Evaluacio´ n experimental de la Reconstruccio´ n en cuaterniones de la Matriz de Rotacio´ n con un

Observador

O´ ptimo/EKF en un Algoritmo de

Navegacio´ n de Observadores en Cascada del Tipo

Filtro Complementario en SO(3)

Ariel Iporre R. Universidad Mayor de San Andre´s Facultad de Ingenier´ıa

Ingenieria Electro´ nica

La Paz, Bolivia

Email: [aiporre@umsa.bo](mailto:aiporre@umsa.bo)

Mauricio Ame´stegui Universidad Mayor de San Andre´s Facultad de Ingenier´ıa

Ingenieria Electro´ nica

La Paz, Bolivia

Email: [mameste](mailto:mamestegui@umsa.bo)[gui@umsa.bo](mailto:gui@umsa.bo)

***Abstract*–This work proposed a variation for a navigation algorithm composed by SO(3) complementary filters. Such mo- dification includes a quaternion optimal observer to solve the optimal determination problem for the rotation matrix using quaternions instead use a vectorial reconstruction approach. That proposal involves an experimental comparison between the original and modified method. The results show a 40 % increase for estimation quality while 21 % more complexity using this new approach. It also verifies the implementation in real noise environment.**

***Resumen*—Este proyecto propone la variacio´ n de un algoritmo compuesto por Filtros Complementarios en el Espacio Ortogonal Especial de la literatura. La variacio´ nEn el cual se incorpora un**

**Observador O´ ptimo EKF en cuaterniones para la determinacio´ n de la matriz de rotacio´ n de forma o´ ptima en lugar de calcularla de forma directa en base al punto de estabilidad de los filtros.**

varios autores desarrollan una gran cantidad de te´cnicas, e.g. filtro de Kalman extendido (EKF), algoritmos gene´ticos, redes neuronales, filtros de part´ıculas o el algoritmo QUEST.

En la de´cada de los noventa los algoritmos de navegacio´ n fueron constituidos por observadores no lineales desarrollados en el marco de la teor´ıa de Lyapunov, evidenciable en los tra- bajos [4], [5], [6]. De donde deriva el e´nfasis de investigacio´ n de algoritmos de navegacio´ n alrededor de esta tema´tica, se centra en la extensio´ n de estas te´cnicas para la determinacio´ n de posicio´ n incorporando sensores basados en el *Sistema de Posicionamiento Global* (GPS), o ca´maras Web.

De esa manera, los algoritmos de navegacio´ n modernos esta´n siempre concretados en una te´cnica de estimacio´ n, y de- pendiendo de la aplicacio´ n diferentes sensores de navegacio´ n

**Esta´**

**modificacio´ n implico´**

**la comparacio´ n experimental entre**

son usados. Y cuando el movimiento abarca grandes a´reas, los

**el me´todo original y el me´todo modificado bajo las mismas condiciones. Para lo que se verifica hasta un 40 % de mejora en la calidad de la estimacio´ n en contraste 21 % ma´ s de tiempo de procesamiento. Asimismo, los experimentos en condiciones reales comprueban la factibilidad de la implementacio´ n del algoritmo en condiciones adversas de ruido e incertidumbre de medicio´ n.**

I. INTRODUCCIO´ N

A medida que los sensores de navegacio´ n y los proce- sadores computacionales reduc´ıan su taman˜ o, los algoritmos de navegacio´ n debieron especializarse progresivamente en la bu´ squeda de una mejor precisio´ n en la estimacio´ n de los estados de navegacio´ n. En esa l´ınea, durante la de´cada de los 60’s, el desarrollo del Filtro Schmidt-Kalman [1] o ma´s conocido como el Filtro de Kalman Extendido (EKF) incor- pora los conceptos de estimacio´ n y observacio´ n de la teor´ıa de control en la tecnolog´ıa de los sistemas de navegacio´ n; este abordaje propone la aplicacio´ n del Filtro de Kalman [2] en un sistema no lineal para la resolucio´ n del problema de navegacio´ n, definido en la referencia [3]. De ah´ı en adelante,

sensores deben ser de muy buena calidad, o medir para´metros

absolutos, como es el caso del GPS, la triangulacio´ n por me- dio del sistema global para comunicaciones mo´ viles (Global System for Mobile Communications o´ originalmente Groupe Spe´cial Mobile, GSM), o el GPS asistido (AGPS).

El EKF, usado en este trabajo para la determinacio´ n de la matriz de rotacio´ n, es celebrado como uno de los enfoques de filtros estad´ısticos de mayor e´xito y que actualmente tiene un rango de desarrollo incre´ıblemente amplio. Este algoritmo es pra´cticamente el algoritmo de navegacio´ n por excelencia e indudablemente la te´cnica ma´s utilizada en los sistemas de navegacio´ n; esto es demostrable en la extensa lista de trabajos en variedades del Filtro de Kalman enfocado a esta tema´tica que se pueden encontrar en la literatura, e.g.[7], [8], [9], [10], [11]. Dentro de las varias representaciones del EKF implementadas, priman las denominadas EKF multiplicativo (MEKF), los cuales mantienen la estructura general EKF, pero son desarrollados alrededor de un modelo de error [12], [13]. El EKF guarda una estrecha relacio´ n con el observador

o´ ptimo del esquema de Luenberger. Y particularmente, se han concretado algunos Filtros de Kalman desde la teor´ıa del control o´ ptimo para la estimacio´ n de la informacio´ n de navegacio´ n [14].

El limitado, pero novedoso me´todo de [15] y [16] para el disen˜ o de un observador no lineal como una extensio´ n del observador de Luenberger, ha abierto un nueva brecha en metodolog´ıas para la determinacio´ n de la informacio´ n de navegacio´ n. Lo anteriormente mencionado se constata en las

*ms*

Reconstruci´on *Ry*

vectorial

Ω*s*



*a*

*R*ˆ

Observador de Orientaci´on

*R*˜*, R*ˆ

Θˆ Ωˆ

*p*ˆ Observador

No Lineal *v*ˆ

de Posici´on.

referencias: [17], [18] y [19], los cuales aplican los conceptos de la teor´ıa de Lyapunov en el disen˜ o de varios observadores que calculan la informacio´ n de navegacio´ n.

Este tipo de enfoque basa su ana´lisis en la bu´ squeda de la condicio´ n de estabilidad en el sentido de Lyapunov. De manera similar, los filtros complementarios en un Grupo Ortogonal Especial *SO*(3)1 de [20] y [21], definen las constantes de actualizacio´ n en un grupo ortogonal especial a partir de funcio- nes de Lyapunov; o los observadores invariantes como [22] y [23]; los cuales mantienen una simetr´ıa utilizando mediciones auxiliares del mismo para´metro que se estima.

Tambie´n, se han hecho esfuerzos por combinar diferen- tes tipos de observadores, por ejemplo: en [24] se presenta una configuracio´ n de dos observadores en cascada para la estimacio´ n de la matriz de rotacio´ n y la estimacio´ n de la posicio´ n, donde los observadores son disen˜ ados usando el ana´lisis de estabilidad de Lyapunov; o en [21] que tambie´n combina dos observadores en cascada para la determinacio´ n de la orientacio´ n y la posicio´ n, con ambos observadores con una configuracio´ n especial parecida al filtro complementario en frecuencia.2 . A partir de esto, la idea en este trabajo es el establecimiento de un *algoritmo de navegacio´ n* compuesto de una serie de *observadores de estado*, que busca una mejora de la estimacio´ n de la informacio´ n de navegacio´ n.

De manera general, existen dos puntos importantes que se abordan en el desarrollo de este proyecto:

El primero es la modificacio´ n del *algoritmo de obser- vadores no lineales tipo filtro complementario en un grupo ortogonal especial SO(3) de Mahony y Scandaroli*, desarrollado por estos dos autores en las referencias [20],

*s*

*py*

Figura 1. Esquema simplificado de1l algoritmo de Mahony-Scandaroli.

.

preguntas fundamentales: do´ nde estoy? y hacia do´ nde quiero ir?. Para lograr esto, el sistema de navegacio´ n usa la medicio´ n de para´metros del medio o que son consecuencia del propio movimiento, y as´ı para recuperar las variables que describen: tanto la situacio´ n espacial como su ritmo de cambio.

De este modo, el planteamiento de un algoritmo de nave- gacio´ n propone el reto de:

Construir el sistema que determina la informacio´ n de navegacio´ n4 , denotada como *X* , a partir del conjunto de mediciones obtenidas de los denomi- nados sensores de navegacio´ n, este u´ ltimo conjunto es denominado *informacio´ n sensorial disponible* y denotado como *S*.

El sistema de navegacio´ n establece una relacio´ n complementa- ria entre el algoritmo de estimacio´ n y los sensores de navega- cio´ n, de forma que el algoritmo de navegacio´ n reconstruye la informacio´ n de navegacio´ n a partir de informacio´ n corrompida y parcial del movimiento.

Desde el enfoque de Mahony-Scandaroli, el algoritmo de navegacio´ n se esquematiza en diagrama de bloques de la Figura 1, donde el observador orientacio´ n toma parte de

[21], incluyendo un observador

o´ ptimo tipo Filtro de

la medicio´ n de los sensores de navegacio´ n (elementos del

Kalman Extendido (EKF)3 para la determinacio´ n de la

matriz de rotacio´ n.

Como segundo punto se tiene el desarrollo de una serie de experimentos que establecen la evaluacio´ n experimental para comprobar una mejora del algoritmo modificado con respecto al enfoque original.

II. PROBLEMA DE NAVEGACIO´ N: ALGORITMO DE NAVEGACIO´ N DE MAHONY-SCANDAROLLI

El sistema de navegacio´ n, con el afa´n de determinar las condiciones de movimiento, esta´ encargado de responder dos

1 Un Grupo Ortogonal Especial esta´ constituido por un grupo de matrices de transformacio´ n que hacen rotaciones propias a los elementos de Espacio Eucl´ıdeo.

2 Donde, el observador de orientacio´ n es el usado en [20].

3 El filtro de Kalman, fue desarrollado Rudolf Kalman en [[2]]

conjunto de *informacio´ n sensorial disponible S*) la medicio´ n de la matriz de rotacio´ n *Ry* y la medicio´ n de la velocidad angular Ω*s* , para la estimacio´ n de:

Θˆ : La orientacio´ n en te´rminos de los a´ngulos de Euler . Ωˆ : La velocidad angular en *{B}*, donde el marco refe- rencial *{B}* es un marco referencial cartesiano fijo al

cuerpo.

*R*˜: El error de estimacio´ n de la matriz de rotacio´ n, defi- nida a trave´s de la matriz de transformacio´ n *{E } ‹→ {B}*, donde *{E }* denota el marco referencial de estimacio´ n, el cual teo´ ricamente converge hacia *{B}*.

4 En el presente trabajo, el conjunto de variables, compuestas por: la velocidad lineal, velocidad angular, posicio´ n y orientacio´ n, es denominado *informacio´ n de navegacio´ n*. Este describe el movimiento de un cuerpo r´ıgido de seis grados libertad.

*R*ˆ: La estimacio´ n de la matriz de rotacio´ n, definida como la matriz de transformacio´ n *{E } ‹→ {A}*, donde *{A}*

denota el marco referencial inercial, con direccion y

origen fijos en un punto sobre la tierra.

Torques

*{B}*

*g*0

*ωB* Giroscopio *ωB*

*s*

Modelo en cuaterniones de la rotaci´on

En cascada, el observador de posicio´ n tipo Filtro complemen- tario en SO(3), toma el resto de las variables incluidas en *S* (la medicio´ n de la aceleracio´ n *as* y la medicio´ n de la posicio´ n *py* ), junto con las matrices de transformacio´ n determinadas por el anterior observador, para obtener:

Cuerpo R´ıgido en

marco fijo al cuerpo

Θ

*q*˘

Modelo en cuaterniones de la medici´on de la gravedad

*−a*ˆ*s* (*q*˘)

*p*ˆ: La estimacio´ n de la posicio´ n en *{A}*.

*v*ˆ: La estimacio´ n de la velocidad en *{A}*.

Finalmente, los dos grupos de variables estimadas por ambos

Efecto Rotaci´on del vector de gravedad en

*{B}*

*gB*

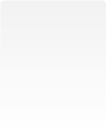
Aceler´ometro

*as* +

*B*

Error del modelo

observadores conforman la *estimacio´ n de la informacio´ n de navegacio´ n*, que puede ser denotada por el vector columna



*X* = [*p*ˆ *v*ˆ Θˆ Ωˆ ].

Las matriz de rotacio´ n medida *Ry* , en el enfoque de Mahony proviene de una fo´ rmula de reconstruccio´ n vectorial, basada

en la medicio´ n de valores vectoriales en *{B}* (*vi* ), su valores teo´ ricos en el *{A}* (*vi,*0 ), y el punto de estabilidad encontrado

por el observador de orientacio´ n para la matriz de rotacio´ n

(*R*ˆ), este efecto es visible en la siguiente ecuacio´ n, en la que se toma en cuenta *n* mediciones vectoriales:

*n*

Figura 2. Caracterizacio´ n del error del modelo de medicio´ n.

1

de Lyapunov incorpora una sensibilidad extra: a ruidos de medicio´ n, sesgos de medicio´ n y los estados transitorios de ascentamiento. Esto u´ litmo consolidanda relaciones no lineales de alto orden (ver ecuacio´ n 1) en el lazo de realimentacio´ n y el sistema dina´mico del error de estimacio´ n estimacio´ n.

Considerando esto, mejorar la reconstruccio´ n de la matriz de rotacio´ n es el punto focal del presente trabajo y representa su principal aporte. Para ello, se buscara´ solucionar de manera

*Ry* = .(*vi,*0 )

*×*

*i*=1

*R*ˆ(*vi* )*×*

(1)

o´ ptima el problema de determinacio´ n de la matriz de rotacio´ n a partir de mediciones vectoriales (planteado en la referencia

En resumen, el enfoque original del algoritmo de observadores en cascada de Mahony-Scandaroli, resuelve la determinacio´ n de la informacio´ n de navegacio´ n en tres niveles de pro- cesamiento: a) la reconstruccio´ n vectorial de la matriz de

[20]), el cual indica que: *a partir de la medicio´ n de cantidades vectoriales conocidas respecto a {B}, la matriz de rotacio´ n*

*puede ser determinada en el argumento que minimiza la funcio´ n de coste definida como*

rotacio´ n *Ry* usando la medicio´ n de un acelero´ metro *as* y un magneto´ metro *ms* 5 ; b) la determinacio´ n de la estimacio´ n de la velocidad angular Ωˆ , la estimacio´ n de la orientacio´ n en

*R∗* = arg m´ın

*R*

. .

. *|v*0*,i − Rvm,i |*2

*i*

(2)

te´rminos de los a´ngulos de Euler Θˆ , y la estimacio´ n de la

Esta ecuacio´ n indica que la matriz de rotacio´ n

o´ ptima *R∗*

matriz de rotacio´ n *R*ˆ con su respectivo error *R*˜6 , los que se determinan usando las sen˜ ales de la reconstruccio´ n vectorial y la medicio´ n de un giroscopio Ω*s* ; c) la determinacio´ n de la estimacio´ n de la posicio´ n *p*ˆ, y la velocidad lineal *v*ˆ a partir de las anteriores salidas, es decir *R*˜ y *R*ˆ, junto con la medicio´ n de posicio´ n *py* y la aceleracio´ n *as* .

es obtenida el argumento que minimiza la funcio´ n de coste compuesta por la suma de los cuadrados de los mo´ dulos de la diferencia de: los valores de las mediciones vectoriales rotadas al marco inercial (R*vm,i* ), respecto a los valores teo´ ricos conocidos de dichas cantidades vectoriales (*v*0*,i* )7

*III-A. Determinacio´ n*

*o´ ptima de la matriz de rotacio´ n a*

III. RECONSTRUCCIO´ N O´ PTIMA DE LA MATRIZ DE ROTACIO´ N

Como sen˜ ala Mahony, la principal desventaja en la for- mulacio´ n de los filtros complementarios pasivo y directo es la sensibilidad a la matriz de entrada *Ry* . Esta matriz es usada en el mapeo de la medicio´ n de la velocidad angular

al marco inercial *{A}*, y por esta razo´ n, la determinacio´ n de

esta matriz juega un papel central en el desempen˜ o final del

*partir del modelo de medicio´ n del vector gravitacional en cuaterniones.*

Se propone la determinacio´ n de la matriz de rotacio´ n en la interpretacio´ n del feno´ meno de inclinacio´ n en la medicio´ n de campo gravitacional,donde dicha medicio´ n se efectua con

acelero´ metro fijo al *{B}* en movimiento rotacional respecto al

*{A}*. En estas condiciones, se identifica el cuaternio´ n unitario8

en la relacio´ n:

sistema. Considerando esto la determinacio´ n desde el enfoque de la reconstruccio´ n vectorial del Mahony-Scandarolli, la re- contrucio´ n sub-obtima basada en la resoluccio´ n de la ecuacio´ n

*R∗* (*q*˘) = *R*

. .

arg m´ın .*as RT* (*q*˘)*g*0 .

*−*

*q*˘

(3)

5 El desarrollo teo´ rico y pra´ctico de Mahony en [20] demuestra que no es absolutamente necesario incluir ambas mediciones. Y si el caso fuese de que alguna de las sen˜ ales es demasiado ruidosa se puede prescindir de la misma.

6 Definida como *R*˜ = *Ry R*ˆ*T*

7 Donde los sub-´ındices corresponden a las distintos valores vectoriales medibles.

8 Los cuaterniones son una generalizacio´ n de los nu´ meros complejos en cuatro dimensiones, introducidas por Hamilton en 1853. El lector interesado en un desarrollo histo´ rico de la teor´ıa en cuaterniones, ver referencia [[25]]

En la que, usando el modelo de rotacio´ n en cuaterniones, se ajusta de forma o´ ptima el cuaternio´ n unitario *q*˘ que rota

Seguidamente, el modelo de la medicio´ n de la gravedad usando el cuaternio´ n unitario [29] se expresa en:

el valor teo´ rico de la gravedad *g*0 hacia la medicio´ n de la inclinacio´ n campo vectorial gravitatorio *as* , de forma tal que



*a*ˆ*s* = *q*¯˘ *⊗ g*˘0 *⊗ q*˘ = *Rg*0 = *g*0 

2(*q*1 *q*3 *− qo q*2 )

2(*q*2 *q*3 + *q*0 *q*1 )



 (7)

se resuelve problema de optimizacio´ n.

El mencionado procedimiento se muestra en la figura 2, la cual considera el feno´ meno de rotacio´ n del cuerpo r´ıgido excitado por *torques* desconocidos descrito en dos variables: la orientacio´ n y su velocidad de cambio, es decir en las salidas Θ y Ω, respectivamente. Estos para´metros son medidos:

1. La velocidad angular por un giroscopio, obteniendo Ω*s* .

2. La orientacio´ n Θ, de manera indirecta, midiendo la

inclinacio´ n del vector gravitacional respecto al marco fijo al cuerpo *{B}*, usando un acelero´ metro.

La medicio´ n de la velocidad angular es la entrada con la que el modelo cinema´tico en cuaterniones determina la evolucio´ n de

*q*2 2 2 2

0 *− q*1 *− q*2 *− q*3

En resumen, el proceso que teo´ ricamente determinar´ıa la ma- triz de rotacio´ n usando el modelo en cuaterniores asume que es posible determinar la orientacio´ n en el tiempo *T* : ajustando los para´metros del modelo en cuaterniones en funcio´ n a un historial de mediciones exactas del vector gravitacional *as* ; de forma tal que se busca la evolucio´ n de *q*˘ que gira al vector gravitacional exactamente en el valor de *a*ˆ*s* (*T* ), reduciendo as´ı el *error del modelo* a cero. Entonces, a partir de las componentes de *q*˘ los elementos de la matriz de rotacio´ n ser´ıan cabalmente determinadas [29] en:

*q*2 2 2 2 

0 + *q*1 *− q*2 *− q*3 2(*q*1 *q*2 + *q*0 *q*3 ) 2(*q*1 *q*3 *− q*0 *q*2 )

la rotacio´ n, en te´rminos del cuaternio´ n unitario necesario para

*RT* = 

2(*q*1 *q*2 *− q*0 *q*3 ) *q*2

2 2 2

2 3 0 1 

0 *− q*1 + *q*2 *− q*3 2(*q q*

+ *q q* )

(8)

2 2 2 2

rotar el valor teo´ rico de la gravedad en el marco referencial inercial ([0*,* 0*, g*0 ]*T* ), alineando el mismo con la medicio´ n vectorial. Esto es posible, dado que el cuaternio´ n se definide en las rotaciones de los a´ngulos de Euler (ver [26]) permitiendo emular el feno´ meno de inclinacio´ n de la medicio´ n vectorial de la gravedad. A partir de ello, la resta del valor emulado con sen˜ al proveniente del acelero´ metro *as* (excitada por la efecto

de la rotacio´ n del vector de la gravedad en *{B}*) se define el

error de *q*˘ en ese tiempo.

De esa manera, el cuaternio´ n unitario, denotado por *q*˘ =

*q*0 + *q*1 *i* + *q*2 *j* + *q*3 *k* en Q : R *×* C3 , contiene las rotaciones

2(*q*1 *q*3 + *q*0 *q*2 ) 2(*q*2 *q*3 + *q*0 *q*1 ) *q*0 *− q*1 *− q*2 + *q*3

Lamentablemente, dado que en la pra´ctica el proceso de medicio´ n incorpora una enorme cantidad de lagunas, impe- dir´ıa encontrar el valor exacto (y seguramente, ni siquiera el o´ ptimo) de la matriz de rotacio´ n usando esta metodolog´ıa. Por consiguiente, parece oportuno emplear ciertas correcciones que puedan eliminar coherentemente las imperfecciones, y as´ı, depurar el valor de *q*˘ buscando reducir el *Error del Modelo* aproximadamente a cero de la mejor manera posible.

Este u´ ltimo concepto va muy de la mano con la definicio´ n

de o´ ptimizacio´ n. Puede ser interpretado como la bu´ squeda

necesarias para transformar un vector del *{B}* al *{A}*; cuya

derivada constituye el modelo cinema´tico de la rotacio´ n como

un producto de cuaterniones 9 de la velocidad angular en Q10

(Ω˘ ) y el cuaternio´ n unitario (*q*˘) como sigue11 :

o´ ptima de los estados del cuaternio´ n unitario y el *bias* del

giroscopio que reducen el costo de desviacio´ n de la medicio´ n de la gravedad de *manera o´ ptima* o de *la mejor manera*, el cu´ al es el obejetivo del presente trabajo.

*III-B. EKF dual del control o´ ptimo*

*q*˘˙ = 1 *q*˘ Ω˘

*⊗*

2

Que escrita matricialmente [28] esta es:

(4)

[**?**]

IV. ASA

*q*˙0 

*q*˙1 

0

1 *p*

 *q*0 

 *q*1 

1 . 0 *−*Ω*T* .

*IV-1. Subsubsection Heading Here:* Subsubsection text

here.

V. CONCLUSION

*q*˙2  = 2 *q −r* 0 *p*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *−p* | *−q* | *−r* |
| 0 | *r* | *−q* |

 *q*2  = 2 Ω Ω *q*˘

 

*q*˙3



*r q −p* 0

  

*q*3

*×*

(5)

The conclusion goes here.

ACKNOWLEDGMENT

Finalmente el modelo cinema´tico de la rotacio´ n que incorpora

el *bias* de medicio´ n de la velocidad angular (*b*Ω ) se define en la ecuacio´ n, con Ω*s* la medicio´ n de dicha velocidad:

. 0 *−*(Ω*s − b*Ω )*T* .

The authors would like to thank...

REFERENCIAS

[1] S. Schmidt, *Applications of state space methods to navigation problems in Advances in Control Systems*. NY Academic Press, 1966.

*q*˙ = 1

2

(Ω*s − b*Ω ) (Ω*s − b*Ω )*×*

*b*˙ Ω = 0

*q*˘*q*

(6)

[2] R. E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems,” *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, vol. 82, pp. 35–45, 1960.

[3] G. S. S. Schmidt and L. Mcgee, “Application of statistical filter theory to the optimal estimation of position and velocity on board a circumpolar

9 Denotada por el s´ımbolo *⊗*

10 Definida como un cuaternio´ n puro, en donde la parte real es cero, y las componentes esta´n repartidas en *i*, *j* y *k*, para la velocidad angular en los ejes *x*, *y* y *z*, respectivamente

11 Para una descripcio´ n espec´ıfica y deduccio´ n de las ecuaciones de cuater- niones usadas ver [[27]].

vehicle,” Ames Research Center, Tech. Rep., 1962.

[4] A. Lukyanov, S. Dodds, and J. Vittek, “Observer-based attitude control in the sliding mode,” pp. 639–671, 1996.

[5] S. Nicosia and P. Tomei, “Nonlinear observer and output feedback attitude control of spacecraft,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-28, no. 4, pp. 970–977, 1996.

[6] M. Algrain and M. Lee, “Nonlinear observer and output feedback attitude control of spacecraft,” pp. 638–645, 1997.

[7] F. Faruqi and K. Turner, “Extended kalman filter synthesis for integrated global positioning/inertial navigation systems,” *EL SEVIER Applied Mathematics and Computation*, vol. 115, pp. 213–227, 2000.

[8] J. Marins, X. Yun, E. Bachmann, R. McGhee, and M. Zyda, “An extended kalman filter for quaternion-based orientation estimation using marg sensors,” in *Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems Maui, Hawaii, USA, Oct.*

*29 - Nov. 03, 2001*. Maui, Hawaii, USA: IEEE, 2001, pp. 2003–2011. [9] M. Gandhi and L. Mili, “Robust extended kalman filter for transient tracking and outlier suppression,” *Latex Class Files*, vol. 6, no. 1, 2007.

[10] A. M. Sabatini, “Quaternion-based extended kalman filter for determi- ning orientation by inertial and magnetic sensing,” *IEEE Transaction on biomedical engineering*, no. 7, pp. 1346–1356, 2006.

[11] A. K. V. Bistrovs, “Adaptive extended kalman filter for aided inertial na- vigation system,” *ELECTRONICS AND ELECTRICAL ENGINEERING Automations and Robotics*, no. 6, pp. 37–40, 2006.

[12] B. Friedland, “Analysis strap-down navigation using quaternions,” *IEEE*

*transactions on aerospace and electronic systems*, vol. 14, no. 5, 1978. [13] D. Benson, “A comparison of two approaches to pure inertial and doppler-inertial error analysis,” *IEEE aerospace and Electronic Systems*,

vol. 11, no. 4, pp. 447–455, 1975.

[14] R. Smith, “An h-type filter for gps-based attitude estimation,” 1995. [15] S. Kou, D. Elliott, and T. Tarn, “Exponential observers for nonlinear

dynamic systems,” *Information and Control*, vol. 29, pp. 393–428, 1975. [16] F. Thau, “Observers for nonlinear dynamic systems,” *International*

*Journal of Control*, vol. 17, p. 471, 1975.

[17] B. Vik and T. Fossen, “A nonlinear observer for gps and ins integration,”

in *IEEE conference on Decision and control*, 2001, pp. 2956–2961. [18] J. Thienel, “A clipped nonlinear space craft attitude controller and

observer with an unknow constad gyro bias and gyro noise,” *IEEE trans. on automatic control*, vol. 8, pp. 2011–2015, 2003.

[19] M. Hua, “Attitude observers for accelerated rigid bodies based on gps and ins measurements,” pp. 8071–8076, 2009.

[20] B. Mahony, T. Hamel, and J.-M. Pflimlin, “Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group,” in *IEEE Transactions Automatic Control*, vol. 53, 2008, pp. 1203–1218.

[21] G. Scandaroli, P. Morin, and G. Silveira, “Nonlinear filter design for pose and imu bias estimation,” *IEEE conf. Decision and Control*, 2011.

[22] P. M. S. Bonnabel and P. Rouchon, “Symmetry preserving observers,”

*IEEE trans. on automatic control*, vol. 53, pp. 2514–2526, 2008.

[23] P. Martin and E. Salaun, “An invariant observer for earth velocity aided attitude heading reference systems,” in *IFAc World conf.*, vol. 53, 2008, pp. 9857–9864.

[24] V. J. Silvestre C. and O. P., “A nonlinear gps/imu observer based for rigid body attitude and position estimation,” in *IEEE conf. Decision and Control*, 2008, pp. 1255–1260.

[25] B. Warden, *Harmony of the world 75 years of mathematics magazine: Hamilton’s Discovery of Quaternions*. Mathematical association of American Magazine, 143–150, 2007.

[26] S. L. Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups*. DUDA,

1986.

[27] J. Kuipers, *Quaternions and rotation sequences: A primer with appli- cations to orbits, aerospace and virtual reality*. Princeton University Press, 2002.

[28] G. Zhong-yu, N. Xiao-ji, and G. Mei-feng, “Quaternion-based kalman filter for micro-machined strapdown attitude heading reference system,” *Chinese Journal Aeronautic*, no. 3, pp. 171–175, 2002.

[29] J. Sola`, “Quaternion kinematics for the error-state kf,” Reporte, 2012.