Problem 6.14

$$A = \{\text{біла куля виймається з третьої урни}\}$$
$$H_1 = \{\text{вийнято дві білі кулі}\}$$
$$H_2 = \{\text{вийнято чорна та біла кулі}\}$$
$$H_3 = \{\text{вийнято дві чорні кулі}\}$$
$$P(H_1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$$
$$P(H_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{4} + \frac{1}{60} = \frac{23}{30}$$
$$P(H_3) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{20}$$

$$P(A|H_1) = P(\{\text{біла куля з 10 чорних та 4 білих}\}) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$
$$P(A|H_2) = P(\{\text{біла куля з 9 чорних та 5 білих}\}) = \frac{5}{14}$$
$$P(A|H_3) = P(\{\text{біла куля з 8 чорних та 6 білих}\}) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) =$$
$$= \frac{4}{14} \cdot \frac{5}{60} + \frac{5}{14} \cdot \frac{46}{60} + \frac{6}{14} \cdot \frac{9}{60} = \frac{1}{14} \left(4 \cdot \frac{5}{60} + 5 \cdot \frac{46}{60} + 6 \cdot \frac{9}{60} \right) =$$
$$= \frac{1}{14} \left(\frac{20}{60} + \frac{230}{60} + \frac{54}{60} \right) = \frac{1}{14} \cdot \frac{304}{60} = \frac{38}{105}$$

Problem 6.15

$$A = \{\text{стрілок влучив}\}$$

$$H_1 = \{\text{стріляє перший стрілок}\}$$
$$H_2 = \{\text{стріляє другий стрілок}\}$$
$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|H_1) = \frac{5}{10}$$

$$P(A|H_2) = \frac{8}{10}$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \\ = \frac{P(A|H_1)}{P(A|H_1) + P(A|H_2)} = \frac{1/2}{5/10 + 8/10} = \frac{1/2}{13/10} = \frac{10}{26}$$

Problem 6.16

$$H_1 = \{\text{перший студент витягнув щасливий білет}\}$$
$$H_2 = \{\text{перший студент не витягнув щасливий білет}\}$$
$$P(H_1) = \frac{n}{N};\ P(H_2) = \frac{N-n}{N}$$

$$A = \{\text{другий студент витягнув щасливий білет}\}$$

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{n-1}{N-1} \cdot \frac{n}{N} + \frac{n}{N-1} \cdot \frac{N-n}{N} = \\ = \frac{n(n-1+N-n)}{N(N-1)} = \frac{n}{N} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow P(H_1) = P(A)$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{n(n-1) \cdot N}{N(N-1) \cdot n} = \frac{n-1}{N-1} \quad (2)$$

Problem 6.17

$$P(H_1) = P(\{\text{сигнал з шумом}\}) = 0.4$$
$$P(H_2) = P(\{\text{лише шум}\}) = 0.6$$

$$A = \{\text{пристрій реєструє наявність сигналу}\}$$
$$P(A|H_1) = 0.7;\ P(A|H_2) = 0.5$$

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = 0.7 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.6 = 0.58$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.7 \cdot 0.4}{0.58} = \frac{0.28}{0.58} = \frac{14}{29} \approx 0.48 \quad (3)$$

Problem 6.18

$$H_1 = \{ \text{ обрано не фальшиві кубики } \}$$
$$H_2 = \{ \text{ із обраних один фальшивий } \}$$
$$H_3 = \{ \text{ із обраних два фальшивих } \}$$
$$P(H_1) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7}$$
$$P(H_2) = \frac{C_3^1 \cdot C_4^1}{C_7^2} = \frac{4}{7}$$
$$P(H_3) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}$$

$$A = \{ \text{ сума очок дорівнює шести } \}$$
$$P(A|H_1) = \frac{5}{6^2}$$
$$P(A|H_2) = \frac{1}{6}$$
$$P(A|H_3) = \frac{1}{1} = 1$$
$$P(A) = \frac{5}{6^2} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{7} + 1 \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{7}\left(\frac{10}{6^2} + \frac{4}{6} + 1\right) = \frac{1}{7} \cdot \frac{35}{18} = \frac{5}{18}$$
$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{7}}{\frac{5}{18}} = \frac{4}{42} \cdot \frac{18}{5} = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{35} \tag{4}$$

Problem 6.19

75 осіб: 35 чоловіків та 40 жінок.

$$H_1 = \{\text{обрано двох чоловіків}\}$$
$$H_2 = \{\text{обрано чоловіка та жінку}\}$$
$$H_3 = \{\text{обрано двох жінок}\}$$

$$P(H_1) = \frac{C_{35}^2}{C_{75}^2} = \frac{35! \cdot 2! \cdot 73!}{2! \cdot 33! \cdot 75!} = \frac{35 \cdot 34}{75 \cdot 74}$$
$$P(H_2) = \frac{35 \cdot 40}{C_{75}^2} = \frac{35 \cdot 40 \cdot 2 \cdot 73!}{75!} = \frac{35 \cdot 40 \cdot 2}{75 \cdot 74}$$

$$P(H_3) = \frac{C_{40}^2}{C_{75}^2} = \frac{40! \cdot 2! \cdot 73!}{2! \cdot 38! \cdot 75!} = \frac{40 \cdot 39}{75 \cdot 74}$$

$$A = \{\text{обидві обрані особи шульги}\}$$

$$P(A|H_1) = \frac{C_3^2}{C_{35}^2} = \frac{3! \cdot 2! \cdot 33!}{2! \cdot 35!} = \frac{3 \cdot 2}{35 \cdot 34}$$

$$P(A|H_2) = \frac{3 \cdot 2}{35 \cdot 40}$$

$$P(A|H_3) = \frac{1}{C_{40}^2} = \frac{2! \cdot 38!}{40!} = \frac{2}{39 \cdot 40}$$

$$\begin{gathered} P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) = \\ = \frac{3 \cdot 2 \cdot 35 \cdot 34}{35 \cdot 34 \cdot 75 \cdot 74} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 35 \cdot 40 \cdot 2}{35 \cdot 40 \cdot 75 \cdot 74} + \frac{2 \cdot 39 \cdot 40 \cdot 2}{39 \cdot 40 \cdot 75 \cdot 74} = \\ = \frac{6 + 12 + 4}{75 \cdot 74} = \frac{22}{75 \cdot 74} \end{gathered}$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A)} = \frac{4 \cdot 75 \cdot 74}{75 \cdot 74 \cdot 22} = \frac{4}{22} \tag{5}$$

Problem 6.20

$$H_i = \{\text{випало } i \text{ очок}\}; \ i = \overline{1, 6}$$

$$P(H_i) = \frac{1}{6}$$

$$A_{>1} = \{\text{знає відповідь принаймі на одне питання}\}$$

$$A_0 = \{\text{не знає відповідь на жодне з питань}\}$$

$$P(A_{>1}) = 1 - P(A_0)$$

Використаймо опис всіх можливих випадків питань, якщо задається *i* питань.

$$\Omega_q = \{(q_1, \ldots, q_i) : q_j \text{ - питання}\}$$

$$|\Omega_q| = C_{30}^i$$

Для випадку, коли студен не знає відповідь на питання, нам потрібні конфігурації, де йому задали лише ті питання, відповідь на які він не знає.

Кількість таких питань - C_{10}^i.

Кількість заданих питань не перевищує кількість питань, відповідь на які студент не знає. Тому нам не потрібно розглядати окремі випадки.

$$P(A_0|H_i) = \frac{C_{10}^i}{C_{30}^i} = \frac{10! \cdot i! \cdot (30-i)!}{i! \cdot (10-i)! \cdot 30!} = \frac{10! \cdot (30-i)!}{30! \cdot (10-i)!}$$

$$P(A_0) = \sum_{i=1}^{6} P(H_i)P(A_0|H_i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} P(A_0|H_i)$$

$$\sum_{i=1}^{6} P(A_0|H_i) = \frac{10! \cdot 29!}{30! \cdot 9!} + \frac{10! \cdot 28!}{30! \cdot 8!} + \frac{10! \cdot 27!}{30! \cdot 7!} + \frac{10! \cdot 26!}{30! \cdot 6!} + \frac{10! \cdot 25!}{30! \cdot 5!} + \frac{10! \cdot 24!}{30! \cdot 4!} =$$
$$= \frac{10}{30} + \frac{10 \cdot 9}{30 \cdot 29} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{30 \cdot 29 \cdot 28} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27} +$$
$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} \approx 0.48$$

$$P(A_0) \approx 0.08$$
$$P(A_{>1}) \approx 1 - 0.08 = 0.92$$

Problem 6.21

$$P(\{\text{йде дощ}\} | \{\text{прогнозували дощ}\}) = P(\{\text{не йде дощ}\} | \{\text{не прогнозували дощ}\}) = \frac{2}{3}$$
$$P(\{\text{буде дощ}\}) = \frac{1}{2}$$
$$P(\{\text{Піквік бере парасолю}\} | \{\text{прогнозують дощ}\}) = 1$$
$$P(\{\text{Піквік бере парасолю}\} | \{\text{не прогнозують дощ}\}) = \frac{1}{3}$$

$$A = \{\text{йде дощ}\}$$
$$H_1 = \{\text{прогноз дощу}\}\,;\ H_2 = \{\text{прогноз, що дощу не буде}\}$$
$$B = \{\text{Піквік бере парасолю}\}$$

$$P(A|H_1) = P(\overline{A}|H_2) = \frac{2}{3}$$
$$P(A) = \frac{1}{2}$$
$$P(B|H_1) = 1$$
$$P(B|H_2) = \frac{1}{3}$$

1. $P(\{\text{Піквік не має парасолі}\} | \{\text{йде дощ}\}) = P(\overline{B}|A)$

$$P(\overline{B}|A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\overline{B} \cap A|H_1)P(H_1) + P(\overline{B} \cap A|H_2)P(H_2)}{P(A)}$$

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{2}{3}P(H_1) + \frac{1}{3}(1 - P(H_1))$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3}P(H_1) + \frac{1}{3}$$

$$3 = 2P(H_1) + 2 \ \Rightarrow \ P(H_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(\overline{B}|A) = \frac{P(\overline{B} \cap A|H_1)P(H_1) + P(\overline{B} \cap A|H_2)P(H_2)}{P(A)} =$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\left(P(\overline{B}|H_1)P(A|H_1\overline{B}) + P(\overline{B}|H_2)P(A|H_2\overline{B})\right) =$$
$$= P(\overline{B}|H_2)P(A|H_2\overline{B})$$

$$P(\overline{B}H_2) = P(\overline{B}|H_2)P(H_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(A|H_2\overline{B}) = \frac{P(AH_2\overline{B})}{P(H_2\overline{B})}$$

Щось складно для такої задачі. При умові незалежності подій B та A розв'язок повинен знаходитися легко:

$$P(\overline{B}|A) = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(P(\overline{B}|H_1)P(A|H_1) + P(\overline{B}|H_2)P(A|H_2)\right) =$$
$$= 0 + \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

2. $P(\overline{A}|B)$

$$P(B) = P(B|H_1)P(H_1) + P(B|H_2)P(H_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(B)} =$$
$$= \frac{P(\overline{A}B|H_1)P(H_1) + P(\overline{A}B|H_2)P(H_2)}{P(B)} =$$
$$= \frac{3}{4}(P(\overline{A}B|H_1) + P(\overline{A}B|H_2)) =$$
$$= \frac{3}{4}(P(\overline{A}|H_1)P(B|H_1\overline{A}) + P(\overline{A}|H_2)P(B|H_2\overline{A})) =$$
$$= \frac{1}{4}(P(B|H_1\overline{A}) + P(B|H_2\overline{A}))$$

… нехай події B та A незалежні, тоді:

$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(B)} =$$
$$= \frac{P(\overline{A}B|H_1)P(H_1) + P(\overline{A}B|H_2)P(H_2)}{P(B)} =$$
$$= \frac{3}{4}(P(\overline{A}B|H_1) + P(\overline{A}B|H_2)) =$$
$$= \frac{3}{4}(P(\overline{A}|H_1)P(B|H_1) + P(\overline{A}|H_2)P(B|H_2)) =$$
$$= \frac{1}{4}(P(B|H_1) + P(B|H_2)) =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$