de la velocidad angular  $\Omega_s$ , para reducir de forma óptima el error del modelo de medición y así ajustar el cuaternión que rota el valor teórico de la gravedad en el marco referencial inercial ( $[0, 0, g_0]^T$ ), alineando el mismo a la medición vectorial  $a_s$ .

Esto último es posible, dado que el cuaternión se define en las rotaciones de los ángulos de Euler (ver [25]).

La resta del valor estimado de medición vectorial de la gravedad  $\hat{a}_s$  con señal proveniente del acelerómetro  $a_s$  (excitada por la efecto de la rotación del vector de la gravedad en  $\{\mathcal{B}\}$ ) define el error de modelo usado por el observador, y se denota

<sup>8</sup>Donde los sub-índices corresponden a las distintos valores vectoriales medibles.

<sup>7</sup>Planteado en la referencia [20]

como la incertidumbre del modelo ( $v$ ):

$$v = a_s - \hat{a}_s \quad (3)$$

### III-B. Observador óptimo en cuaterniones

En la definición del observador óptimo, se identifica entonces el caso particular de la ecuación 2, donde la matriz de rotación óptima  $R^*$  depende de la relación de optimización del cuaternión unitario de rotación  $\check{q}$ , denotado por  $\check{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$  en  $\mathbb{Q} : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^3$ :

$$R^*(\check{q}) = R \left( q^* = \arg \min_{\check{q}} \{ a_s - R^T(\check{q})g_0 \} \right) \quad (4)$$

De esa manera, la solución a la matriz de rotación óptima deriva del procedimiento de optimización del cuaternión unitario que rota el valor teórico de la gravedad  $g_0$  hacia la medición de la inclinación campo vectorial gravitatorio  $a_s$ , en la relación que establece  $\hat{a}_s$  en la siguiente ecuación, como la estimación de la medición vectorial de la gravedad como función del cuaternión unitario [26]:

$$\hat{a}_s = \check{q} \otimes \check{g}_0 \otimes \check{q} = Rg_0 = g_0 \begin{bmatrix} 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

En la cual, la evolución en tiempo del cuaternión unitario esta delimitada en la descripción cinemática del movimiento rotación en  $\mathbb{Q}$ , definida como:

$$\dot{\check{q}} = \frac{1}{2} \check{\Omega} \otimes \check{q} \quad (6)$$

Donde, la derivada del cuaternión unitario se define en el producto de cuaterniones <sup>9</sup> de la velocidad angular en  $\mathbb{Q}^{10}$  ( $\check{\Omega}$ ) y el cuaternión unitario ( $\check{q}$ ).

A partir de esto, el reto asumido por el observador óptimo es determinar el cuaternión óptimo en el tiempo  $T$ , a partir de tres elementos: i) las condiciones iniciales conocidas, ii) la incertidumbre del modelo incierto de la evolución del cuaternión y iii) una colección de datos de la medición vectorial de la gravedad; con esto la función objetivo desde el punto de vista de observador se deduce como:

$$q_k^* = \arg \min_{q_k} \left\{ norm_0(\check{q}_0, v_0) + \sum_{i=0}^k norm_1(w_i, v_i) \right\} \quad (7)$$

En donde se establecen normas específicas que relacionan los errores en las condiciones iniciales para (DESCRIPCIÓN DE LA FUNCIÓN DE OPTIMIZACIÓN)... EL ERROR DEL modelo de medición en cuaterniones en función a un historial de LA INCETIDUMBRE EN mediciones INexactas del vector gravitacional  $a_s$

ECUACION DEL OPTIMIZACION

EXPLICACION DE NOMENCLATURA...

El problema de ajuste anteriormente mencionado tiene cierta relación con el esquema de estimación de los estados ocultos

de la Teoría de Grafos en un diagrama de Markov de primer orden: donde, los estados ocultos, que conforman una serie de tiempo estocástica, se relacionan con la medición en una probabilidad de transición acumulativa que depende de las anteriores mediciones.

De manera análoga, el problema de la determinación del cuaternión que ajusta la medición del vector de gravedad se puede plantear de la siguiente manera [27]:

Imaginemos que tenemos un conjunto de datos pasados de la medición  $y_k = \{y_i\}_{i \in \{k_0, \dots, k_f\}}$  en tiempo discreto en el intervalo  $i \in \{k_0, \dots, k_f\}$ , y queremos determinar el estado oculto  $x_{k_f}$ , sabiendo que cada elemento de  $y_k$  está relacionado por una función discreta del conjunto de elementos  $x_k = \{x_i\}_{i \in \{k_0, \dots, k_f-1\}}$ .

En este caso la evolución de tiempo discreto de los estados ocultos se denota en

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k) \quad (8)$$

Donde  $x_k = [\check{q}, b_\Omega]$  son los estados ocultos compuestos por el cuaternión unitario y el *bias* de la velocidad angular,  $u_k$  las entradas al sistema.

Estos estados se relacionan con la medición vectorial de la siguiente manera:

$$y_k = h_k(x_k) \quad (9)$$

Siendo  $h_k$  una función no lineal.

El problema se mantiene en la búsqueda del estimado de los estados ocultos  $\hat{x}_{k+1}$  haciendo correcciones sucesivas en la incertidumbre del modelo  $w_k$  modelo que estima el comportamiento (donde,  $f_k^o$  es el modelo incierto del proceso) en:

$$\hat{x}_{k+1} = f_k^o(\hat{x}_k, u_k) + w_k \quad (10)$$

Midiendo el error en la incertidumbre del modelo de medición  $v_k$ , en:

$$v_k = y_k - \underbrace{h_k(\hat{x}_k)}_{\hat{y}_k} \quad (11)$$

Donde  $\hat{y}_k$  corresponde a la ecuación 9 evaluada en el punto de estimación actual.

-----?????

### III-C. Observador Óptimo en cuaterniones de $R^*$ de tiempo discreto

Una alternativa de solución a este problema es usar Programación Dinámica (PD) [28] en la versión lineal: del modelo del proceso en  $x_k$  y del modelo de la medición; la cuales se definen en los Jacobianos de primer orden en las series de Taylor de  $f_k$  y  $h_k$ , alrededor de un punto fijo.

$$x_{k+1} = F_0x_k + B_0u_k \quad (12)$$

$$y_k = H_0x_k \quad (13)$$

<sup>9</sup>Denotada por el símbolo  $\otimes$

<sup>10</sup>Definida como un cuaternión puro, en donde la parte real es cero, y las componentes están repartidas en  $i, j$  y  $k$ , para la velocidad angular en los ejes  $x, y$  y  $z$ , respectivamente

Donde los  $F_0$ ,  $B_0$  y  $H_0$  son los Jacobianos de  $f_k$  para  $x_k$ ,  $u_k$  y  $h_k$  para  $x_k$ , respectivamente, en  $x_0$  y  $u_0$ . Entonces la dinámica del observador y su error se determinan en las ecuaciones:

$$\hat{x}_{k+1} = F_0 \hat{x}_k + B_0 u_k \quad (14)$$

$$\hat{y}_k = H_0 \hat{x}_k \quad (15)$$

$$\tilde{x}_{k+1} = F_0 \tilde{x}_k \quad (16)$$

$$\tilde{y}_k = H_0 \tilde{x}_k \quad (17)$$

De ahí el problema de observador óptimo se define en:

*Definición 3.1 (Problema Observador Óptimo Lineal):*

Sea un sistema lineal discreto descrito en:

$$x_{k+1} = F x_k + B u_k \quad (18)$$

Donde,  $F$  es la matriz del proceso,  $B$  es la matriz de entradas,  $x_k$  son los estados ocultos y  $u_k$  las entradas al sistema; las que se relacionan con las variables de salida de tal forma que:

$$y_k = H x_k \quad (19)$$

Donde  $H$  es la matriz de salida, y  $y_k$  es la salida medible (observable) del sistema. Entonces, el problema de optimización se define como el encontrar el set de datos  $\hat{x}_k = \{\hat{x}_{k_0} \dots \hat{x}_{k_f}\}$ , de manera que se cumpla

$$\hat{x}_k = \arg \min_{x_k} \left\{ (\tilde{x}_0 + H \tilde{y}_0)^T P (\tilde{x}_0 + H \tilde{y}_0) + \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{y}_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{y}_k \end{bmatrix} \right\}$$

Donde la función de coste depende de la acumulación de los errores de medición (plasmados en la incertidumbre de medición)  $\tilde{y}_k = h(\hat{x}_k)$  y del error de estimación  $\tilde{x} = \hat{x}_k - x_k$ ; junto con los errores iniciales conocidos  $g_0(\tilde{x}_k, \tilde{y}_0)$ . Además  $P$ ,  $Q$  y  $R$ , son positivas, denominadas matrices de peso.

$$w_k = - \underbrace{P_k H_k^T (R + H_k P_k H_k^T)^{-1}}_K \tilde{y}_k \quad (20)$$

$$w_k^T F^{-T} P_k A^{-1} w_k = w_k^T (F^{-T} Q F^{-1} + P_k - K H_k P_k) w_k \quad (21)$$

Lo que establece el estimador de los estados ocultos en:

$$\hat{x}_{k+1} = F \hat{x}_k + B u_k + K (y_k - H \hat{x}_k) \quad (22)$$

Donde  $\hat{x}_k$  es la estimación de los estados ocultos,  $y_k$  es la medición vectorial de la gravedad.

Estas ecuaciones resumen el resultado del proceso de discretización y establecen el modelo del proceso y de medición como funciones no lineales, en las ecuaciones (23) y (5) respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \tilde{q}_{k+1} \\ b_{\omega, k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ b_{p, k} \\ b_{q, k} \\ b_{r, k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \left( \cos\left(\frac{|\omega|h}{2}\right) + h j \lambda \right) - \frac{h}{2} \text{sinc}\left(\frac{1}{2}|\omega|\right) (p q_{1, k} + p q_{2, k}) \\ q_1 (\cos(s) + h j \lambda) - \mathcal{H}(s) (-p q_{0, k} - r q_{2, k}) \\ q_2 (\cos(s) + h j \lambda) - \mathcal{H}(s) (-q q_{0, k} + r q_{1, k}) \\ q_3 (\cos(s) + h j \lambda) - \mathcal{H}(s) (-r q_{0, k} - q q_{1, k} + p q_{2, k}) \\ b_{p, k} \\ b_{q, k} \\ b_{r, k} \end{bmatrix} \quad (23)$$

En donde, se definen dos funciones auxiliares:  $s = \frac{|\Omega|h}{2}$  y  $\mathcal{H}(s) = \frac{h}{2} \text{sinc}(\frac{1}{2}|\Omega|)$ , el término  $|\Omega|$  es módulo del vector columna de la velocidad angular  $\Omega = [p \ q \ r]^T$ , el bias del giroscopio es el vector columna  $b_{\Omega, k} = [b_{p, k} \ b_{q, k} \ b_{r, k}]^T$ , y el término  $k$ -ésimo del cuaternión unitario ( $\tilde{q}_k$ ) está compuesto por los elementos del vector columna  $[q_{0, k} \ q_{1, k} \ q_{2, k} \ q_{3, k}]^T$

Por último, las ecuaciones del modelo del proceso y del modelo de medición en tiempo discreto, deben ser linealizadas. Dicho esto, los Jacobianos se denotan en<sup>11</sup>:

$$F_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial q_0} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial b_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_3}{\partial q_3} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial b_r} \\ O_{3,4} & & I_3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Donde las derivadas parciales son los elementos del Jacobiano del modelo del proceso,  $O$  es una matriz nula de dimensión  $3 \times 4$  y  $I_3$  es la matriz identidad.

$$H_k = \begin{bmatrix} -2q_2 & 2q_1 & 2q_0 \\ 2q_3 & 2q_0 & -2q_1 \\ -2q_0 & 2q_3 & -2q_2 \\ 2q_1 & 2q_2 & 2q_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (25)$$

#### IV. METODOLOGÍA DE LA EVALUACIÓN EXPERIMENTAL

El abordaje experimental trata de probar que la inclusión de un Observador Óptimo tipo EKF para determinación óptima de la matriz de rotación, en el esquema del algoritmo de navegación compuesto por los filtros complementarios en SO(3), incorpora mejoras en la estimación total de la información de navegación. Para ello, se debieron realizar una serie de procedimientos que al final permiten cualificar y el cuantificar dicha mejora, y permitan emitir un criterio sobre que la inclusión resulta o no positiva para el desempeño de la estimación. En el marco de lo anterior mente mencionado, a continuación se describe la metodología establecida en el afán de internarse en la evaluación experimental de la inclusión del Observador Óptimo EKF.

En primer lugar, es imprescindible plantear el algoritmo de navegación original desde el enfoque del algoritmo de observadores no lineales tipo filtros complementarios en SO(3) de Mahony-Scandaroli, considerando los sensores de navegación disponibles y las condiciones del entorno de prueba. Y a partir de ello definir en que forma se incluye *el algoritmo del observador óptimo EKF*<sup>12</sup> al anterior algoritmo, conformado así el algoritmo de navegación modificado.

Después de hacer esto, se siguen diferentes procedimientos para la determinación de los parámetros de diseño de los observadores ceñidos en las definiciones de los algoritmos de navegación: original y modificado. En cada caso se confluje

<sup>11</sup>Debido a la extensión de las ecuaciones que conforman esta matriz, no se la muestra en este capítulo, sin embargo el lector interesado puede acudir al apéndice ?? para una descripción de cada término.

<sup>12</sup>Para la reconstrucción óptima de la matriz de rotación

en la definición de los algoritmos finales implementables en una plataforma digital, lo que significa discretizar las ecuaciones pertinentes<sup>13</sup>. Entonces, este análisis deriva en el diseño de las versiones discretas e implementables de: el Observador Óptimo EKF, los observadores no lineales tipo filtros complementarios en  $SO(3)$  y el algoritmo navegación original de Mahony-Scandaroli.

Después, bajo las consignas de comparar y verificar el desempeño de estimación del algoritmo original y modificado, se establecieron dos plataformas experimentales para dos instancias: la comparación de la estimación de la orientación en cada una de las componentes de los ángulos de Euler por separado; y la comparación de la estimación del movimiento lineal, es decir la posición y la velocidad.

Los experimentos son realizados de tal forma que ambos algoritmos es sometidos a las mismas condiciones en sus señales de entradas y de pre-procesamiento. Bajo esta premisa, se captura las entradas de ambos algoritmos provienen de captura de la información de los sensores de navegación usados en este trabajo, los cuales son: el módulo receptor GPS MTK-2309; el acelerómetro MEMS de bajo costo ADXL330 de  $\pm 3g$  y tres grados de libertad; y los giroscopios MEMS IDG500 y LPY330AH, que miden las velocidades angulares en las direcciones de los versores del marco  $\{\mathcal{B}\}$ .

De esa manera, en la búsqueda una prueba que verifique o refute la afirmación de que la inclusión del Observador Óptimo EKF para la determinación de matriz de rotación mejora el desempeño de la estimación de la información de navegación, se definen diferentes casos de estudio los cuales se categorizan por las variables que se comparan en:

1. Estudio de la estimación de los ángulos de Euler en una componente para movimientos de hasta  $1[rad/s]$ .
2. Estudio de las capacidades de estimación de la posición y velocidad lineal en tres dimensiones para un circuito cerrado recorrido en un automóvil.

#### IV-A. Plataforma experimental de la estimación de los ángulos de Euler

La estrategia propuesta para la evaluación del desempeño de la estimación de la orientación, analiza cada una de las direcciones de los ángulos de Euler de manera separada. El total de la prueba se divide en tres ensayos diferentes en los que los movimientos se limitan a rotaciones en los planos conformados por los ejes del marco referencial  $\{\mathcal{B}\}$ , y es así que esta plataforma solo necesita enfocarse en la medición de un solo ángulo al mismo tiempo, tomando a los otros como nulos.

La plataforma experimental de la estimación de los ángulos de Euler fue implementada siguiendo el esquema de la Figura 3, donde un arreglo de marcas negras en una plancha blanca sujeta a la caja de sensores permite hacer el seguimiento de la evolución del movimiento angular de manera simultánea a la captura de las señales

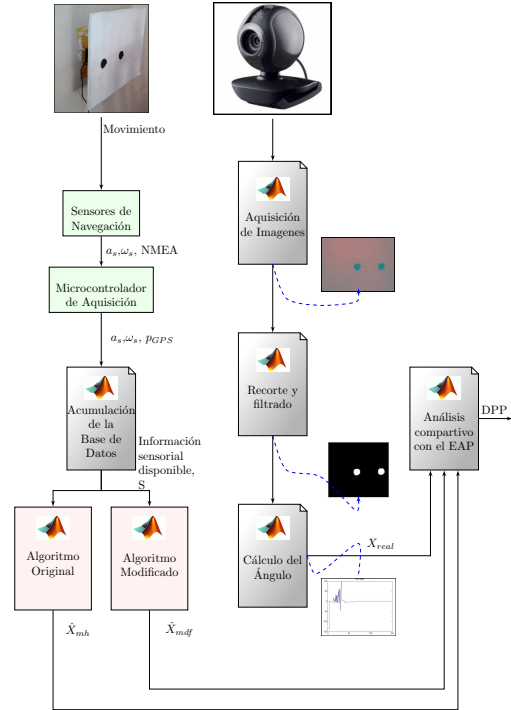


Figura 3. Esquema general de la plataforma experimental evaluativa.  
Fuente: Elaboración Propia

de los sensores de navegación. De esa manera el procesamiento está dividido en dos etapas: primero se sigue el procedimiento descrito en la Figura ??, por el cual se obtiene la estimación de la información de navegación  $\hat{X}_{mdf}$  y  $\hat{X}_{mh}$ ; posteriormente, de forma paralela se obtiene la información de referencia correspondiente a la evolución temporal de la componente<sup>14</sup> sobre la cual se está haciendo el análisis, esta información procede del estudio del desplazamiento de las dos marcas negras capturado en una secuencia de imágenes. La cual es sometida a varios procesos de filtrado para determinar la posición de las marcas y así calcular la progresión de la inclinación equivalente al desplazamiento angular de la variable en estudio, a continuación este procedimiento es descrito en la siguiente secuencia de pasos:

- a) En cada una de las imágenes, para un color en particular<sup>15</sup>, se recorta la zona por donde se mueven las marcas.
- b) Posteriormente, se invierten los colores con la finalidad de resaltar la ausencia de luz<sup>16</sup> para después convertirlas en imágenes binarias usando la función `im2bw(imagen, umbral)` de la *Image Acquisition Toolbox* de *MATLAB*, donde el `umbral` es determinado por prueba-error para cada

<sup>14</sup>De posición angular

<sup>15</sup>Se selecciona empíricamente entre las tres matrices de intensidad (rojo, verde y azul) buscando el mejor desempeño en la determinación de las marcas.

<sup>16</sup>Debido a su color Negro de las marcas

<sup>13</sup>Esto de forma tal, que sus implementaciones sean factibles bajo las condiciones y limitantes que se tienen en el proyecto, y al final permitan hacer los ensayos que verifiquen la idea principal de este trabajo.



- experimento y condición de iluminación.
- Con la finalidad de eliminar el ruido introducido por las sombras, en cada una de las imágenes binarias aplicamos el filtro morfológico `imopen()`, el cual elimina todos los cúmulos aproximadamente circulares con un radio menor a 5 ó 2 píxeles (dependiendo del experimento).
  - Entonces para eliminar totalmente el efecto de las sombras se aplica la función `imclearborder()`, la cual elimina todas las estructuras morfológicas conectadas al borde.
  - En este punto ya se tiene una secuencia de imágenes depuradas donde solo aparecen las marcas, y corresponde calcular los centriodes de las marcas e identificar cual corresponde a una marca central y cual a una marca externa. Para esto, basados en la función `colorit()` del apéndice B, se asigna un color a cada cúmulo<sup>17</sup>, después calculando el centroide se hace la asignación de centro o marca externa basados en cual centroide es más próximo al centro. Este proceso de asignación es seguido en todas las imágenes de la secuencia obteniendo al final dos vectores columna que contienen las coordenadas de las marcas durante todo el desplazamiento.
  - Con los vectores columna de la evolución de la posición vs tiempo tanto del centro como de la marca exterior se determina el ángulo de inclinación, que coincide con la inclinación de los sensores de navegación, ya que la cámara y los sensores están alineados en planos paralelos usando burbujas de albañilería de manera muy cuidadosa.

Esta es una variación del ejemplo *Length of a Pendulum in Motion* desarrollado por MATLAB. El código implementado en este trabajo se muestra en el apéndice ???. Ahora bien, debido a las características de la plataforma los experimentos desarrollados atacan el análisis de uno de los componentes de los ángulos de Euler a la vez, por lo tanto en cada uno de los ensayos se buscó el cumplimiento de las siguientes condiciones que garanticen que el ángulo determinado en la recta que pasa por los centriodes coincida con el ángulo de giro en el parámetro de Euler en cuestión:

- El eje de la cámara debe coincidir con el eje de rotación de la caja de los sensores.
- Dos de los ejes del marco referencial  $\{\mathcal{A}\}$  deben formar un plano paralelo al plano de rotación, para así garantizar que el movimiento en los ángulos restantes sea nulo.
- Y por último, que los ángulos de inclinación de las marcas y la de la caja de sensores estén alineados en cero grados antes de comenzar el movimiento, y así minimizar el bias en la medición del ángulo con la cámara.

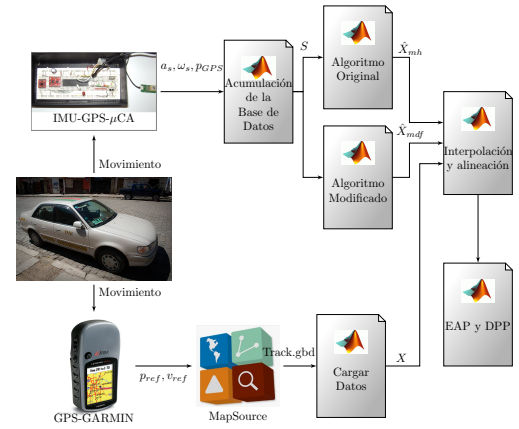


Figura 4. Plataforma experimental de la estimación del movimiento lineal.  
Fuente: Elaboración Propia

Bajo estas condiciones se hacen tres arreglos distintos para los tres ejes del  $\{\mathcal{B}\}$ , es decir en  $x$  para  $\phi$ , en  $y$  para  $\theta$ , y en  $z$  para  $\psi$ .

#### IV-B. Plataforma experimental de la estimación de la posición y velocidad lineal

Para la evaluación de la estimación de la posición y velocidad lineal el esquema implementado utiliza como sensor adicional un GPS Etrex-Garmin que tiene una precisión de hasta 2 metros, por mucho mayor a la del módulo GPS usado dentro del conjunto de sensores de navegación, esto gracias a la ganancia de su antena que le permite capturar un mayor número de satélites, además de tener una memoria especializada para la captura de datos de Efemérides y Calendarios pasados. Este dispositivo cuenta con un altímetro y una brújula electrónica, mejorando su precisión aún más.

Los experimentos son realizados siguiendo circuitos cerrados en un vehículo en donde se monta una caja que contiene al sensor adicional y los sensores de navegación de forma tal que es posible realizar la estimación de la información de navegación y capturar información de referencia. El procedimiento seguido para la captura de esta información es mostrado en el esquema de la Figura 4, donde el movimiento del vehículo es capturado simultáneamente por el GPS GARMIN-ETEX y los sensores de navegación, incorporando esta información por medio del programa `adquiereINS.m`, el cual contiene los comandos de comunicación con el microcontrolador de adquisición; posteriormente esta información, debidamente guardada en  $S$ , es procesada por los algoritmos de navegación sintetizados en los programas `ProcesamientoMahonyScan.m` y `ProcesamientoModificado.m`; en lo que corresponde a GPS GARMIN-ETEX, la información de la orientación de la brújula, la magnitud de la velocidad de desplazamiento y la posición en coordenadas geólicas<sup>18</sup>

<sup>17</sup>Que representa a una marca

<sup>18</sup>Las que son guardadas en la memoria del dispositivo

es guardada en el archivo `Track.gdb`, luego extraída y reordenada en el archivo `Track.xls` utilizando el programa `MapSource`, para que finalmente el programa `CargarDatos.m` extraiga el historial del movimiento lineal en el marco referencial  $\{A\}$ ; concluyendo con el proceso, los programas `Sync.m` sincronizan temporalmente la información estimada y la de referencia siguiendo el periodo de muestro  $h$ , para posteriormente incorporar las fórmulas de cálculo de los EAP y el DPP.

## V. PRUEBAS EXPERIMENTALES

Una vez detalladas las plataformas experimentales corresponde hacer la descripción del proceso experimental seguido para indagar en la veracidad de la suposición ya descrita en la Sección ?? -la cual se constituye en el principal aporte del presente trabajo- la cual afirma que:

La inclusión de un Observador Óptimo EKF para la reconstrucción de la matriz de rotación en el esquema de observadores tipo filtro complementario en  $SO(3)$  mejora la estimación de la información de navegación.

La estrategia abordada para cumplir con tal objetivo divide el total de la prueba en dos partes:

- La prueba para el estudio del desempeño de la estimación de los ángulos de Euler.
- La prueba para el estudio del desempeño de la estimación de movimiento lineal, es decir la posición y la velocidad lineal.

De esa manera, y siguiendo esta secuencia, en esta sección se detalla el procedimiento experimental seguido en la realización de estas dos pruebas.

### V-A. Prueba con la plataforma experimental de la estimación los ángulos de Euler

Esta fase emplea el esquema experimental descrito en la sección IV-A, en la cual el sensor angular de video (constituido por una cámara) captura la información de la rotación de uno de los ángulos de Euler, al mismo tiempo que los algoritmos de navegación realizan la estimación de la misma variable<sup>19</sup>.

Es importante señalar que debido a que el esquema del sensor angular de video solo puede medir un ángulo al mismo tiempo, el estudio se concreta sobre tres arreglos distintos, en los cuales se varía la disposición de los elementos que constituyen esta plataforma experimental<sup>20</sup>:

1. *El arreglo para el estudio del ángulo de alabeo  $\phi$ .* En este los elementos están configurados de tal forma que: el eje de rotación es paralelo al eje  $x$  del marco  $\{B\}$ ; la plancha de las marcas (que se constituye como el plano de rotación) es paralelo al plano  $YZ$ , con las componentes  $z$  apuntando hacia el centro de la tierra y  $y$

hacia la izquierda de la imagen<sup>21</sup>. Con lo que respecta a la cámara esta se encuentra en posición vertical tal como se muestra en la Figura ??, a una distancia suficiente para enfocar toda la escena de la rotación.

2. *El arreglo para el estudio del ángulo de rodadura  $\theta$ .* Aquí el eje de rotación es paralelo al eje  $y$  del marco  $\{B\}$ , el plano de rotación queda en el plano  $XZ$ , con la componente  $z$  (una vez más) apuntando hacia abajo y  $x$  apuntando hacia la derecha de la imagen.
3. *El arreglo para el estudio del ángulo de guiñeo  $\psi$ .* Aquí la configuración cambia radicalmente. En este caso el eje de rotación es paralelo a eje  $z$  y perpendicular al plano de rotación sobre el plano  $XY$ ; el versor de  $z$  está apuntando hacia abajo en sentido contrario a la posición de la cámara, la cual en este caso está ubicada encima de la caja de sensores; con respecto a los ejes  $x$  y  $y$ , estos apuntan hacia arriba y la izquierda de la imagen tomada por la cámara.

En resumen, en cada uno de los arreglos se realizan varios ensayos, los cuales consisten en la captura de la información de la rotación: en una dimensión para el sensor angular de video, y tres dimensiones para los algoritmos de navegación; de forma tal que tras cada ensayo, si las condiciones de alineación y calibración fueron satisfactoriamente cumplidas, se obtiene como resultado tres señales: la estimación del algoritmo modificado, la estimación del algoritmo original y la medición del sensor angular de video como señal de referencia.

El procedimiento seguido en cada uno de los ensayos sigue la siguiente secuencia: primero, se enciende el sensor angular de video; después se mueve la marca externa cerca a los cero grados; se inicia la captura del movimiento junto con el arranque del programa `AdquiereINS.m`; al terminar la adquisición de los datos, estos se guardan en un archivo `.mat`; y empleado este archivo, finalmente se procede a calcular las estimaciones de la información de navegación con los programas `AlgoritmoModificado.m` y `AlgoritmoOriginal.m`. Aunque entre ensayos varían, en general el movimiento comienza con los ángulos inicialmente alineados<sup>22</sup> cerca de  $0^\circ$ , después varían con diferentes velocidades angulares y sentidos de giro durante un periodo de tiempo, el movimiento termina otra vez cerca a los  $0^\circ$ . En todos los ensayos, se buscó con prioridad mantener los planos de rotación lo más paralelos posible, considerando un ensayo como exitoso solo cuando esta condición se cumple.

*V-A1. Resultados de la estimación del ángulo de alabeo.* Los datos obtenidos de uno de los varios ensayos realizados para esta variable se muestran en la gráfica de la Figura 5, donde la señal de color azul corresponde a la estimación, la de color verde para el algoritmo original, y de color rojo para la referencia; además, la gráfica superior corresponde a toda

<sup>19</sup>Dentro del conjunto de datos que conforman la información de navegación estimada.

<sup>20</sup>Plataforma experimental de la estimación de los ángulos de Euler (ver Figura 3)

<sup>21</sup>Cuando la caja de sensores se encuentra con la cara inferior mirando hacia el suelo

<sup>22</sup>Esto considerando los dos elementos, es decir la caja de sensores y la plataforma de marcas.



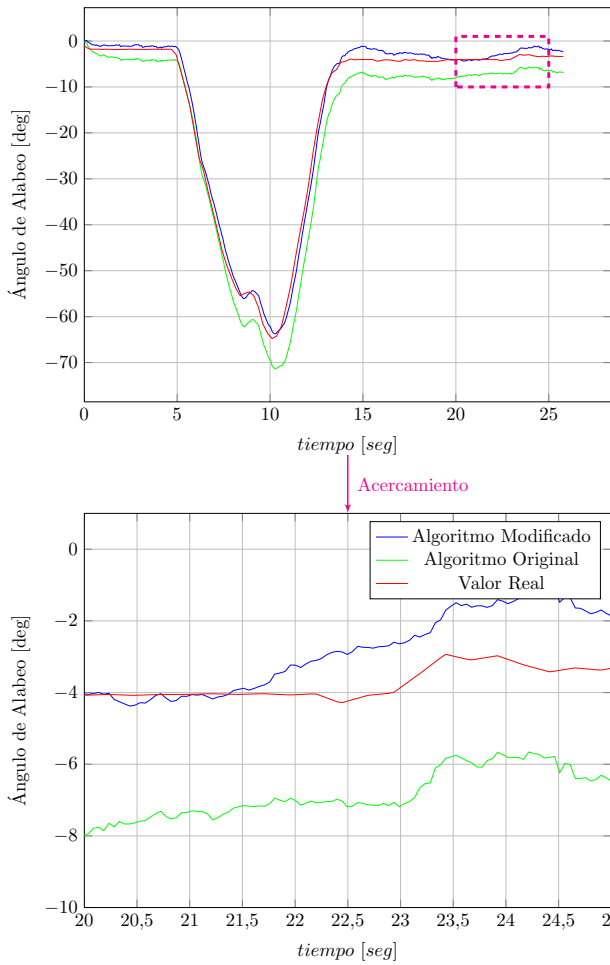


Figura 5. Ángulo de alabeo.

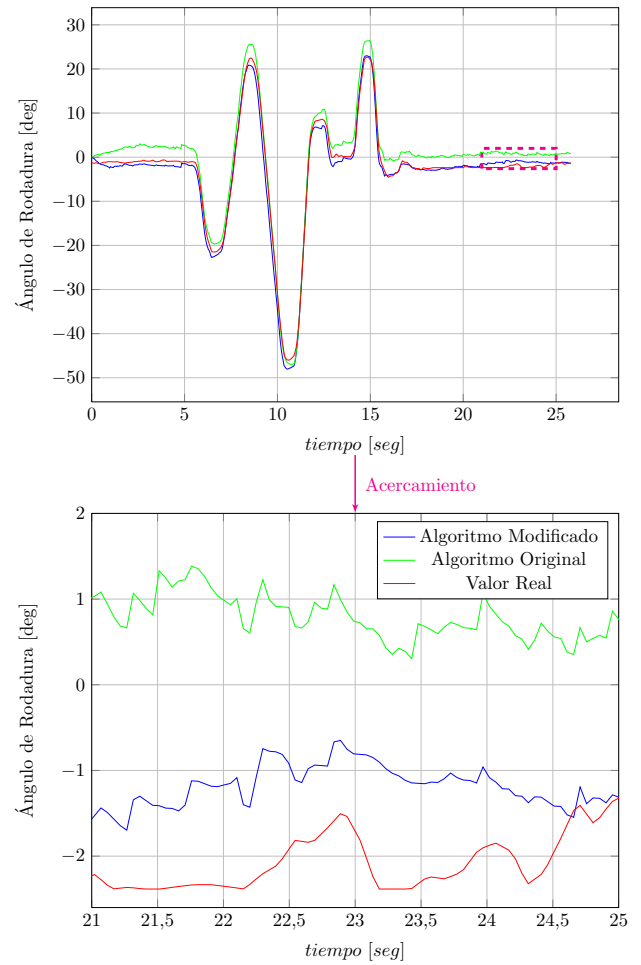


Figura 6. Ángulo de rodadura.

la duración del ensayo y la gráfica inferior es el acercamiento del recuadro en color magenta.

En este ensayo el movimiento inicia en  $-2^\circ$  y termina en poco menos de  $-3^\circ$  y los ángulos de rodadura y guiño se mantienen en  $0^\circ$ . Para la estimación con el algoritmo modificado los errores oscilan entre  $9,04E - 4^\circ$  y  $10,58^\circ$  en contraste a los  $7,33E - 3^\circ$  a  $18,97^\circ$ <sup>23</sup> para el algoritmo original. En promedio los errores absolutos (EAP) para estos algoritmos corresponden:

$$EAP_{mdf,\phi} = 1,3579^\circ \text{ Para el algoritmo modificado.}$$

$$EAP_{mh,\phi} = 3,756^\circ \text{ Para el algoritmo original.}$$

En estas gráficas los errores cometidos por el algoritmo original son mucho mayores a los del algoritmo modificado, donde este último gana definitivamente a partir de 15 segundos. Es también visible que al final hay una tendencia, para ambos algoritmos de acercarse a la señal de referencia.

<sup>23</sup>Estos valores están en valor absoluto respecto a la señal original.

V-A2. *Resultados de la estimación del ángulo de rodadura.*: Los resultados de los ensayos muestran una tendencia de superioridad del método modificado respecto al original. Uno de estos ensayos se muestra en la gráfica de la Figura 5, donde una vez más la gráfica de color azul corresponde a la estimación usando el algoritmo modificado, la de color verde para el algoritmo original y la referencial en color rojo.

A diferencia del ensayo mostrado anteriormente, en este ensayo los movimientos son mucho más rápidos, los cuales quedan limitados dentro de la banda de  $\pm 45^\circ/s$ . Una vez más en este ensayo, el desempeño del algoritmo modificado mejora sobre al algoritmo original, y a partir de los 13 segundos la convergencia del método modificado es insuperable. En la gráfica de acercamiento (que se delimita por la el rectángulo de color magenta) podemos observar el efecto de un golpe en la caja de sensores que inicia a los 21 segundos, que si bien es accidental muestra el tiempo de convergencia de 4 a 5 segundos para el algoritmo modificado.

Ahora los EAP's para este ensayo son:

$$EAP_{mdf,\theta} = 1,4635^\circ \text{ Para el algoritmo modificado.}$$

$EAP_{ms,\theta} = 7,072^\circ$  Para el algoritmo original.

Una vez más las gráficas muestran que los errores cometidos por el algoritmo original son mucho mayores a los del algoritmo modificado.

La convergencia para el método modificado empieza a ser fiel iniciando los 13 a 14 segundos (ver gráfica), en contraste con el método original en el cual la convergencia no llega en la ventana temporal que dura el experimento; aunque parece que al final hay una cierta tendencia.

Ahora, es posible que esto se deba a que a pesar de haber reducido el error constante en la medición durante el proceso de calibración del arreglo, queden residuos que favorezcan al método modificado; si este es el caso, se ve que el golpe no perturba en demasía el valor final encontrado por el algoritmo original, de lo cual podemos decir que tiene cierto grado de robustez superior a la desempeñada por el algoritmo modificado.

**V-A3. Resultados de la estimación del ángulo de guiñada:** Para la componente de guiñada los ensayos fueron realizados con la plataforma en posición horizontal dando al sistema mayor movilidad. Con estas características, en este arreglo se pudieron alcanzar velocidades angulares mucho mayores a la de los otros experimentos. Sin embargo, se hace importante mencionar que en estas condiciones el vector gravitacional está apuntando paralelo al eje de rotación, dificultando la estimación vectorial y así la estimación del ángulo de guiñeo para el algoritmo original; por esta razón la capacidad de convergencia del método original, cuando la condición inicial del ángulo muy distinta de cero, se ve afectada considerablemente.

En la Figura 7 se muestra los resultados de la estimación del ángulo de guiñeo. Específicamente en este experimento el ángulo inicial de guiñeo es de  $5^\circ$ , lo que permite ver el efecto anteriormente mencionado, donde a pesar de que las condiciones iniciales de los ángulos de Euler en los algoritmos de navegación son nulas, el algoritmo modificado reduce progresivamente el error, en contraste con el algoritmo original, el cual permanece con un error constante de  $1.5^\circ$  (como se muestra en el acercamiento), por lo menos durante toda la ventana temporal que dura el experimento.

En cuanto al tiempo de convergencia, de forma reiterada en todos los ángulos muestra que la convergencia siempre está cerca de los 12 segundos, y a partir de ese tiempo se sigue fielmente la referencia.

En este ensayo los EAP simplemente corroboran la evidente ventaja de método modificado frente al original.

$EAP_{mdf,\psi} = 1,4635^\circ$  Para el algoritmo modificado.

$EAP_{ms,\psi} = 7,072^\circ$  Para el algoritmo original.

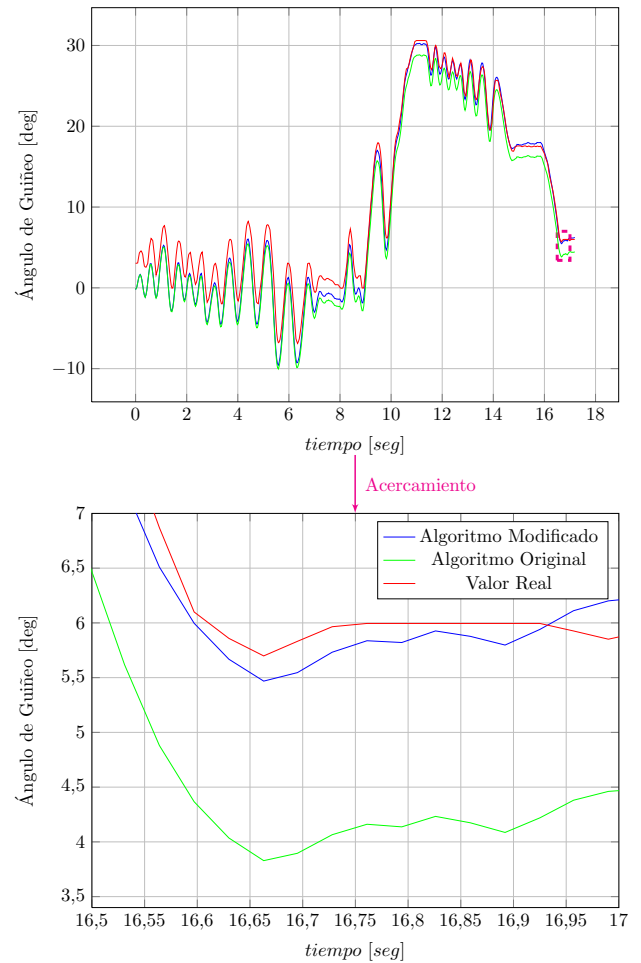


Figura 7. Ángulo de guiñeo.

#### V-B. Prueba con la plataforma experimental de la estimación del movimiento lineal

Los experimentos realizados con esta plataforma permiten ver el desempeño del algoritmo para estimar el movimiento lineal, es decir la velocidad lineal y la posición en el tiempo.

Los ensayos se desarrollan en un circuito cerrado delimitado en la zona de Sopocachi Alto<sup>24</sup> con los sensores montados en un vehículo. Esta ruta, mostrada en la Figura 8, tiene una longitud de  $1,53[Km]$ , pasa por calles con buena línea de vista, sin muchos árboles<sup>25</sup> ni edificios. En cada ensayo se siguió el siguiente protocolo:

1. Se hace la alineación al norte tanto del GPS-GARMIN-ETREX, como la del marco referencial  $\{B\}$ , para que las condiciones iniciales en los ángulos de Euler sean nulas.
2. Se inicia el programa de `AdquiereINS.m`.
3. Se hace el desplazamiento con velocidades de hasta

<sup>24</sup>Zona seleccionada por sus facilidades logísticas.

<sup>25</sup>Podados por la época del año.

 $20[kph].$ 

4. Y por último se guarda los datos adquiridos para comenzar con el siguiente ensayo, si corresponde.

A continuación se describen los resultados obtenidos de las pruebas que se pudieron realizar, señalando que no fueron muchas debido a un tema de disponibilidad de equipos.

*V-B1. Resultados de la estimación de la posición:* Como ya se señala las pruebas fueron realizadas en un radiotaxi siguiendo la ruta de la Figura 8. En esta ruta las calles con mayor conflicto de línea de visión del GPS debido a la proximidad de los edificios fueron la c/ Melchor Pérez de Holguín y la c/ Chaco.

En todas las gráficas, los resultados de la estimación del algoritmo Original son representados en la línea de color verde, para la estimación del algoritmo modificado de color azul, y para la señal de referencia en una línea de color rojo. Estos resultados son mostrados en las Figuras 9, 10 y 11. Este ensayo dura 421 segundos ó 7 minutos 1 segundo, y durante todo este tiempo se puede observar, que si bien la estimación sigue la señal de referencia esta mantiene un error durante toda la trayectoria, esto para ambos algoritmos. Sin embargo, dado que la diferencia entre las dos estimaciones es muy pequeña, el tema del error no afecta a la suposición que se trata de refutar o afirmar, dado que se habla de cual de los algoritmos estima mejor, y a pesar de que ambos estén equivocados, la competencia está en cual es más próximo al valor verdadero.

Por su parte, este error puede ser cuantificado en el EAP para cada una de las gráficas, donde el sub-índice *mdf* significa que pertenece al algoritmo modificado y *mh* significa que pertenece al algoritmo original:

$EAP_{mdf,x} = 5,8290[m]$  Para el algoritmo modificado.

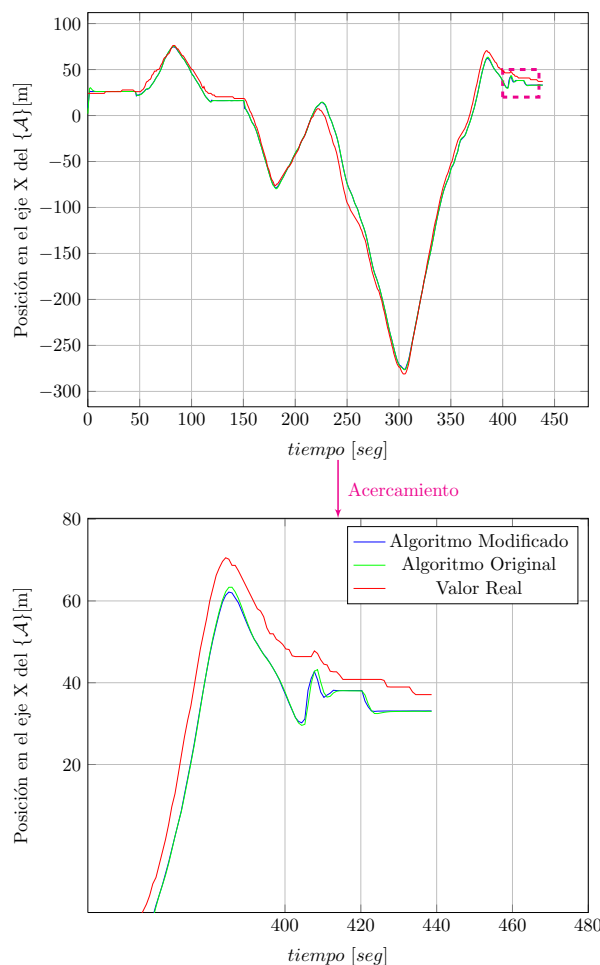


Figura 9. Posición en el eje X.  
Resultados de la estimación de con datos simulados. Resultados típicos del repetidos intentos.

$EAP_{ms,x} = 5,8976[m]$  Para el algoritmo original.

$EAP_{mdf.u} = 3,5046[m]$  Para el algoritmo modificado.

$EAP_{ms,y} = 4,6888[m]$  Para el algoritmo original.

$EAP_{mdf,z} = 6,1602[m]$  Para el algoritmo modificado.

$EAP_{ms,z} = 6,2365[m]$  Para el algoritmo original.

Respecto a las gráficas de las Figuras 9 y 10, la gráfica de la Figura 11 parece la más imprecisa, sin embargo hay que considerar que los errores en la altitud son uno de los mayores defectos del sistema GPS, y típicamente son grandes<sup>26</sup>. A pesar de eso, es de consideración ver que la información estimada se aproxima a la señal de referencia, mucho más que la medición del sensor de navegación GPS-MTK3329.

<sup>26</sup>Esto no pone en cuestión la veracidad de la información entregada por el GPS-Garmin, debido a que este dispositivo utiliza la información de un barómetro, que sin duda tiene mejor precisión.

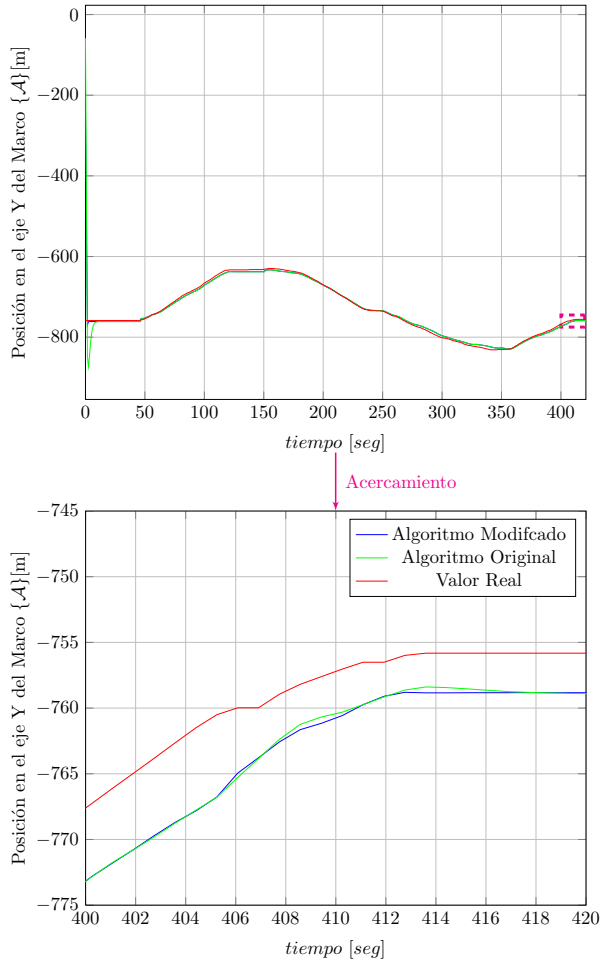


Figura 10. Posición en el eje Y.

Resultados de la estimación de con datos simulados. Resultados típicos del repetidos intentos.

**V-B2. Resultados de la estimación de la velocidad lineal.:**  
En esta prueba, dado que la velocidad de referencia esta expresada en el marco referencial inercial  $\{A\}$  y la medición de la aceleración, de donde se obtiene la estimación, está expresada en el marco referencial fijo al cuerpo  $\{B\}$ , se hace inevitable utilizar la matriz de rotación  $R$  (definida en la sección ??) para hacer la transformación correspondiente. Entonces, esto sugiere que la convergencia está delimitada por la capacidad de los algoritmos para estimar los ángulos de Euler. Los resultados de las pruebas realizadas son mostrados en las Figuras 12, 13 y 14, en las que se muestran la velocidad en  $x$ ,  $y$  y  $z$  del marco referencial inercial  $\{A\}$  con la misma notación de colores que se ha venido manteniendo desde la Figura 5.

En estas gráficas, a pesar de que los errores de la estimación de la posición son bastante grandes<sup>27</sup>, la estimación de la velocidad parece mucho más certera. Y se observa una ventaja

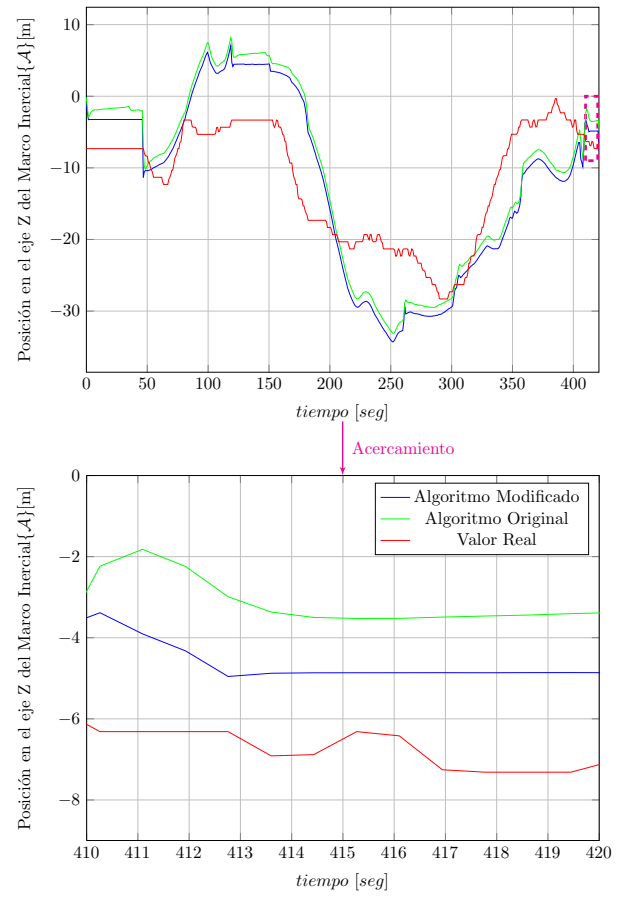


Figura 11. Posición en el eje Z.

Resultados de la estimación de con datos simulados. Resultados típicos del repetidos intentos.

evidente del método modificado frente al original, lo que es positivo para la suposición investigada. Este argumento se refuerza con los valores de los errores absolutos promedio para cada una de las tres variables, denotados a continuación:

$$EAP_{mdf,u} = 0,8958[m/s] \text{ Para el algoritmo modificado.}$$

$$EAP_{ms,u} = 0,7871[m/s] \text{ Para el algoritmo original.}$$

$$EAP_{mdf,v} = 3,1564[m/s] \text{ Para el algoritmo modificado.}$$

$$EAP_{ms,v} = 3,3291[m/s] \text{ Para el algoritmo original.}$$

$$EAP_{mdf,w} = 0,3476[m/s] \text{ Para el algoritmo modificado.}$$

$$EAP_{ms,w} = 0,64[m/s] \text{ Para el algoritmo original.}$$

<sup>27</sup>Para ciertas aplicaciones.

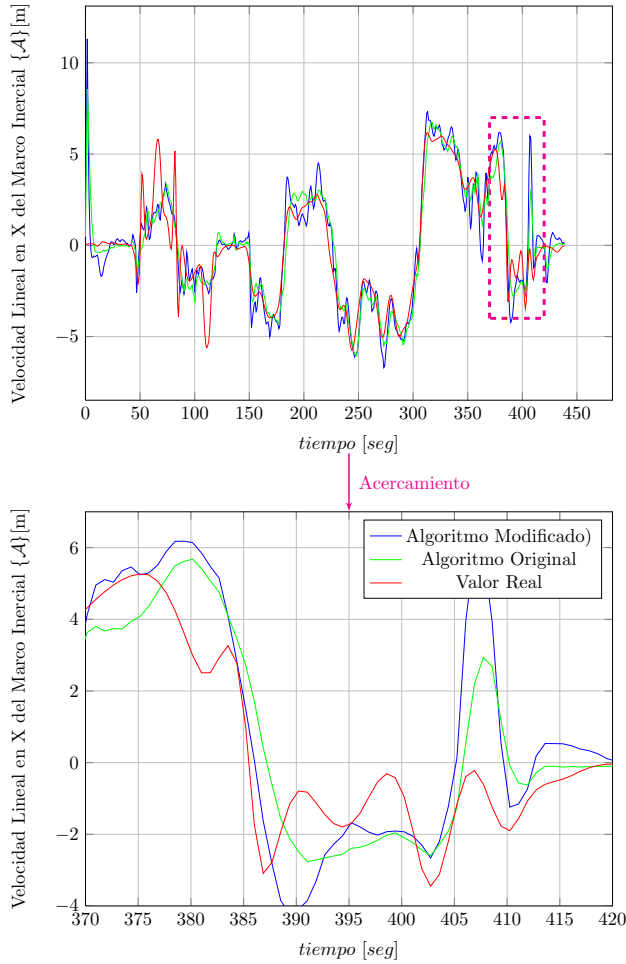


Figura 12. Velocidad lineal en el eje X.

Resultados de la estimación de con datos simulados. Resultados típicos del repetidos intentos.

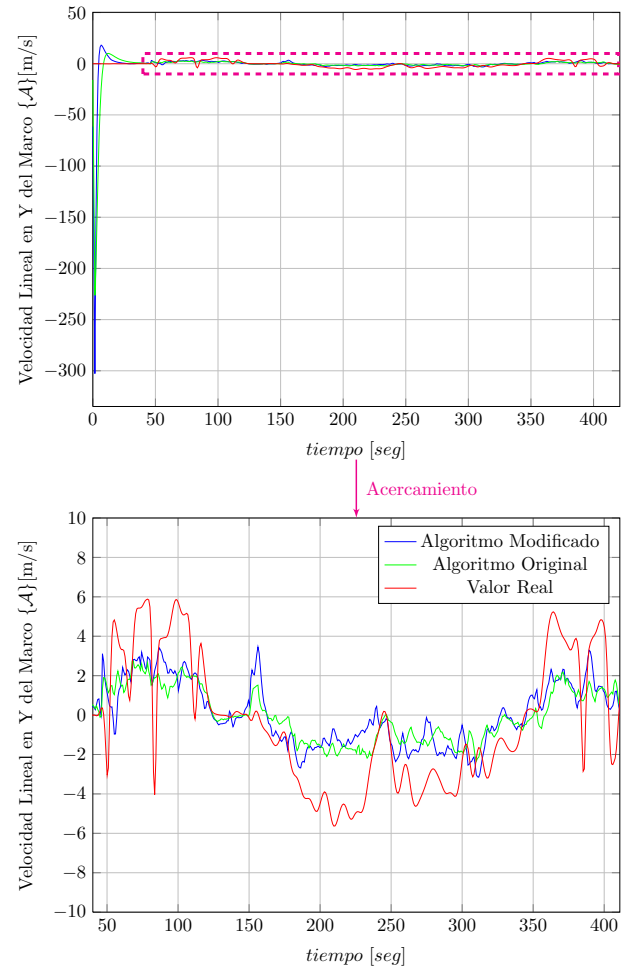


Figura 13. Velocidad lineal en el eje Y.

Resultados de la estimación de con datos simulados. Resultados típicos del repetidos intentos.

### V-C. Resultados del Análisis Comparativo con el EAP y el DPP.

Como se menciona en la anterior sección después de obtener las señales estimadas por los algoritmos de navegación se prosigue con el análisis comparativo con el EAP y el DPP. En la Tabla I se ordenan los EAP y las diferencias porcentuales para cada variable.

En esta tabla se puede ver globalmente que el algoritmo modificado es superior en casi todas las variables, lo que se corrobora con el cálculo del DPP que se denota como:

$$DPP = 40,92 \% \quad (26)$$

Fríamente, el DPP indica que en promedio se tiene 40.92 % mejor desempeño en la estimación de la información de navegación para el algoritmo modificado respecto al original.

Analizando los pares de EAP mostrados en la Tabla I vemos una marcada tendencia que indica que el algoritmo modificado supera al algoritmo original. Dentro de las diferencias más relevantes se tienen: la estimación de la posición en el eje  $y$

con 1,22[m] de distancia en promedio, y los ángulos de alabeo y rodadura, con 2,39° y 1,73°, respectivamente.

En el par de la estimación de la velocidad del eje  $X$ , marcada de color rojo se muestra un resultado negativo, que indicaría que (para este parámetro) el algoritmo original tiene una ventaja del 12,1305 % mejor que el algoritmo modificado. Aunque realmente esto significa que algoritmo modificado fallo en 0,1727[m/s] en promedio más que el algoritmo original, lo cual no es muy relevante.

### V-D. Tiempos de Procesamiento.

En relación a los tiempos de procesamiento, se utiliza la función tic-tac de MATLAB para medir el tiempo que le toma a la computadora realizar el procesamiento de todo el conjunto de muestras.

Sin embargo, se debe tener cuidado con la información que esta función pueda dar. Esto debido a que la memoria virtual asignada al proceso MATLAB es limitada y su acceso es compartido con los otros procesos del sistema; además, el



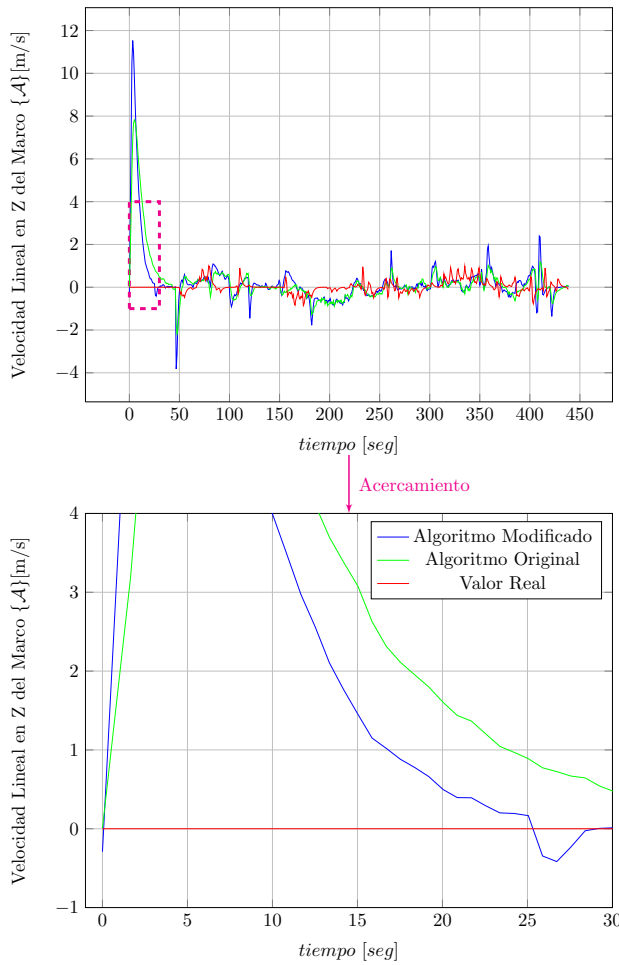


Figura 14. Velocidad lineal en el eje Z.  
Resultados de la estimación de con datos simulados. Resultados típicos del repetidos intentos.

direccionamiento de la misma -a medida que se llena- requiere un mayor número de accesos. Por esta razón, el tiempo de procesamiento, por ejemplo, de 1.000 datos no guarda una relación lineal con respecto a 30.000 datos, y los tiempos en cada bucle se incrementan en proporción al número de accesos a la memoria virtual. Sin embargo, para pequeñas cantidades de datos, el tiempo de procesamiento en cada bucle es aproximadamente el mismo. Dicho esto solo se consideran los tiempos de procesamiento para pequeñas cantidades de datos.

Estas en promedio para 49,4311[s] es decir 2,957 puntos de muestreo, el procesamiento demora en promedio: 1,0158[s] para el algoritmo modificado y 0,7954[s] para el algoritmo original, definiendo una diferencia porcentual promedio de:

$$DPP_{\text{tiempo de procesamiento}} = -21,6933 \% \quad (27)$$

Lo que indica que el algoritmo original utiliza 21,6933 % menos tiempo que el algoritmo modificado.

Variable es- timada	Error Abso- luto Prome- dio del algo- ritmo modi- ficado	Error Abso- luto Prome- dio del algo- ritmo origi- nal	Diferencia Porcentual del Algoritmo Modificado respecto al Original.
Posición en el eje X (x)	5.8862[m]	5.9427[m]	0.9596 %
Posición en el eje Y (y)	3.5445[m]	4.7739[m]	34.6828 %
Posición en el eje Z (z)	6.1698[m]	6.3369[m]	2.7080 %
Velocidad li- neal en el eje X ( $v_x$ )	0.8214[m/s]	0.7871[m/s]	-12.1305 %
Velocidad li- neal en el eje Y ( $v_y$ )	3.1564[m/s]	3.3291[m/s]	5.4710 %
Velocidad li- neal en el eje Z ( $v_z$ )	0.4445[m/s]	0.5697[m/s]	28.1664 %
Ángulo de alabeo ( $\phi$ )	1.3579[Deg]	3.7560[Deg]	177.97 %
Ángulo de rodadura ( $\theta$ )	1.4635[Deg]	2.801[Deg]	91.394 %
Ángulo de guiñeo ( $\psi$ )	1.3268[Deg]	2.1855[Deg]	44.53 %

Cuadro I

TABLA COMPARATIVA DEL DESEMPEÑO DE ALGORITMO DE TRES OBSERVADORES EN CASCADA Y EL DE MAHONY-SCANDAROLI.

## VI. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS.

El estudio realizado en el presente trabajo permite obtener las gráficas comparativas en las que se despliegan los datos de la estimación junto con los referenciales; se obtienen las tablas de los EAP y DPP relacionados con los errores cometidos por ambos algoritmos; y además los tiempos de procesamiento promedio para los dos algoritmos de navegación. Asimismo, nos permite verificar la validez de varios conceptos introducidos, como el Bloque de Combinación, la discretización de los algoritmos de navegación, el diseño de las matrices de peso en el Observador Óptimo EKF, etc. En este capítulo se aborda más detalladamente los resultados del trabajo.

## VII. RESULTADOS DE DISEÑO.

La arquitectura propuesta tiene muchas semejanzas con el enfoque del sistema de navegación propuesto por [29]; pero en las condiciones propuestas en dicho trabajo, la determinación de las variables de navegación corregidas depende del tiempo de disponibilidad de la medición de la posición (con GPS). Esto, al contrario del enfoque propuesto en el presente trabajo, en el cual la corrección es continua y no depende de la disponibilidad de los datos del GPS.

Basados en las características de la estimación de la posición, se puede decir que el algoritmo modificado mejora la determinación de la posición sobre el GPS (principalmente en la determinación de la altura, ver Figura 14). Sin embargo,



si este desempeño es comparado, por ejemplo, con [30], en donde el error promedio en la determinación del movimiento lineal es de  $2,5[m]$  y  $0,5[m/s]$ <sup>28</sup>, se puede decir que el desempeño del enfoque propuesto es mucho menor. A pesar de esto, se puede ver que existe una mejora en la determinación de la orientación para el algoritmo propuesto, si comparamos los errores promedio en la determinación de los ángulos de Euler (de  $1,38[Deg]$  para el presente enfoque, frente a los  $1,5[Deg]$  del enfoque de [30]). No obstante, estas relaciones necesitarían ser probadas en las mismas condiciones y con la misma información de entrada, y por esa razón no se puede decir que los errores reportados en [30] son comparables con los del presente trabajo.

El enfoque abordado para la determinación de las matrices de peso en el algoritmo del Observador Óptimo EKF parece infructuoso, ya que para encontrar una sintonización adecuada estos valores tuvieron que ser reducidos drásticamente. Asimismo, la capacidad de encontrar estos valores depende de la resolución en el dominio de las ponderaciones. A pesar de esto, al incorporar los valores determinados desde el enfoque propuesto en la Sección 3.3, el algoritmo modificado es capaz de llegar a la referencia, pero muy por debajo del desempeño del algoritmo original. Todos estos factores parecen apuntar a que el método de sintonización de las matrices de peso debería considerar primero el mejor desempeño de la estimación para el Observador Óptimo<sup>29</sup>; y en una segunda etapa ajustar el desempeño del Observador tipo Filtro complementario en  $SO(3)$ .

El enfoque de discretización de los algoritmos original y modificado, de acuerdo al desempeño alcanzado respecto a la implementación en [20], ha demostrado ser bastante precisa a pesar de que los resultados de ambos enfoques no son comparables<sup>30</sup>. De todas maneras, el desempeño positivo de la discretización es innegable, y demuestra que la incorporación de términos de la serie de Taylor superiores al grado tres no promete grandes mejoras.

## VIII. RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN.

La convergencia para la estimación de la orientación del método propuesto en el presente trabajo se verifica con el análisis visual de las gráficas de las Figuras 5, 6 y 7. En general, las aproximaciones son bastante cercanas y alcanzan la referencia definitivamente a partir de los doce segundos reduciendo el error. Esto marca una indicación positiva para la inclusión del observador óptimo en la estructura de los filtros complementarios en  $SO(3)$ .

Respecto a la estimación del movimiento lineal, los resultados no son del todo alentadores. En algunos casos el error puede llegar hasta  $20[m]$ , con un promedio de  $5,2[m]$  y en los mejores casos se mantiene dentro de los dos metros de error. Esto reduce en gran medida el rango de aplicaciones

del algoritmo, así como está planteado. Y deja la imperante necesidad de incorporar un segundo método de estimación en la determinación de la posición, por ejemplo, como el reportado en [27]. A pesar de este comportamiento, la estimación de la velocidad permite pensar en aplicaciones de control en aeronaves no tripuladas (Unmanned Aircraft Vehicles, UAVs), ya que los errores no son demasiado desproporcionados. Además, refiriéndonos a los errores de la posición en los ejes X y Y de la Figura I, se acerca mucho al error típico del GPS usado [31] cuyo valor es de 5m en 2D comparado al 4.71 [m], y seguramente en mejores condiciones de visibilidad<sup>31</sup> el algoritmo promediaría mejores condiciones de estimación.

Existen limitaciones respecto a las entradas, y cuando estas se saturan afectan en gran manera los resultados del observador, por lo tanto el INS solo funciona bajo condiciones en que los vehículos y personas promedio están sometidas; por ejemplo una carretera interdepartamental, un viaje aéreo comercial.

Ahora surge la pregunta de si nuestro algoritmo es más o menos complejo que el original, y que: si bien incrementa la calidad de estimación, también incrementa el tiempo de procesamiento? En tal caso la respuesta es aseverativa, y sí, nuestro algoritmo incrementa la complejidad y por ende el tiempo de procesamiento del mismo. Esto se demuestra usando la función *tic-tac* de *MATLAB*, en las que para las señales mostradas en el capítulo anterior, se tiene un tiempo de procesamiento promedio de  $24,6714[s]$  para nuestro algoritmo y  $20.274[s]$  para el algoritmo original. A simple vista este  $+21.6933\%$  de tiempo de procesamiento parecería aminorar el progreso logrado por el algoritmo propuesto, pero si por ejemplo el algoritmo original tuviese que ejecutar en tiempo real 1,000,000 de instrucciones en ensamblador para una sola iteración, entonces nuestro algoritmo tuviese 1,200,000 instrucciones, ahora si se considera, por ejemplo el microcontrolador PIC24HJ32GP202-I/SP de 16bits @ 40MIPS, las frecuencias de muestreo corresponden a 60[Hz] y 30.79[Hz], respectivamente; esto significa constantes de tiempo que el algoritmo modificado puede manejar son de hasta 0.0053[s], que cómodamente entran por ejemplo: para la medición de la frenada de un automóvil que es de que tienen constantes de tiempo de hasta 0,18[s], y fácilmente permite proponer el uso en una gran cantidad de vehículos; entonces según este último análisis realmente si se cuenta con una buena capacidad de procesamiento, no es prohibitiva la complejidad introducida por el algoritmo modificado.

Según estos datos, el algoritmo modificado es capaz de computar las trayectorias con tan buena precisión como tenga nuestro sensor de posición. Sin embargo el tema de alineación inicial es vital para tener una buena estimación, a pesar de que esto no afecta la estabilidad del sistema en ninguna escala.

## IX. CONCLUSION

The conclusion goes here.

<sup>28</sup>Para la posición y la velocidad, respectivamente.

<sup>29</sup>En función a costo de los errores cometidos para un conjunto de datos de entrenamiento

<sup>30</sup>Esto bajo el argumento de que, al diferir sus señales de entrada, ambos algoritmos no están sometidos a las mismas condiciones.

<sup>31</sup>Que típicamente se encuentran en las zonas abiertas en las que los UAV aplicados a vigilancia o exploración funcionan.

## ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to thank...

## REFERENCIAS

- [1] S. Schmidt, *Applications of state space methods to navigation problems in Advances in Control Systems*. NY Academic Press, 1966.
- [2] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, vol. 82, pp. 35–45, 1960.
- [3] G. S. S. Schmidt and L. McGee, "Application of statistical filter theory to the optimal estimation of position and velocity on board a circumpolar vehicle," Ames Research Center, Tech. Rep., 1962.
- [4] A. Lukyanov, S. Dodds, and J. Vittek, "Observer-based attitude control in the sliding mode," pp. 639–671, 1996.
- [5] S. Nicosia and P. Tomei, "Nonlinear observer and output feedback attitude control of spacecraft," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-28, no. 4, pp. 970–977, 1996.
- [6] M. Algrain and M. Lee, "Nonlinear observer and output feedback attitude control of spacecraft," pp. 638–645, 1997.
- [7] F. Faruqi and K. Turner, "Extended kalman filter synthesis for integrated global positioning/inertial navigation systems," *EL SEVIER Applied Mathematics and Computation*, vol. 115, pp. 213–227, 2000.
- [8] J. Marins, X. Yun, E. Bachmann, R. McGhee, and M. Zyda, "An extended kalman filter for quaternion-based orientation estimation using marg sensors," in *Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems Maui, Hawaii, USA, Oct. 29 - Nov. 03, 2001*. Maui, Hawaii, USA: IEEE, 2001, pp. 2003–2011.
- [9] M. Gandhi and L. Mili, "Robust extended kalman filter for transient tracking and outlier suppression," *Latex Class Files*, vol. 6, no. 1, 2007.
- [10] A. M. Sabatini, "Quaternion-based extended kalman filter for determining orientation by inertial and magnetic sensing," *IEEE Transaction on biomedical engineering*, no. 7, pp. 1346–1356, 2006.
- [11] A. K. V. Bistrov, "Adaptive extended kalman filter for aided inertial navigation system," *ELECTRONICS AND ELECTRICAL ENGINEERING Automations and Robotics*, no. 6, pp. 37–40, 2006.
- [12] B. Friedland, "Analysis strap-down navigation using quaternions," *IEEE transactions on aerospace and electronic systems*, vol. 14, no. 5, 1978.
- [13] D. Benson, "A comparison of two approaches to pure inertial and doppler-inertial error analysis," *IEEE aerospace and Electronic Systems*, vol. 11, no. 4, pp. 447–455, 1975.
- [14] R. Smith, "An h-type filter for gps-based attitude estimation," 1995.
- [15] S. Kou, D. Elliott, and T. Tarn, "Exponential observers for nonlinear dynamic systems," *Information and Control*, vol. 29, pp. 393–428, 1975.
- [16] F. Thau, "Observers for nonlinear dynamic systems," *International Journal of Control*, vol. 17, p. 471, 1975.
- [17] B. Vik and T. Fossen, "A nonlinear observer for gps and ins integration," in *IEEE conference on Decision and control*, 2001, pp. 2956–2961.
- [18] J. Thienel, "A clipped nonlinear space craft attitude controller and observer with an unknow constad gyro bias and gyro noise," *IEEE trans. on automatic control*, vol. 8, pp. 2011–2015, 2003.
- [19] M. Hua, "Attitude observers for accelerated rigid bodies based on gps and ins measurements," pp. 8071–8076, 2009.
- [20] B. Mahony, T. Hamel, and J.-M. Pflimlin, "Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group," in *IEEE Transactions Automatic Control*, vol. 53, 2008, pp. 1203–1218.
- [21] G. Scandaroli, P. Morin, and G. Silveira, "Nonlinear filter design for pose and imu bias estimation," *IEEE conf. Decision and Control*, 2011.
- [22] P. M. S. Bonnabel and P. Rouchon, "Symmetry preserving observers," *IEEE trans. on automatic control*, vol. 53, pp. 2514–2526, 2008.
- [23] P. Martin and E. Salaun, "An invariant observer for earth velocity aided attitude heading reference systems," in *IFAc World conf.*, vol. 53, 2008, pp. 9857–9864.
- [24] V. J. Silvestre C. and O. P., "A nonlinear gps/imu observer based for rigid body attitude and position estimation," in *IEEE conf. Decision and Control*, 2008, pp. 1255–1260.
- [25] S. L. Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups*. DUDA, 1986.
- [26] J. Solà, "Quaternion kinematics for the error-state kf," Reporte, 2012.
- [27] E. W. R. Merwe, "A new approach to linearf filtering and prediction problems," *AIAA*, 2004.
- [28] V. S. F. Lewis, D. Vrabie, *Optimal control:Dynamic Programming*. John Wiley, 2012.
- [29] X. Kong, "Ins algorithm using quaternion model for low cost imu," vol. 46, no. 1, pp. 221–246, 2004.
- [30] G. Cai, B. Chen, and T. Lee, *Unmanned Rotor-craft Systems: Flight Dynamics Modeling*. Advances in industrial control Springer Verlag, 2011, pp. 99–100.
- [31] MEDiatek-Inc, "66-channel gps engine board antenna module with mtk chipset," Hoja de Datos del MTK-3329, 2009.