Методи обчислень. Розрахунково-графічна робота.

Варіант 4 *Змоделювати процес розповсюдження газоподібної забруднюючої домішки в атмосфері за умови наявності ефекту самоочищення середовища.*
Самоочищення виникає при досягненні концентрацією u *деякого критичного значення.*

Рівняння еволюції концентрації домішки має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathcal{X} + \varphi$$

$$\mathcal{X} = \begin{cases} 0 & u < u_{cr} \\ -du & u \geq u_{cr} \end{cases}$$

$$u(0) = 0$$

$$u \mid_\Gamma = 0$$

Прийняти, що джерела забруднення розміщені в двох несусідніх центральних точках області, і діють з інтенсивністю $\varphi = 5\text{мкг/хв}$. *Розміри області завдати самостійно (але розбиття області повинно включати не менше 10 вузлів за кожним напрямком). Знайти поле концентрації домішки на протязі часу, за який концентрація домішки встигне досягти свого критичного значення хоча б в деяких точках області.*

$$t \in [0, \infty]$$

Нехай маємо границі по осі x: $[a_x, b_x]$, та по осі y: $[a_y, b_y]$. Тоді:

$$u \mid_\Gamma = 0 \;\Rightarrow\; u(a, b) = 0 \quad \forall a \in \{a_x, a_y\}, \forall b \in \{b_x, b_y\}$$

Дискретизація

Рівняння має параболічний тип. Будемо використовувати неявну схему Кранка-Ніколсона:

- розбиваємо відрізки $[a_x, b_x]$ та $[a_y, b_y]$ на $n+1$ вузлів
- i позначатимемо номер вузла по $[a_x, b_x]$, а j по $[a_y, b_y]$
- відстань між сусідніми вузлами Δx та Δy
- дискретизуємо час t: $t_h \in [0, m]$ та індекс $h \in \mathbb{N}_0, h = \overline{0, l}$. крок Δt
- джерело забруднення: нехай маємо дві пари (s_1, d_1) та (s_2, d_2), такі що
  - $s_2 - s_1 > 1 \;\wedge\; d_2 - d_1 > 1$ - умова несусідства тоді

$$\varphi = \begin{cases} 0 & (i,j) \neq (s_1, d_1) \;\wedge\; (i,j) \neq (s_2, d_2) \\ 5 & (i,j) = (s_1, d_1) \;\vee\; (i,j) = (s_2, d_2) \end{cases}$$

Беремо скінченно-різницеві апроксимації:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j}^{h+1} - u_{i,j}^{h}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda \frac{u_{i+1,j}^{h+1} - 2u_{i,j}^{h+1} + u_{i-1,j}^{h+1}}{\Delta x^2} + (1-\lambda) \frac{u_{i+1,j}^{h} - 2u_{i,j}^{h} + u_{i-1,j}^{h}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda \frac{u_{i,j+1}^{h+1} - 2u_{i,j}^{h+1} + u_{i,j-1}^{h+1}}{\Delta x^2} + (1-\lambda) \frac{u_{i,j+1}^{h} - 2u_{i,j}^{h} + u_{i,j-1}^{h}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda \frac{u_{i+1,j}^{h+1} - u_{i,j}^{h+1}}{\Delta x} + (1-\lambda) \frac{u_{i+1,j}^{h} - u_{i,j}^{h}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lambda \frac{u_{i,j+1}^{h+1} - u_{i,j}^{h+1}}{\Delta y} + (1-\lambda) \frac{u_{i,j+1}^{h} - u_{i,j}^{h}}{\Delta y}$$

$$\lambda \in (0, 1)$$

Різницева задача

$$\frac{u_{i,j}^{h+1} - u_{i,j}^{h}}{\Delta t} = k_1 \left(\lambda \frac{u_{i+1,j}^{h+1} - 2u_{i,j}^{h+1} + u_{i-1,j}^{h+1}}{\Delta x^2} + (1-\lambda) \frac{u_{i+1,j}^{h} - 2u_{i,j}^{h} + u_{i-1,j}^{h}}{\Delta x^2} \right) +$$

$$+k_2 \left(\lambda \frac{u_{i,j+1}^{h+1} - 2u_{i,j}^{h+1} + u_{i,j-1}^{h+1}}{\Delta y^2} + (1-\lambda) \frac{u_{i,j+1}^{h} - 2u_{i,j}^{h} + u_{i,j-1}^{h}}{\Delta y^2} \right) + \mathcal{X} + \varphi$$

$$\mathcal{X} = \begin{cases} 0 & u < u_{cr} \\ -\left(\lambda \left(u_{i+1,j}^{h+1} + u_{i,j+1}^{h+1} - 2u_{i,j}^{h+1} \right) + (1-\lambda) \left(u_{i+1,j}^{h} + u_{i,j+1}^{h} - 2u_{i,j}^{h} \right) + u_{i,j}^{h+1} - u_{i,j}^{h} \right) & u \geq u_{cr} \end{cases}$$

$\exists (s_1, d_1) \text{ and } \exists (s_2, d_2): \quad s_2 - s_1 > 1 \;\wedge\; d_2 - d_1 > 1$

$$\varphi = \begin{cases} 0 & (i,j) \neq (s_1, d_1) \;\wedge\; (i,j) \neq (s_2, d_2) \\ 5 & (i,j) = (s_1, d_1) \;\vee\; (i,j) = (s_2, d_2) \end{cases}$$

З початковими:

$$\forall i, j \quad u_{i,j}^{0} = 0$$

З граничними:

$$\forall h: \; \forall i: u_{i,0}^{h} = u_{i,n}^{h} = 0$$

$$\forall h: \; \forall j: u_{0,j}^{h} = u_{n,j}^{h} = 0$$

Перенесемо всі значення u у момент $h+1$ у ліву частину рівняння:

$$\frac{1}{\Delta t} u_{i,j}^{h+1} - k_1 \frac{\lambda}{\Delta x^2} \left(u_{i+1,j}^{h+1} - 2u_{i,j}^{h+1} + u_{i-1,j}^{h+1} \right) - k_2 \frac{\lambda}{\Delta y^2} \left(u_{i,j+1}^{h+1} - 2u_{i,j}^{h+1} + u_{i,j-1}^{h+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} u_{i,j}^{h} + k_1 \frac{(1-\lambda)}{\Delta x^2} \left(u_{i+1,j}^{h} - 2u_{i,j}^{h} + u_{i-1,j}^{h} \right) + k_2 \frac{(1-\lambda)}{\Delta y^2} \left(u_{i,j+1}^{h} - 2u_{i,j}^{h} + u_{i,j-1}^{h} \right) + \mathcal{X} + \varphi$$

Але маємо два випадки у залежності від u:

якщо $u < u_{cr}$, то

$$\frac{1}{\Delta t} u_{i,j}^{h+1} - k_1 \frac{\lambda}{\Delta x^2} \left(u_{i+1,j}^{h+1} - 2u_{i,j}^{h+1} + u_{i-1,j}^{h+1} \right) - k_2 \frac{\lambda}{\Delta y^2} \left(u_{i,j+1}^{h+1} - 2u_{i,j}^{h+1} + u_{i,j-1}^{h+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} u_{i,j}^{h} + k_1 \frac{(1-\lambda)}{\Delta x^2} \left(u_{i+1,j}^{h} - 2u_{i,j}^{h} + u_{i-1,j}^{h} \right) + k_2 \frac{(1-\lambda)}{\Delta y^2} \left(u_{i,j+1}^{h} - 2u_{i,j}^{h} + u_{i,j-1}^{h} \right) + \varphi$$

$$\left(-\frac{k_1 \lambda}{\Delta x^2} \right) u_{i+1,j}^{h+1} + \left(-\frac{k_2 \lambda}{\Delta y^2} \right) u_{i,j+1}^{h+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2k_1 \lambda}{\Delta x^2} + \frac{2k_2 \lambda}{\Delta y^2} \right) u_{i,j}^{h+1} + \left(-\frac{k_1 \lambda}{\Delta x^2} \right) u_{i-1,j}^{h+1} + \left(-\frac{k_2 \lambda}{\Delta y^2} \right) u_{i,j-1}^{h+1} =$$

$$= \left(\frac{k_1(1-\lambda)}{\Delta x^2} \right) u_{i+1,j}^{h} + \left(\frac{k_2(1-\lambda)}{\Delta y^2} \right) u_{i,j+1}^{h} + \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{2k_1(1-\lambda)}{\Delta x^2} - \frac{2k_2(1-\lambda)}{\Delta y^2} \right) u_{i,j}^{h} +$$

$$+ \left(\frac{k_1(1-\lambda)}{\Delta x^2} \right) u_{i-1,j}^{h} + \left(\frac{k_2(1-\lambda)}{\Delta y^2} \right) u_{i,j-1}^{h} + \varphi$$

а якщо $u \geq u_{cr}$:

$$\frac{1}{\Delta t} u_{i,j}^{h+1} - k_1 \frac{\lambda}{\Delta x^2} \left(u_{i+1,j}^{h+1} - 2u_{i,j}^{h+1} + u_{i-1,j}^{h+1} \right) - k_2 \frac{\lambda}{\Delta y^2} \left(u_{i,j+1}^{h+1} - 2u_{i,j}^{h+1} + u_{i,j-1}^{h+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} u_{i,j}^{h} + k_1 \frac{(1-\lambda)}{\Delta x^2} \left(u_{i+1,j}^{h} - 2u_{i,j}^{h} + u_{i-1,j}^{h} \right) + k_2 \frac{(1-\lambda)}{\Delta y^2} \left(u_{i,j+1}^{h} - 2u_{i,j}^{h} + u_{i,j-1}^{h} \right) -$$

$$- \left(\lambda \left(u_{i+1,j}^{h+1} + u_{i,j+1}^{h+1} - 2u_{i,j}^{h+1} \right) + (1-\lambda) \left(u_{i+1,j}^{h} + u_{i,j+1}^{h} - 2u_{i,j}^{h} \right) + u_{i,j}^{h+1} - u_{i,j}^{h} \right)$$

$$\left(-\frac{k_1 \lambda}{\Delta x^2} + \lambda \right) u_{i+1,j}^{h+1} + \left(-\frac{k_2 \lambda}{\Delta y^2} + \lambda \right) u_{i,j+1}^{h+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2k_1 \lambda}{\Delta x^2} + \frac{2k_2 \lambda}{\Delta y^2} - 2\lambda + 1 \right) u_{i,j}^{h+1} + \left(-\frac{k_1 \lambda}{\Delta x^2} \right) u_{i-1,j}^{h+1}$$

$$+ \left(-\frac{k_2 \lambda}{\Delta y^2} \right) u_{i,j-1}^{h+1} =$$

$$= \left(\frac{k_1(1-\lambda)}{\Delta x^2} - 1 + \lambda \right) u_{i+1,j}^{h} + \left(\frac{k_2(1-\lambda)}{\Delta y^2} - 1 + \lambda \right) u_{i,j+1}^{h} + \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{2k_1(1-\lambda)}{\Delta x^2} - \frac{2k_2(1-\lambda)}{\Delta y^2} + 2 - 2\lambda + 1 \right) u_{i,j}^{h} +$$

$$+ \left(\frac{k_1(1-\lambda)}{\Delta x^2} \right) u_{i-1,j}^{h} + \left(\frac{k_2(1-\lambda)}{\Delta y^2} \right) u_{i,j-1}^{h} + \varphi$$