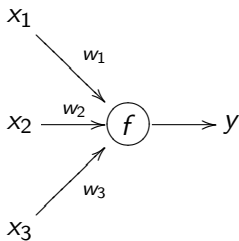


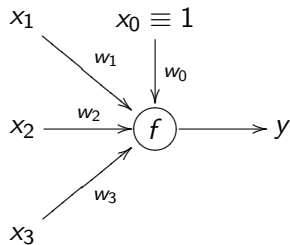
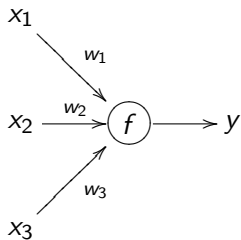
Персептрон



$$y = f \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i \right)$$

$$f(x) = \text{sign}(x)$$

Вес активации



Реализация конъюнкции

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{cases} w_0 < 0 \\ w_0 + w_1 < 0 \\ w_0 + w_2 < 0 \\ w_0 + w_1 + w_2 > 0 \end{cases}$$

Реализация конъюнкции

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{cases} w_0 < 0 \\ w_0 + w_1 < 0 \\ w_0 + w_2 < 0 \\ w_0 + w_1 + w_2 > 0 \end{cases}$$

$$w_0 = 3$$

$$w_1 = 2$$

$$w_2 = 2$$

Реализация дизъюнкции

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$\begin{cases} w_0 < 0 \\ w_0 + w_1 > 0 \\ w_0 + w_2 > 0 \\ w_0 + w_1 + w_2 > 0 \end{cases}$$

$$w_0 = 1$$

$$w_1 = 2$$

$$w_2 = 2$$

Геометрическая интерпретация

в РР

Обучение персептрона

Тут про советчиков, м.б. тоже в РР

Функция XOR

Функция XOR

Многослойный персептрон

Постановка задачи

Дано:

$$\mathcal{I} = (I_1, \dots, I_k)$$

входные вектора размерности n

$$\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_k)$$

правильные выходные вектора размерности m

$$(\mathcal{I}, \mathcal{A})$$

обучающая выборка

$$N(W, I)$$

функция, соответствующая нейронной сети

$$O_i = N(W, I_i)$$

ответ нейронной сети, вектор размерности m

$$E(O_i, A_i)$$

$$= \sum_{j=1}^m (O_i[j] - A_i[j])^2$$

функция ошибки

Найти: вектор W такой, что $\sum_{i=1}^k E(N(W, I_i) - A_i) \rightarrow \min$

Решим задачу для одной пары (I, A)

В этом случае $E(N(W_i, I) - A)$ является функцией от вектора весов $E = E(W)$.

Алгоритм градиентного спуска

1. Инициализировать x_1 случайным значением из \mathbb{R}
2. $i := 1$
3. $x_{i+1} = x_i + \varepsilon f'(x_i)$
4. $i++$
5. if $|x_{i+1} - x_i| > c$ goto 3

Алгоритм градиентного спуска

1. Инициализировать W_1 случайным значением из \mathbb{R}^n
2. $i := 1$
3. $W_{i+1} = W_i + \varepsilon \nabla f(W_i)$
4. $i++$
5. if $\|W_{i+1} - W_i\| > c$ goto 3

Частные производные

Функция n переменных:

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x_1, \dots, x_n)$$

Частная производная по i -й переменной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x_1, x_2, \dots, x_i + \varepsilon, \dots, x_n) - F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\varepsilon} \\ \frac{\partial F}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

Частные производные

$$F(x, y, z, u) = x^3 + y^u + \sin z^2 u^3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} =$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} =$$

Частные производные

$$F(x, y, z, u) = x^3 + y^u + \sin z^2 u^3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} =$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} =$$

Частные производные

$$F(x, y, z, u) = x^3 + y^u + \sin z^2 u^3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = uy^u - 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} =$$

Частные производные

$$F(x, y, z, u) = x^3 + y^u + \sin z^2 u^3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = uy^u - 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = (-\cos z^2 u^3)(u^3 2z)$$

Производная сложной функции

$$F = F(x_1, \dots, x_n)$$

$$G_i = G_i(y_1, \dots, y_m)$$

$$H(y_1, \dots, y_n) = F(G_1(y_1, \dots, y_m), \dots, G_n(y_1, \dots, y_n))$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial G_j} \frac{\partial G_j}{\partial y_i}$$

Производная сложной функции

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n na_k x_k$$

$$G_i(y_1, \dots, y_m) = \sum_{k=1}^m my_k^i$$

$$H(y_1, \dots, y_n) = F(G_1(y_1, \dots, y_m), \dots, G_n(y_1, \dots, y_m))$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_j} =$$

Производная сложной функции

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n na_k x_k$$

$$G_i(y_1, \dots, y_m) = \sum_{k=1}^m m y_k^i$$

$$H(y_1, \dots, y_n) = F(G_1(y_1, \dots, y_m), \dots, G_n(y_1, \dots, y_n))$$

$$\frac{\partial F}{\partial G_i} = a_i, \quad \frac{\partial G_i}{\partial y_j} = i y_j^{i-1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_j} =$$

Производная сложной функции

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n na_k x_k$$

$$G_i(y_1, \dots, y_m) = \sum_{k=1}^m m y_k^i$$

$$H(y_1, \dots, y_n) = F(G_1(y_1, \dots, y_m), \dots, G_n(y_1, \dots, y_m))$$

$$\frac{\partial F}{\partial G_i} = a_i, \quad \frac{\partial G_i}{\partial y_j} = i y_j^{i-1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial G_i} \frac{\partial G_i}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^n a_i i y_j^{i-1}$$

Градиент

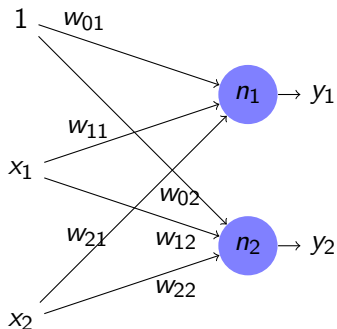
$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)$$

$\nabla F :$

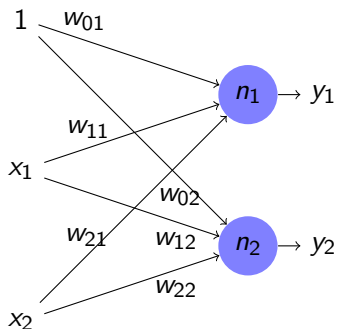
Градиент

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)$$
$$\nabla F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Обратное распространение ошибки



Обратное распространение ошибки



$$E(y_1, y_2) = (y_1 - a_1)^2 + (y_2 - a_2)^2$$

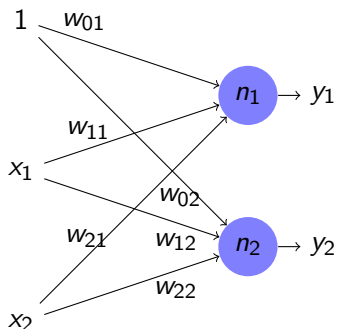
$$\frac{\partial E}{\partial y_1} = 2(y_1 - a_1)$$

$$y_1 = f(\underbrace{w_{01} + x_1 w_{11} + x_2 w_{21}}_{S_1})$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial w_{21}} = f'(S_1)x_2$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial w_{21}} &= \frac{\partial E}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial w_{21}} \\ &= 2(y_1 - a_1)f'(S_1)x_2\end{aligned}$$

Обратное распространение ошибки



$$E(y_1, \dots, y_n) = (y_i - a_i)^2 + \dots + (y_n - a_n)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial y_i} = 2(y_i - a_i)$$

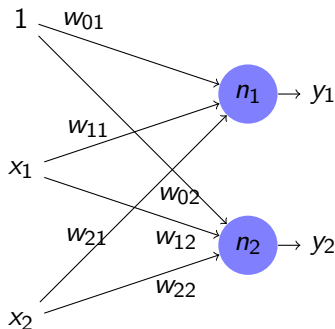
$$y_i = f(\underbrace{w_{0i} + x_1 w_{1i} + \dots + x_n w_{ni}}_{S_i})$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial w_{ji}} = f'(S_i) x_j$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ji}} = \frac{\partial E}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial w_{ji}}$$

$$= 2(y_i - a_i) f'(S_i) x_j$$

Обратное распространение ошибки



$$E(y_1, y_2) = (y_1 - a_1)^2 + (y_2 - a_2)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial y_1} = 2(y_1 - a_1)$$

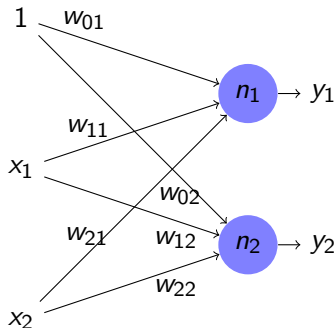
$$y_1 = f(\underbrace{w_{01} + x_1 w_{11} + x_2 w_{21}}_{S_1})$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = f'(S_1) w_{12}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = f'(S_2) w_{22}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x_2} &= \frac{\partial E}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial E}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \\ &= 2(y_1 - a_1) f'(S_1) w_{12} + 2(y_2 - a_2) f'(S_2) w_{22} \end{aligned}$$

Обратное распространение ошибки



$$E(y_1, \dots, y_n) = (y_i - a_i)^2 + \dots + (y_n - a_n)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial y_i} = 2(y_i - a_i)$$

$$y_i = f(\underbrace{w_{0i} + x_1 w_{1i} + \dots + x_n w_{ni}}_{S_i})$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = f'(S_i) w_{ji}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - a_i) f'(S_i) w_{ji}$$

