Problem 7.13

Опишіть σ-алгебру підмножин відрізка $[0,1]$, породжену множинами:

1. $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$
2. множиною раціональних точок відрізка $[0,1]$
3. $\{0\}$ та $\{1\}$

1. $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

$$H_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right)$$

$$H_2 = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$$

$$H_3 = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\mathcal{F}_{[1/3,1/2]} = \sigma\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]\right) = \{\emptyset, \Omega, \left[0, \frac{1}{3}\right), \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \left(\frac{1}{2}, 1\right],$$
$$\left[0, \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \left[0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]\}$$

2. множина раціональних точок відрізка $[0,1]$

$$A = \left\{\frac{q_1}{q_2} : q_i \in \mathbb{N}, q_1 \leq q_2\right\}$$

$$H_1 = A$$

Введемо H_2, що буде містити всі інтервали, котрі не містять раціонального числа, тобто це множина всіх ірраціональних чисел.

$$H_2 = [0,1] \backslash A$$

$$\mathcal{F}_A = \{\emptyset, \Omega, A, H_2\}$$

3. $\{0\}$ та $\{1\}$

$$H_1 = (0,1)$$
$$H_2 = \{0\}$$
$$H_3 = \{1\}$$
$$\mathcal{F}_{\{0\},\{1\}} = \{\emptyset, \Omega, H_1, H_2, H_3, H_1 \cup H_2, H_1 \cup H_3, H_2 \cup H_3\}$$

Problem 7.14

Нехай $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ - борелева σ-алгебра на $\mathbb{R}$. Доведіть, що $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \in \mathcal{B}$.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})$$
$$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \ \ (\mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$$

Візьмемо такий інтервал, що, очевидно, буде належати нашій алгебрі:

$$[q,q] = q \in \mathbb{Q}$$

Об'єднання таких інтервалів буде належати алгебрі.

$$\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} [q,q] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} [q,q] = \mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{Q})$$

А отже і за означенням алгебри маємо:

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Problem 7.15

Нехай $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ - борелева σ-алгебра в $\mathbb{R}^2$. Доведіть, що

1. $(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q} \in \mathcal{B}$
2. $\{(x_1, x_2) \in R^2 \mid \max(\sin(x_1 x_2), \arctan(x_2 - x_1)) > 0.1\} \in \mathcal{B}$

1. З минулої задачі довели, що множина раціональних чисел належить борелевій алгебрі над раціональними числами, а отже і $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \in \mathcal{B}$. А декартовий добуток борелевих множин є також борелевою множиною. Тому і $(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q} \in \mathcal{B}$.

2. sin та arctan є неперевними функціями, а отже і max(sin, arctan) є неперервною. Оскільки max$(\ldots) > 0.1$ є не що інше, як max$(\ldots) \in (0.1, \infty)$, то його образ є відкритою множиною. Праобраз відкритої множини — множина відкрита. Отже дана множина є відкритою та належить борелевій алгебрі.

Problem 7.17

Опишіть σ-алгебру, породжену:

1. подіями нульової ймовірності
2. подіями ймовірності одиниця.

$$\mathbb{A} = \{A_i : P(A_i) = 0\}\,; \quad |\mathbb{A}| = n$$

1. $\sigma(A_i)$

$$P(\overline{A_i}) = 1$$
$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) = 0$$
$$P\left(\bigcup_i \overline{A}_i\right) = \sum_i P(\overline{A}_i) - \sum_{i\neq j} P(\overline{A}_i\overline{A}_j) + \cdots = 1$$
$$\bigcup_i A_i \cup \bigcup_i \overline{A}_i = \Omega$$
$$P(\Omega) = 1$$

2. $\sigma(\overline{A}_i)$ аналогічно $\sigma(A_i)$:

$$\bigcap_i \overline{A}_i = \Omega \backslash \bigcup_i A_i$$

Problem 7.18

Нехай $\{A_n\}_{n\geq 1}$ - деяка послідовність подій. Доведіть, що подія $\underline{\lim} A_n$ належить σ-алгебрі, породженій цією послідовністю.

$$\underline{\lim} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=i}^{\infty} A_i$$
$$\mathbb{A} = \sigma(A_n) \Rightarrow A_n \in \mathbb{A}; \quad \bigcup_j A_j \in \mathbb{A},\ j \geq 1; \quad \bigcap_j A_j \in \mathbb{A},\ j \geq 1$$
$$\Rightarrow \underline{\lim} A_n \in \mathbb{A}$$

Problem 7.19

Доведіть, що якщо $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ - неспадна послідовність σ-алгебр, то їхнє об'єднання $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ є алгеброю.

Оскільки кожна алгебра містить як пусті множину, так і Ω, то і об'єднання цих алгебр буде містити $\emptyset$ та Ω.

Оскільки послідовність є неспадною $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \dots$, то отримана алгебра $\mathcal{A}$ є найбільшою та містить елементи всіх алгебр у послідовності.

Тому, якщо який елемент, або його заперечення, міститься у алгебрі i, то його заперечення, або ж він відповідно, міститься в цій алгебрі також, а отже і в об'єднанні, тобто в алгебрі $\mathcal{A}$.

Якщо якесь об'єднання подій міститься у алгебрі i, при умові, що ці події належать цій алгебрі, то і таке об'єднання буде належати і алгебрі $\mathcal{A}$.