1 Problem 4.2

$\tilde{L_1}$ Можна побудувати вирішувач для $\tilde{L_1}$

$$\tilde{M_1}(x) = \begin{cases} M_1(M_{et}(x)) & \text{якщо } x \text{ починається з } 0, \text{ де } M_{et} \text{ — "з'їдає" перший символ} \\ 0 & \text{якщо } x \text{ починається з } 1 \end{cases}$$

$\tilde{M_1}$ вирішує $\tilde{L_1} \Rightarrow \tilde{L_1} \in R$.

$\tilde{L_2}$ Маємо лише розпізнавач для L_2, а отже і можемо побудувати розпізнавач і для $\tilde{L_2}$. Чи можемо побудувати вирішувач? Очевидно, що ні, оскільки тоді буде існувати вирішувач і для L_2, що є протиріччям. Тому маємо $\tilde{L_2} \notin R \Rightarrow \tilde{L_2} \in RE \backslash R$.

$\tilde{L_3}$ Чи можемо побудувати розпізнавач для $\tilde{L_3}$? Якщо це так, то матимемо змогу розпізнавати і $L_3 \Rightarrow$ протиріччя. Чи можемо розпізнати $\overline{\tilde{L_3}}$? І знову таки ні, бо матимемо змогу використовувати розпізнавач $\overline{L_3}$, якого не існує. Маємо протиріччя, а отже $\tilde{L_3} \in NRNC$.

2 Problem 4.3

$\cup$ $L_1 = \overline{INF}_{TM}, \;\; \overline{INF}_{TM} \in NRNC$
$L_2 = ESEVEN_{TM}, \;\; ESEVEN_{TM} \in NRNC$
$ESEVEN \subset \overline{INF}_{TM} \Rightarrow L_1 \cup L_2 = \overline{INF}_{TM} \in NRNC$.

$\cap$ $L \in NRNC$
$L_1 = \{0x \mid x \in L\}, \;\; L_2 = \{1x \mid x \in L\}$
$L_1, L_2 \in RE \backslash R$
$L_1 \cap L_2 = \varnothing \in R$

3 Problem 4.4

a $C_1 = \{\varnothing, \{1\}, \{0\}\}$
$C_2 = \{\varnothing, \{0, 1\}\}$
$C_1 \cup C_2 = \{\varnothing, \{1\}, \{0\}, \{0, 1\}\}$
$C_1 \vee C_2 = \{\varnothing, \{1\}, \{0\}, \{0, 1\}\}$

b $C_1 = \{\varnothing, \{1\}\}, \;\; C_2 = \{\{0, 1\}, \{1\}, \{0\}\}$
$C_1 \cap C_2 = \{\{1\}\}$
$C_1 \wedge C_2 = \{\{1\}\}$

c $C_1 = \{L_1 \subseteq \{0,1\}^* \mid |L_1| < \infty\}$
$\overline{C_1} = \{L_1 \subseteq \{0,1\}^* \mid |L_1| = \infty\}$
$coC_1 = \{L_1 \subseteq \{0,1\}^* \mid |\overline{L}_1| < \infty\} = \{L_1 \subseteq \{0,1\}^* \mid |L_1| = \infty\}$

4 Problem 4.5

1. $C_1 \cup C_2 = \{L_1 \subseteq \{0,1\}^*$: другий символ слів L_1 — 1 або третій символ — 0$\}$
2. $C_1 \cap C_2 = \{L_1 \subseteq \{0,1\}^*$: другий символ слів L_1 — 1 та третій символ — 0$\}$
3. $C_1 \vee C_2 = \{L_1 \subseteq \{0,1\}^*$: з L_1 кожне слово має другим символом — 1 або третім — 0$\}$
4. $C_1 \wedge C_2 = \{L_1 \subseteq \{0,1\}^*$: з L_1 кожне слово має другим символом — 1 та третім — 0$\}$
5. $\overline{C_1} = \{L_1 \subseteq \{0,1\}^* : L_1$ має хоч одне слово x, у якого другий символ 0 або $|x| < 2\}$
6. $\overline{C}_2 = \{L_1 \subseteq \{0,1\}^* : L_1$ має хоч одне слово x у якого третій символ 1 або $|x| < 3$ $\}$
7. $coC_1 = \{L_1 \subseteq \{0,1\}^*$: кожне слово x маж другим символом 0 або $|x| < 2$ $\}$
8. $coC_2 = \{L_1 \subseteq \{0,1\}^*$: кожне слово x маж третім символом 1 або $|x| < 3$ $\}$

5 Problem 4.6

Припустимо, що існує вирішувач $\tilde{M}_{HALT}$, який для заданої машини Тюринга і вхідного слова x визначає чи зупиняється машина Тюринга на цьому вхідному слові x. Тоді мова $L_{BB} = \{\langle M \rangle \mid M$ чемпіон класифікації BB$\}$ є вирішувальною, оскільки ми можемо взяти всі машини певного класу $\langle M, \varepsilon \rangle \in HALT$ і порівняти їх. А це означає що можна визначити для довільного класу переможця, отже функції Радо є обчислювальними для $n \in \mathbb{N}$. Але функції Радо є необчислюваними, отримали протиріччя.

6 Problem 4.7

$L_{Champ} = HALT \cap \overline{L_{BB}}$ HALT невирішувальна, тоді якщо $L_{BB} \in coRE \backslash R$, то L_{Champ} - невирішувальна, так як $HALT, \overline{L_{BB}} \in RE \backslash R \Rightarrow HALT \cap \overline{L}_{BB} \in RE \backslash R$. RE замкнутий відносно перетину $\Rightarrow L_{Champ} = HALT \cap \overline{L}_{BB} \in RE$. РОзпізнавач для $\overline{L_{BB}}$:

$$M_{L_{BB}}(\langle M \rangle) = \begin{cases} 1 & M \text{ чемпіон в класифікації BB} \\ \perp & \text{інакше} \end{cases}$$

Якщо МТ M буде зупинятися на пустому слові, то ця МТ M входить до $\overline{L}_{BB}$, або буде зациклюватися. $\Rightarrow L_{BB} \in coRE, L_{Champ} \in RE$.

7 Problem 4.8

$L_1 \in C_1$ complete $\Rightarrow \forall L_c \in C_1 : L_c \leq_r L_1$.
Також $\overline{L}_1 \in coC_1$.
$\forall L_c \in C_1 : L_c \leq_r L_1 \Rightarrow \overline{L}_c \leq_r \overline{L}_1 \Rightarrow \forall L_{coC} \in coC_1 : L_{coC} \leq_r \overline{L}_1$
$\Rightarrow \overline{L}_1$ — coC$_1 complete$

8 Problem 4.9

$L_1, L_R \subseteq \{0,1\}^*,\ L_R \in R \wedge L_1 \leq_T L_R \Rightarrow L_1 \in R$ Саме зведення $L_1 \leq_T L_R$ означає, що існує така МТ з оракулом $M(L_1^{L_R})$, яка вирішує L_1. Також із цього слідує, що ми матимемо змогу побудувати вирішувач M_{LR} для L_R. При запиті до оракула запускаємо МТ M_{LR}. $\Rightarrow L_1 \in R$.

9 Problem 4.10

r При $L_1 \leq_{tt} L_1$ функції f_1, f_2, f_3 будуть повертати результат вхідного слова. А розпізнавач, в свою чергу, буде повертати результат функцій.

t $L_1 \leq_{tt} L_2,\ \ L_2 \leq_{tt} L_3 \Rightarrow L_1 \leq_{tt} L_3$

Маючи L_2 можемо побудувати композицію вирішувачів L_1 та L_2, використовуючи функції L_2 для звернень до оракула.

10 Problem 4.11

Нехай L_1 повна для класів C_1, C_2. Тобто:

$$L_1 \in C_1 \Rightarrow \forall L_C \in C_1 L_C \leq_r L_1$$

$$L_1 \in C_2 \Rightarrow \forall L_C \in C_2 L_C \leq_r L_1$$

Тоді:

$$L_1 \in C_2,\ \forall L_C \in C_1 : L_C \in C_2 \Rightarrow C_1 \subseteq C_2$$
$$L_1 \in C_1,\ \forall L_C \in C_2 : L_C \in C_1 \Rightarrow C_2 \subseteq C_1$$
$$C_1 = C_2$$

11 Problem 4.12

a R — замкнений за Тюрінгом, $L_1 \in R$.

b L_2 не буде вирішуваною, оскільки є замкнутість класу за тюрінгом та L_1 не є вирішуваною (можна доказати від противного).

c рефлексивність є очевидною — просто повертаємо відповідь оракула. Транзитивність можна доказати шляхом композиції.

d будуємо МТ з оракулом, що має мову L_1. Для вирішувача $\overline{L}_1$ побудуємо таку МТ, яка буде повертати протилежний результат оракула МТ L_1.

e Будуємо розпізнавач з оракулом з мовою L_2. Оскільки L_1 вирішувана, то також існує розпізнавач без оракула. Для зведення за Тюрінгом ця МТ буде ігнорувати відповіді оракула.

12 Problem 4.13

$L_1 \in RE,\ L_2 \in coRE \Rightarrow \exists$ розпізнавачі для L_1 та $\overline{L}_2$.

Тоді із замкнутості класів R, RE, coRE, та припущення, що або зведення $L_1 \leq_m L_2$, або $L_2 \leq_m L_1$ існують, то обидва L_1, L_2 будуть належати якомусь з класів $R, RE, coRE$.

$L_1 \in RE, L_2 \in coRE \Rightarrow L_1, L_2 \in R$. Але ми маємо протиріччя: A_{TM} та E_{TM} не є вирішуваними. Отже наше припущення щодо такого зведення є хибним.