Problem 17.12

Нехай ξ випадкова величина зі стандартним нормальним розподілом. Користуючись таблицею стандартного нормального розподілу знайдіть:

1. ймовірність $P(\xi \in [-3, 1])$
2. таке x, що $P(|\xi| \le x) = 0.9$.

1.

$$\begin{gathered} P(\xi \in [-3,1]) = P(\xi \le 1) - P(\xi < -3) = \\ = P(\xi \le 1) - (1 - P(\xi < 3)) = \\ = P(\xi \le 1) + P(\xi < 3) - 1 = 0.841 + 0.999 - 1 = 0.84 \end{gathered}$$

2.

$$\begin{gathered} P(|\xi| \le x) = P(\xi \le x) - P(\xi \le -x) = \\ = P(\xi \le x) - 1 + P(\xi \le x) = \\ = 2P(\xi \le x) - 1 = 0.9 \\ P(\xi \le x) = 0.95 \\ x = 1.64 \end{gathered}$$

$$\iff d = \frac{1009}{13}.$$

Problem 17.13

Нехай S - число гербів, що випали при 1 000 000 підкидань правильної монети. Оцініть ймовірність $(499000 < S < 501000)$:

1. за допомогою нерівності Чебишова
2. за допомогою центральної граничної теореми

1.

$$S = \sum_{i=1}^{10^6} \mathbb{1}(\text{ випав герб })$$
$$P(S \geq \varepsilon) \leq \frac{MS}{\varepsilon}$$
$$MS = 10^6 \cdot \frac{1}{2} = 5 \cdot 10^5$$
$$P(4.99 \cdot 10^5 < S < 5.01 \cdot 10^5) = P(S < 5.01 \cdot 10^5) - P(S < 4.99 \cdot 10^5) =$$
$$= 1 - P(S \geq 5.01 \cdot 10^5) - 1 + P(S \geq 4.99 \cdot 10^5) =$$
$$= P(S \geq 4.99 \cdot 10^5) - P(S \geq 5.01 \cdot 10^5) =$$

навряд чи можна одразу перейти до нерівності
тому спробуємо інакше

$$P\left(4.99 \cdot 10^5 < S < 5.01 \cdot 10^5\right) = P(\left|S - 5 \cdot 10^5\right| < 1000) =$$
$$= 1 - P(\left|S - 5 \cdot 10^5\right| \geq 1000)$$
$$\xi = \left|S - 5 \cdot 10^5\right| = |S - MS|$$
$$\Rightarrow P(|S - MS| \geq 1000) \leq \frac{\mathcal{D}\xi}{\varepsilon^2}$$
$$P(|S - MS| \geq 1000) \leq 10^6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^6}$$
$$P(|S - MS| \geq 1000) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow P(|S - MS| < 1000) \leq \frac{3}{4}$$

2.

$$\frac{S - MS}{\sqrt{\mathcal{D}S}} = \frac{S - 5 \cdot 10^5}{500} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$
$$P(4.99 \cdot 10^5 < S < 5.01 \cdot 10^5) =$$
$$= P(4.99 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^5 < S - 5 \cdot 10^5 < 5.01 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^5) =$$
$$= P\left(\frac{4.99 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^5}{500} < \frac{S - 5 \cdot 10^5}{500} < \frac{5.01 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^5}{500}\right) =$$
$$= P\left(-2 < \frac{S - 5 \cdot 10^5}{500} < 2\right) =$$
$$= P(\eta < 2) - P(\eta < -2) = 2P(\eta < 2) - 1 = 2 \cdot 0.977 - 1 = 0.954$$

Problem 17.15

При випадковому блуканні на числовій осі частинка, стартуючи з точки 0, робить ймовірність того, що після сотого кроку частинку віддалятиме від початкової точки не менше, ніж 10 кроків.

$$\xi = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi$$
$$MS_n = 0$$
$$DS_n = 100$$
$$P(|S| < 10) = P(-10 < S < 10) =$$
$$= P(\frac{-10}{\sqrt{100}} < \frac{S}{\sqrt{100}} < \frac{10}{\sqrt{100}}) =$$
$$= P(-1 < \frac{S}{10} < 1) = P(\frac{S}{10} < 1) - P(\frac{S}{10} < -1) = P(\frac{S}{10} < 1) - 1 + P(\frac{S}{10} < 1) =$$
$$= 2P(\frac{S}{10} < 1) - 1 = 2 \cdot 0.841 - 1 = 0.682$$
$$\Rightarrow P(|S| > 10) = 0.318$$

Problem 17.16

У компанії-авіаперевізнику оцінили, що в середньому 4% квитків, проданих на авіарейс, залишаються невикористаними. Як наслідок, компанія обрала наступну стратегію: продавати 100 квитків на літак, що має 98 місць. Знайдіть ймовірність того, що кожному пасажиру, що опиниться на борту літака, знайдеться місце.

$$\xi_i = \mathbb{1}(\text{ білет } i \text{ використаний })$$
$$M\sum_{i=1}^{n}\xi_i = 0.04 \cdot n = \lambda$$

схоже на розподіл Пуассона, оскільки надали значення в середньому та не вказали кількість n

$$\mathcal{D}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \lambda$$
$$S = \sum \xi_i$$
$$\frac{S - MS}{\mathcal{D}S} = \frac{S - 0.04}{0.04} \to N(0,1)$$

нехай продано 100 білетів

$$P(S_{100} \geq 2) = P(S_{100} - 4 \geq 2 - 4) = P(\frac{S_{100} - 4}{\sqrt{4}} \geq \frac{2-4}{\sqrt{4}}) = P(\frac{S_{100} - 4}{2} \geq -1) =$$
$$= 1 - P(\frac{S_{100} - 4}{2} < -1) = P(\frac{S_{100} - 4}{2} < 1) = 0.841$$

Problem 17.17

Кожен з членів жюрі, яке складається з непарної кількості осіб, незалежно від інших приймає справедливе рішення з ймовірністю 0.7. Якою повинна бути чисельність жюрі для того, щоб рішення, ухвалене більшістю голосів, було справедливим з ймовірністю не меншою за 0.9.

$$\eta = \mathbb{1}(\text{ рішення справедливе })$$
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i$$
$$MS_n = n \cdot 0.7$$
$$\mathcal{D}S_n = n \cdot 0.21$$
$$P(S_n > \frac{n}{2}) = P(\frac{S_n - n \cdot 0.7}{\sqrt{n \cdot 0.21}} > \frac{\frac{n}{2} - n \cdot 0.7}{\sqrt{n \cdot 0.21}}) > 0.9$$
$$P(S_n > \frac{n}{2}) = 1 - P(S_n \leq \frac{n}{2}) \Rightarrow 1 - P(\frac{S_n - n \cdot 0.7}{\sqrt{n \cdot 0.21}} \leq \frac{\frac{n}{2} - n \cdot 0.7}{\sqrt{n \cdot 0.21}}) > 0.9$$
$$P(\frac{S_n - n \cdot 0.7}{\sqrt{n \cdot 0.21}} \leq \frac{\frac{n}{2} - n \cdot 0.7}{\sqrt{n \cdot 0.21}}) < 0.1$$
$$\frac{\sqrt{n}}{2 \cdot \sqrt{0.21}} - \frac{0.7 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{0.21}} < -1.282$$
$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{0.21}} - \frac{0.7}{\sqrt{0.21}}\right) < -1.282$$
$$\sqrt{n}\,(0.91 - 1.53) < -1.282$$
$$\sqrt{n} > \frac{-1.282}{-0.62}$$
$$\sqrt{n} > 2.07$$
$$n > 4.2$$

Problem 17.20

Гральний кубик підкидається до тих пір, аж поки сума очок вперше перевищить 700. Оцініть ймовірність того, що для цього знадобиться:

1. більше за 210 підкидань
2. менше за 190 підкидань
3. неменше за 180 і не більше за 210 підкидань.

$$\xi \text{ - кількість очок на кубику}$$
$$M\xi = 3.5$$
$$\mathcal{D}\xi = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) - 3.5^2 = 2.91$$
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$
$$MS_n = n \cdot 3.5$$
$$\mathcal{D}S_n = n \cdot 2.91$$

1.

$$P(S_{210} < 700) = P(\frac{S_{210} - 210 \cdot 3.5}{\sqrt{210 \cdot 2.91}} < \frac{700 - 210 \cdot 3.5}{\sqrt{210 \cdot 2.91}}) =$$
$$= P(\frac{S_{210} - 735}{24.72} < \frac{-35}{24.72}) = P(\eta < -1.42) = 0.078$$
$$\Rightarrow P(S_{>210} > 700) = 0.922$$

2.

$$P(S_{190} > 700) = P(\frac{S_{190} - 190 \cdot 3.5}{\sqrt{190 \cdot 2.91}} > 1.49) = 1 - 0.932 = 0.068$$
$$\Rightarrow P(S_{<190} > 700) = 0.932$$