Problem 11.20

Нехай ξ випадкова величина з функцією розподілу F. Знайдіть функцію розподілу випадковго вектора (ξ, ξ).

$$F_{(\xi,\xi)}(x,y) = P(\xi \leq x, \xi \leq y) = P(\xi \in (-\infty, x] \cap (-\infty, y]) =$$

$$= \begin{cases} F_\xi(x) & x \leq y \\ F_\xi(y) & x > y \end{cases}$$

Problem 11.21

Випадковий вектор (ξ_1, ξ_2) має щільність розподілу $p(x,y) = \frac{c}{1+x^2+x^2y^2+y^2}$. Знайдіть:

1. параметр c
2. щільність розподілу $p_{\xi_1}(x), p_{\xi_2}(x)$
3. $P(|\xi_1| \leq 1, |\xi_2| \leq 1)$

Чи є ξ_1, ξ_2 незалежними?

1.
$$\int\limits_{x\in\mathbb{R}}\int\limits_{y\in\mathbb{R}} p(x,y) = \int\limits_{x\in\mathbb{R}}\int\limits_{y\in\mathbb{R}} \frac{c}{1+x^2+x^2y^2+y^2} = c\int\limits_{x\in\mathbb{R}}\int\limits_{y\in\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} =$$

$$= c\int\limits_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1+x^2} \int\limits_{y\in\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2} \right) = c\int\limits_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1+x^2}\pi \right) = c\pi\pi = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\pi^2}$$

2.
$$p_{\xi_1}(x) = \int\limits_{y\in\mathbb{R}} \frac{1}{\pi^2(1+x^2+y^2+x^2y^2)} = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} \int\limits_{y\in\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Аналогічно $p_{\xi_2}(x)$ через симетрію:

$$p_{\xi_2}(x) = \int\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\pi^2(1+x^2+y^2+x^2y^2)} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

3.
$$P(|\xi_1| \leq 1, |\xi_2| \leq 1) = P(\xi_1 \in [-1,1], \xi_2 \in [-1,1]) =$$

$$= \int\limits_{x\in[-1,1]} \int\limits_{y\in[-1,1]} \frac{1}{\pi^2(1+x^2+y^2+x^2y^2)} = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{x\in[-1,1]} \int\limits_{y\in[-1,1]} \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{x\in[-1,1]} \left(\frac{1}{1+x^2} \int\limits_{y\in[-1,1]} \frac{1}{1+y^2} \right) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{x\in[-1,1]} \frac{1}{1+x^2} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}$$

4.

$$p_{(\xi_1,\xi_2)}(x,y) = p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(y)$$

$$p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(y) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\frac{1}{\pi(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2(1+x^2+y^2+x^2y^2)}$$

Отже величини є незалежними.

Problem 11.22

Нехай ξ та η незалежні випадкові величини, кожна з них розподілена за показниковим розподілом з параметром $\alpha > 0$. Доведіть, що $\frac{\xi}{\xi+\eta}$ має рівномірний розподіл на відрізку $[0,1]$.

$$F_{\frac{\xi}{\xi+\eta}}(x) = P(\frac{\xi}{\xi+\eta} \leq x)$$

$$p_{(\xi,\eta)}(x,y) = p_\xi(x)p_\eta(y) = \alpha^2 e^{-\alpha x} e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}(x \geq 0, y \geq 0)$$

$$F_{\frac{\xi}{\xi+\eta}}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \alpha^2 e^{-\alpha z} e^{-\alpha y} dz dy \cdot \mathbb{1}(x \geq 0, y \geq 0) \cdot \mathbb{1}\left(\frac{z}{z+y} \leq x\right) =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \alpha^2 e^{-\alpha z} e^{-\alpha y} dz dy \cdot \mathbb{1}(z - xz \leq xy) =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \alpha^2 e^{-\alpha z} e^{-\alpha y} dz dy \cdot \mathbb{1}\left(z \leq \frac{xy}{1-x}\right) =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{\frac{xy}{1-x}} \alpha^2 e^{-\alpha z} e^{-\alpha y} dz dy =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{\frac{xy}{1-x}} \alpha^2 e^{-\alpha z} e^{-\alpha y} dz dy = \alpha^2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha y} \frac{1}{-\alpha} \left(e^{-\alpha \frac{xy}{1-x}} - 1\right) dy =$$

$$= -\alpha \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y(1+\frac{x}{1-x})} dy - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y} dy \right) =$$

$$= -\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y \frac{1}{1-x}} dy - \frac{\alpha}{\alpha} e^{-\alpha y} \mid_0^{+\infty} =$$

$$= (1-x) e^{-\alpha y \frac{1}{1-x}} \mid_0^{+\infty} - e^{-\alpha y} \mid_0^{+\infty} = (1-x)(e^{-\infty} - 1) - (e^{-\infty} - 1) =$$

$$= (1 - x - 1)(e^{-\infty} - 1) = x$$

$$F_{\frac{\xi}{\xi+\eta}}(x) = x \cdot \mathbb{1}(x \in [0,1])$$

$$p_{\frac{\xi}{\xi+\eta}}(x) = \mathbb{1}(x \in [0,1])$$

Problem 11.23

Нехай $\xi_1, ..., \xi_n$ незалежні однаково розподілені випадкові величини з неперервною функцією розподілу F. Впорядкуємо їх за величиною $\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq ... \leq \xi_{(n)}$. Знайдіть функціх розподілу випадкових величин:

1. $\xi_{(1)} = \min(\xi_1, ...\xi_n)$
2. $\xi_{(n)} = \max(\xi_1, ..., \xi_n)$
3. $\xi_{(m)}$

1.

$$F_{\xi_{(1)}}(x) = P(\min(\xi_1, ..., \xi_n) \leq x) = 1 - P(\min(\xi_1, ..., \xi_n) > x) =$$

$$= 1 - P(\xi_1 > x, ..., \xi_n > x) = 1 - P(\xi_1 > x) \dots P(\xi_n > x)) =$$

$$= 1 - (1 - F(x))^n$$

2.

$$F_{\xi_{(n)}}(x) = P(\max(\xi_1, ..., \xi_n) \leq x) = P(\xi_1 \leq x, \dots, \xi_n \leq x) =$$

$$= P(\xi_1 \leq x) \dots P(\xi_n \leq x) = F^n(x)$$

3.

$$F_{\xi_{(m)}}(x) = P(\xi_{(1)} \leq x, \dots, \xi_{(m)} \leq x, \xi_{(m+1)} > x \text{ } or \text{ } \xi_{(m+1)} \leq x, \dots, \xi_{(n)} > x \text{ } or \text{ } \xi_{(n)} \leq x) =$$

$$= \sum_{i=m}^{n} C_n^i P^i(\xi \leq x) P^{n-i}(\xi > x) = \sum_{i=m}^{n} C_n^i F^i(x)(1 - F(x))^{n-i}$$

Problem 11.24

Нехай ξ_1, ξ_2 незалежні випадкові величини зі стандартним нормальним розподілом. Знайдіть щільність розподілу випадкової величини $\xi_1^2 + \xi_2^2$.

$$p_{(\xi_1,\xi_2)}(x,y) = p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$F_{\xi_1^2+\xi_2^2}(x) = P(\xi_1^2+\xi_2^2 \le x) \qquad (x \ge 0)$$

$$F_{\xi_1^2+\xi_2^2}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} p_{(\xi_1,\xi_2)}(z,y)dzdy \cdot \mathbb{1}(z^2+y^2 \le x) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2+y^2}{2}}dzdy \cdot \mathbb{1}(z^2+y^2 \le x) =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}{2}}\rho \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot \mathbb{1}(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi \le x) =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho \cdot d\rho \cdot d\varphi =$$

$$= \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho d\rho = -e^{-\frac{\rho^2}{2}}|_0^{\sqrt{x}} = -e^{-\frac{x}{2}} + 1$$

$$p_{\xi_1^2+\xi_2^2}(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \cdot \mathbb{1}(x \ge 0)$$

Problem 11.25

$$P(\xi_1 < x, \xi_1 + 2\xi_2 < y) = \begin{cases} \int\limits_0^x \int\limits_0^{\frac{z_1-y}{2}} dz_1dz_2 & x < y - 2\xi_2 \\ \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\frac{z_1-y}{2}} dz_1dz_2 & x > y - 2\xi_2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_0^x \frac{z_1-y}{2}dz_1 & x < y - 2\xi_2 \\ \int\limits_0^1 \frac{z_1-y}{2}dz_1 & x > y - 2\xi_2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2-2xy}{4} & x < y - 2\xi_2 \\ \frac{1-2y}{4} & x > y - 2\xi_2 \end{cases}$$